



الرياضيات

المستوى الثاني عشر - للمسارين العلمي والتكنولوجي
الفصل الدراسي الثاني



حضرة صاحب السمو الشيخ تميم بن حمد آل ثاني
أمير دولة قطر

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَاءَ	قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّيَاءَ
قَطْرٌ سَتَبَقَى حُرَّةً	تَسْمُو بِرُوحِ الْأَوْفِيَاءِ
سِيرُوا عَلَى نَهْجِ الْأَلَى	وَعَلَى ضِيَاءِ الْأَنْبِيَاءِ
قَطْرٌ بِقَلْبِي سِيرَةٌ	عِزٌّ وَأَمْجَادُ الْإِبَاءِ
قَطْرُ الرَّجَالِ الْأَوَّلِينَ	حُمَاتُنَا يَوْمَ النَّدَاءِ
وَحَمَائِمُ يَوْمَ السَّلَامِ	جَوَارِحُ يَوْمِ الْفِدَاءِ

قائمة بأدلة المصادر الرقمية للمستوى الثاني عشر

للمسارين العلمي والتكنولوجي

تجدون أدناه رابطان للوصول إلى محتويات توضح كيفية استخدام تطبيقات الآلة الحاسبة وعناصر التعلم الإلكترونية (شروحات فيديو التعلم).

للاستفادة من الروابط، الرجاء تسجيل الدخول إلى "نظام قطر للتعليم" أولاً.

تطبيقات الآلة الحاسبة



دليل استخدام العناصر الرقمية
لمادة الرياضيات



المحتويات

التكامل

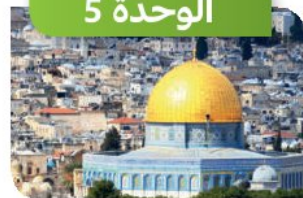
الوحدة 4



2	التكامل غير المحدود	4.1
11	قواعد تكامل الدوال	4.2
18	التكامل بالتعويض	4.3
27	التكامل بالأجزاء	4.4
37	التكامل بالكسور الجزئية	4.5
45	مراجعة الوحدة	

التكامل المحدود وتطبيقاته

الوحدة 5



49	التكامل المحدود	5.1
61	المساحة تحت المنحنى	5.2
73	المساحة بين منحنين	5.3
83	الحجوم الدورانية	5.4
91	تطبيقات التكامل المحدود	5.5
102	المعادلات التفاضلية	5.6
112	مراجعة الوحدة	

المحتويات

المتجهات

الوحدة 6



117	6.1	مدخل إلى المتجهات
126	6.2	العمليات على المتجهات
137	6.3	الضرب القياسي للمتجهات
146	6.4	المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
158	6.5	مراجعة الوحدة

الأعداد المركبة

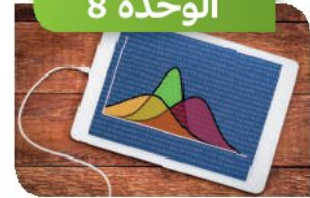
الوحدة 7



163	7.1	الأعداد المركبة والعمليات عليها
173	7.2	المستوى المركب
182	7.3	الصورة القطبية للأعداد المركبة
189	7.4	قوى وجذور الأعداد المركبة
198		مراجعة الوحدة

التوزيعات الاحتمالية

الوحدة 8



203	8.1	المتغير العشوائي المنفصل
213	8.2	القيمة المتوقعة والتباين
225	8.3	التوزيع ذو الحدين
236	8.4	التوزيع الطبيعي
253		مراجعة الوحدة

المحتويات

G4

G8

استخدام الآلة الحاسبة

استخدام الآلة الحاسبة غير البيانية

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

ملحق



For Qatar MOE Use Only

الوحدة 4



التكامل

أدت الحاجة إلى دراسة التغير اللحظي للدوال إلى اكتشاف مفهوم المماس والمفاهيم المتعلقة بالمشتقة التي تبلورت بعد ذلك، الأمر الذي أدى بدوره إلى دراسة التغير الكلي لدالة معينة الناتج عن تراكم التغيرات اللحظية لهذه الدالة.

في مطلع القرن الرابع عشر قامت مجموعة من الفلاسفة، من مدرسة «ميرتون» (Merton) في أوكسفورد، بمحاولة حساب المسافة التي يقطعها جسم يتحرك بسرعة معلومة. وقد استند جاليليو في ما بعد إلى نتائج أبحاثهم لدراسة حركة السقوط الحر للأجسام. وفي العام 1666 أثبت نيوتن وجود صلة بين مفهوم التغير الكلي ومفهوم المشتقة، الأمر الذي قاد إلى مفهوم التكامل غير المحدود الذي يمكن تعريفه، بأنه العملية العكسية لعملية الاشتقاق، أي إيجاد دالة أصلية لدالة المشتقة. إذن، يُستعمل التكامل في الرياضيات لإيجاد مقادير ذات فائدة كالمساحات، والأحجام، والإزاحات، بالإضافة إلى استعماله في العديد من التطبيقات الفيزيائية. يمكننا أن نقول ببساطة إن التكامل هو عبارة عن عملية تجميع التغيرات على فترات جزئية صغيرة للحصول على التغير الكلي.

4.1 التكامل غير المحدود

4.2 قواعد تكامل الدوال

4.3 التكامل بالتعويض

4.4 التكامل بالأجزاء

4.5 التكامل بالكسور الجزئية

Indefinite Integration

4.1 التكامل غير المحدود

الدالة الأصلية

في الدروس السابقة، استعملنا الدوال للتعبير عن مقادير محددة، مثل الحرارة والمسافة والحجم والتكلفة والإيرادات والأرباح. واستعملنا كذلك مشتقات هذه الدوال للحصول على معلومات عن معدل التغير لهذه الكميات أو لإيجاد القيم القصوى لهذه الدوال واستثمار مدلولاتها في الكثير من المواقف.

ليس من الممكن دائمًا إيجاد دوال جاهزة تعطي معلومات عن القيمة الكلية لكمية معينة، لكن من الممكن غالبًا تجميع كمية كافية من المعطيات للحصول على صيغة دالة تعطي معدل التغير للكمية. نحن نعرف أن المشتقات تعطي معدل التغير عندما تكون الكمية الكلية معلومة. إذن علينا إيجاد الدالة التي تم اشتقاقها. هذه العملية العكسية لعملية الاشتقاق تُسمى **معكوس الاشتقاق**. وهدفها إيجاد الدالة التي تم اشتقاقها والتي يُطلق عليها **دالة أصلية** وهي معرفة كما يلي.

الدالة الأصلية

إذا كانت $F'(x) = f(x)$ ، فإن F هي دالة أصلية للدالة f .

لنأخذ مثالًا الدالة $F(x) = 10x$. بما أن $F'(x) = 10 = f(x)$ ، فإن F دالة أصلية للدالة $f(x) = 10$.

وكذلك بالنسبة للدالة $F(x) = x^2$ ، بما أن $F'(x) = 2x = f(x)$ ، فإن F دالة أصلية للدالة $f(x) = 2x$.

يبين المثال التالي المزيد من الأمثلة عن إيجاد الدالة الأصلية.

مثال 1 إيجاد دالة أصلية

أوجد دالة أصلية لكلٍّ من الدوال التالية:

A. $f(x) = 5x^4$

B. $g(x) = e^x$

الحل

A. لإيجاد دالة أصلية للدالة $f(x) = 5x^4$ ، ففكر بطريقة عكسية. تذكر أن مشتقة x^n هي nx^{n-1} ، وبالتالي إذا أردنا أن يكون

$$nx^{n-1} = 5x^4$$

يجب أن يكون $n - 1 = 4$ و $n = 5$.

إذن، $F(x) = x^5$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 5x^4$.

ما ستتعلمه

- الدالة الأصلية
- تعريف التكامل غير المحدود وبعض قواعده الأساسية

... ولماذا

هناك مسائل في الفيزياء وغيرها ذات مقادير لا يمكن تحديدها إلا من خلال العملية العكسية لعملية الاشتقاق. سنتمكن باستعمال العملية العكسية للاشتقاق مثالًا من معرفة كل ما نريده عن دالة من خلال معرفة إحدى قيمها ومعدل تغيرها فقط. ستمكّننا هذه المعرفة من إيجاد معادلة منحني دالة إذا كانت دالة ميل المماس معطاة، ومن إيجاد دالة الربح الكلي من دالة الربح الحدي، إلى ما هنالك من مسائل حياتية وتطبيقية.

معايير الدرس

12A.5.1

12A.5.2

المصطلحات

- معكوس الاشتقاق antiderivative
- دالة أصلية integrand
- دالة مكاملة
- التكامل غير المحدود indefinite integration

B. لإيجاد دالة أصلية للدالة $g(x) = e^x$ ، نتذكر أن مشتقة e^x هي e^x .
إذن $G(x) = e^x$ هي دالة أصلية للدالة $g(x) = e^x$.

حاول أن تحل التمرينين 1 و 2

تعريف التكامل غير المحدود وبعض قواعده الأساسية

يمكننا أن نلاحظ بسهولة أن الدالة $F(x) = x^2$ ليست الدالة الوحيدة التي مشتقتها $f(x) = 2x$.
فمشتقة كل من الدالتين $G(x) = x^2 + 2$ و $H(x) = x^2 - 3$ أيضًا هي $f(x) = 2x$. بالتالي فإن ميل المماس لهذه الدوال الثلاث عند $x = x_1$ هو نفسه. (انظر الشكل (4.1.1)).

بشكل عام، مشتقة الدالة $F(x) = x^2 + C$ هي $f(x) = 2x$ لكل عدد حقيقي C .
ما يعني أن f هي مشتقة عدد غير محدود من الدوال، وكل دالة من هذه الدوال هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 2x$.
تبيّن النظرية التالية إلى أن الفرق بين دالتين أصليتين لنفس الدالة f هو قيمة ثابتة.

الفرق بين دالتين أصليتين

إذا كانت الدالتان F و G دالتين أصليتين لنفس الدالة f ، فإن الفرق بينهما هو قيمة ثابتة لكل قيم x :

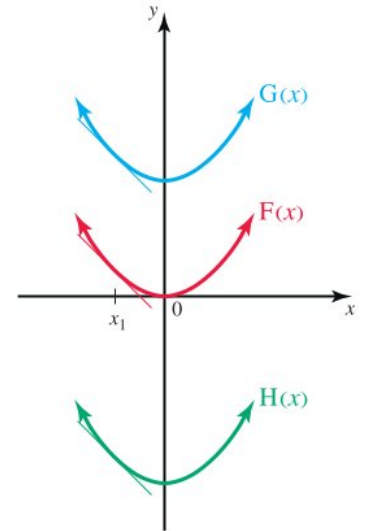
$$F(x) - G(x) = C$$

(الفرق بين دالتين أصليتين لنفس الدالة هو عبارة عن قيمة ثابتة).

إن عملية إيجاد كل الدوال الأصلية للدالة f تُسمى عملية التكامل ويُشار إليها بالشكل التالي:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

الرمز $\int$ هو رمز التكامل، $f(x)$ هي الدالة المكاملة. ويُسمى $\int f(x) dx$ التكامل غير المحدود، وهو أكثر صيغة عامة للتعبير عن الدالة الأصلية للدالة f .



الشكل 4.1.1 ميل كل من المماسات الثلاث عند $x = x_1$ هو نفسه.

التكامل غير المحدود

إذا كان $F'(x) = f(x)$ ، فإن

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

حيث C عدد حقيقي ثابت يُسمى ثابت التكامل.

لمحة تاريخية

أول من استعمل رمز التكامل $\int f(x) dx$ هو جوتفريد ليبنز (1646-1716) في النصف الثاني من القرن السابع عشر. والرمز $\int$ هو، في الواقع، الحرف S في كلمة Summa اللاتينية التي تعني "مجموع".
أما استعمال المصطلح "تكامل" في التحليل الرياضي فيعود إلى عالم الرياضيات السويسري جاكوب برنولي (1654-1705) الذي كان على تواصل دائم مع ليبنز.

لنأخذ التكامل غير المحدود التالي على سبيل المثال:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

يشير dx في التكامل غير المحدود إلى أن $\int f(x) \, dx$ هي الدالة الأصلية للدالة f بالنسبة للمتغير x ، تمامًا كما يشير $\frac{dy}{dx}$ إلى مشتقة y بالنسبة للمتغير x . في التكامل $\int 2ax \, dx$ على سبيل المثال، إذا كانت a تمثل قيمة ثابتة وكان المتغير هو x يمكننا أن نكتب:

$$\int 2ax \, dx = \int a(2x) \, dx = ax^2 + C$$

وهذا يختلف كل الاختلاف عما إذا كان المتغير هو a .

$$\int 2ax \, da = a^2x + C = xa^2 + C$$

إن عملية إيجاد الدالة الأصلية هي عكس عملية إيجاد المشتقة، ولذلك فإن كل قاعدة من قواعد الاشتقاق تؤدي إلى إحدى قواعد التكامل.

على سبيل المثال، عند تطبيق قاعدة القوة في الاشتقاق على x^5 نحصل على

$$\frac{d}{dx} x^5 = 5x^4$$

ويمكننا أن نستنتج منها التكامل التالي:

$$\int 5x^4 \, dx = x^5 + C$$

بشكل عام، عند اشتقاق x^n ، نضرب في n ونطرح من القوة واحدًا. بالتالي، للحصول على دالة مشتقتها x^n نقوم بعملية معاكسة لذلك، حيث نضيف إلى القوة واحدًا ونقسم على القوة الجديدة $n + 1$.

قاعدة القوة

لكل عدد حقيقي $n \neq -1$ ،

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

الدالة الأصلية للدالة $f(x) = x^n$ ، $n \neq -1$ ، هي الدالة التي نحصل عليها بإضافة 1 إلى القوة ثم القسمة على القوة الجديدة، ومن ثم إضافة الثابت C .

تذكير

تذكر أن مشتقة x^n هي $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$.

إرشاد

$$\int k \, dx = kx + C, \, k \in \mathbb{R}$$

ويمكن إثبات ذلك باستخدام قاعدة القوة.

يمكننا التحقق من هذه القاعدة من خلال اشتقاق الدالة التي في الطرف الأيمن من المعادلة:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = \frac{n+1}{n+1} x^{(n+1)-1} + 0 = x^n$$

(عندما تكون $n = -1$ يصبح المقام مساويًا للصفر، وبالتالي لا يمكن تطبيق هذه القاعدة. أما كيفية إيجاد الدالة الأصلية في هذه الحالة، فسوف تتم مناقشة ذلك لاحقًا).

مثال 2 استعمال قاعدة القوة

استعمل قاعدة القوة لإيجاد التكامل غير المحدود في كل من الحالات التالية:

A. $\int t^3 dt$

B. $\int \frac{1}{t^2} dt$

C. $\int \sqrt{u} du$

D. $\int dx$

الحل

A. استعمل قاعدة القوة حيث $n = 3$:

$$\int t^3 dt = \frac{t^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4} t^4 + C$$

للتأكد من صحة الإجابة يمكننا اشتقاق $\frac{1}{4} t^4 + C$ للحصول على t^3 .

B. اكتب أولاً $\frac{1}{t^2} = t^{-2}$:

$$\int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C$$

تحقق من أن مشتقة $-\frac{1}{t} + C$ هي $\frac{1}{t^2}$

C. اكتب أولاً $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$:

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

تحقق من أن مشتقة $\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$ هي $\sqrt{u}$.

D. اكتب أولاً $dx = 1 \cdot dx$:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$$

حاول أن تحل التمرينين 4 و 5

لقد رأينا سابقاً أن مشتقة ناتج ضرب دالة في ثابت هي مشتقة هذه الدالة مضروبة في نفس الثابت. ورأينا كذلك أن مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما هو مجموع مشتقتيهما أو الفرق بينهما. يمكننا أن نستنتج من هذه القواعد قواعد مشابهة للتكامل غير المحدود.

تذكير بقواعد الاشتقاق

• إذا كانت g مشتقة الدالة g ، فإن مشتقة الدالة $f(x) = kg(x)$ حيث k هو عدد ثابت حقيقي، هي

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [kg(x)] = kg'(x)$$

• إذا كانت u مشتقة u و v مشتقة v ، فإن مشتقة $f(x) = u(x) \pm v(x)$ هي

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [u(x) \pm v(x)] = u'(x) \pm v'(x)$$

قاعدة الضرب في عدد ثابت وقاعدة المجموع أو الفرق

لكل عدد حقيقي k ، ولكل دالة f ،

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

الدالة الأصلية لنتائج ضرب دالة في عدد ثابت هي الدالة الأصلية لهذه الدالة مضروبة في نفس العدد الثابت.

كذلك لكل دالتين f و g ،

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

الدالة الأصلية لمجموع دالتين أو الفرق بينهما هو مجموع كل من الدالتين الأصليتين لهاتين الدالتين أو الفرق بينهما.

تنبيه

لا يجوز تطبيق قاعدة الضرب في عدد ثابت على المتغير لأن ذلك يؤدي إلى نتائج خاطئة. على سبيل المثال:

$$\int x \sqrt{x-1} dx \neq \int \sqrt{x-1} dx$$

مثال 3

قواعد التكامل (1)

استعمل قواعد التكامل لإيجاد التكامل غير المحدود في كل من الحالات التالية:

A. $\int 2v^3 dv$

B. $\int \frac{12}{z^5} dz$

C. $\int (3z^2 - 4z + 5) dz$

الحل

A. باستعمال قاعدة القوة وقاعدة الضرب في عدد ثابت نكتب:

$$\int 2v^3 dv = 2 \int v^3 dv = 2 \left(\frac{v^4}{4} \right) + C = \frac{1}{2} v^4 + C$$

لاحظ هنا أننا كتبنا C ولم نكتب $2C$ ، وذلك لأن التكامل غير المحدود هو مجموعة من الدوال التي تحدّد كل دالة فيها قيمة C الفعلية في مجموعة الأعداد الحقيقية. ولذلك فإن إعطاء القيم الفعلية للعدد C أو $2C$ يؤدي إلى الحصول على المجموعة نفسها.

B. اكتب $\frac{12}{z^5} = 12z^{-5}$ أولاً، ثم أوجد التكامل غير المحدود.

$$\int \frac{12}{z^5} dz = \int 12z^{-5} dz = 12 \int z^{-5} dz = 12 \left(\frac{z^{-4}}{-4} \right) + C = -3z^{-4} + C = -\frac{3}{z^4} + C$$

C. بعد اعتمادنا قاعدتي الجمع والطرح لأكثر من دالتين يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned} \int (3z^2 - 4z + 5) dz &= 3 \int z^2 dz - 4 \int z dz + 5 \int dz \\ &= 3 \left(\frac{z^3}{3} \right) - 4 \left(\frac{z^2}{2} \right) + 5z + C \\ &= z^3 - 2z^2 + 5z + C \end{aligned}$$

هنا أيضًا ينبغي التنبيه إلى أن ثابتًا واحدًا يكفي لكل التكامل غير المحدود الأساسي، وليس هناك ما يدعو إلى إضافة ثابت مستقل لكل تكامل غير محدود. فإذا حصلنا على عدة ثوابت $C_1 + C_2 + C_3$ ، ثابت واحد من كل تكامل جزئي، يكون بالإمكان الاستعاضة عنها كلها بثابت واحد هو مجموع الأعداد الثابتة الناتجة عن كل تكامل: $C = C_1 + C_2 + C_3$. تذكر أن بإمكانك التحقق من صحة الحل باشتقاق الدالة التي حصلت عليها لتعود وتحصل على الدالة في التكامل غير المحدود.

مثال على ذلك: في الفرع C من المثال 3 نجد أن:

$$\frac{d}{dz} (z^3 - 2z^2 + 5z + C) = 3z^2 - 4z + 5$$

وهذا يتطابق مع الدالة في التكامل غير المحدود.

مثال 4 قواعد التكامل (2)

استعمل قواعد التكامل لإيجاد التكامل غير المحدود في كل من الحالات التالية:

A. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$

B. $\int (x^2 - 1)^2 dx$

الحل

A. اكتب التكامل أولاً كما يلي:

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

اكتب الكسر في صورة جمع كسور

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$$

استعمل $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

استعمل $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

أوجد الآن الدالة الأصلية باستعمال قاعدة الجمع

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + 2\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

B. قم بتربيع ثنائي الحد أولاً، ثم أوجد الدالة الأصلية باستعمال قاعدتي الجمع والطرح.

$$\int (x^2 - 1)^2 dx = \int (x^4 - 2x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C$$

$$= \frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x + C$$

لقد أوجدنا في الأمثلة السابقة الشكل العام للدالة الأصلية بإضافة الثابت C .
يمكننا في كثير من الحالات تحديد قيمة هذا الثابت، وذلك بناءً على المعطيات الخاصة بكل حالة.
المثال التالي يوضح ذلك.

مثال 5 ميل المماس

أوجد الدالة F التي ميل مماسها في كل نقطة إحداثيها x هو $6x^2 + 4$ ،
ويمر منحناها في النقطة $(1, 1)$.

الحل

تذكر أن دالة ميل المماس هي مشتقة الدالة F ، حيث F تمثل الدالة الأصلية:

$$F'(x) = 6x^2 + 4$$

$$F(x) = \int (6x^2 + 4) dx = 2x^3 + 4x + C$$

بما أن منحنى الدالة F يمر بالنقطة $(1, 1)$ ، إذن يمكننا إيجاد ثابت التكامل C

$$F(x) = 2x^3 + 4x + C$$

$$F(1) = 2(1)^3 + 4(1) + C$$

$$1 = 6 + C$$

$$C = -5$$

عوض $x = 1$

عوض $F(1) = 1$

إذن،

$$F(x) = 2x^3 + 4x - 5$$

حاول أن تحل التمرين 32

مراجعة سريعة 4.1

في التمارين 1-6، أوجد مشتقة الدالة.

$$4. f(x) = (x^2 + 1)^2$$

$$5. f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$$

$$6. f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$1. f(x) = 5x^4 + 6\sqrt{x}$$

$$2. f(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$3. f(x) = \frac{x^2}{3} + 3\sqrt[3]{x}$$

الدرس 4.1 التمارين

في التمرينين 1 و 2، أوجد دالة أصلية للدالة المعطاة.

21. $\int \left(\frac{\pi}{x^5} + \frac{\pi}{\sqrt{x}} \right) dx$

22. $\int \left(\frac{1}{5x^7} \right) dx$

23. $\int \left(\frac{1}{2x^4} \right) dx$

24. $\int 7x(x^3 + 2) dx$

25. $\int 5x(x^4 + 2) dx$

26. $\int (15x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) dx$

27. $\int (12x + 5)^2 dx$

28. $\int (2y - 1)^2 dy$

29. $\int \frac{x^3 - 2}{\sqrt{x}} dx$

30. $\int \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

31. $\int \left(\frac{1 - 2\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} \right) dz$

1. $f(x) = 8x^7$

2. $f(x) = 8x$

في التمارين 3-31، أوجد التكامل غير المحدود.

3. $\int 8 dx$

4. $\int 9 dy$

5. $\int \frac{1}{t^4} dt$

6. $\int \left(\frac{7}{z^2} \right) dz$

7. $\int \left(\frac{4}{x^3} \right) dx$

8. $\int (14x + 2) dx$

9. $\int (3x - 5) dx$

10. $\int (6x^2 + 8x - 9) dx$

11. $\int (12x^2 - 7x + 2) dx$

12. $\int (5x^2 - 6x + 3) dx$

13. $\int (3x^3 + 5x^2 - 3x + 2) dx$

14. $\int (8x^3 + 10x^2 - 7x + 5) dx$

15. $\int (5\sqrt{z} + \sqrt{2}) dz$

16. $\int \left(t^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{4}} \right) dt$

17. $\int \left(4\sqrt{v} + 3v^{\frac{3}{2}} \right) dv$

18. $\int \left(9x^{\frac{2}{3}} + 6x^{\frac{3}{2}} \right) dx$

19. $\int \left(13x^{\frac{1}{2}} + 7x^{\frac{6}{5}} \right) dx$

20. $\int \left(\frac{e}{x^5} + ex^{\frac{1}{2}} \right) dx$

32. أوجد معادلة المنحنى الذي ميل مماسه هو $F'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + 4$ ويمر بالنقطة $(1, -2)$.

33. أوجد معادلة المنحنى الذي ميل مماسه في كل نقطة إحداثياتها x هو $x^{\frac{2}{3}}$ ويمر في النقطة $\left(1, \frac{3}{5}\right)$.

34. أوجد معادلة المنحنى الذي ميل مماسه في كل نقطة إحداثياتها x هو $8x^2 + 9x - 5$ ويمر في النقطة $(0, 2)$.

35. **الربح** تعطي الصيغة التالية الربح الحدي، بالريالات، لمحل لبيع الأجبان من بيع نوع معين من الجبن.

$$P'(x) = x(50x^2 + 30x)$$

حيث x كمية الجبن المباعة من هذا النوع، بمئات الكيلوجرامات. إذا علمت أن مقدار "ربح" المحل عندما لا يبيع أي كمية من هذا النوع من الجبن هو -40 QR،

a. أوجد دالة الربح.

b. أوجد الربح عند بيع 200 kg من هذا النوع من الجبن.

أسئلة اختبار معيارية

استكشاف

في التمارين 40-44، استعمل المعلومات التالية.

تبيّن تجارب عديدة أن قيمة تسارع جسم عند سقوطه ثابتة (مع تجاهل قوة مقاومة الهواء). قيمة هذا الثابت تساوي 32 ft/sec^2 أي $a(t) = -32$. تستعمل إشارة السالب للدلالة على أن الجسم في حالة سقوط. لذا فإن دالة السرعة هي الدالة الأصلية لدالة التسارع، أي أن:

$$v(t) = \int a(t) dt$$

وتشكّل دالة المسافة المقطوعة الدالة الأصلية لدالة السرعة، أي أن:

$$s(t) = \int v(t) dt$$

40. **السرعة** بالنسبة إلى جسم معين، إذا كان $a(t) = 5t^2 + 4$ و $v(0) = 6$ ، أوجد $v(t)$.

41. **الزمن** تم إلقاء جسم من طائرة صغيرة تحلق على ارتفاع 400 ft، إذا كان $a(t) = -32 \text{ ft/sec}$ و $v(0) = 0$ ، أوجد $s(t)$. كم يستغرق الجسم ليرتطم بالأرض؟

42. **المسافة** إذا كان $a(t) = 18t + 8$ و $v(1) = 15$ و $s(1) = 19$ ، أوجد $s(t)$.

43. **الحركة تحت تأثير الجاذبية** أثبت أن الدالة التي تنمذج ارتفاع جسم أُلقي من ارتفاع ابتدائي يساوي h_0 بسرعة ابتدائية تساوي v_0 عند الزمن t هي: $h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$. حيث g تسارع الجسم بسبب الجاذبية، وهو ثابت قيمته -32 ft/sec^2 .

توسيع الأفكار

44. **صاروخ** تم اتهام إحدى الشخصيات في فيلم أنتج عام 1999 بإطلاق صاروخ تسبب في حريق في غابة قريبة. أثبتت هذه الشخصية برائتها عبر إثبات أن الصاروخ لا يمكنه قطع المسافة الفاصلة بين نقطة انطلاقه ومكان الحريق من خلال المحاجة التالية:

a. استعمل حقيقة أن $a(t) = -32$ لإيجاد قيمة كل من $v(t)$ و $s(t)$ ، عندما $v(0) = v_0$ و $s(0) = 0$. (السرعة الابتدائية مجهولة، وكان الارتفاع الأولي 0 ft).

b. قدرت الشخصية أن الصاروخ ظل في الجو مدة 14 ثانية، استعمل $s(14) = 0$ لإيجاد v_0 .

36. **صواب أم خطأ** إذا كانت الدالتان F و G دالتين أصليتين لنفس الدالة f ، فإن $F(x) = G(x)$. بّرر إجابتك.

37. **صواب أم خطأ** أوجد محمد الدالة الأصلية باستعمال خاصية القوة كما يلي:

$$\int \frac{5}{x^2} dx = \frac{5}{\frac{x^3}{3}} + C$$

هل استعمل محمد خاصية القوة بشكل صحيح؟ بّرر إجابتك.

38. **اختيار من متعدد** أي شرط من الشروط التالية يجب أن يتحقق عند استعمال القاعدة $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ؟

- A. $n \neq 1$
- B. $n \neq -1$
- C. $x \neq -1$
- D. $n \neq 0$

39. **اختيار من متعدد** إذا كان منحنى دالة أصلية للدالة $f(x) = 8x^3 + 3$ يمر في النقطة $(0, 1)$ ، فإن قيمة ثابت التكامل هي:

- A. $C = -5$
- B. $C = 0$
- C. $x = -5$
- D. $C = 1$

Rules of Function Integration

4.2 قواعد تكامل الدوال

تكامل الدوال الأسية الطبيعية

نعلم من قواعد الاشتقاق أن مشتقة الدالة $f(x) = e^x$ هي $f'(x) = e^x$ وأن مشتقة الدالة $f(x) = e^{kx}$ هي $f'(x) = ke^{kx}$ ، الأمر الذي يؤدي إلى قواعد التكامل التالية:

قواعد تكامل الدوال الأسية الطبيعية

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C \quad k \neq 0$$

تكامل الدالة الأسية e^x هو نفسها. إذا كان للمتغير x معامل k ، يجب أن نقوم بالقسمة على k في عملية التكامل.

ما ستتعلمه

- تكامل الدوال الأسية الطبيعية
- تكامل دالة المقلوب
- تكامل الدوال المثلثية

... ولماذا

ترتبط تطبيقات التكامل بالدوال المكاملة، وهي تتركب في الغالب من الدوال الأساسية التي نعرفها كالدوال كثيرات الحدود، والدوال الأسية، والدوال اللوغاريتمية، والدوال المثلثية.... لذا من المفيد أن ندرس قواعد تكامل هذه الدوال.

معياري الدرس

12A.5.2

مثال 1 تكامل الدوال الأسية الطبيعية

أوجد التكامل غير المحدود في كل من الحالات التالية:

A. $\int 9e^t dt$

B. $\int e^{9t} dt$

C. $\int e^{-5x} dx$

D. $\int 3e^{\left(\frac{5}{4}\right)u} du$

الحل

A. $\int 9e^t dt = 9 \int e^t dt = 9e^t + C$

B. $\int e^{9t} dt = \frac{1}{9} e^{9t} + C$

C. $\int e^{-5x} dx = \frac{e^{-5x}}{-5} + C = -\frac{1}{5} e^{-5x} + C$

D. $\int 3e^{\left(\frac{5}{4}\right)u} du = 3 \times \frac{e^{\left(\frac{5}{4}\right)u}}{\frac{5}{4}} + C = 3 \times \left(\frac{4}{5}\right) e^{\left(\frac{5}{4}\right)u} + C = \frac{12}{5} e^{\left(\frac{5}{4}\right)u} + C$

حاول أن تحل التمرينين 1 و 2

سوف نطبق في ما يلي قواعد تكامل الدوال الأسية الطبيعية في إطار مثال من واقع الحياة.

مثال 2 الإيرادات

لنفرض أن الإيرادات الحدية لإحدى الشركات من أحد منتجاتها هو $400e^{-0.1q} + 8$ ، حيث q عدد الوحدات المنتجة من هذا المنتج. أوجد دالة إيرادات الشركة من هذا المنتج.

الحل

دالة الإيرادات الحدية هي مشتقة دالة إيرادات الشركة من هذا المنتج، أي $R(q)$.

$$R'(q) = 400e^{-0.1q} + 8 \quad \text{إذن،}$$

$$\begin{aligned} R(q) &= \int (400e^{-0.1q} + 8) dq \\ &= 400 \frac{e^{-0.1q}}{-0.1} + 8q + C \\ &= -4000e^{-0.1q} + 8q + C \end{aligned}$$

إذا كان $q = 0$ ، فإن $R(0) = 0$ ، لأن الشركة لا تحصل على أي إيرادات قبل بدء عملية الإنتاج.

$$0 = -4000e^{-0.1(0)} + 8(0) + C \quad \text{أي أن:}$$

$$C = 4000$$

إذن، دالة الإيرادات هي:

$$R(q) = -4000e^{-0.1q} + 8q + 4000$$

حاول أن تحل التمرين 3

تكامل دالة المقلوب

الشرط الضروري لتطبيق قاعدة التكامل $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ هو أن لا يساوي المقام الصفر، أي أن $n \neq -1$. هذا يطرح السؤال عن كيفية إيجاد الدالة الأصلية لدالة المقلوب $f(x) = x^{-1}$ باستعمال قاعدة غير هذه القاعدة. إن معرفتنا بقاعدة اشتقاق الدوال اللوغاريتمية تتيح لنا الإجابة عن هذا السؤال.

إذا كانت $f(x) = \ln |x|$ ، فإن مشتقتها هي $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، وهذا يسمح لنا بكتابة القاعدة التالية:

تكامل دالة المقلوب

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, x \neq 0$$

الدالة الأصلية للدالة $f(x) = x^n$ حيث $n = -1$ هي دالة اللوغاريتم الطبيعي للقيمة المطلقة للمتغير x .

مثال 3 تكامل دالة المقلوب

أوجد التكامل غير المحدود في كل من الحالات التالية:

A. $\int \frac{4}{x} dx$

B. $\int \left(-\frac{5}{x} + e^{-2x} \right) dx$

A. $\int \frac{4}{x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx = 4 \ln |x| + C$

B. $\int \left(-\frac{5}{x} + e^{-2x} \right) dx = \int -\frac{5}{x} dx + \int e^{-2x} dx = -5 \ln |x| - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$

حاول أن تحل التمرينين 4 و 7

تكامل الدوال المثلثية

لقد بات واضحاً أن بإمكاننا استنتاج قواعد التكامل المذكورة سابقاً مما يناسبها من قواعد الاشتقاق. ويمكننا تطبيق العملية نفسها على الدوال المثلثية للحصول على قواعد التكامل غير المحدود التالية.

تكامل الدوال المثلثية

$\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$

$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

$\int \sec^2 kx dx = \frac{\tan kx}{k} + C$

$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\int \csc^2 kx dx = -\frac{\cot kx}{k} + C$

$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$

$\int \cot kx dx = \frac{\ln |\sin kx|}{k} + C$

$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C$

مثال 4 تكامل الدوال المثلثية

أوجد التكامل غير المحدود في كل من الحالات التالية:

A. $\int \sin 7x dx$

B. $\int \cos \frac{2}{3} x dx$

C. $\int \sec^2 12x dx$

(تابع)

تنبيه

لا تهمل القيمة المطلقة للمتغير x لأن الدالة اللوغاريتمية من دونها تصبح غير معرّفة إذا كانت قيمة x عدداً سالباً. أما إذا القيمة داخل رمز القيمة المطلقة في صيغة الدالة اللوغاريتمية موجبة دائماً، فلا حاجة لاستعمال رمز القيمة المطلقة. على سبيل المثال، $\ln |x^2 + 1| = \ln (x^2 + 1)$

تذكير بقواعد اشتقاق الدوال المثلثية

$D_x(\sin x) = \cos x$

$D_x(\cos x) = -\sin x$

$D_x(\tan x) = \sec^2 x$

$D_x(\sec x) = \tan x \sec x$

$D_x(\csc x) = -\cot x \csc x$

$D_x(\cot x) = -\csc^2 x$

الحل

طبّق قواعد تكامل الدوال:

$$\text{A. } \int \sin 7x \, dx = -\frac{1}{7} \cos 7x + C$$

$$\text{B. } \int \cos \frac{2}{3}x \, dx = \frac{\sin \frac{2}{3}x}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sin \frac{2}{3}x + C$$

$$\text{C. } \int \sec^2 12x \, dx = \frac{1}{12} \tan 12x + C$$

حاول أن تحل التمرينين 15 و 16

قد نضطر في بعض الأحيان إلى استعمال أكثر من قاعدة لإيجاد تكامل غير محدود.

مثال 5 إيجاد تكامل غير محدود

أوجد التكامل غير المحدود في كل من الحالات التالية:

$$\text{A. } \int (x^2 - \sin x) \, dx$$

$$\text{B. } \int (2 \sin x - 3 \sec^2 2x) \, dx$$

$$\text{C. } \int (1 - 2 \cos 3x) \sin 3x \, dx$$

الحل

A. يمكننا، باستعمال قواعد المجموع والفرق في التكامل، أن نكتب:

$$\int (x^2 - \sin x) \, dx = \int x^2 \, dx - \int \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + \cos x + C$$

استعمل قاعدة القوة

وقواعد الدوال المثلثية

B. نستعمل قاعدة الفرق وقاعدة الضرب في عدد ثابت لنكتب:

$$\int (2 \sin x - 3 \sec^2 2x) \, dx = 2 \int \sin x \, dx - 3 \int \sec^2 2x \, dx$$

$$= -2 \cos x - \frac{3}{2} \tan 2x + C$$

استعمل قواعد

تكامل الدوال المثلثية

$$\text{C. } \int (1 - 2 \cos 3x) \sin 3x \, dx = \int (\sin 3x - 2 \sin 3x \cos 3x) \, dx$$

$$= \int \sin 3x \, dx - \int \sin 6x \, dx$$

استعمل متطابقة ضعف الزاوية

$$\sin (2 \times (3x)) = 2 \sin 3x \cos 3x$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{6} \cos 6x + C$$

استعمل قواعد

تكامل الدوال المثلثية

إرشاد

متطابقات ضعف الزاوية:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

حاول أن تحل التمرينين 19 و 20

مراجعة سريعة 4.2

في التمارين 1-7، أوجد مشتقة الدالة f في كل من الحالات التالية:

5. $f(x) = e^{3x} - x^{\frac{5}{2}}$

6. $f(x) = 2 \sin 2x + \tan 3x$

7. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jo.com

1. $f(x) = 7e^{3x}$

2. $f(x) = 2 \sin 3x$

3. $f(x) = \frac{3}{2} \cos 2x$

4. $f(x) = \tan \frac{4}{3}x$

الدرس 4.2 التمارين

في التمرينين 1 و 2، أوجد ما يلي:

11. $\int (-9t^{-2.5} + 2t^{-1}) dt$

12. $\int (10x^{-3.5} + 4x^{-1}) dx$

في التمارين 13-21، أوجد ما يلي:

13. $\int \cos 5x dx$

14. $\int \sin 5x dx$

15. $\int \left(\sin \frac{x}{2}\right) dx$

16. $-\int 3 \sec^2 3x dx$

17. $\int (-8 \cos x - 7 \sin x) dx$

18. $\int (9 \sin x + 8 \cos x) dx$

19. $\int (\cos x - 3x^2) dx$

20. $\int (3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x) dx$

21. $\int (2 - 4 \sin^2 x) dx$

22. استعمل الاشتقاق للتحقق من صيغة التكامل

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

1. $\int 5e^{-0.1x} dx$

2. $\int (3e^{-0.2x} + 6) dx$

3. **الترشيح البيوكيميائي** إذا كان معدل الوحدات الراشحة الناتجة عن مركب بيوكيميائي يعطى بالصيغة:

$$f'(t) = 0.01e^{-0.01t}$$

فإن الكمية الكلية من الوحدات الراشحة خلال الزمن t (بالدقائق) هو $f(t)$.

a. أوجد صيغة $f(t)$.

b. إذا كان عدد الوحدات الراشحة عند الزمن $t = 0$ هو 0 وحدة، أوجد عدد الوحدات الراشحة بعد 10 دقائق.

في التمارين 4-12، أوجد ما يلي:

4. $\int \left(\frac{3}{x} + e^{-3x}\right) dx$

5. $\int \left(\frac{2}{x} - 9e^{5x} + e^x\right) dx$

6. $\int \left(\frac{9}{x} - 3e^{2x} + e^{0.5}\right) dx$

7. $\int \frac{1+2t^7}{11t} dt$

8. $\int \frac{1+9t^4}{4t} dt$

9. $\int (e^{8u} + 4u) du$

10. $\int (v^2 - e^{3v}) dv$

استكشاف

27. **سوس الطحين** يُستعمل حساب التكامل أدناه لحساب عدد حشرات سوس الطحين في أحد النماذج:

$$\int \frac{g(x)}{x} dx$$

حيث $g(x)$ معدل نمو كل وحدة مكونة من x حشرة من حشرات سوس الطحين. يستعمل العلماء الصيغة الأبسط وهي $g(x) = a - bx$ ، حيث a و b ثابتان موجبان. أوجد التكامل في هذه الحالة.

28. **ضغط الدم** معدل تغير حجم الدم $V(t)$ في الشريان الأبهري عند الزمن t يعطى بالصيغة:

$$V'(t) = -kP(t)$$

حيث $P(t)$ ضغط الدم في الشريان الأبهري عند الزمن t و k قيمة ثابتة تتوقف على خصائص الشريان الأبهري. صيغة الضغط في الشريان الأبهري هي:

$$P(t) = P_0 e^{-mt}$$

حيث P_0 ضغط الدم عند الزمن $t = 0$ و m ثابت آخر. إذا كان V_0 حجم الدم في الشريان الأبهري عند الزمن $t = 0$ ، أوجد صيغة الدالة $V(t)$.

توسيع الأفكار

29. لتكن $f_n(x) = x^n e^x$:

- a. أثبت أن $f_n'(x) = f_n(x) + n f_{n-1}(x)$.
b. استنتج أن $\int f_n(x) dx = f_n(x) - n \int f_{n-1}(x) dx$.
c. استعمل هذه القاعدة عدة مرات لإيجاد $\int x^7 e^x dx$.

23. **نمو الخلايا** يُقاس معدل تكاثر الخلايا السرطانية $N(t)$ خلال الزمن t في شروط معيّنة باستعمال الصيغة:

$$N'(t) = Ae^{kt}$$

حيث A معدل التكاثر اليومي للخلايا السرطانية عند الزمن 0 و k قيمة ثابتة.

- a. لنفترض أن $A = 50$ ، وأن المعدل اليومي لتكاثر الخلايا السرطانية بعد 5 أيام هو 250 يوميًا. أوجد صيغة لحساب عدد الخلايا بعد t أيام، علماً أن عدد الخلايا عند $t = 0$ هو 300.

- b. استعمل إجابتك عن سؤال الفرع السابق لإيجاد عدد الخلايا السرطانية بعد 12 يوماً.

أسئلة اختبار معيارية

24. **صواب أم خطأ** كتب صلاح المعادلة التالية. هل ما كتبه صحيح؟ بّرر إجابتك.

$$\int (\sin x + c) dx = -\cos x + cx$$

25. **اختيار من متعدد** أي الإجابات التالية تساوي $\int (6x^5 + e^{3x}) dx$ ؟

- A. $5x^6 + 3e^{3x} + C$
B. $5x + \frac{1}{3}e^{3x} + C$
C. $5x^6 + \frac{1}{3}e^{3x} + C$
D. $x^6 + 3e^{3x} + C$
E. $x^6 + \frac{1}{3}e^{3x} + C$

26. **اختيار من متعدد** $\int e^{2x} dx$ يساوي:

- A. $e^{2x} + C$
B. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$
C. $\frac{e^{2x}}{2x} + C$
D. $\frac{1}{2}e^{2x}$
E. $2e^{2x} + C$

30. **كثافة المحلول المذاب** تُقاس كثافة المحلول المذاب داخل غلاف الخلية باستعمال الصيغة:

$$c'(t) = \frac{kA}{V}[C - c(t)] \quad (1)$$

حيث A مساحة غلاف الخلية، و V حجم الخلية، و $c(t)$ الكثافة داخل الخلية عند الزمن t ، و C الكثافة خارج الخلية، و k قيمة ثابتة.

إذا كانت c_0 تمثل كثافة المحلول المذاب داخل الخلية عند $t = 0$ ، فإن:

$$c(t) = (c_0 - C) e^{-\frac{kAt}{V}} + C \quad (2)$$

a. استعمل النتيجة الأخيرة لإيجاد $c'(t)$.

b. عوّض في نتيجة المعادلة (1) لتوضيح أن (2) هي بالفعل دالة أصلية للصيغة (1).

Integration By Substitution

4.3 التكامل بالتعويض

طريقة التعويض

ما ستتعلمه

- طريقة التعويض
- استعمال طريقة التعويض

... ولماذا

لا يمكن إيجاد التكامل إلا إذا كُتبت الدالة المكاملة على شكل مشتقة واضحة للدالة الأصلية. التعويض واحد من التقنيات التي تساعد على بلوغ ذلك الهدف.

معايير الدرس

12A.5.4

12A.5.5

المصطلحات

- التكامل بالتعويض

integration by substitution

تذكير بقاعدة السلسلة

إذا كانت y دالة للمتغير u ، $y = f(u)$ ، وكانت u بدورها

دالة للمتغير x ، $u = g(x)$

إذن $y = f(u) = f(g(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

أو بصيغة أخرى

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x)) \times g'(x)$$

مساعدة دراسية

$$u' = \frac{du}{dx} = 6x^2$$

$$du = 6x^2 dx$$

لذلك

تعلمنا في وحدات سابقة كل القواعد اللازمة لإيجاد مشتقات الدوال الأساسية. يمكننا بالاستعمال الصحيح لهذه القواعد أن نجد مشتقة أي دالة تتضمن قوى x ، دوال أسية، ودوال لوغاريتمية، مركبة بأية طريقة باستعمال العمليات الحسابية (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة، والقوة). بالمقابل، فإن عملية إيجاد معكوس الاشتقاق هي أمر أكثر تعقيداً بشكل كبير. هناك عدد كبير من الطرق المستعملة – أكثر مما يمكننا تغطيته في هذه الوحدة. إضافة لذلك، تفشل معظم الطرق الممكنة بالنسبة لبعض الدوال.

تعلمنا سابقاً كيفية إيجاد التكامل لبعض الدوال البسيطة. في هذا الدرس، نقدم طريقة تسمى "التعويض"، والتي توسع دائرة الدوال التي يمكننا إيجاد تكاملها بشكل كبير.

تعتمد هذه التقنية على قاعدة السلسلة لمشتقات الدوال المركبة.

إذا كان $u = f(x)$ ، فإن مشتقة u معزفة على الشكل

$$du = f'(x) dx$$

على سبيل المثال، إذا كان $u = 2x^3 + 1$ ، فإن $du = 6x^2 dx$. سنستعمل في هذا الدرس

المشتقة كأداة ترميز مناسبة عند إيجاد التكامل، مثلاً

$$\int (2x^3 + 1)^4 \cdot 6x^2 dx$$

قد تذكرنا $(2x^3 + 1)^4 \cdot 6x^2 dx$ بالنتيجة التي نحصل عليها عند استعمال قانون السلسلة لإيجاد المشتقة. سنستعمل الآن المشتقة وقانون السلسلة بطريقة عكسية لإيجاد التكامل.

لتكن $u = 2x^3 + 1$ ، إذن $du = 6x^2 dx$. نعوض $u = 2x^3 + 1$ و $du = 6x^2 dx$ في التكامل غير المحدود.

$$\int (2x^3 + 1)^4 \cdot 6x^2 dx = \int \overbrace{(2x^3 + 1)^4}^u \cdot \overbrace{6x^2 dx}^{du} = \int u^4 \cdot du$$

إذن، تغير التكامل المعقد واتخذ شكلاً أبسط:

$$\int u^4 \cdot du = \frac{u^5}{5} + C$$

$$\begin{aligned} \int (2x^3 + 1)^4 \cdot 6x^2 dx &= \frac{(2x^3 + 1)^5}{5} + C \\ &= \frac{1}{5} (2x^3 + 1)^5 + C \end{aligned} \quad \text{عوض } u = 2x^3 + 1$$

هذه العملية تُسمى عملية **التكامل بالتعويض**، وهي منبثقة عن قاعدة السلسلة لكن في مسار معكوس.

إذا أردنا التحقق من صحة ذلك، نقوم بعملية الاشتقاق للدالة الناتجة باستعمال قاعدة السلسلة:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{5} (2x^3 + 1)^5 + C \right) &= \frac{1}{5} \times 5 (2x^3 + 1)^4 (6x^2) + 0 \\ &= (2x^3 + 1)^4 \cdot 6x^2 \end{aligned}$$

مثال 1 طريقة التعويض (1)

أوجد التكامل $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$.

الحل

الطريقة 1

قد يكون المقدار المرفوع إلى قوة محددة خيارًا مناسبًا للتعويض، وبما أن $x^3 + 1$ مرفوعة إلى القوة $\frac{1}{2}$ ، فإن التعويض $u = x^3 + 1$ مناسب للحصول على تكامل بسيط يحتاج إيجاده إلى استعمال قاعدة القوة فقط.

إذن، $\frac{du}{dx} = 3x^2$ و $du = 3x^2 dx$.

بما أن الدالة المكاملة لا تتضمن العدد 3، نضرب التكامل في $\frac{1}{3}$ على أن نضع 3 داخل رمز التكامل و $\frac{1}{3}$ خارجه.

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{x^3 + 1} (3x^2 dx)$$

عوّض $u = x^3 + 1$ و $du = 3x^2 dx$ ثم أوجد التكامل

$$= \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du$$

$$= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

عوّض $u = x^3 + 1$

الطريقة 2

كما في الطريقة الأولى، ليكن $u = x^3 + 1$ ، إذن $du = 3x^2 dx$. بما أنه لا يوجد 3 في التكامل، نقوم بقسمة صيغة du على 3 لنحصل على

$$\frac{1}{3} du = x^2 dx$$

ثم نعوّض $u = x^3 + 1$ و $x^2 dx = \frac{1}{3} du$ لنحصل على

$$\int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

ثم نكمل بنفس الطريقة الأولى.

تختلف الطريقتان بشكل بسيط، لكن البعض قد يفضل إحداها على الأخرى.

حاول أن تحل التمرين 1

لا يمكن استعمال طريقة التعويض التي تم استعمالها في المثال السابق دائمًا. مثال علي ذلك $\int x^3 \sqrt{x^3 + 1} dx$ ، فعند استعمالنا التعويض $u = x^3 + 1$ سنحصل على المشتقة $\frac{du}{dx} = 3x^2$ بمفردها دون عوامل أخرى.

لا يمكن حل هذا النوع من التكامل والكثير غيره باستعمال طريقة التعويض.

على الرغم من عدم وجود قاعدة محددة لاختيار u ، إلا أننا سنصبح أكثر دقة في اختيارها من خلال الممارسة، وذلك من خلال التنبه إلى أمرين:

1. يجب أن تكون u ضمن الدالة المكاملة بحيث يؤدي تعويضها في هذه الدالة إلى تكامل أبسط.

2. يجب أن تكون مشتقة u موجودة - أو يمكن إيجادها بالضرب في ثابت - ضمن الدالة المكاملة.

كلما شمل التعويض أكبر قدر ممكن من التكامل، طالما أن مشتقته ظاهرة، كان اختيار u أكثر دقة. كان من الممكن في المثال 1 أن نختار $u = x^3$ ، لكن اختيار $u = x^3 + 1$ أفضل، لأن لهذا المقدار نفس المشتقة وهي $3x^2$ ولكنه يضم مقدارًا أكبر من التكامل الأصلي. إذا تابعنا بنفس طريقة التفكير، قد نختار $u = \sqrt{x^3 + 1}$ ، لكن هذا خيار غير مناسب، لأن $\frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$ ، وهذا المقدار ليس موجودًا في التكامل الأصلي.

مثال 2 طريقة التعويض (2)

أوجد التكامل في الحالتين التاليتين:

A. $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2} dx$

B. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x} dx$

الحل

A. لتكن $u = x^2 + 6x$. إذن، $du = 2(x+3) dx$. يجب وضع العدد 2 داخل رمز التكامل، لذا اضرب في $1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$ ، ثم ضع 2 داخل رمز التكامل و $\frac{1}{2}$ خارجه.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x+3)}{(x^2+6x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-2} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{-1}}{-1} + C \\ &= -\frac{1}{2u} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2+6x)} + C \end{aligned}$$

عوض $u = x^2 + 6x$

B. لتكن $u = x^2 - 3x$. إذن، $du = (2x-3) dx$. وبالتالي:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x} dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln |u| + C$$

$$= \ln |x^2 - 3x| + C$$

عوض $u = x^2 - 3x$

تذكر أنه إذا كانت f دالة، فإن مشتقة الدالة الأسية $y = e^{f(x)}$ ، وفق قانون السلسلة، هي

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

هذا يعني أن بإمكاننا إيجاد الدالة الأصلية للدالة التي صيغتها $e^{f(x)}$ بجعل u هو الأس، على أن نتمكن من إيجاد $f'(x)$ داخل رمز التكامل (بغض النظر عن الثابت الذي نضرب فيه الدالة).

مثال 3 طريقة التعويض (3)

أوجد التكامل في كل من الحالات التالية:

A. $\int \sin x e^{\cos x} dx$

B. $\int x^2 e^{x^3} dx$

الحل

A. لتكن $u = \cos x$ ، إذن، $du = -\sin x dx$. وبالتالي:

$$\int \sin x e^{\cos x} dx = -\int (-\sin x) e^{\cos x} dx$$

$$= -\int e^u du$$

عوض $u = \cos x$ و $du = -\sin x dx$

$$= -e^u + C$$

أوجد التكامل

$$= -e^{\cos x} + C$$

عوض $u = \cos x$

B. لتكن $u = x^3$ ، إذن، $du = 3x^2 dx$. اضرب في $\left(\frac{1}{3}\right)$ ، ثم ضع 3 داخل رمز التكامل و $\frac{1}{3}$ خارجه لتحصل على

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} (3x^2 dx)$$

$$= \frac{1}{3} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{3} e^u + C$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

عوض $u = x^3$

حاول أن تحل التمرين 4

يبين المثال التالي أهمية التعويض في تكامل الدوال المثلثية.

مثال 4 استعمال التعويض في تكامل الدوال المثلثية

أوجد التكامل في كل من الحالات التالية:

A. $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

B. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$

C. $\int \tan x \, dx$

الحل

نطبق قواعد التكامل.

A. لتكن $u = \sin x$ ، إذن، $du = \cos x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x \, dx &= \int u^2 \, du \\ &= \frac{1}{3} u^3 + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned} \quad \text{عوض } u = \sin x$$

B. أعد أولاً كتابة التكامل في الصورة $\int (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \sin x \, dx$

لتكن $u = \cos x$ ، إذن، $du = -\sin x \, dx$

اضرب في (-1) مرتين، داخل رمز التكامل وخارجه، وعوض.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx &= - \int (\cos x)^{-\frac{1}{2}} (-\sin x \, dx) \\ &= - \int u^{-\frac{1}{2}} \, du \\ &= -2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -2 \cos^{\frac{1}{2}} x + C \\ &= -2 \sqrt{\cos x} + C \end{aligned} \quad \text{عوض } u = \cos x$$

C. كما رأينا سابقاً، $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، إذن

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

ليكن $u = \cos x$ ، إذن، $du = -\sin x \, dx$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C$$

$$= -\ln |\cos x| + C \quad \text{عوض } u = \cos x$$

حاول أن تحل التمرين 5

يمكن إيجاد تكامل $\cot x$ بنفس طريقة تكامل $\tan x$.

يمكننا إيجاز تقنية التعويض ببعض القواعد المفيدة التي تساعد على إيجاد أنواع عديدة من التكامل.

التعويض

يمكننا أن نعوض $u = f(x)$ في كل تكامل مما يلي:

التكامل غير المحدود

النتيجة

$$1. \int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx, n \neq -1 \quad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$2. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \quad \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |f(x)| + C$$

$$3. \int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx \quad \int e^u du = e^u + C = e^{f(x)} + C$$

$$4. \int \cos [f(x)] \cdot f'(x) dx \quad \int \cos u du = \sin u + C = \sin [f(x)] + C$$

$$5. \int \sin [f(x)] \cdot f'(x) dx \quad \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos [f(x)] + C$$

$$6. \int \sec^2 [f(x)] \cdot f'(x) dx \quad \int \sec^2 u du = \tan u + C = \tan [f(x)] + C$$

$$7. \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

استعمال طريقة التعويض

بشكل عام، يمكننا في كثير من الأحيان استعمال طريقة التعويض التي تؤدي إلى جعل u مجزؤاً أو مرفوعاً إلى قوة معينة، أو وضعه في مقام الكسر أو داخل قوة معينة أو ما يشابه ذلك.

نعالج في المثال التالي تكاملاً أكثر دقة لا يمكن إيجاده باستعمال تقنيات التعويض المذكورة أعلاه، ومع ذلك يبقى التعويض طريقة مناسبة لإيجاده.

مثال 5 استعمال طريقة التعويض

أوجد التكامل $\int x \sqrt{1-x} dx$.

الحل

لتكن $u = 1 - x$. إذن، $du = -dx$. هذه الحالة تختلف عن سابقتها نظراً لوجود x

إضافي في التكامل. من غير المفيد كتابة التكامل في الصورة $\int x \sqrt{u} (-du)$ ، أي بوضع متغيرين داخل رمز التكامل.

يمكنك تجنّب ذلك بسهولة من خلال إيجاد x بدلالة u .

$$u = 1 - x$$

$$x = 1 - u$$

$$\int x\sqrt{1-x} dx = \int (1-u)\sqrt{u} (-du)$$

عوض

$$= \int (u-1)u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

أوجد التكامل

$$= \frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

عوض $u = 1 - x$

حاول أن تحل التمرين 7

مراجعة سريعة 4.3

في التمارين 6-8، أوجد التكامل.

في التمارين 1-6، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

$$6. \int (10x^4 + 6\sqrt{x}) dx$$

$$1. y = (x^3 - 2x^2 + 3)^4$$

$$7. \int \left(\frac{5}{x} + \frac{4}{x^3}\right) dx$$

$$2. y = \sin^2(4x - 5)$$

$$8. \int e^{6x} dx$$

$$3. y = \ln(\cos x)$$

$$4. y = \ln(\sin x)$$

$$5. y = \ln(\tan x)$$

$$7. \int x\sqrt{3+x} dx$$

في التمارين 8-13، عوض القيمة المعطاة لإيجاد التكامل.
ثم تحقق من إجابتك باستعمال الاشتقاق.

$$8. \int \sin 3x dx, u = 3x$$

$$9. \int x \cos(2x^2) dx, u = 2x^2$$

$$10. \int 28(7x-2)^3 dx, u = 7x-2$$

$$11. \int \frac{9r^2 dr}{\sqrt{1-r^3}}, u = 1-r^3$$

$$12. \int \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right)^2 \sin \frac{t}{2} dt, u = 1 - \cos \frac{t}{2}$$

التمارين 4.3 الدرس

$$1. \text{a. أوجد } \int 8x(4x^2 + 8)^6 dx$$

$$\text{b. أوجد } \int x^3 \sqrt{3x^4 + 10} dx$$

$$2. \text{أوجد } \int \frac{x+1}{(4x^2+8x)^3} dx$$

$$3. \text{أوجد } \int \frac{x+3}{x^2+6x} dx$$

$$4. \text{أوجد } \int x^3 e^{x^4} dx$$

$$5. \text{أوجد } \int x \sin(x^2) dx$$

$$6. \text{أوجد } \int 6 \sec^2 x \sqrt{\tan x} dx$$

أسئلة اختبار معيارية

32. صواب أم خطأ باستخدام التعويض، نحصل على الإجابة التالية: $\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx = \int u^3 \, du$. برّر إجابتك.

33. صواب أم خطأ باستخدام التعويض، نحصل على الإجابة التالية: $\int e^u \, du = \frac{e^{u+1}}{u+1} + C$.

34. اختيار من متعدد أي مما يلي يساوي $\int \tan x \, dx$ ؟

- A. $\ln |\cot x| + C$
- B. $\ln |\cos x| + C$
- C. $-\ln |\cos x| + C$
- D. $-\ln |\cot x| + C$

35. اختيار من متعدد أي مما يلي يساوي $\int \tan x \sec^2 x \, dx$ ؟

- A. $\tan^2 x + C$
- B. $\tan^3 x + C$
- C. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$
- D. $\tan x^2 + C$

36. اختيار من متعدد أي المقادير التالية تساوي $\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ ؟

- A. $2 \ln |\cos (\sqrt{x})| + C$
- B. $-2 \ln |\cos (\sqrt{x})| + C$
- C. $\ln |\cos (\sqrt{x})| + C$
- D. $\sqrt{x} \ln |\cos (\sqrt{x})| + C$
- E. $-2 \ln |\cot (\sqrt{x})| + C$

استكشاف

37. الإيرادات الإيرادات الحدية (بالريالات) من بيع x قميص تعطى بالصيغة

$$R'(x) = 5x(x^2 + 17000)^{-\frac{2}{3}}$$

a. أوجد دالة الإيرادات الكلية إذا كانت الإيرادات من بيع 100 قميص QR 10 000.

b. أوجد عدد القمصان التي يجب بيعها لتكون الإيرادات QR 10 080 على الأقل.

$$13. \int 8(y^4 + 4y^2 + 1)^2 (y^3 + 2y) \, dy, u = y^4 + 4y^2 + 1$$

في التمارين 14-26، أوجد التكامل باستخدام التعويض.

$$14. \int \frac{1}{(1-x)^2} \, dx$$

$$15. \int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$$

$$16. \int \tan(4x + 2) \, dx$$

$$17. \int \cos(3z + 4) \, dz$$

$$18. \int \frac{\ln^6 x}{x} \, dx$$

$$19. \int s^{\frac{1}{3}} \cos(s^{\frac{4}{3}} - 8) \, ds$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos^2 3x}$$

$$21. \int \frac{\sin(2t + 1)}{\cos^2(2t + 1)} \, dt$$

$$22. \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$23. \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1}$$

$$24. \int \frac{40x \, dx}{x^2 + 25}$$

$$25. \int \frac{dx}{\cot 3x}$$

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{5x + 8}}$$

في التمارين 27-30، أثبت أن $\int f(u) \, du \neq \int f(u) \, dx$.

$$27. f(u) = \sqrt{u}, u = x^2 (x > 0)$$

$$28. f(u) = u^2, u = x^5$$

$$29. f(u) = e^u, u = 7x$$

$$30. f(u) = \sin u, u = 4x$$

31. إجابات مختلفة ليكن التكامل $\int 2 \sin x \cos x \, dx$.

a. أوجد قيمة التكامل بتعويض $u = \sin x$.

b. أوجد قيمة التكامل بتعويض $u = \cos x$.

c. الكتابة للتعلم وضح لماذا تبدو الإجابتان في الفرعين a و b مختلفتين مع أنهما في الواقع متساويتان.

38. **التكلفة** قررت شركة أن التكلفة الحدية (بالآلاف الريالات) لصناعة x جهاز تكييف مركزي هي

$$C'(x) = \frac{60x}{5x^2 + e}$$

حيث x عدد الأجهزة المنتجة.

a. أوجد دالة التكلفة، علماً أن الشركة تتكلف QR 10 000 حتى لو لم تصنع أي جهاز.

b. تنوي الشركة الاستثمار في خط إنتاج آخر إذا وجدت أن تكلفة إنتاج 5 أجهزة أكثر من QR 20 000. هل على الشركة الاستثمار في خط الإنتاج الجديد.

39. **وباء** يبلغ معدل انتشار وباء في إحدى المناطق

$$N'(t) = \frac{100t}{t^2 + 2}$$

حيث $N(t)$ عدد المصابين بالعدوى بعد t أيام.

a. أوجد صيغة لإيجاد عدد الأشخاص المصابين بالعدوى بعد t أيام، علماً أن 37 شخصاً كانوا مصابين بالعدوى عند $t = 0$.

b. استعمل إجابتك من الفرع a لإيجاد عدد الأشخاص المصابين بالعدوى بعد 21 يوم.

توسيع الأفكار

40. أوجد $\int \sec x \, dx$. (تلميح: اضرب المكامل في

المقدار $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ ثم عوض لإيجاد تكامل النتيجة).

41. أوجد $\int \csc x \, dx$. (تلميح: اضرب المكامل في

المقدار $\frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}$ ثم استعمل التعويض لإيجاد تكامل النتيجة.)

في التمرينين 42 و 43، استعمل المتطابقة المثلثية المعطاة للحصول على قيمة يمكن تعويضها لإيجاد التكامل.

42. $\int \sin^3 2x \, dx$, $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$

43. $\int 2 \sin^2 x \, dx$, $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

Integration By Parts

4.4 التكامل بالأجزاء

قاعدة التكامل بالأجزاء

نُستعمل قاعدة **التكامل بالأجزاء** لتبسيط صيغة التكامل غير المحدود في حالات معينة، وهي مبنية على قاعدة الضرب في الاشتقاق. إذا كانت u و v دالتين قابلتين للاشتقاق فإن الدالة uv قابلة للاشتقاق أيضًا، فإن قاعدة الضرب في الاشتقاق تمكّننا من كتابة:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v \frac{du}{dx}$$

يمكننا أن نجد التكامل لطرفي المعادلة

$$\int \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx = \int \left(\frac{d}{dx}(uv) \right) dx - \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

قاعدة التكامل بالأجزاء

إذا كانت u و v دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير x ، فإن

$$\int u dv = uv - \int v du$$

الطريقة المتبعة لإيجاد التكامل باستعمال هذه القاعدة تُسمى التكامل بالأجزاء وتكمن أهميتها في أنها تمكّننا، بدلًا من إيجاد التكامل $\int u dv$ الذي قد يكون كثير التعقيد، من إيجاد التكامل $\int v du$ الذي يمكن أن يكون أكثر بساطة، وذلك لأنه بإمكاننا إعطاء القيمة التي نريدها لكل من u و v بحيث نحصل على الصيغة الأبسط للتكامل.

مثال 1 استعمال قاعدة التكامل بالأجزاء

أوجد التكامل $\int x \cos x dx$.

الحل

استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء $\int u dv = uv - \int v du$ حيث

$$u = x, dv = \cos x dx$$

نحتاج لإتمام القاعدة إلى مشتقة u وهي $du = dx$ ، وأبسط صيغة للدالة الأصلية للدالة

$$v = \sin x \text{ وهي } \cos x$$

إذن

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = x \sin x + \cos x + C$$

حاول أن تحل التمرين 1

ما ستتعلمه

- قاعدة التكامل بالأجزاء
- التكامل المتكرر بالأجزاء

... ولماذا

قاعدة التكامل بالأجزاء هي إحدى التقنيات الفعالة لإيجاد التكامل في بعض الحالات التي لا يمكن إيجاد التكامل غير المحدود لها عن طريق القواعد أو بطريقة التعويض.

معيّار الدرس

12A.5.7

المصطلحات

- التكامل بالأجزاء integration by parts
- التكامل بالجدول tabular integration

تنبيه

كما أن مشتقة الدالة الناتجة عن ضرب دالتين لا تساوي ضرب مشتقتي الدالتين، فإن تكامل هذه الدالة لا يساوي ضرب تكامل هاتين الدالتين وهذا ما يبرز الحاجة لاستعمال التكامل بالأجزاء.

إن الهدف من التكامل بالأجزاء هو الانتقال من التكامل $\int u dv$ الذي لا نعرف كيف نجد قيمته إلى التكامل $\int v du$ الذي نستطيع إيجاد قيمته. تذكر دائمًا أن التكامل بالأجزاء لا يصلح في كل الحالات. دعنا نستكشف الخيارات المتاحة لاختيار u و dv من المثال الأول.

نشاط استكشافي 1

ليس أي اختيار لكل من u و dv يؤدي بالضرورة إلى إيجاد التكامل عن طريق الأجزاء، لأننا نسعى إلى استبدال التكامل $\int u dv$ بالتكامل $\int v du$ ، ولا يمكننا القيام بذلك إلا إذا كانت الصيغة $\int v du$ أكثر بساطة. سنتعرف الآن إلى بعض الخيارات الممكنة الأخرى بالنسبة للمثال 1

1. طبق قاعدة الأجزاء على التكامل $\int x \cos x dx$ إذا كان $u = 1$ و $dv = x \cos x dx$.
حلّل النتيجة واشرح لماذا لا يفيد الخيار $u = 1$ في إيجاد التكامل.

2. طبق قاعدة الأجزاء على التكامل $\int x \cos x dx$ إذا كان $u = x \cos x$ و $dv = dx$.
حلّل النتيجة وبيّن لماذا هذا الخيار ليس الخيار المناسب في هذا التكامل.

3. طبق قاعدة الأجزاء على التكامل $\int x \cos x dx$ إذا كان $u = \cos x$ و $dv = x dx$.
حلّل النتيجة وبيّن لماذا هذا الخيار ليس الخيار المناسب في هذا التكامل.

4. ما الذي يجعل الخيار $u = x$ و $dv = \cos x dx$ هو الخيار المناسب في هذا التكامل؟

هناك طريقتان لإيجاد التكامل باستعمال قاعدة الأجزاء: الطريقة الاعتيادية وطريقة التكامل بالجدول كما نتبين في الأمثلة التالية.

مثال 2 التكامل بالأجزاء (1)

أوجد التكامل $y = \int x e^{5x} dx$.

الحل

الطريقة 1 (الاعتيادية)

لا يمكنك إيجاد هذا التكامل باستعمال أي من القواعد التي تعلمناها في الدروس السابقة، لكن يمكنك إيجاده باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء.

(تابع)

تحتاج أولاً إلى كتابة الصيغة $x e^{5x} dx$ في الصورة $u dv$ لنتمكن من إيجاد v . يمكنك أن تختار إما x وإما e^{5x} ، أي أن عليك اختيار إما $u = x$ و $dv = e^{5x} dx$ وإما $u = e^{5x}$ و $dv = x dx$. في الحالة الثانية ستكون $v = \frac{x^2}{2}$ ، الأمر الذي يزيد من تعقيد التكامل، بينما مشتقة x هي 1 التي هي أبسط من x . بينما في الحالة الأولى $v = \frac{e^{5x}}{5}$ لن يزيد في تعقيد التكامل. لذا يستحسن أن تختار

$$u = x, dv = e^{5x} dx$$

وبالتالي فإن

$$du = dx, v = \frac{e^{5x}}{5}$$

عوض في قاعدة التكامل بالأجزاء:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \frac{e^{5x} dx}{dv} = x \left(\frac{e^{5x}}{5} \right) - \int \frac{e^{5x}}{5} dx$$

$$= x \frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C$$

$$= \frac{1}{25} e^{5x} (5x - 1) + C$$

$$\text{عوض } \int \frac{e^{5x}}{5} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{25} + C$$

يمكنك التحقق من النتيجة من خلال الاشتقاق.

الطريقة 2 (الجدول)

تقوم هذه الطريقة على جدولة الخطوات في قائمتين، القائمة الأولى للاشتقاق (D) والثانية للتكامل (I). ضع u في الصف الأول من القائمة الأولى وضع ما يتبقى من التكامل مقابلها في القائمة الثانية.

ضع مشتقة u تحتها في القائمة الأولى وضع مقابلها الدالة الأصلية لما هو فوقها في القائمة الثانية وتابع على هذا المنوال حتى تصل إلى 0 في القائمة الأولى: (ما يكتب في كل صف من القائمة الأولى هو مشتقة لما فوقه عدا u ، وما يكتب في كل صف من القائمة الثانية هو الدالة الأصلية لما فوقه أي مشتقة لما تحته).

للتوضيح، طبق ذلك لإيجاد التكامل $\int x e^{5x} dx$.

لاحظ هنا أن $u = x$ ، وبالتالي فإن ما يتبقى هو e^{5x} واكتبه في القائمة الثانية.

اكتب المشتقات على التوالي في القائمة الأولى والدوال الأصلية في القائمة الثانية، لتحصل على الجدول التالي.

D	I
x	e^{5x}
1	$\frac{e^{5x}}{5}$
0	$\frac{e^{5x}}{25}$

ثم ارسم خطوطاً مائلة تربط كل حد في القائمة الأولى (ما عدا الأخير) بالحد الذي يقع تحت ما يقابله في القائمة الثانية كما هو ظاهر في الجدول التالي.

(تابع)

ضع إشارة (+) فوق الخط المائل الأول وإشارة (-) فوق الخط المائل الثاني، وتابع بنفس الطريقة مع التبديل بين إشارتي (+) و (-).

D		I
x	+	e^{5x}
1	-	$\frac{e^{5x}}{5}$
0		$\frac{e^{5x}}{25}$

للحصول على التكامل المطلوب، اضرب الحدود الواقعة على طرفي الخط المائل وضع لها إشارة هذا الخط، واجمع بعد ذلك نواتج الضرب.

$$\begin{aligned}\int x e^{5x} dx &= x \left(\frac{e^{5x}}{5} \right) - 1 \left(\frac{e^{5x}}{25} \right) + C \\ &= x \frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C \\ &= \frac{1}{25} e^{5x} (5x - 1) + C\end{aligned}$$

قارن بين الطريقتين وحاول أن تتبين أنهما ترتكزان على نفس الفكرة.

حاول أن تحل التمرين 2

شروط طريقة التكامل بالأجزاء

يمكن استعمال التكامل بالأجزاء فقط في حال حققت الدالة المكاملة الشروط التالية:

1. يمكن كتابة الدالة المكاملة على شكل ضرب عاملين هما u و dv .
2. من الممكن إيجاد تكامل dv وهو v واشتقاق u للحصول على du .
3. يمكن إيجاد التكامل $\int v du$.

تتطلب طريقة التكامل بالأجزاء تقسيم ما هو داخل التكامل إلى u و dv وهذا ممكن دائمًا لأن بالإمكان كتابة أي تكامل $\int f(x) dx$ في الصورة $\int u dv$ حيث $u = f(x)$ و $dv = dx$. قد تبدو هذه العملية بلا معنى للوهلة الأولى لكنها شديدة الأهمية عند محاولة إيجاد الدالة الأصلية للدالة اللوغاريتمية أو غيرها من الدوال.

مثال 3 التكامل بالأجزاء (2)

أوجد $\int \ln x dx$.

الحل

الطريقة 1

لا توجد قاعدة لإيجاد الدالة الأصلية للدالة $\ln x$ ، لذا نجرب طريقة التكامل بالأجزاء، ولنفترض أن

(تابع)

$$u = \ln x, dv = dx$$

إذن،

$$du = \frac{1}{x} dx, v = x$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$\text{عوض } \int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$$

الطريقة 2

تعمل طريقة التكامل بالجدول هنا بطريقة مختلفة عما سبق، لأن المشتقات في القائمة الأولى لن تصل إلى الصفر أبدًا، لذا توقف عن المتابعة عندما تتخلص من الدالة اللوغاريتمية.

D	I
$\ln x$	1
$\frac{1}{x}$	x

ارسم خطأ مائلًا وآخر أفقيًا مع إشارتي (+) و (-) كما يلي:

D	I
$\ln x$	1
$\frac{1}{x}$	x

اضرب الحدين على طرفي الخط المائل، كما فعلت في المثال السابق، وضع لهما إشارة (+). أما الخط الأفقي في طريقة التكامل بالجدول فيفرض عليك ضرب الحدين على طرفيه ثم وضع الإشارة المناسبة لهما (هنا (-)) ثم وضعهما داخل التكامل.

$$\int \ln x \, dx = (\ln x) x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

في التكامل بالجدول إما أن تنتهي عند صفر في القائمة الأولى، وإما عند خط أفقي تختاره كما تشاء إذا تعذر الوصول إلى 0 على أن تضع ناتج ضرب الحدين على طرفي هذا الخط الأفقي والإشارة التي يحملها داخل التكامل بالنسبة لنفس المتغير.

حاول أن تحل التمرين 3

التكامل المتكرر بالأجزاء

في بعض الحالات لا يكفي تطبيق قاعدة التكامل بالأجزاء مرة واحدة. فإذا كان التكامل في الصورة $\int f(x) g(x) dx$ وكان بالإمكان اشتقاق f حتى الوصول إلى 0 ثم الانتقال إلى الدوال الأصلية انطلاقاً من الدالة g من دون عناء، فقد يكون تطبيق قاعدة الأجزاء أكثر من مرة هو الطريقة الوحيدة لإيجاد التكامل كما يوضح المثال التالي.

مثال 4 التكامل المتكرر بالأجزاء

أوجد التكامل $\int x^2 e^x dx$.

الحل

الطريقة 1

ليكن

$$u = x^2, dv = e^x dx$$

إذن،

$$du = 2x dx, v = e^x$$

$$\int x^2 \frac{e^x dx}{dv} = x^2 \frac{e^x}{v} - \int \frac{e^x \cdot 2x dx}{du} = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

بهذه الطريقة تكون قد انتقلت من التكامل $\int x^2 e^x dx$ إلى تكامل أبسط منه هو $\int x e^x dx$ لأن قوة x هي 1

غير أن إيجاد هذا التكامل يحتاج إلى تطبيق قاعدة الأجزاء مرة أخرى.
ليكن

$$u = x, dv = e^x dx$$

إذن،

$$du = dx, v = e^x$$

$$\begin{aligned} \int x \frac{e^x dx}{dv} &= x \frac{e^x}{v} - \int \frac{e^x dx}{du} \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

إذن،

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

تصلح هذه التقنية القائمة على تطبيق التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل $\int x^n e^x dx$

لأي عدد صحيح موجب n ، وذلك لأن التكامل بالأجزاء ينقلنا من إيجاد $\int x^n e^x dx$ إلى إيجاد $\int x^{n-1} e^x dx$. بالتالي، إذا طبقنا قاعدة التكامل بالأجزاء أكثر من مرة فسوف نصل في النهاية إلى التكامل $\int e^x dx$ الذي يساوي e^x . هنا تبرز أهمية طريقة التكامل بالجدول في إيجاد هذا النوع من التكامل.

الطريقة 2

ليكن $u = x^2$ وما تبقى هو e^x واكتبه في القائمة الثانية.

D		I
x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

إذن،

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$$

حاول أن تحل التمرين 7

عند إجراء التكامل المتكرر بالأجزاء تبرز أهمية طريقة التكامل بالجدول التي يمكن من خلالها تنظيم الحساب المتفرع بطريقة أكثر ضماناً لعدم الوقوع في الخطأ كما نتبين من المثال التالي.

مثال 5 التكامل بالجدول

أوجد التكامل $\int x^3 \sin x dx$.

الحل

لتكن $u = x^3$ ، وما تبقى هو $\sin x$ ، اكتبه في القائمة الثانية. إذن،

D		I
x^3	+	$\sin x$
$3x^2$	-	$-\cos x$
$6x$	+	$-\sin x$
6	-	$\cos x$
0		$\sin x$

نقوم بتجميع ضرب الدوال التي يربط بينها خط باستعمال الإشارات التابعة لكل خط لنحصل على

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

حاول أن تحل التمرين 12

مراجعة سريعة 4.4

في التمرينين 1 و 2، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

1. $y = x^3 \sin 2x$

2. $y = e^{2x} \ln(3x + 1)$

في التمرينين 3 و 4، أوجد الدالة الأصلية.

3. $f(x) = e^{4x}$

4. $g(x) = \sin 7x$

في التمارين 5-9، أوجد ما يلي:

5. $\frac{d}{dx} (\ln 3x + \ln x^2)$

6. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

7. $\int x^4 e^{x^5} dx$

8. $\int \left(3x^5 - \frac{2}{x^3} \right) dx$

9. $\int \left(e^{2x} - \frac{5}{e^x} \right) dx$

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jc.com

التمارين

الدرس 4.4

في التمارين 1-3، استعمل التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل.

1. $\int x \sin x dx$

2. $\int x e^{-2x} dx$

3. $\int \ln 2x dx$

في التمارين 4-10، أوجد التكامل غير المحدود.

4. $\int x e^x dx$

5. $\int 3t e^{2t} dt$

6. $\int 2t \cos(3t) dt$

7. $\int x^2 \cos x dx$

8. $\int x^2 e^{-2x} dx$

9. $\int y \ln y dy$

10. $\int t^2 \ln t dt$

في التمارين 11-14، استعمل التكامل بالجدول لإيجاد التكامل.

11. $\int x^3 e^{-2x} dx$

12. $\int x^4 e^{-x} dx$

13. $\int (x^2 - 5x) e^x dx$

14. $\int x^3 \cos 2x dx$

في التمارين 15-20، استعمل الطريقة التي تراها مناسبة لإيجاد التكامل (الطريقة الاعتيادية أو طريقة التكامل بالجدول).

15. $\int x^2 e^{8x} dx$

16. $\int x^2 e^{5x} dx$

17. $\int x^2 \sqrt{x+4} dx$

18. $\int (2x - 1) \ln(3x) dx$

19. $\int (8x + 10) \ln(5x) dx$

20. $\int x^3 e^x dx$

34. صواب أم خطأ إذا كان $f'(x) = g(x)$ ، فإن

$$\int x^2 g(x) dx = x^2 f(x) - 2 \int x f(x) dx$$

بَرِّر إجابتك.

35. اختيار من متعدد $\int x \sin(5x) dx$ يساوي:

- A. $-x \cos(5x) + \sin(5x) + C$
- B. $-\frac{x}{5} \cos(5x) + \frac{1}{25} \sin(5x) + C$
- C. $-\frac{x}{5} \cos(5x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + C$
- D. $\frac{x}{5} \cos(5x) + \frac{1}{25} \sin(5x) + C$
- E. $5x \cos(5x) - \sin(5x) + C$

36. اختيار من متعدد إذا كان

$$\int x^2 \cos x dx = h(x) - \int 2x \sin x dx$$

فإن $h(x)$ يساوي:

- A. $2 \sin x + 2x \cos x + C$
- B. $x^2 \sin x + C$
- C. $2x \cos x - x^2 \sin x + C$
- D. $4 \cos x - 2x \sin x + C$
- E. $(2 - x^2) \cos x - 4 \sin x + C$

استكشاف

في التمارين 37-41، استعمل طريقة التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل.
(يتطلب إيجاد قيمته استعمال التكامل بالأجزاء مرتين، يتبعهما الحل لإيجاد قيمة التكامل المجهول).

37. $\int e^x \sin x dx$

38. $\int e^{-x} \cos x dx$

39. $\int e^x \cos 2x dx$

40. $\int e^{-x} \sin 2x dx$

في التمارين 21-26، أوجد ثابت التكامل باستعمال المعلومات المعطاة.

21. $f(0) = 2$ و $f'(x) = (x+2) \sin x$

22. $f(0) = 3$ و $f'(x) = 2x e^{-x}$

23. $f(0) = 1$ و $f'(x) = x \sec^2 x$

24. $f(1) = 5$ و $f'(x) = x^3 \ln x$

25. $f(1) = 2$ و $f'(x) = x \sqrt{x-1}$

26. $f(-1) = 0$ و $f'(x) = 2x \sqrt{x+2}$

27. معدل تغير الإيرادات معدل تغير الإيرادات (بالريالات لكل

حاسبة) من بيع x حاسبة هو $R'(x) = (x+1) \ln(x+1)$.

أوجد الإيرادات الكلية من بيع أول 12 حاسبة.

(تلميح: في هذا التمرين، من الأسهل كتابة تكامل $(x+1)$

في الصورة $\frac{(x+1)^2}{2}$ بدلاً من $\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$).

28. تكاثر الميكروبات يبلغ معدل تكاثر الميكروبات في بيئة

معينة $m'(t) = 27t e^{3t}$ حيث t الزمن بالأيام.

أوجد التكاثر المتراكم الكلي خلال اليومين الأولين.

29. معدل النمو تنمو مساحة سطح مغطى بالطحالب بمعدل

$$A'(x) = \sqrt{x} \ln t \text{ بوحدة } \text{cm}^2 \text{ كل يوم، لكل } t \geq 1.$$

أوجد المساحة الإضافية التي تغطيها الطحالب من اليوم

الرابع إلى اليوم التاسع.

في التمارين 30-32، أوجد التكامل بطريقة التعويض ثم بطريقة

التكامل بالأجزاء.

30. $\int \sin \sqrt{x} dx$

31. $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx$

32. $\int \sin(\ln r) dr$

أسئلة اختبار معيارية

33. صواب أم خطأ إذا كان $f'(x) = g(x)$ ، فإن

$$\int x g(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx$$

بَرِّر إجابتك.

41. a. أوجد التكامل $\int x^n e^x dx$. إذا كان:

i. $n = 1$

ii. $n = 2$

iii. $n = 3$

b. خمن التكامل لأي عدد صحيح موجب n .

c. **الكتابة للتعليم** اكتب محاكاة مقنعة عن تخمينك في الفرع b.

توسيع الأفكار

42. أوجد التكامل $\int x^7 e^{x^2} dx$ بطريقة التعويض ثم بطريقة التكامل بالأجزاء.

43. **إيجاد تكامل الدوال العكسية** لنفترض أن للدالة f دالة عكسية. استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء بشكل مباشر لتثبت أن

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - \int x \left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x) \right) dx$$

Integration By Partial Fractions

4.5 التكامل بالكسور الجزئية

الكسور الجزئية

عندما نجمع دالتين نسبيتين نحصل، بعد توحيد المقامين، على دالة نسبية درجة المقام فيها أعلى من درجة مقامي الدالتين المجموعتين أو يساوي درجة دالة أحد المقامين إذا كان لها درجة أعلى من الدالة في المقام الآخر. العملية العكسية التي تهدف إلى تجزئة كسر نسبي، لمقامه عوامل عدة، إلى **كسور جزئية** أبسط هي عملية مهمة ومفيدة جدًا في إيجاد التكامل غير المحدود وفي غير ذلك من المسائل.

إذا كان $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q دالتان كثيرتا الحدود ودرجة P أصغر من درجة Q ، وكان بالإمكان كتابة Q في صورة ضرب عوامل خطية، فإن الدالة f هي جمع كسور جزئية مقاماتها هذه العوامل الخطية.

ما ستتعلمه

- الكسور الجزئية
- التكامل بالكسور الجزئية

... ولماذا

عندما تكون الدالة المكاملة كسرًا بسطه ومقامه من كثيرات الحدود، يتعذر أحيانًا إيجاد التكامل إلا بعد تحويل الدالة المكاملة إلى كسور جزئية أبسط.

معياري الدرس

12A.5.6

المصطلحات

- كسور جزئية

partial fractions

مثال 1 الكسور الجزئية

اكتب الدالة $f(x) = \frac{x+1}{x^2+5x+6}$ في صورة جمع كسور جزئية مقاماتها خطية.

الحل

اكتب المقام في صورة ضرب عوامل خطية:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$$

أوجد عددين حقيقيين A و B بحيث يكون $\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$

مع ملاحظة أنه يجب أن تكون المعادلة صحيحة لكل قيم x حيث $x \neq -2$ و $x \neq -3$ بحيث تكون متطابقة.

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

بما أن المقامين في طرفي المتطابقة متساويان، إذن البسطان متساويان أيضًا لكل قيم x حيث $x \neq -2$ و $x \neq -3$

$$x+1 = A(x+3) + B(x+2)$$

غير أن ذلك يمكننا من التحقق أن هذه المعادلة صحيحة لكل قيم x .
يمكنك المتابعة لإيجاد قيمة كل من A و B بطريقتين:

الطريقة 1

بما أن المعادلة $x+1 = A(x+3) + B(x+2) = (A+B)x + (3A+2B)$ هي متطابقة وليست معادلة فقط، يجب أن تكون المعاملات متساوية، وبالتالي

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 1 = 3A + 2B \end{cases}$$

هذا نظام من معادلتين بمجهولين، بحلها نحصل على $A = -1$ و $B = 2$.

إذن،

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}$$

(تابع)

ملاحظة دراسية

قد نختار أي قيمتين أخريين للمتغير x نحصل بعد ذلك على نظام من معادلتين بمجهولين A و B . القيم المختارة هي أصفار المضاعف المشترك الأصغر للمقام.

الطريقة 2

يجب أن تكون المعادلة $x + 1 = A(x + 3) + B(x + 2)$ صحيحة لكل قيم x .
بالتالي، إذا كان $x = -3$ على سبيل المثال نحصل على

$$-3 + 1 = A(-3 + 3) + B(-3 + 2)$$

$$-2 = B(-1)$$

$$B = 2$$

وكما اخترنا $x = -3$ للتخلص من A ، نختار $x = -2$ للتخلص من B :

$$-2 + 1 = A(-2 + 3) + B(-2 + 2)$$

$$-1 = A(1)$$

$$A = -1$$

نعوض قيم A و B ، إذن،

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}$$

حاول أن تحل التمرين 1

التكامل بالكسور الجزئية

سوف نبين الآن أهمية الكسور الجزئية في إيجاد التكامل غير المحدود.

مثال 2 التكامل بالكسور الجزئية

A. اكتب الدالة $f(x) = \frac{x-13}{2x^2-7x+3}$ في صيغة جمع كسور جزئية مقاماتها خطية.

B. أوجد التكامل $\int \left(\frac{x-13}{2x^2-7x+3} \right) dx$

الحل

A. بما أن $\frac{x-13}{2x^2-7x+3} = \frac{x-13}{(2x-1)(x-3)}$ ، أوجد عددين حقيقيين A و B بحيث يكون:

$$\frac{x-13}{(2x-1)(x-3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-3}$$

في هذه الحالة اكتب:

$$\frac{x-13}{2x^2-7x+3} = \frac{A(x-3) + B(2x-1)}{(2x-1)(x-3)}$$

بما أن المقامين في طرفي المتطابقة متساويان، إذن البسطان متساويان أيضًا.

$$x-13 = A(x-3) + B(2x-1)$$

وهذا يجب أن يصح لكل قيم x .

(تابع)

بالتالي، إذا كان $x = 3$ نحصل على

$$3 - 13 = A(3 - 3) + B(2(3) - 1)$$

$$-10 = B(5)$$

$$B = -2$$

وكما اخترت $x = 3$ للتخلص من A ، اختر $x = \frac{1}{2}$ للتخلص من B :

$$-\frac{25}{2} = A\left(-\frac{5}{2}\right) + B\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)$$

$$A = 5$$

وبالتالي

$$f(x) = \frac{x-13}{2x^2-7x+3} = \frac{5}{2x-1} - \frac{2}{x-3}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } \int \left(\frac{x-13}{2x^2-7x+3} \right) dx &= \int \left(\frac{5}{2x-1} - \frac{2}{x-3} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{5}{2x-1} \right) dx - \int \left(\frac{2}{x-3} \right) dx \end{aligned}$$

لإيجاد التكامل الأول، لتكن $u = 2x - 1$ و $du = 2dx$

$$\int \frac{5 dx}{2x-1} = \frac{5}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{5}{2} \ln |u| + C_1 = \frac{5}{2} \ln |2x-1| + C_1$$

كذلك:

$$\int \frac{2 dx}{x-3} = 2 \ln |x-3| + C_2$$

إذن،

$$\int \left(\frac{x-13}{2x^2-7x+3} \right) dx = \frac{5}{2} \ln |2x-1| - 2 \ln |x-3| + C$$

حاول أن تحل التمرين 5

قد يتكرر أحد عوامل المقام أكثر من مرة، وفي هذه الحالة نحتاج إلى عدد مساوٍ لقوة المقام من الكسور الجزئية. يكون المقام في البداية هذا العامل الخطي ثم تزداد قوة هذا العامل في الكسور إلى أن تصبح مساوية لقوته في المقام الأصلي. على سبيل المثال:

$$\frac{x-4}{(x-1)^3(2x-5)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(2x-5)}$$

مثال 3 تكامل دالة كسرية مقامها عامل خطي مكرر

A. اكتب الدالة $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4x+4}$ في صيغة جمع كسور جزئية.

B. أوجد التكامل $\int \left(\frac{3x-1}{x^2+4x+4} \right) dx$

(تابع)

الحل

A. اكتب المقام في صورة ضرب عوامل خطية:

$$\frac{3x-1}{x^2+4x+4} = \frac{3x-1}{(x+2)^2}$$

أوجد عددين A و B بحيث يكون:

$$\frac{3x-1}{x^2+4x+4} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

في هذه الحالة اكتب:

$$\frac{3x-1}{x^2+4x+4} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

إذن لكل قيم x:

$$3x-1 = A(x+2) + B$$

إذا اخترت $x = -2$ تحصل على:

$$3(-2) - 1 = A(-2+2) + B$$

$$B = -7$$

اختر الآن $x = 0$:

$$3(0) - 1 = A(0+2) + B$$

$$-1 = 2A + B$$

$$2A = -1 - B$$

$$2A = -1 + 7$$

عوض $B = -7$

$$2A = 6$$

$$A = 3$$

إذن،

$$\frac{3x-1}{x^2+4x+4} = \frac{3}{(x+2)} - \frac{7}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } \int \frac{3x-1}{x^2+4x+4} dx &= \int \left(\frac{3}{(x+2)} - \frac{7}{(x+2)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{3 dx}{(x+2)} - \int \frac{7 dx}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

لإيجاد التكامل الأول، لتكن $u = x + 2$ و $du = dx$

$$\int \frac{3 dx}{(x+2)} = 3 \int \frac{du}{u} = 3 \ln |u| + C_1 = 3 \ln |x+2| + C_1$$

كذلك:

$$\int \frac{7 dx}{(x+2)^2} = 7 \int \frac{du}{u^2} = -\frac{7}{u} + C_2 = -\frac{7}{x+2} + C_2$$

إذن،

$$\int \frac{3x-1}{x^2+4x+4} dx = 3 \ln |x+2| + \frac{7}{x+2} + C$$

إذا كان $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q دالتان كثيرتا الحدود ودرجة P أكبر أو تساوي درجة Q ،
يتعين علينا إجراء عملية القسمة أولاً، ثم إيجاد الكسور الجزئية.

مثال 4 تكامل دالة كسرية فيها درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

$$\text{أوجد التكامل } \int \frac{3x^4 + 1}{x^2 - 1} dx$$

الحل

لاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام. لذا أجرِ عملية القسمة أولاً.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3 \\ x^2 - 1 \overline{) 3x^4} \\ \underline{3x^4 - 3x^2} \\ 3x^2 + 1 \\ \underline{3x^2 - 3} \\ 4 \end{array}$$

إذن،

$$\begin{aligned} \frac{3x^4 + 1}{x^2 - 1} &= (3x^2 + 3) + \frac{4}{x^2 - 1} \\ \int \frac{3x^4 + 1}{x^2 - 1} dx &= \int \left((3x^2 + 3) + \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx \\ &= \int (3x^2 + 3) dx + \int \left(\frac{4}{(x-1)(x+1)} \right) dx \\ &= x^3 + 3x + \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \right) dx \end{aligned}$$

أوجد عددين A و B بحيث يكون:

$$\begin{aligned} \frac{4}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ 4 &= A(x+1) + B(x-1) \end{aligned}$$

$$4 = A(2) + B(0) \quad \text{عوض } x = 1$$

$$A = 2$$

$$4 = A(0) + B(-2) \quad \text{عوض } x = -1$$

$$B = -2$$

إذن،

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + 1}{x^2 - 1} dx &= x^3 + 3x + \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= x^3 + 3x + 2 \ln |x-1| - 2 \ln |x+1| + C \\ &= x^3 + 3x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

ملاحظة

لاحظ أننا لم نصف ثابت التكامل C بعد إجراء تكامل ناتج القسمة، وذلك لأنه متبقي تكامل آخر بالكسور الجزئية. نضع ثابت التكامل بعد إتمام التكامل بالكسور الجزئية للمقدار كله.

تذكير

قوانين اللوغاريتمات

ليكن S و R عددين حقيقيين موجبين و K عدد حقيقي.

قانون الضرب: $\ln(R \cdot S) = \ln R + \ln S$

قانون القسمة: $\ln\left(\frac{R}{S}\right) = \ln R - \ln S$

قانون القوة: $\ln R^K = K \cdot \ln R$

لمزيد من التوضيح نورد المثال التالي الذي يتطلب إيجاد ثلاثة كسور جزئية.

مثال 5 إيجاد تكامل ثلاثة كسور جزئية

أوجد التكامل $\int \frac{6x^2 - 8x - 4}{(x^2 - 4)(x - 1)} dx$

الحل

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 - 8x - 4}{(x^2 - 4)(x - 1)} dx &= \int \frac{6x^2 - 8x - 4}{(x - 2)(x + 2)(x - 1)} dx \\ &= \int \left(\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1} \right) dx \end{aligned}$$

$$6x^2 - 8x - 4 = A(x + 2)(x - 1) + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)(x + 2)$$

$$4 = A(4)(1) + B(0) + C(0)(4)$$

عوض $x = 2$

$$A = 1$$

$$36 = A(0) + B(-4)(-3) + C(0)$$

عوض $x = -2$

$$B = 3$$

$$-6 = A(0) + B(0) + C(-1)(3)$$

عوض $x = 1$

$$C = 2$$

إذن

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 - 8x - 4}{(x^2 - 4)(x - 1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{3}{x + 2} + \frac{2}{x - 1} \right) dx \\ &= \ln |x - 2| + 3 \ln |x + 2| + 2 \ln |x - 1| + C \\ &= \ln \left(|x - 2| |x + 2|^3 |x - 1|^2 \right) + C \end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 19

مراجعة سريعة 4.5

في التمارين 1-6، استعمل قسمة كثيرات الحدود لكتابة الدالة المعطاة في الصورة $Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ ، حيث درجة R أصغر من درجة D.

4. $\frac{x^3 - 5}{x^2 - 1}$

5. $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3}$

6. $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x - 1}$

1. $\frac{x^2}{x - 1}$

2. $\frac{x^2}{x^2 - 4}$

3. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$

التمارين 4.5 الدرس

في التمارين 1-4، اكتب الدالة في صورة جمع كسور جزئية ذات مقامات خطية.

22. $F'(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - 2x}$

23. $G'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

24. $F'(x) = \frac{2}{x^3 - x}$

25. $G'(t) = \frac{2t^3}{t^3 - t}$

1. $\frac{5x + 1}{x^2 + x - 2}$

2. $\frac{x + 4}{x^2 - 2x}$

3. $\frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3}$

4. $\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

في التمارين 22-25، أوجد دالة أصلية لكل دالة جزئية، ثم باستعمال الكسور الجزئية.

26. $\int \frac{2x}{x^2 - 4} dx$

27. $\int \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x + 1} dx$

28. $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} dx$

29. $\int \frac{2x^3}{x^2 - 1} dx$

في التمارين 5-21، أوجد التكامل غير المحدود.

5. $\int \frac{x - 12}{x^2 - 4x} dx$

6. $\int \frac{2x + 16}{x^2 + x - 6} dx$

7. $\int \frac{2x^3}{x^2 - 4} dx$

8. $\int \frac{x^2 - 6}{x^2 - 9} dx$

9. $\int \frac{7}{2x^2 - 5x - 3} dx$

10. $\int \frac{1 - 3x}{3x^2 - 5x + 2} dx$

11. $\int \frac{8x - 7}{2x^2 - x - 3} dx$

12. $\int \frac{5x + 14}{x^2 + 7x} dx$

13. $\int \frac{2x + 5}{x^2 - 7x + 6} dx$

14. $\int \frac{25}{x^2 - 25} dx$

15. $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 10x + 25} dx$

16. $\int \frac{7x + 28}{x^2 + 8x + 16} dx$

17. $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 15}{x^2 - 25} dx$

18. $\int \frac{4x^4 - 11x^2 - 17}{x^2 - 4} dx$

19. $\int \frac{6x^2 - 14x - 6}{(x - 2)(x^2 - 9)} dx$

20. $\int \frac{x^2 + x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

21. $\int \frac{x^2 - 10x + 5}{(x - 3)(x^2 - 25)} dx$

أسئلة اختبار معيارية

30. صواب أم خطأ العبارة التالية صحيحة.

$$\int \frac{x^2 + 6x + 1}{x^3 + x^2 + 5x - 6} dx = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

بَرِّر إجابتك.

31. صواب أم خطأ العبارة التالية صحيحة.

$$\int \frac{5x^2 + 16x + 17}{2x^3 + 9x^2 + 7x - 6} dx = \frac{3}{2x - 1} - \frac{1}{x + 2} + \frac{2}{x + 3}$$

بَرِّر إجابتك.

توسيع الأفكار

35. كسور جزئية بعوامل خطية ذات تعددية أكبر من واحد

لنفترض أن $f(x) = \frac{P(x)}{(x-r)^m}$ دالة نسبية وأن درجة P أصغر من m. إذن يمكن تحليل صيغة الدالة إلى كسور جزئية كما يلي:

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-r)^m} = \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

a. استعمل طريقة الكسور الجزئية لإيجاد $\int \frac{5x}{(x+3)^2} dx$

b. استعمل نتيجة الفرع a لإيجاد $\int \frac{5x}{(x+3)^3} dx$

32. اختيار من متعدد إذا كان $\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+3}$ ، فإن

A. $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx = \ln(|x+3|^2|x+2|) + C$

B. $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx = \ln \frac{|x+3|^2}{|x+2|} + C$

C. $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx = \ln \frac{|x+3|}{|x+2|} + C$

D. $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx = 2 \ln \frac{|x+3|}{|x+2|} + C$

E. $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx = \ln(|x+3|^2 - |x+2|) + C$

33. اختيار من متعدد $\int \frac{dx}{x^2-1}$ يساوي:

A. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

B. $2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

C. $\ln \left| \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1} \right| + C$

D. $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^2 + C$

E. $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

استكشاف

34. كسور جزئية بعوامل خطية ذات تعددية أكبر

من واحد فيما يلي تحليل دالة إلى كسور جزئية بعوامل خطية ذات تعددية أكبر من واحد في خطوات مفصلة.

a. إذا كان $\frac{x^2+3x+5}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$ ،

أثبت أن $A(x-1)^2 + B(x-1) + C = x^2 + 3x + 5$

b. أثبت أن $A = 1, -2A + B = 3, A - B + C = 5$

c. استعمل الكسور الجزئية لإيجاد $\int \frac{x^2+3x+5}{(x-1)^3} dx$

الوحدة 4 مراجعة الوحدة

في التمارين 1-42، أوجد التكامل غير المحدود باستعمال إحدى طرائق التكامل.

33. $\int (x-1) \ln x \, dx$

34. $\int \frac{4x^3 + x^2 - 14}{x^2 - 4} \, dx$

35. $\int (x+6)e^x \, dx$

36. $\int (4x-12)e^{-8x} \, dx$

37. $\int (6x+3)e^{-2x} \, dx$

38. $\int x^3 \ln x \, dx$

39. $\int x^2 \cos 2x \, dx$

40. $\int \frac{3x+4}{(x+2)^2} \, dx$

41. $\int \frac{2}{x^3 - x} \, dx$

42. $\int \frac{x+5}{x^3 - 4x^2 - 5x} \, dx$

43. **الرياح** تعطي الصيغة التالية الرياح الحدي (بالريالات) لمزرعة صغيرة لتربية الدجاج.

$$P'(x) = 3\sqrt{x} + 2$$

حيث x هو حجم الكمية المباعة، بالميئات من رؤوس الدجاج. إذا كانت قيمة "الرياح" عندما لا تباع أية كمية من الدجاج هي (QR -2 000)، أوجد دالة الرياح.

44. أوجد معادلة منحنى ميل مماسه $x^{\frac{4}{5}} = f'(x)$ ، ويمر بالنقطة (1, 3).

45. **الدَّيْن** تنمذج الدالة أدناه معدل الدَّيْن المتراكم على مالك مطعم (بالريالات القطرية في الشهر).

$$D'(t) = 30(t^2 + 3)t$$

حيث t يمثل الزمن المنقضي على افتتاح المطعم (بالأشهر). إذا علمت أن مبلغ الدَّيْن المتراكم بلغ QR 600 بحلول الشهر الثاني،

a. أوجد دالة مبلغ الدَّيْن الكلي.

b. أوجد عدد الأشهر اللازمة لتبلغ قيمة الدين QR 1 200.

1. $\int 3\sqrt{t} \, dt$

2. $\int \frac{5}{y^4} \, dy$

3. $\int (2x+3) \, dx$

4. $\int (6-x^2) \, dx$

5. $\int -3e^{2x} \, dx$

6. $\int \sin 2x \, dx$

7. $\int 10(10x-16)^6 \, dx$

8. $\int \frac{28}{(7x+5)^5} \, dx$

9. $\int \frac{3 \, du}{\sqrt{3u-5}}$

10. $\int \frac{(4x+5)}{(6x^2+15x)^3} \, dx$

11. $\int z \sqrt{4z^2-5} \, dz$

12. $\int re^{-r^2} \, dr$

13. $\int (x+1) e^{9x^2+18x} \, dx$

14. $\int \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2} \, dz$

15. $\int \frac{10x}{3+5x^2} \, dx$

16. $\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+7} \, dx$

17. $\int \frac{6x+5}{(9x^2+15x)^5} \, dx$

18. $\int \frac{y^2+y}{(2y^3+3y^2+1)^{\frac{2}{3}}} \, dy$

19. $\int p(p+2)^6 \, dp$

20. $\int 4r \sqrt{8-r} \, dr$

21. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+5}}$

22. $\int \frac{2x}{(x+5)^6} \, dx$

23. $\int (t^6+5t)(6t^5+5) \, dt$

24. $\int \frac{(1+3 \ln x)^2}{x} \, dx$

25. $\int \frac{6e^{6r}}{4+e^{6r}} \, dr$

26. $\int \frac{1}{x(\ln x)} \, dx$

27. $\int \frac{(3 \ln z + 2)^4}{z} \, dz$

28. $\int \tan 7x \, dx$

29. $\int \frac{\sin x}{4-\cos x} \, dx$

30. $\int \cos^8 x \sin x \, dx$

31. $\int (\sqrt{x^2-6x})(x-3) \, dx$

32. $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} \, dx$

الوحدة 4 تقويم

في التمارين 1-23، أوجد التكامل غير المحدود باستعمال إحدى طرائق التكامل.

21. $\int (x+2) \sin x \, dx$

22. $\int \frac{3}{x^2+x-2} \, dx$

23. $\int \frac{12}{x^3-x^2-2x} \, dx$

24. أوجد معادلة منحنى ميل مماسه $x^3 = f'(x)$ ، ويمر في النقطة (2, 4).

25. **تزايد عدد السكان** يتزايد عدد السكان إحدى البلدات بمعدل

$$P'(t) = 500 t e^{\frac{-t^2}{5}}$$

حيث $P(t)$ عدد السكان بعد مرور t شهر.

a. أوجد صيغة لإيجاد عدد سكان هذه البلدة بعد t شهر، علماً أن عددهم كان 2 000 عند $t = 0$.

b. استعمل إجابتك من الفرع السابق لإيجاد عدد السكان بعد 3 أشهر.

1. $\int (5x-1) \, dx$

2. $\int (x^2-3x+2) \, dx$

3. $\int \frac{\sqrt{t}}{2} \, dt$

4. $\int \frac{-4}{y^3} \, dy$

5. $\int 5e^{-x} \, dx$

6. $\int \cos 5x \, dx$

7. $\int (-4t+1)^3 \, dt$

8. $\int \frac{6x^2}{(2x^3+7)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

9. $\int r\sqrt{5r^2+2} \, dr$

10. $\int 4x^3 e^{2x^4} \, dx$

11. $\int (x^2-1)e^{x^3-3x} \, dx$

12. $\int \frac{e^{8\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} \, dr$

13. $\int \frac{-4x}{x^2+3} \, dx$

14. $\int \ln(4x+5) \, dx$

15. $\int \frac{t^2+2}{t^3+6t+3} \, dt$

16. $\int \frac{\cos x}{1-\sin x} \, dx$

17. $\int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx$

18. $\int \frac{\sqrt{5 \ln z + 3}}{z} \, dz$

19. $\int x e^x \, dx$

20. $\int x \ln x \, dx$

الوحدة 4 المشروع

إيجاد التكامل باستعمال الدالة العكسية

يتعذر حل بعض أشكال التكامل بأي من الطرائق المذكورة حتى الآن، لكن حلها يصبح في منتهى البساطة عند استعمال خصائص الدوال العكسية، وخصوصاً باستعمال الاشتقاق.

1. إذا كان للدالة f دالة عكسية f^{-1} ، أوجد مشتقة $f^{-1}(x)$ بدلالة مشتقة $f(x)$.

2. لنفترض أن $u = \sin^{-1} x$ ، إذن $\cos u > 0$.

a. عوّض $x = \sin u$ و $dx = \cos u \, du$ لتثبت أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int 1 \, du$$

b. أوجد قيمة $\int 1 \, du$ لتثبت أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$$

3. لنفترض أن $u = \tan^{-1} x$.

a. عوّض $x = \tan u$ و $dx = \sec^2 u \, du$ لتثبت أن

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 1 \, du$$

b. أوجد قيمة $\int 1 \, du$ لتثبت أن

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$

4. لنفترض أن $\sqrt{x} = \sin y$.

a. عوّض $x = \sin^2 y$ و $dx = 2 \sin y \cos y \, dy$ لتثبت أن

$$\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{\sqrt{1-x}} = \int 2 \sin^2 y \, dy$$

b. استعمل المتطابقة التالية لإيجاد قيمة التكامل.

$$\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y$$

5. لنفترض أن $u = \tan^{-1} x$.

a. عوّض $x = \tan u$ و $dx = \sec^2 u \, du$ لتثبت أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \sec u \, du$$

b. استعمل التلميح التالي لإيجاد قيمة التكامل.

تلميح: اضرب المكامل في المقدار $\frac{\sec u + \tan u}{\sec u + \tan u}$ ثم عوّض لإيجاد تكامل النتيجة.

الوحدة 5



التكامل المحدود وتطبيقاته

تعلمنا في الوحدة السابقة كيف نجد التكامل غير المحدود للدوال. في هذه الوحدة سنتعرف إلى التكامل المحدود وتطبيقاته في واقع الحياة. للتكامل المحدود تطبيقات كثيرة: إيجاد المساحات، إيجاد أطوال المسارات المتعرجة، حل مسائل الاحتمال المعقدة وإيجاد التغير الكلي لكمية بمعلومية معدل تغير هذه الكمية، وحساب موقع جسم متحرك بمعلومية سرعته وموقعه الابتدائي. يساعدنا التكامل المحدود أيضًا على معرفة أحجام الأجسام المتناظرة دورانيًا، مثل الأسطوانة والمخروط والكرة. ولعل أحد أهم المنجزات التي ساعدتنا على إيجاد هذه الحجوم الدورانية كان اكتشاف العالم العربي أبي الحسن ابن الهيثم الذي اكتشف، منذ أكثر من ألف سنة، كيفية إيجاد حجم الشكل الذي ينتج عن دوران المنحنى $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$ حيث $0 \leq x \leq a$ ، حول المحور $x = a$ ، ويمكننا رؤية هذا الشكل في قبة معظم المساجد.

5.1 التكامل المحدود

5.2 المساحة تحت المنحنى

5.3 المساحة بين منحنين

5.4 الحجوم الدورانية

5.5 تطبيقات التكامل المحدود

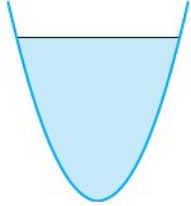
5.6 المعادلات التفاضلية

Definite Integration

5.1 التكامل المحدود

تعريف التكامل المحدود

هناك قواعد محددة لإيجاد مساحات الأشكال الهندسية المعروفة، مثل المستطيل والمربع والمثلث والدائرة وغيرها. ولكن كيف نستطيع إيجاد مساحات أشكال غير منتظمة؟

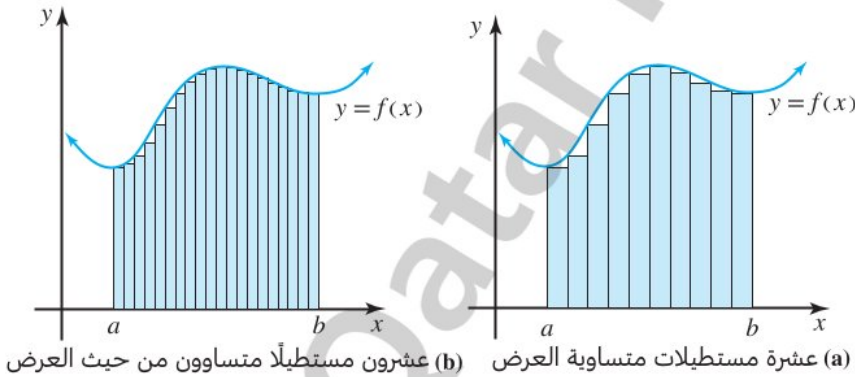


سوف نتعلم لاحقاً كيف نستعمل التكامل لإيجاد مساحات أكثر تنوعاً تحدها منحنيات غير مستقيمة، مثل المساحة المبينة في الشكل المجاور. ولكن في البداية سنتعرف على علاقة مفهوم التكامل الذي تمت دراسته في الوحدة السابقة بالمساحة التي يحدها منحنى دالة.

تعود جذور هذه الفكرة إلى عالم الرياضيات اليوناني أرخميدس (212–287 ق. م.) الذي كان أول من اعتمد أسلوباً دقيقاً أفضى إلى إيجاد الأفكار الأولى لنظرية التكامل. تقوم فكرة أرخميدس، التي أثبتت الرياضيات الحديثة صحتها، على النظر إلى المساحة على أنها عبارة عن مجموعة كبيرة جداً من القطع المستطيلة المتراصة جنباً إلى جنب. (انظر الشكل 5.1.1)

إن مجموع مساحات هذه القطع المستطيلة تساوي تقريباً المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحورين في الربع الأول. وكلما كان عدد هذه القطع أكبر كان مجموع مساحاتها أقرب إلى المساحة المطلوبة.

لإيضاح هذه الطريقة وتعميمها، سنعمل على إيجاد مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة $y = f(x)$ والمحور x والخطان الرأسيان $x = a$ و $x = b$ كما هو مبين في الشكل 5.1.2



الشكل 5.1.2

لإيجاد قيمة تقريبية لهذه المساحة قد نقسمها إلى 10 قطع مستطيلة (انظر الشكل 5.1.2a) أو إلى 20 قطعة مستطيلة (انظر الشكل 5.1.2b)، ثم نجمع مساحات القطع المستطيلة التي مجموع مساحاتها يساوي تقريباً مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى $y = f(x)$ الذي نفترض أنه يقع فوق المحور x ، أي أن $f(x) \geq 0$ لكل قيم x في الفترة $[a, b]$.

ما ستتعلمه

- تعريف التكامل المحدود
- النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
- خصائص التكامل المحدود

...ولماذا

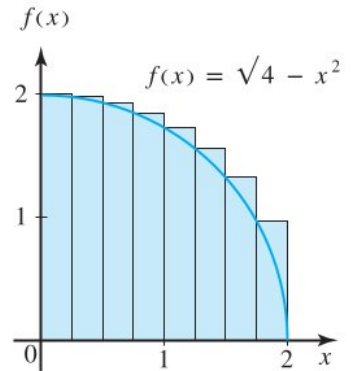
التكامل، الذي يُستعمل عادةً لإيجاد الدوال الأصلية للدوال، يصبح أداة لا غنى عنها لإيجاد المساحات والحجوم عندما يتخذ شكله المحدود الذي سوف نعرفه وندرسه في هذا الدرس.

معيّار الدرس

12A.5.3

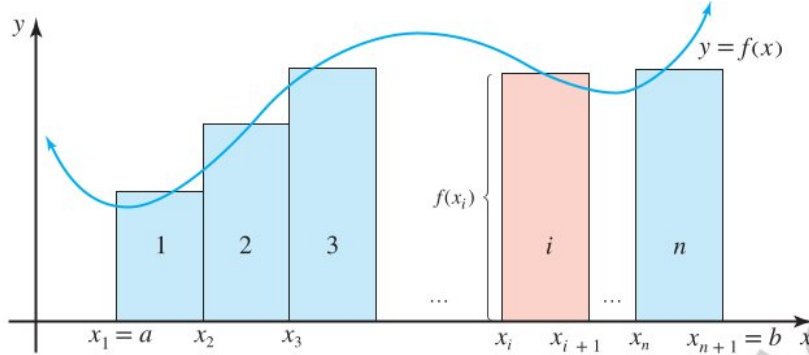
المصطلحات

- التكامل المحدود definite integral
- الحد الأعلى للتكامل upper limit of integral
- الحد الأدنى للتكامل lower limit of integral



الشكل 5.1.1 نقسم المساحة بين الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ والمحورين إلى قطع مستطيلة عرض الواحد $\frac{1}{4}$ ، بحيث يقع الرأس الأعلى إلى جهة اليسار من كل مستطيل على المنحنى.

كلما قسمنا المساحة إلى عدد أكبر من المستطيلات المتساوية العرض نقرب أكثر من احتساب المساحة بدقة أعلى. سوف نقوم هنا بتقريب المستطيلات بالترتيب من اليسار إلى اليمين كما هو موضح في الشكل 5.1.3



الشكل 5.1.3 من المستطيلات المتساوية العرض

طول المستطيل ذي الرقم i يساوي تقريبًا $f(x_i)$ وعرضه يساوي $x_{i+1} - x_i$
 إذن، مساحته تساوي $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$
 إذا كانت F دالة الأصل للدالة f ، أي أن $F'(x) = f(x)$ لكل x ، يمكننا أن نكتب:

$$f(x_i) = F'(x_i) = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

ما يعني أنه كلما اقترب x_{i+1} من x_i ، فإن

$$f(x_i) \approx \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

وبالتالي فإن مساحة المستطيل ذي الرقم i ، $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ تساوي تقريبًا

$$F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

إذن، يصبح مجموع مساحة المستطيلات

$$\begin{aligned} & \text{المستطيل 1} + \text{المستطيل 2} + \text{المستطيل 3} + \dots + \text{المستطيل } n \\ & F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \dots + F(x_{n+1}) - F(x_n) \\ & = F(x_{n+1}) - F(x_1) \\ & = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

نخلص من ذلك إلى أننا، كلما أكثرنا من عدد المستطيلات، نقرب أكثر من احتساب القيمة الدقيقة للمساحة من جهة، وإلى القيمة $F(b) - F(a)$ من جهة أخرى.
 يؤكد البرهان الرياضي الدقيق هذه النتيجة، ولذلك سوف نعرّف التكامل المحدود كما يلي:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

هذا التعريف يمثل القيمة الدقيقة للمساحة، وهو أيضًا الأداة التي يمكن استعمالها لحساب القيم المماثلة كالأحجام غير المستقيمة أو إحداثيات الأجسام المتحركة أو ما إلى ذلك.

تعريف

إذا كانت f دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ ، وكانت F دالة أصلية للدالة f ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

من المفيد الإشارة إلى أن هذه القاعدة تصح حتى لو لم يتحقق الشرط $f(x) \geq 0$ لكل قيم x في $[a, b]$. كما ينبغي التأكيد على أن النظرية الأساسية لا تعرّف التكامل المحدود بل تحدد قيمته، فالمعادلة

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

تستند إلى برهان رياضي لن نتطرق إليه في منهاجنا هذا.

مثال 1 النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

A. أوجد أولاً $\int_1^2 4t^3 dt$ ثم أوجد $\int_1^2 4t^3 dt$.

B. أوجد $\int_0^\pi \sin x dx$.

الحل

A. $\int 4t^3 dt = t^4 + C$

باستعمال النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل، يمكن إيجاد قيمة التكامل المحدود

$\int_1^2 4t^3 dt$ من خلال إيجاد قيمة $t^4 \Big|_1^2$ من دون أن يكون هناك حاجة لإضافة الثابت C .

$$\int_1^2 4t^3 dt = t^4 \Big|_1^2 = (2)^4 - (1)^4 = 15$$

B. استعمال النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

حاول أن تحل التمرينين 1 و 3

يبين المثال 2 الفرق بين التكامل المحدود والتكامل غير المحدود، ففي حين يمثل التكامل المحدود عددًا حقيقيًا، يمثل التكامل غير المحدود مجموعة من الدوال كل منها دالة أصلية للدالة f .

لاحظ أنه لا داعي لإضافة الثابت C في التكامل المحدود لأنه، إذا أضيف إلى الدالة الأصلية، سيُحذف مجددًا في عملية الطرح. على سبيل المثال:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (F(x) + C) \Big|_a^b \\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

ملاحظة

هذا التعريف هو، في الواقع، النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل، وهي جذيرة باسمها لكونها النظرية الأكثر أهمية في التحليل الرياضي، فقد أبرزت الصلة الوثيقة بين التفاضل والتكامل اللذين كانا اتجاهين مستقلين في الأصل، وكان كل منهما يتطور في معزل عن الآخر.

بكلمات أخرى، أي دالة أصلية تفي بالغرض، لذا يمكن الاستغناء عن الثابت لتبسيط المسألة.

إن المتغير المستعمل في الدالة المكاملة لا أهمية له لأن جميع التكاملات المحدودة التالية تساوي المقدار $F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$$

خصائص التكامل المحدود

بما أن $\int_a^b f(x) dx$ يمثل المساحة من a إلى b تحت منحنى الدالة f ، إذن يمكننا أن نعزف

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

وهذا يعني أنه بما أننا لم نتحرك من نقطة البداية، فإنه لا يوجد أي مساحة.

كما أننا نريد أن تكون كل من المساحة من a إلى c والمساحة من c إلى b مساوية للمساحة من a إلى b (انظر الشكل 5.1.4)، أي

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

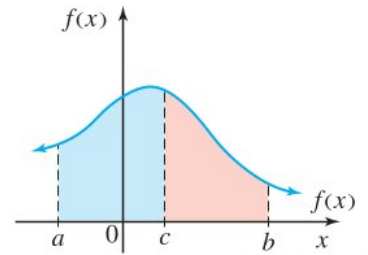
نسأل هنا، ماذا يحصل لو عكسنا الترتيب المعتاد بحيث تصبح نقطة النهاية في الفترة هي الحد الأدنى للتكامل بينما تصبح نقطة البداية في الفترة هي الحد الأعلى للتكامل؟ إذا أردنا الالتزام بالقاعدة الأخيرة التي كتبناها لكل قيم a و b و c ، ستؤدي عملية حساب المساحة من a إلى b ومن ثم رجوعاً من b إلى a إلى العودة إلى نقطة الانطلاق، وعملياً نكون قد قمنا بعملية حساب المساحة من a إلى a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$$

وبالتالي

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

نستطيع استنتاج قواعد أخرى للتكامل المحدود والتي سنستعملها لإيجاد المساحة. فيما يلي جملة من خصائص التكامل المحدود، بعضها ناشئ عن خواص التكامل غير المحدود وبعضها الآخر ناشئ عن تعريف التكامل المحدود.



الشكل 5.1.4 يمكّننا تعريف التكامل المحدود من استنتاج بعض خصائص هذا التكامل ومنها، كما يبين الشكل، أنه يمكننا حساب مساحة تحت منحنى من خلال تقسيمها إلى مساحتين كل منها على جزء من الفترة الكلية.

خصائص التكامل المحدود

1. الضرب بثابت $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, k لكل عدد حقيقي

2. الجمع والطرح $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

3. الصفر $\int_a^a f(x) dx = 0$

4. خاصية الإضافة $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, c لكل عدد حقيقي

5. ترتيب حدّي التكامل $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

6. حفظ التباين إذا كان $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[a, b]$ ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

إذا كان $f(x) \geq 0$ ، فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

مثال 2 استعمال خصائص التكامل المحدود

إذا كان $\int_{-1}^1 h(x) dx = 7$ و $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$ و $\int_1^4 f(x) dx = -2$ ،

أوجد كل تكامل مما يلي، إذا كان ذلك ممكناً.

A. $\int_4^1 f(x) dx$

B. $\int_{-1}^4 f(x) dx$

C. $\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)] dx$

D. $\int_0^1 f(x) dx$

الحل

A. $\int_4^1 f(x) dx = - \int_1^4 f(x) dx = -(-2) = 2$

B. $\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 + (-2) = 3$

C. $\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)] dx = 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 h(x) dx = 2(5) + 3(7) = 31$

D. المعطيات غير كافية لإيجاد التكامل المطلوب. (لا يمكننا القول، مثلاً، إن التكامل المحدود على نصف الفترة يساوي نصف التكامل على الفترة كلها).

يمكننا استعمال خاصية الإضافة لإيجاد التكامل المحدود لدالة متعددة التعريف.

مثال 3 إيجاد التكامل لدالة متعددة التعريف

أوجد $\int_{-1}^3 f(x) dx$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , x \geq 2 \\ x^3 - \frac{x}{2} & , x < 2 \end{cases}$$

الحل

باستعمال خاصية الإضافة نكتب

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 \left[x^3 - \frac{x}{2} \right] dx + \int_2^3 [2x^2 - 1] dx \\ &= \int_{-1}^2 x^3 dx - \int_{-1}^2 \frac{x}{2} dx + 2 \int_2^3 x^2 dx - \int_2^3 1 dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-1}^2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_{-1}^2 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_2^3 - x \Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{4} (2^4 - (-1)^4) - \frac{1}{4} (4 - 1) + \frac{2}{3} (27 - 8) - (3 - 2) \\ &= \frac{15}{4} - \frac{3}{4} + \frac{38}{3} - 1 = \frac{44}{3} \end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 30

يمكننا استعمال خصائص التكامل المحدود في إيجاد قيمة التكامل كما يوضح المثال التالي.

مثال 4 إيجاد التكامل المحدود

A. أوجد $\int_2^5 (6x^2 - 3x + 5) dx$

B. أوجد $\int_1^2 \frac{dy}{y}$

الحل

A. استعمال خواص التكامل المحدود بالإضافة إلى النظرية الأساسية

$$\begin{aligned} \int_2^5 (6x^2 - 3x + 5) dx &= 6 \int_2^5 x^2 dx - 3 \int_2^5 x dx + 5 \int_2^5 dx \\ &= 2x^3 \Big|_2^5 - \frac{3}{2} x^2 \Big|_2^5 + 5x \Big|_2^5 \\ &= 2(5^3 - 2^3) - \frac{3}{2} (5^2 - 2^2) + 5(5 - 2) \\ &= 234 - \frac{63}{2} + 15 = 217.5 \end{aligned}$$

(تابع)

B. $\int_1^2 \frac{dy}{y} = \ln |y| \Big|_1^2 = \ln |2| - \ln |1| = \ln 2 - \ln 1 \approx 0.6931 - 0 \approx 0.69$

حاول أن تحل التمرينين 13 و 14

إن استعمال طرائق التكامل التي درسناها سابقًا كالتكامل بالتعويض والتكامل بالأجزاء والتكامل بالكسور الجزئية مفيد في التكامل المحدود تمامًا كما في التكامل غير المحدود، وذلك لإيجاد الدالة الأصلية. ولكن في التكامل بالتعويض يكون الفرق بين الحالتين هو أننا نجد التكامل المحدود في فترة معينة، وهذه الفترة تتغير عند التعويض.

مثال 5 إيجاد التكامل المحدود باستعمال طرائق التكامل

A. أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x \, dx$

B. أوجد $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

الحل

A. الطريقة الأولى:

لتكن $u = \tan x$ ، إذن $du = \sec^2 x \, dx$

لا بد الآن من تغيير حدود التكامل المحدود بالنسبة للمتغير u .

إذا كان $x = 0$ ، فإن $u(0) = \tan 0 = 0$

وإذا كان $x = \frac{\pi}{3}$ ، فإن $u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

إذن،

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^{\sqrt{3}} u \, du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

الطريقة الثانية:

يفضل البعض طريقة أخرى تقضي بإيجاد التكامل غير المحدود أولاً ثم إيجاد قيمة التكامل المحدود. لإيجاد التكامل غير المحدود في هذا المثال، نتجاهل حدود التكامل

الأصلي ونستعمل التعويض $u = \tan x$ و $du = \sec^2 x \, dx$

إذن

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

سنجاهل الثابت C لأنه لا يؤثر في النتيجة، إذن باستعمال النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل، نكتب

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x \, dx = \frac{\tan^2 x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\tan \frac{\pi}{3}\right)^2}{2} - \frac{(\tan 0)^2}{2} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

لا ينبغي الخلط بين الطريقتين. في الطريقة الأولى، لا نعود أبدًا إلى المتغير الأصلي. في الطريقة الثانية، من الأساسي أن نعود إلى المتغير الأصلي وأن لا نغير حدود التكامل.

B. نستخدم طريقة التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل غير المحدود.

نعوض u بدلاً من $\ln x$ أينما وجد. إذن ليكن

$$u = \ln x, \quad dv = \frac{1}{x^2} dx$$

إذن

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = -\frac{1}{x}$$

عوض في قاعدة التكامل بالأجزاء

$$\int u dv = uv - \int v du$$

نعوض هذه القيم في صيغة التكامل بالأجزاء ونجد تكامل الجزء الثاني إلى اليمين.

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= (\ln x) \left(-\frac{1}{x} \right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\ &= \frac{-\ln x - 1}{x} + C \end{aligned}$$

نجد الآن التكامل المحدود

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left. \frac{-\ln x - 1}{x} \right|_1^e \\ &= \frac{-1 - 1}{e} - \frac{0 - 1}{1} \\ &= \frac{-2}{e} + 1 \end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 34 و 38

يتضح مما سبق أنه بإمكاننا النظر إلى التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$ على أنه التغير الكلي للدالة الأصلية F في الفترة $[a, b]$ ، أي $F(b) - F(a)$.

دالة أصلية في التكامل المحدود

إذا كانت f دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ ، يمكننا تعريف الدالة

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

هذه الدالة هي دالة أصلية للدالة f أي أن

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

من الضروري تقدير مفعول المعادلة

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

تقول هذه المعادلة أن كل دالة متصلة f هي مشتقة لدالة ما، تحديدًا، $\int_a^x f(t) dt$. تقول إذن أن كل دالة متصلة لها دالة أصلية، وأن عمليتي التفاضل والتكامل هما عمليتان عكسيتان.

مثال 6 دالة التكامل المحدود

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات التالية:

A. $y = \int_{-\pi}^x \cos t dt$

B. $y = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

C. $y = \int_x^5 3t \sin t dt$

الحل

A. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\pi}^x \cos t dt \right) = \cos x$

B. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \right) = \frac{1}{1+x^2}$

C. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_x^5 3t \sin t dt \right) = -\frac{d}{dx} \left(\int_5^x 3t \sin t dt \right) = -3x \sin x$

حاول أن تحل التمرينين 42 و 44

مراجعة سريعة 5.1

في التمارين 5-8، أوجد التكامل.

في التمارين 1-4، أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات التالية:

5. $\int 6x \sqrt{x^2 + 4} dx$

6. $\int \frac{4x}{x^2 + 2} dx$

7. $\int 15x^2 e^{x^3} dx$

8. $\int x \ln x dx$

1. $y = x \ln x - x$

2. $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}, (n \neq -1)$

3. $y = \frac{1}{e^x + 1}$

4. $y = xe^x$

الدرس 5.1 التمارين

في التمارين 1-7، أوجد قيمة التكامل المحدود.

c. $\int_1^2 3f(x) dx$

d. $\int_2^5 f(x) dx$

e. $\int_1^5 [f(x) - g(x)] dx$

f. $\int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx$

11. لنفترض أن h و f دالتان متصلتان وأن $\int_7^9 h(x) dx = 4$

و $\int_1^9 f(x) dx = -1$ و $\int_7^9 f(x) dx = 5$

استعمل خواص التكامل المحدود لإيجاد التكامل المطلوب.

a. $\int_1^9 -2f(x) dx$

b. $\int_7^9 [f(x) + h(x)] dx$

c. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)] dx$

d. $\int_9^1 f(x) dx$

e. $\int_1^7 f(x) dx$

f. $\int_9^7 [f(x) - h(x)] dx$

في التمارين 12-27، أوجد قيمة التكامل المحدود.

12. $\int_0^2 (7x^2 - 8x + 8) dx$

13. $\int_3^5 (2x^3 - 3x + 4) dx$

14. $\int_1^3 \frac{2}{y} dy$

15. $\int_{-2}^3 (-x^2 - 3x + 5) dx$

16. $\int_0^2 3\sqrt{4u+1} du$

17. $\int_3^9 \sqrt{2r-2} dr$

18. $\int_0^4 2(t^{\frac{1}{2}} - t) dt$

19. $\int_0^4 -(3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) dx$

20. $\int_1^4 (5y\sqrt{y} + 3\sqrt{y}) dy$

21. $\int_4^9 (4\sqrt{r} - 3r\sqrt{r}) dr$

1. $\int_1^3 3x^2 dx$

2. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

4. $\int_0^1 e^x dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

6. $\int_1^4 2x dx$

7. $\int_{-1}^2 3x^2 dx$

8. لنفترض أن $\int_1^2 f(x) dx = 5$. أوجد قيمة التكامل المطلوب.

a. $\int_1^2 f(u) du$

b. $\int_1^2 \sqrt{3} f(z) dz$

c. $\int_2^1 f(t) dt$

d. $\int_1^2 [-f(x)] dx$

9. لنفترض أن $\int_{-3}^0 g(t) dt = \sqrt{2}$. أوجد قيمة التكامل المطلوب.

a. $\int_0^{-3} g(t) dt$

b. $\int_{-3}^0 g(u) du$

c. $\int_{-3}^0 [-g(x)] dx$

d. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}} dr$

10. لنفترض أن g و f دالتان متصلتان وأن $\int_1^5 g(x) dx = 8$

و $\int_1^5 f(x) dx = 6$ و $\int_1^2 f(x) dx = -4$

استعمل خواص التكامل المحدود لإيجاد التكامل المطلوب.

a. $\int_2^2 g(x) dx$

b. $\int_5^1 g(x) dx$

في التمارين 38-41، استعمل التكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة التكامل.

$$38. \int_0^1 \frac{6x+5}{e^x} dx$$

$$39. \int_0^1 \frac{3x+7}{e^x} dx$$

$$40. \int_1^9 \ln 3x dx$$

$$41. \int_1^2 \ln 5x dx$$

في التمارين 42-45، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

$$42. y = \int_2^x (\tan^3 u) du$$

$$43. y = \int_4^x e^u \sec u du$$

$$44. y = \int_7^x \frac{1+t}{1+t^2} dt$$

$$45. y = \int_{-\pi}^x \frac{2 - \sin t}{3 + \cos t} dt$$

46. لنفرض أن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق بدلالة x بحيث

$$\int_0^1 v du = 4 \text{ ولدنيا المعطيات التالية في الجدول أدناه.}$$

استعمل هذه المعلومات لإيجاد قيمة $\int_0^1 u dv$.

x	$u(x)$	$v(x)$
0	2	1
1	3	-4

47. لنفرض أن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق بدلالة x بحيث

$$\int_0^{20} v du = -1 \text{ ولدنيا المعطيات التالية في الجدول.}$$

استعمل هذه المعلومات لإيجاد قيمة $\int_0^{20} u dv$.

x	$u(x)$	$v(x)$
0	5	-2
20	15	6

$$22. \int_1^4 \frac{3}{(3x+2)^2} dx$$

$$23. \int_1^4 \frac{-3}{(3p+1)^2} dp$$

$$24. \int_4^5 (8n^{-2} - n^{-3}) dn$$

$$25. \int_3^4 \left(0.4e^{-0.4a} + \frac{3}{a}\right) da$$

$$26. \int_{0.5}^1 (p^3 - e^{4p}) dp$$

$$27. \int_1^{64} \frac{\sqrt{z}-2}{\sqrt[3]{z}} dz$$

28. أوجد $\int_{-1}^4 f(x) dx$ إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & , x \leq 0 \\ -\frac{x}{4}+3 & , x > 0 \end{cases}$$

29. أوجد $\int_{-2}^3 f(x) dx$ إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & , x \leq 0 \\ \frac{x}{2}+5 & , x > 0 \end{cases}$$

30. أوجد $\int_{-4}^1 f(x) dx$ إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}-2 & , x \leq 0 \\ -2x-2 & , x > 0 \end{cases}$$

في التمارين 31-33، قم بالتعويض باستعمال متغير u ثم أوجد التكامل من $u(a)$ إلى $u(b)$.

$$31. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan x \sec^2 x dx$$

$$32. \int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} dr$$

$$33. \int_0^1 \sqrt{t^5+2t} (5t^4+2) dt$$

في التمارين 34-37، استعمل التكامل بالتعويض لإيجاد قيمة التكامل.

$$34. \int_0^3 m^2 (4m^3+2)^3 dm$$

$$35. \int_1^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$36. \int_0^8 9x^{\frac{1}{3}} \sqrt{x^{\frac{4}{3}}+9} dx$$

$$37. \int_0^1 \frac{e^{2z}}{\sqrt{1+e^{2z}}} dz$$

استكشاف

52. لديك $\int_0^1 e^{x^2} dx = 1.46265$ و $\int_0^2 e^{x^2} dx = 16.45263$

استعمل هذه المعلومات لإيجاد

$$\int_1^2 e^{x^2} dx$$

53. إيجاد التكلفة من التكلفة الحدية دالة التكلفة الحدية لطباعة

ملصق عند طباعة العدد x من الملصق هي بالريالات:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a. أوجد $c(1) - c(100)$ ، التي تمثل تكلفة طباعة الملصقات من 2 إلى 100

b. أوجد $c(400) - c(100)$ ، التي تمثل تكلفة طباعة الملصقات من 101 إلى 400

توسيع الأفكار

54. التعويضات المثلثية لنفرض أن $\sqrt{x} = \sin y$.

a. استعمل التعويض $x = \sin^2 y$ و $dx = 2 \sin y \cos y dy$ لتبين أن

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy$$

b. استعمل المتطابقة $(\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y)$ لتجد قيمة التكامل المحدود دون استعمال الحاسبة.

55. التخميم تخبرنا الأبحاث عن عملية الهضم في معدة إحدى

فصائل الحيوانات أن نسبة المواد المحللة التي تمر في المعدة دون تخمير في الساعة الأولى بعد الأكل يمكن حسابها من خلال التكامل المحدود

$$\int_0^1 ke^{-kt}(1-t)dt$$

حيث تقيس k معدل تخمير المواد.

أوجد التكامل أعلاه بحسب قيم k المستعملة في الأبحاث:

$$k = \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}$$

أسئلة اختبار معيارية

48. صواب أم خطأ إذا كانت $f(x)$ دالة متعددة التعريف بحيث

تتغير صيغة الدالة عند الصفر، فإن بإمكاننا إيجاد التكامل المحدود للدالة في الفترة $[-3, 4]$ باستعمال خاصية الجمع والطرح في التكامل المحدود. بزر إجابتك.

49. صواب أم خطأ إذا كان $\int_a^b f(x) dx = 0$ ، فإن $f(a) = f(b)$. بزر إجابتك.

50. اختيار من متعدد إذا كان $\int_3^7 g(x) dx = 3$

و $\int_3^7 f(x) dx = 5$ فإن كل الخيارات التالية صحيحة عدا:

A. $\int_3^7 f(x) g(x) dx = 15$

B. $\int_3^7 [f(x) + g(x)] dx = 8$

C. $\int_3^7 2f(x) dx = 10$

D. $\int_3^7 [f(x) - g(x)] dx = 2$

E. $\int_7^3 [g(x) - f(x)] dx = 2$

51. اختيار من متعدد إذا كان $\int_2^5 f(x) dx = 12$ و $\int_5^8 f(x) dx = 4$ فإن كل الخيارات التالية صحيحة عدا:

A. $\int_2^8 f(x) dx = 16$

B. $\int_2^5 f(x) dx - \int_5^8 3f(x) dx = 0$

C. $\int_5^2 f(x) dx = -12$

D. $\int_{-5}^{-8} f(x) dx = -4$

E. $\int_2^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx = 16$

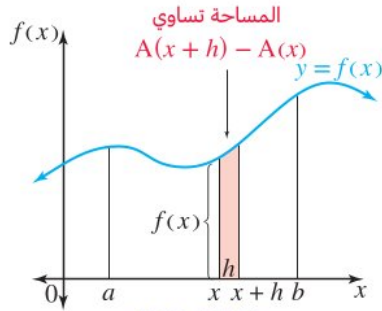
The Area Under The Curve

المساحة تحت المنحنى

5.2

التكامل المحدود وحساب المساحة

تعلمنا في الدرس السابق كيفية تعريف الدالة $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ التي هي دالة الأصل للدالة f ، أي $F'(x) = f(x)$ كما أشرنا.



الشكل 5.2.1

إذا عرّفنا الآن الدالة $A(x)$ بأنها المساحة الواقعة بين منحنى الدالة والمحور x من a إلى x (انظر الشكل 5.2.1)، يمكننا أن نلاحظ من التمثيل البياني أن الفرق $A(x+h) - A(x)$ هو المساحة الأرجوانية. هذه المساحة تقترب من مساحة مستطيل كلما صغرت قيمة h ، ومساحة هذا المستطيل تساوي تقريباً $f(x) \times h$. بالتالي، تقترب قيمة $A(x+h) - A(x)$ من قيمة $f(x) \times h$ كلما صغرت قيمة h .

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$$

وهو ما يساعدنا على أن نتبين مرة أخرى أن $A'(x) = f(x)$ ، أي إن الدالة $A(x)$ هي دالة الأصل للدالة $f(x)$.

ما ستتعلمه

- التكامل المحدود وحساب المساحة
- المساحة المحددة بأكثر من منحنى

...ولماذا

إذا كانت رؤية المساحة باعتبارها مجموع مساحات المستطيلات التي تشكل هذه المساحة هي الفكرة الأولى التي أفضت إلى حساب التكامل، فمن الطبيعي أن يكون حساب المساحات من أولى تطبيقات التكامل المحدود.

معيّار الدرس

12A.6.1

المساحة تحت المنحنى (على شكل تكامل محدود)

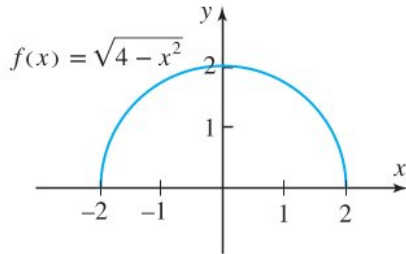
إذا كانت $y = f(x)$ دالة موجبة، وقابلة للتكامل على فترة مغلقة $[a, b]$ ، فإن المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق المحور x من $x = a$ إلى $x = b$ هي التكامل المحدود للدالة f من a إلى b .

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

يصلح هذا التعريف في الاتجاهين: يمكننا استعمال المساحات لحساب التكامل، كذلك يمكننا استعمال التكامل لحساب المساحات.

مثال 1 إيجاد التكامل المحدود باستعمال المساحة

باستعمال الشكل أدناه، أوجد التكامل المحدود $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$.



الحل

يمكنك أن تلاحظ أن منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ هو نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 2 (انظر الشكل أعلاه).

يمكن إيجاد المساحة بين المنحنى والمحور x من -2 إلى 2 باستعمال القاعدة الهندسية لمساحة نصف الدائرة:

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi (2)^2 = 2\pi \text{ (وحدة مربعة)}$$

بما أن قيمة التكامل المطلوب هي المساحة بين المنحنى والمحور x من -2 إلى 2 ، فإن

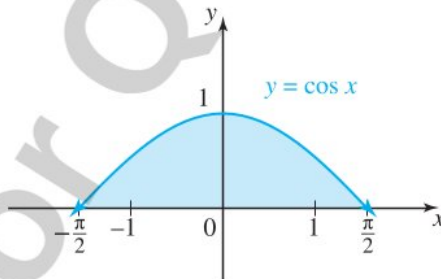
$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$$

حاول أن تحل التمرين 3

مثال 2 حساب المساحة تحت المنحنى

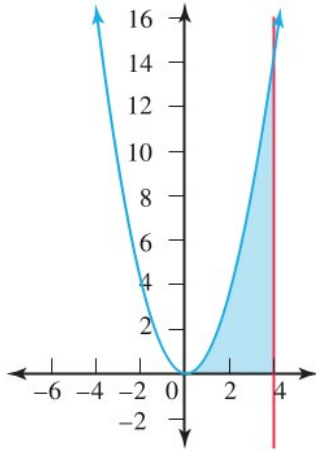
A. أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$.

B. أوجد المساحة المظللة في الشكل أدناه.



الحل

A. يبين الشكل أدناه أن المساحة المطلوبة تقع تحت منحنى الدالة $f(x) = x^2$ الواقع في الربع الأول وبين المستقيم $x = 0$ والمستقيم $x = 4$ باللون الأحمر.



المساحة المطلوبة بحسب التعريف هي قيمة التكامل

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 x^2 dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^4 \\ &= \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{64}{3} \approx 21.33 \end{aligned}$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

B. يحد المساحة المظللة في الشكل المنحنى $y = \cos x$ والمحور x والمستقيمان $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$. بحسب التعريف، يمكن كتابة المساحة على الشكل

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \left. \sin x \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 2 وحدة مربعة.

مساعدة دراسية

يمكنك أيضًا استعمال التناظر لإيجاد نفس المساحة من خلال إيجاد قيمة

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

رأينا فيما سبق أنه إذا كانت $f(x) \geq 0$ في $[a, b]$ ، يعطينا التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$ المساحة التي تقع تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق المحور x وبين المستقيمين $x = a$ و $x = b$.
أما إذا كانت f دالة متصلة و $f(x) \leq 0$ في الفترة $[a, b]$ ،

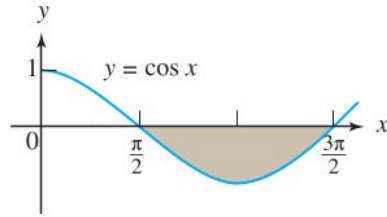
يكون:

$$\int_a^b f(x) dx = -A$$

نكتب إذن:

$$A = -\int_a^b f(x) dx \text{ فإن } f(x) \leq 0 \text{،}$$

انظر الشكل 5.2.2، بما أن $y = \cos x \leq 0$ في الفترة $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ، فإن تكامل الدالة يصبح سالبًا، وتصبح مساحة المنطقة المظللة هي النظير الجمعي لقيمة هذا التكامل،



الشكل 5.2.2

أي أنها تساوي القيمة المطلقة لهذا التكامل.

$$A = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$$

مثال 3 المساحة بين منحنى دالة والمحور x

أوجد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x من $x = 1$ إلى $x = 3$.

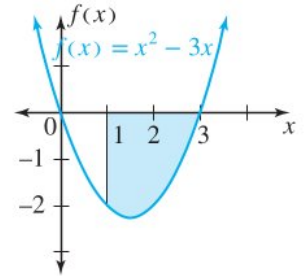
الحل

لاحظ من التمثيل البياني المجاور أن هذه المنطقة تقع تحت المحور x ، وبالتالي فإن

$$\left| \int_1^3 (x^2 - 3x) dx \right| \text{ مساحتها تساوي}$$

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 - 3x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_1^3 \right| = \left| \left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) \right| = \left| -\frac{10}{3} \right| = \frac{10}{3}$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي $\frac{10}{3}$ وحدة مربعة.



الشكل 5.2.3 المساحة بين منحنى الدالة

$f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x من $x = 1$ إلى

إلى $x = 3$ تقع تحت المحور x .

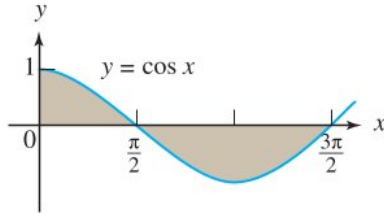
حاول أن تحل التمرين 14

إذا كان للدالة f قيمًا موجبة وقيمًا سالبة في الفترة $[a, b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x) dx = (\text{المساحة تحت المحور } x) - (\text{المساحة فوق المحور } x)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

يبين الشكل 5.2.4 أن المساحة المحددة بالمنحنى $y = \cos x$ في الفترة $[0, \frac{3\pi}{2}]$ تنقسم إلى قسمين يقع أحدهما تحت المحور x والآخر فوقه. إذن، لإيجاد المساحة المطلوبة علينا إيجاد المساحة ما فوق المحور x من خلال التكامل المحدود، واستعمال القيمة المطلقة للتكامل المحدود لإيجاد المساحة الثانية التي تقع تحت المحور x .



الشكل 5.2.4

إذن، المساحة المطلوبة هي

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx \right|$$

نلخص في ما يلي الخطوات اللازمة لإيجاد مساحة.

إيجاد المساحة

لإيجاد المساحة بين منحنى الدالة f والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$ اتبع الخطوات التالية:

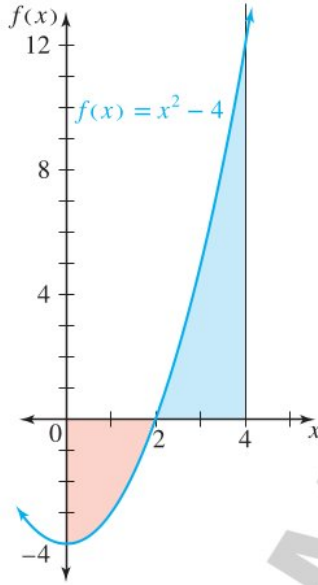
1. أوجد نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع المحور x ضمن الفترة $[a, b]$ وقسم المساحة تبعا لهذه النقاط إلى عدة أجزاء وحدد الأجزاء الواقعة فوق المحور x والأجزاء الواقعة تحت المحور x (يمكن الاستعانة بالتمثيل البياني للدالة إذا لزم الأمر).
2. يمكن إيجاد مساحة الجزء الواقع فوق المحور x من خلال إيجاد التكامل المحدود على هذا الجزء. أما المساحة الواقعة تحت المحور x فهي القيمة المطلقة للتكامل المحدود.
3. المساحة المطلوبة تساوي مجموع مساحات الأجزاء.

مثال 4 استعمال خطوات إيجاد المساحة بين منحنى دالة والمحور x

أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 4$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$.

الحل

التمثيل البياني للدالة يبين أن المساحة تنقسم إلى قسمين يقع أحدهما تحت المحور x والآخر فوقه.



الخطوة 1 يمكنك أن تستنتج من الشكل أعلاه أن المنحنى يقطع المحور x عند $x = 2$ ، إلا أننا نستطيع أن نتحقق من ذلك جبريًا على الشكل التالي:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$x = 2 \in [0, 4]$ أو $x = -2 \notin [0, 4]$ وهو حل غير مقبول.

بما أن المنحنى يقطع المحور x عند $x = 2$ ، تنقسم الفترة $[0, 4]$ إلى الفترتين $[0, 2]$ و $[2, 4]$.

الخطوة 2 يبين الشكل أنه لإيجاد المساحة المظللة، عليك إيجاد المساحة ما فوق المحور x من خلال التكامل المحدود في $[2, 4]$ وإيجاد المساحة تحت المحور x من خلال القيمة المطلقة للتكامل المحدود في $[0, 2]$.

(تابع)

مساعدة دراسية

يمكننا تحديد الجزء الواقع فوق وتحت المحور x عن طريق بحث إشارة الدالة في الفترات الجزئية والتي هي $[0, 2]$ و $[2, 4]$.

في $[0, 2]$ ، $f(x) \leq 0$ وفي $[2, 4]$ ، $f(x) \geq 0$ إذن في $[0, 2]$ ، $f(x)$ تقع تحت المحور x وفي $[2, 4]$ ، $f(x)$ تقع فوق المحور x .

الخطوة 3 المساحة المطلوبة هي إذن جمع التكاملين:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^2 (x^2 - 4) dx \right| + \int_2^4 (x^2 - 4) dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_0^2 \right| + \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^4 \\ &= \left| \frac{8}{3} - 8 \right| + \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \\ &= 16 \end{aligned}$$

إذن المساحة المطلوبة تساوي 16 وحدة مربعة.

تنبيه

إذا حسبنا التكامل المحدود فقط في المثال 4، فسوف نحصل على

$$\begin{aligned} \int_0^4 (x^2 - 4) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_0^4 \\ &= \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - 0 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

وهذا لا يعطي قيمة المساحة المطلوبة.

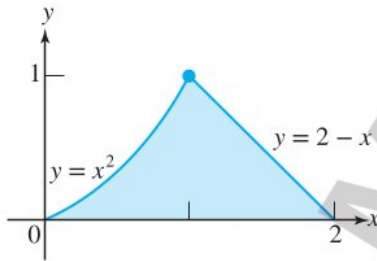
حاول أن تحل التمرينين 18 و 27

المساحة المحددة بأكثر من منحنى

قد تكون المساحة المطلوب إيجادها تقع تحت أكثر من منحنى، كما في المثال التالي.

مثال 5 إيجاد المساحة باستعمال أكثر من تكامل محدود واحد

أوجد المساحة المحددة في التمثيل البياني.



الحل

تقع المساحة تحت منحنى كل من الدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x$ ، لذا نقسم المساحة إلى قسمين، أحدهما تحت منحنى الدالة $y = 2 - x$ والآخر تحت منحنى الدالة $y = x^2$.

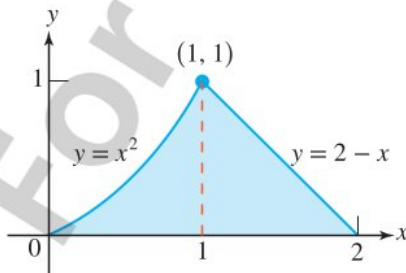
لإيجاد قيمة x التي تفصل بين المساحتين اكتب:

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -2 \text{ (غير مقبول)}$$



(تابع)

إذن، المساحة المطلوبة تساوي المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة $y = x^2$ بين $x = 0$ و $x = 1$ مضافًا إليها المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة $y = 2 - x$ بين $x = 1$ و $x = 2$ ، وتساوي

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} + 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

إذن، المساحة المحددة في التمثيل البياني تساوي $\frac{5}{6}$ وحدة مربعة.

حاول أن تحل التمرين 29

مراجعة سريعة 5.2

في التمارين 1-8، أوجد قيمة التكامل المحدود.

5. $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5 ds$

6. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2} dx$

7. $\int_3^5 (2x + 6) dx$

8. $\int_{-2}^2 (4z + 3) dz$

1. $\int_{-2}^1 5 dx$

2. $\int_3^7 (-20) dx$

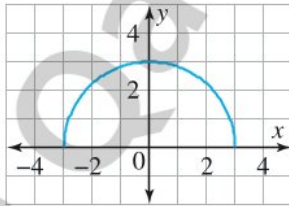
3. $\int_0^3 (-160) dx$

4. $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2} d\theta$

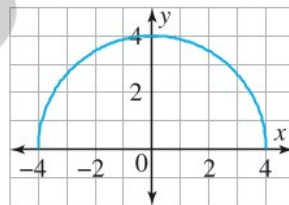
الدرس 5.2 التمارين

في التمارين 1-4، استعمل التمثيل البياني للدالة المكاملة والمساحات لإيجاد قيمة التكامل المحدود.

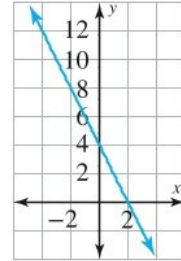
3. $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$



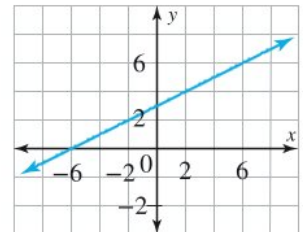
4. $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2} dx$



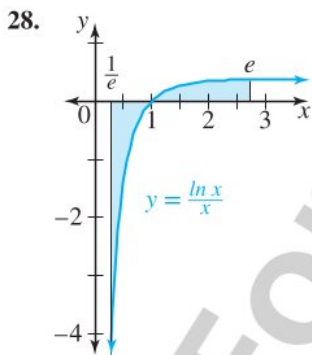
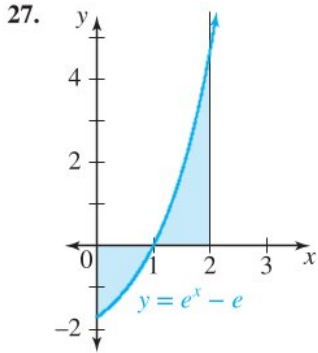
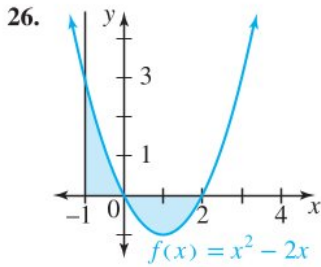
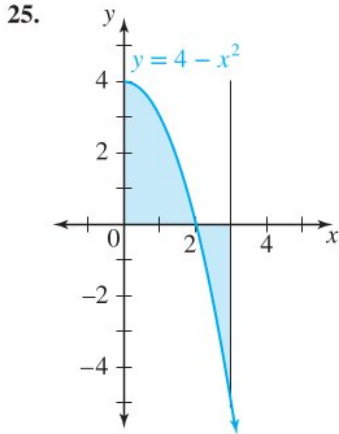
1. $\int_{-2}^2 (-2x + 4) dx$



2. $\int_{-2}^6 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx$



في التمارين 25-29، أوجد المساحة المظللة في التمثيل البياني.



في التمارين 5-14، استعمل التكامل المحدود في إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x في الفترة المعطاة.

5. $f(x) = 2x + 5, [2, 4]$

6. $f(x) = 3x + 2, [1, 3]$

7. $f(x) = -x^2 + 5, [-2, 2]$

8. $f(x) = x^2, [1, 5]$

9. $f(x) = e^x + 2, [-2, 2]$

10. $f(x) = e^x - 1, [0, 4]$

11. $f(x) = \frac{2}{x}, [1, 4]$

12. $f(x) = \frac{1}{x}, [1, 9]$

13. $f(x) = \sin x, [0, \pi]$

14. $f(x) = x^2 - 4, [0, 2]$

في التمارين 15-23، استعمل التكامل المحدود لإيجاد المساحة الواقعة بين المحور x ومنحنى الدالة f في الفترة المعطاة. تحقق أولاً مما إذا كان التمثيل البياني للمنحنى يتقاطع مع المحور x في الفترة المعطاة.

15. $f(x) = 2x - 14, [6, 10]$

16. $f(x) = 4x - 32, [5, 10]$

17. $f(x) = 2 - 2x^2, [0, 5]$

18. $f(x) = 9 - x^2, [0, 6]$

19. $f(x) = x^3, [-1, 3]$

20. $f(x) = x^3 - 2x, [-2, 4]$

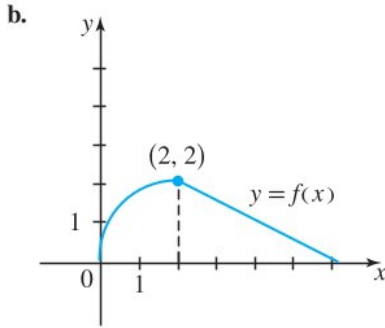
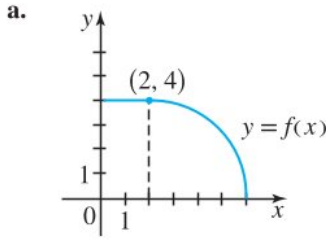
21. $f(x) = e^x - 1, [-1, 2]$

22. $f(x) = 1 - e^{-x}, [-1, 2]$

23. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}, [1, e^2]$

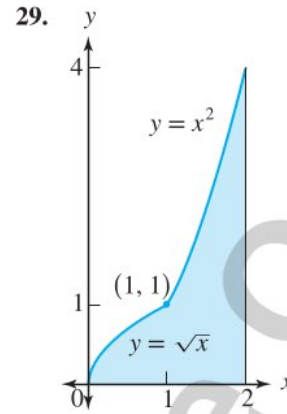
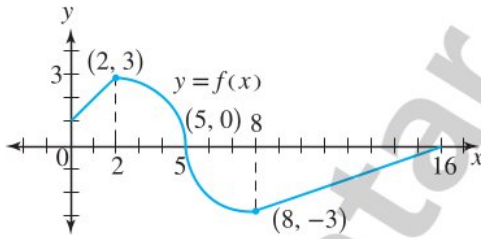
24. أوجد المساحة بين $y = \sec^2\left(\frac{x}{3}\right)$ والمحور x من $x = -\pi$ إلى $x = \pi$.

33. أوجد $\int_0^6 f(x) dx$ لكل تمثيل بياني للدالة $y = f(x)$ ، حيث تتألف $f(x)$ من قطع مستقيمة وأقواس من دائرة.

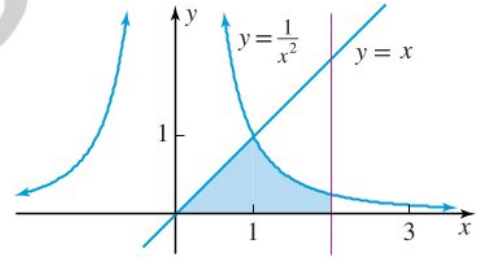


34. يتكون التمثيل البياني للدالة f ، الموضح في الشكل أدناه، من قطعتين مستقيمتين وربعي دائرة.

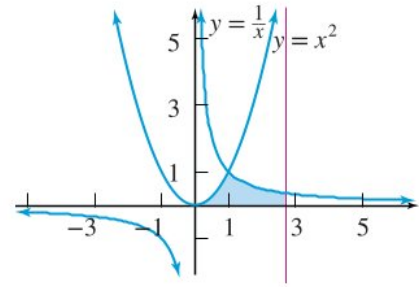
أوجد قيمة التكامل المحدود $\int_0^{16} f(x) dx$.



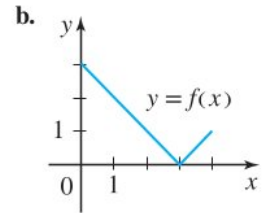
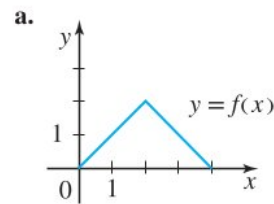
30. أوجد المساحة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيم $y = x$ والمستقيم $x = 2$ ومنحنى الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ والمحور x .



31. أوجد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحددة بالمستقيم $x = e$ والمنحنيين $y = x^2$ و $y = \frac{1}{x}$ والمحور x .



32. أوجد $\int_0^4 f(x) dx$ لكل تمثيل بياني للدالة $y = f(x)$.



43. $\int_0^{\pi} (\cos x + 2) dx$
44. $\int_0^{\pi} 3 \cos x dx$
45. $\int_1^{\pi+1} \cos(x-1) dx$
46. $\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

أسئلة اختبار معيارية

47. صواب أم خطأ إذا كان $\int_a^b f(x) dx > 0$ ، فإن $f(x)$ موجبة لكل قيم x في الفترة $[a, b]$. بزر إجابتك.
48. صواب أم خطأ لإيجاد المساحة الواقعة تحت المحور x ، يكفي إيجاد قيمة التكامل المحدود بغض النظر عما إذا كانت هذه القيمة سالبة أم موجبة. بزر إجابتك.
49. صواب أم خطأ المساحة تساوي $\int_2^5 f(x) dx$ إذا كانت $f(x) \leq 0$ في الفترة $[2, 5]$. بزر إجابتك.
50. اختيار من متعدد قيمة المساحة الواقعة بين المحور x ومنحنى الدالة $y = \sqrt{1-x^2}$ التي تمثل نصف دائرة هي:
- A. 0.886
- B. 1.253
- C. 1.414
- D. 1.571
- E. 1.748

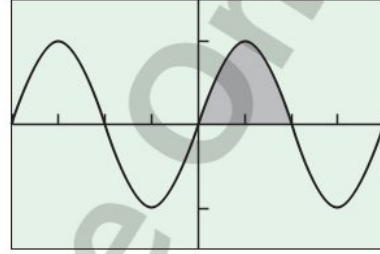
51. اختيار من متعدد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالة

$$f(x) = x^2 - 9 \text{ والمحور } x \text{ من } x = 0 \text{ إلى } x = 6 \text{ هي:}$$

- A. 0.54
- B. 108
- C. 54
- D. 44
- E. 45

في التمارين 35-42، أوجد قيمة التكامل باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$ المبين في نافذة العرض ومن خلال

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

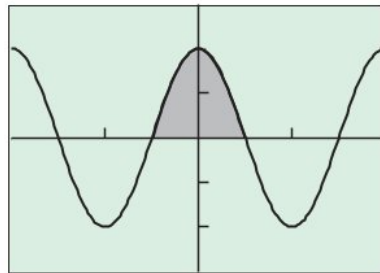


في $[-2\pi, 2\pi]$ في $[-1.5, 1.5]$

35. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$
36. $\int_0^{2\pi} \sin x dx$
37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$
38. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$
39. $\int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx$
40. $\int_0^{\pi} 2 \sin x dx$
41. $\int_2^{\pi+2} \sin(x-2) dx$
42. $\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

في التمارين 43-46، أوجد قيمة التكامل باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ المبين في نافذة العرض ومن خلال

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2$$



في $[-2\pi, 2\pi]$ في $[-1.5, 1.5]$

استكشاف

52. لديك $\int_0^1 e^{x^2} dx = 1.46265$ و $\int_0^2 e^{x^2} dx = 16.45263$.

استعمل هذه المعلومات لإيجاد

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} dx$$

53. لتكن الدالة $f(x) = x(x^2 + 3)^7$

a. استعمل النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لإيجاد

$$\int_{-5}^5 f(x) dx$$

b. الكتابة للتعليم استعمل التناظر لتصف كيف يمكن إيجاد

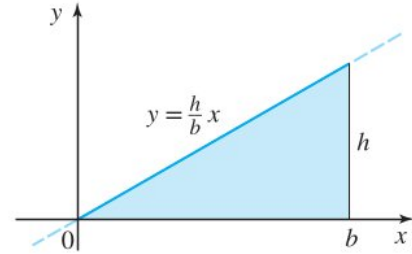
قيمة التكامل من الفرع السابق من دون استعمال التعويض

أو إيجاد الدالة الأصلية.

54. مقارنة صيغ المساحات لنفترض أن المنطقة الواقعة في الربع

الأول تحت المنحنى $y = \frac{h}{b}x$ تمتد من $x = 0$ إلى $x = b$.

(انظر الشكل)



a. استعمل صيغة هندسية لحساب مساحة هذه المنطقة.

b. أوجد كل الدوال الأصلية للدالة y .

c. استعمل دالة أصلية للدالة y لإيجاد قيمة $\int_0^b y(x) dx$.

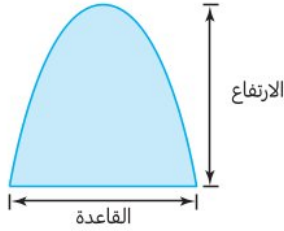
توسيع الأفكار

55. صيغة أرخميدس لمساحة القطع المكافئ اكتشف أرخميدس

أن مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى قوس على شكل قطع

مكافئ (كما هو مبين في الرسم أدناه) تساوي دائمًا ناتج ضرب

ثلثي طول قاعدة القوس في ارتفاعه.



a. أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت قوس القطع المكافئ

$$-3 \leq x \leq 2, y = 6 - x - x^2$$

b. أوجد ارتفاع القوس.

c. أثبت أن هذه المساحة تساوي ناتج ضرب ثلثي طول القاعدة

في الارتفاع.

56. إيجاد المساحة أثبت أن المساحة الواقعة بين المحور x وأحد

أقواس المنحنى $y = \sin kx$ تساوي دائمًا $\frac{2}{k}$ إذا كان الثابت k

عددًا موجبًا.

The Area Between Two Curves

5.3 المساحة بين منحنيين

ما ستتعلمه

- حساب المساحة بين منحنيين
- المساحة بين منحنيين متقاطعين

ولماذا ...

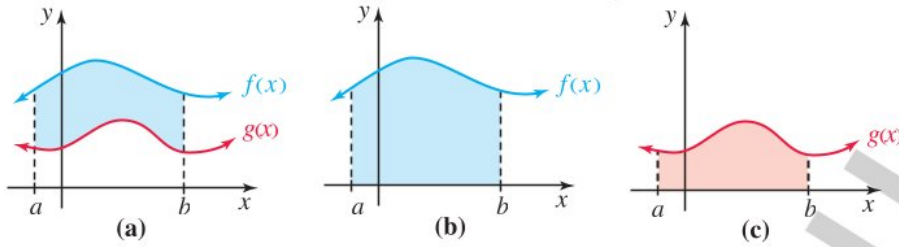
لا تكون المساحة محددة بمنحنى واحد بالضرورة، فقد تكون محددة بأكثر من منحنى أحياناً، فإذا عرف مدير الإنتاج في مصنع كيفية تناقص عملية التوفير في عملية إنتاج معينة، وهي منحنى الدالة الأولى، بالإضافة إلى كيفية تزايد التكلفة في نفس العملية، وهي منحنى الدالة الثانية، أمكنه أن يحسب متى ستنتهي عملية التوفير أو ماذا سيكون مبلغ التوفير الكلي وذلك بملاحظة المساحة بين المنحنيين، وهذه المساحة تُحسب دائماً باستعمال التكامل المحدود.

معياري الدرس

12A.6.1

حساب المساحة بين منحنيين

يعدّ حساب المساحة بين منحنيين من التطبيقات المهمة للتكامل المحدود. يمكننا تعميم الطريقة المتبعة لإيجاد المساحة بين المنحنى والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$ لتشمل حساب مساحة كهذه أيضاً. لنأخذ، على سبيل المثال، المساحة بين منحنى الدالة f ومنحنى الدالة g من $x = a$ إلى $x = b$ المبينة في الشكل 5.3.1a



الشكل 5.3.1

هذه المساحة تساوي المساحة تحت منحنى الدالة f (انظر الشكل 5.3.1b) بعد أن نطرح منها المساحة تحت منحنى الدالة g (انظر الشكل 5.3.1c).

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

المساحة بين منحنيين

إذا كانت كل من f و g دالة متصلة، و $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[a, b]$ ، فإن المساحة بين منحنى f و g من $x = a$ إلى $x = b$ هي

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

مثال 1 المساحة بين منحنيين

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = -x^2 + 1$ ومنحنى الدالة $g(x) = 2x + 4$ من $x = -1$ إلى $x = 2$.

الحل

التمثيلات البيانية للمعادلات الأربع مبينة في الشكل 5.3.2

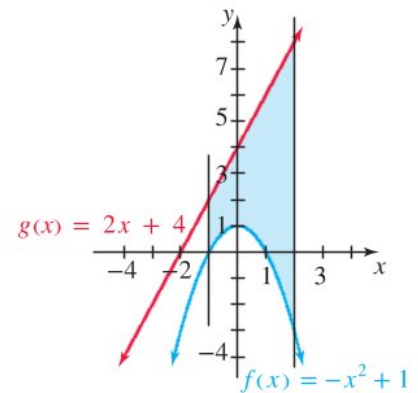
الخطوة 1 لإيجاد المساحة بين منحنى الدالتين f و g ، لا تحتاج إلى تمثيلها بيانياً، إذ يكفي التحقق من أن $f(x) \geq g(x)$ أو $g(x) \geq f(x)$ في الفترة المعطاة، أو أن الدالتين تتقاطعان لمعرفة ذلك يكفي أن نكتب

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 1 = 2x + 4$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

(تابع)



الشكل 5.3.2 المساحة المظللة بين منحنى

الدالة $f(x) = -x^2 + 1$ ومنحنى الدالة

$g(x) = 2x + 4$ من $x = -1$ إلى $x = 2$

ملاحظة

بما أن منحنىي الدالتين المتصلتين f و g لا يتقاطعان، يمكننا دانفا معرفة الدالة الأكبر، وذلك باختبار أي قيمة في الفترة. على سبيل المثال: عند $x = 0$ ، $f(0) = 1$ و $g(0) = 4$. بما أن $f(0) < g(0)$ وكلاً من f و g دالة متصلة وهما لا يتقاطعان، إذن $g(x) > f(x)$ لكل قيم x .

بحسب قواعد المعادلات التربيعية، هذه المعادلة لا حل لها، إذن لا يتقاطع المنحنيان وعلينا دراسة الشكل لمعرفة أي الدالتين أكبر من الأخرى في الفترة المطلوبة حتى نجد المساحة بينهما.

الخطوة 2 بما أن منحنى الدالة f قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل ولا يتقاطع مع الخط الذي يمثل الدالة g لأنه يقع تحته حتماً، فإن $g(x) > f(x)$ في الفترة $[-1, 2]$ ،

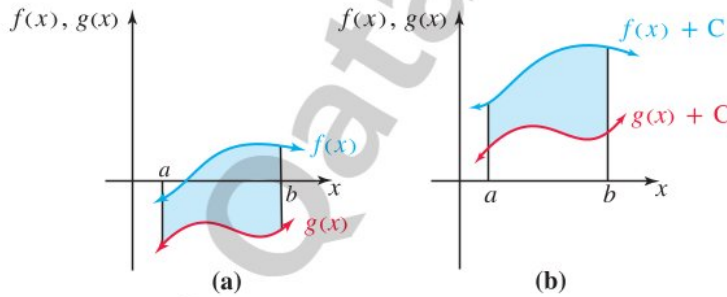
الخطوة 3 المساحة المطلوبة هي

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^2 [(2x + 4) - (-x^2 + 1)] dx \\ &= \int_{-1}^2 [2x + 4 + x^2 - 1] dx \\ &= \int_{-1}^2 x^2 + 2x + 3 dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} + 4 + 6 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \\ &= 15 \end{aligned}$$

إذن، المساحة المطلوبة هي 15 وحدة مربعة.

حاول أن تحل التمرين 1

يمكن تطبيق القاعدة $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ لإيجاد المساحة بين f و g إذا كان $f(x) \geq g(x)$ في الفترة المعطاة حتى لو كان جزء من هذه المساحة يقع تحت المحور x . انظر إلى المساحة المبينة في الشكل 5.3.3a التي يقع جزء منها تحت المحور x .



الشكل 5.3.3

إذا أضفنا الثابت C إلى الدالتين بحيث يرتفع منحنيهما إلى الأعلى مغاً لتصبح المساحة كلها فوق المحور x من دون أن يطرأ عليها أي تغيير كما في الشكل 5.3.3b، عندئذ تصبح المساحة

$$\int_a^b [f(x) + C - (g(x) + C)] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

إذن، يمكن تطبيق هذه القاعدة حتى لو كان جزء من المساحة يقع تحت المحور x طالما أن $f(x) \geq g(x)$ في الفترة المعطاة.

المساحة بين منحنيين متقاطعين

قد تكون المساحة محددة بدالتين متقاطعتين، وفي هذه الحالة أيضًا يمكننا اعتماد الطريقة السابقة لإيجاد هذه المساحة.

مثال 2 المساحة بين منحنيين متقاطعين (1)

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ و منحنى الدالة $g(x) = x^3$.

الحل

التمثيل البياني للدالتين مبين في الشكل 5.3.4.

الخطوة 1 لسنا بالضرورة مضطرين لإيجاد مساحة أن نمثلها بيانيًا، كل ما هو مطلوب أن نتأكد من أن $f(x) \geq g(x)$ أو $g(x) \geq f(x)$ في الفترة المطلوبة، أو أن الدالتين تتقاطعان. لمعرفة ذلك يمكن فقط أن نكتب $f(x) = g(x)$ ونحاول إيجاد نقاط الالتقاء بين المنحنيين:

$$x^3 = x^{\frac{1}{2}}$$

$$0 = x^3 - x^{\frac{1}{2}}$$

$$0 = x^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{5}{2}} - 1)$$

$$x = 1 \text{ أو } x = 0$$

إذن، تقع المساحة المطلوبة بين $x = 0$ و $x = 1$.

الخطوة 2 يمكنك اختبار أي قيمة للمتغير x لمعرفة ما إذا كان $f(x) \geq g(x)$ أم $g(x) \geq f(x)$ في الفترة $[0, 1]$.

لنأخذ مثلًا

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7.$$

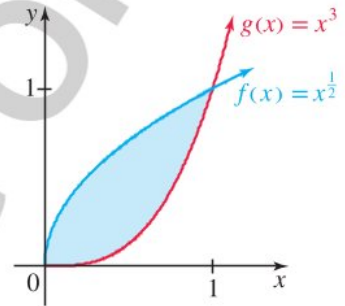
$$\text{إذن } f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$$

وبالتالي $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[0, 1]$ لأن f تقع أعلى من g في الفترة $[0, 1]$. (انظر الشكل 5.3.4).

الخطوة 3 المساحة المطلوبة هي

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^3) dx \\ &= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} (1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{2}{3} (0)^{\frac{3}{2}} - \frac{0^4}{4} \right) \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

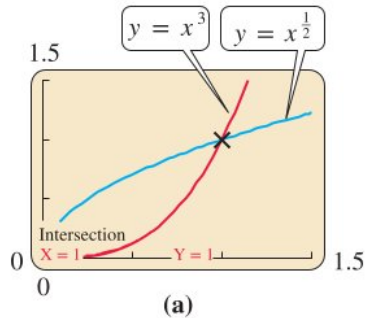
إذن، المساحة المطلوبة تساوي $\frac{5}{12}$ وحدة مربعة.



الشكل 5.3.4 يقع التمثيل البياني للدالة f فوق التمثيل البياني للدالة g في الفترة $[0, 1]$

ملاحظة تقنية

يمكن الاستعانة بالحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للمساحة. فمن جهة يبين التمثيل البياني في الحاسبة القيم التقريبية لنقاط تقاطع الدوال، ومن جهة أخرى يبين الشكل 5.3.5 كيفية القيام بذلك في خطوتين، الأولى تحديد المساحة المطلوب إيجادها، والثانية إيجاد قيمة تقريبية لها، كما هو مبين أدناه.



$$\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^3) dx = 4.16666877$$

$$\frac{5}{12} = 4.166666667$$

(b)

الشكل 5.3.5

قد تتغير العلاقة بين الدالتين f و g خلال فترة معينة $[a, b]$ فتكون $f(x) \geq g(x)$ في جزء من هذه الفترة وتكون $g(x) \geq f(x)$ في الجزء الآخر. لإيجاد المساحة بين منحنيتي الدالتين في حالة كهذه، لا بد من تحديد نقاط تقاطع المنحنيين وتنقسم الفترة إلى أجزاء بحيث تكون العلاقة بين الدالتين في بعضها $f(x) \geq g(x)$ وفي بعضها الآخر $g(x) \geq f(x)$.

مثال 3 إيجاد المساحة بين منحنيتين متقاطعتين (2)

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $y = x^2 - 2x$ ومنحنى الدالة $y = x$ في الفترة $[0, 4]$.

الحل

لتكن $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = x$.

التمثيل البياني لكل من الدالتين في الفترة المحددة. مبيّن في الشكل 5.3.6.

الخطوة 1 اكتب أولاً المعادلة التي تبين نقطة التقاء الدالتين إن وجدت.

$$x^2 - 2x = x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ أو } x = 3$$

إذن تتقاطع الدالتان عند $x = 0$ و $x = 3$ وتقع المساحة المطلوبة بين $x = 0$ و $x = 4$.

إذن تنقسم المساحة إلى جزئين، الأول من 0 إلى 3، والثاني من 3 إلى 4

الخطوة 2 يمكنك تعويض أية قيمة للمتغير x لمعرفة ما إذا كان $f(x) \geq g(x)$

أو $g(x) \geq f(x)$ في الفترة $[0, 3]$. مثلاً نعوض $x = 1$ ، $f(1) = -1$ و $g(1) = 1$.

إذن $f(1) < g(1)$ وبالتالي $f(x) \leq g(x)$ في الفترة $[0, 3]$ ، والقطع المكافئ

$y = x^2 - 2x$ يقع تحت الخط $y = x$ بين $x = 0$ و $x = 3$.

أما في الفترة $[3, 4]$ ، نعوض $x = \frac{7}{2}$:

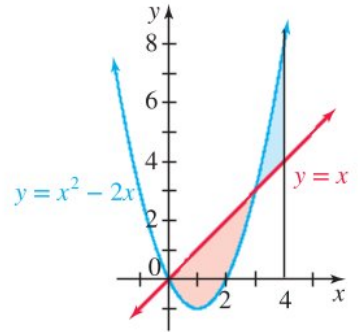
$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{2}\right) = 5.25 \text{ و } g\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} = 3.5$$

إذن $f\left(\frac{7}{2}\right) > g\left(\frac{7}{2}\right)$ وبالتالي $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[3, 4]$ ، والقطع المكافئ

$y = x^2 - 2x$ يقع فوق المستقيم $y = x$ بين $x = 3$ و $x = 4$.

الخطوة 3 المساحة هي

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - x) dx \\ &= \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx \end{aligned}$$



الشكل 5.3.6 يتقاطع المنحنيان

عند $x = 3$ حيث تنقسم المساحة إلى قسمين وتشكل حدود الفترة عند $x = 0$ و $x = 4$ حدود المساحة الكلية.

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_3^4 \\
 &= \left(-9 + \frac{27}{2} - 0 \right) + \left(\frac{64}{3} - 24 - 9 + \frac{27}{2} \right) \\
 &= \frac{19}{3} \approx 6.33
 \end{aligned}$$

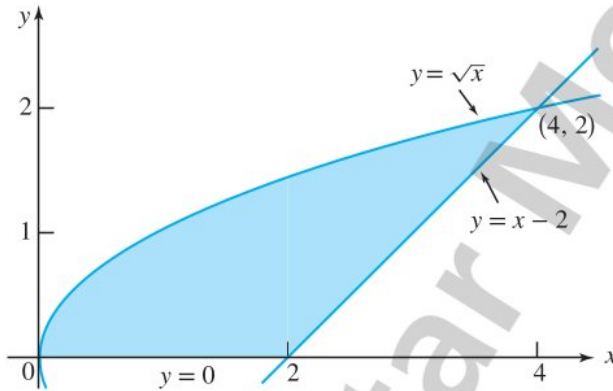
إذن المساحة هي 6.33 وحدة مربعة تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 3

بعض المساحات تكون مركبة من مساحة بين منحنيين ومساحة تحت أحد هذين المنحنيين. يمكن إيجاد هذه المساحة بإيجاد كل مساحة على حدة بعد تجزئة المساحة المركبة وتحديد الفترة التي تكون فيها المساحة بين أحد المنحنيين والمحور x والفترة التي تكون فيها المساحة بين المنحنيين.

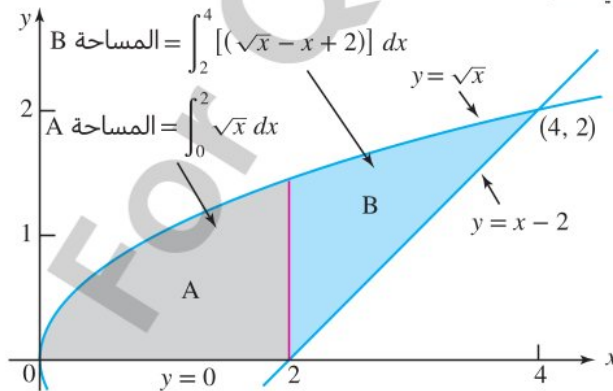
مثال 4 إيجاد مساحة مركبة

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x - 2$ والمحور x المبينه في الشكل التالي.



الحل

يبين الشكل أدناه المساحة المطلوب إيجادها، وهي تتكون من المساحة A بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ والمحور x في الفترة $[0, 2]$ والمساحة B بين منحنىي الدالتين $y = \sqrt{x}$ و $y = x - 2$ في الفترة $[2, 4]$.



$$\begin{aligned}
\text{المساحة} &= \text{المساحة } A + \text{المساحة } B \\
&= \int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx \\
&= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^4 \\
&= \frac{2}{3} (2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (0)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{(4)^2}{2} + 2(4) - \frac{2}{3} (2)^{\frac{3}{2}} + \frac{(2)^2}{2} - 2(2) \\
&= \frac{10}{3} \approx 3.33
\end{aligned}$$

إذن، المساحة المطلوب إيجادها هي 3.33 وحدة مربعة تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 31

يمكننا إيجاد المساحة المطلوبة في المثال السابق باستعمال قواعد الهندسة، وهو ما سنبيّنه في المثال التالي.

مثال 5 استعمال قواعد الهندسة

أوجد المساحة المطلوبة في المثال السابق باستعمال قواعد الهندسة.

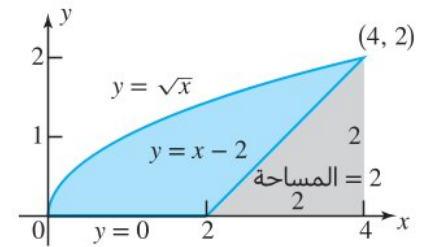
الحل

يبين الشكل 5.3.7 أن المساحة المطلوبة تساوي ناتج طرح مساحة المثلث القائم الزاوية من المساحة بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$.

$$\begin{aligned}
\text{المساحة} &= \int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \frac{1}{2} (2)(2) \\
&= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 - 2 \\
&= \frac{10}{3} \approx 3.33
\end{aligned}$$

إذن، المساحة هي 3.33 وحدة مربعة تقريبًا، وهي ذات المساحة في المثال السابق مما يعني أننا نستطيع إيجاد المساحة بين منحنيتين من خلال استعمال كل ما نعرفه من القواعد والمفاهيم الرياضية في عملية تقسيم المساحة وإيجاد أجزائها.

حاول أن تحل التمرين 33



الشكل 5.3.7 مساحة المنطقة الزرقاء هي المساحة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ مطروحا منها مساحة المثلث.

مراجعة سريعة 5.3

في التمارين 6-10، باستعمال الحاسبة البيانية أوجد إحداثيات نقاط تقاطع المنحنيين. إذا كان المنحنيان لا يتقاطعان، اكتب "لا يتقاطعان".

في التمارين 1-5، أوجد المساحة بين المحور x ومنحنى الدالة المعطاة في الفترة المحددة.

6. $y = x^2 - 4x$, $y = x + 6$

7. $y = e^x$, $y = x + 1$

8. $y = x^2 - \pi x$, $y = \sin x$

9. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $y = x^3$

10. $y = \sin x$, $y = x^3$

1. $y = \sin x$ في الفترة $[0, \pi]$.

2. $y = e^{2x}$ في الفترة $[0, 1]$.

3. $y = \sec^2 x$ في الفترة $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

4. $y = 4x - x^3$ في الفترة $[0, 2]$.

5. $y = \sqrt{9 - x^2}$ في الفترة $[-3, 3]$.

الدرس 5.3 التمارين

11. $y = \frac{x-1}{2}$, $y = \frac{1}{x+1}$, $x = 0$, $x = 4$

12. $y = 3 - e^x$, $y = e^x$, $x = -1$, $x = 1$

13. $y = e^{-x}$, $y = e^x$, $x = -1$, $x = 2$

14. $y = 3e^{2x}$, $y = 2e^{2x} + 1$, $x = -1$, $x = 2$

15. $y = \frac{x-1}{4}$, $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 2$, $x = 4$

16. $y = 2x^2 - x + 1$, $y = x^3 - x^2 + x + 1$

17. $y = 2x^3 + x^2 + x + 5$, $y = x^3 + x^2 + 2x + 5$

18. $y = x^4 + \ln(x + 10)$, $y = x^3 + \ln(x + 10)$

19. $y = x^3 - 2 \ln(x + 5)$ و $y = x^5 - 2 \ln(x + 5)$

20. $y = 2x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{4}{3}}$

21. $y = x\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}$

22. $y = 2e^{3x}$, $y = e^{3x} + e^6$, $x = 0$, $x = 3$

23. $y = e^x$, $y = e^{4-x}$, $x = 0$, $x = 3$

1. أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = 4 + x^2$ ومنحنى الدالة $g(x) = x + 2$ من $x = -2$ إلى $x = 1$.

2. أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ ومنحنى الدالة $g(x) = x^2$.

3. أوجد المساحة بين منحنى الدالة $y = x^2 - 3x$ ومنحنى الدالة $y = 2x$ في الفترة $[0, 6]$.

في التمارين 4-23، أوجد المساحة بين منحنىي الدالتين والمستقيمات.

4. $y = x^2 - 3$, $y = 2x$, $x = -2$, $x = 1$

5. $y = 3x + 10$, $y = 5x$, $x = 0$, $x = 6$

6. $y = x^2 - 30$, $y = 10 - 3x$

7. $y = x^2 - 18$, $y = x - 6$

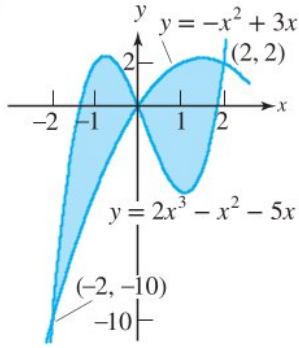
8. $y = x^2$, $y = 2x$

9. $y = x^2$, $y = x^3$

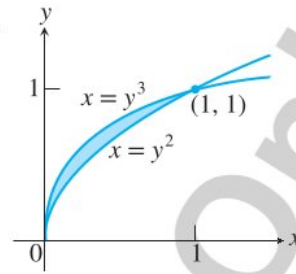
10. $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 6$

في التمارين 24-32، أوجد مساحة المنطقة المظللة.

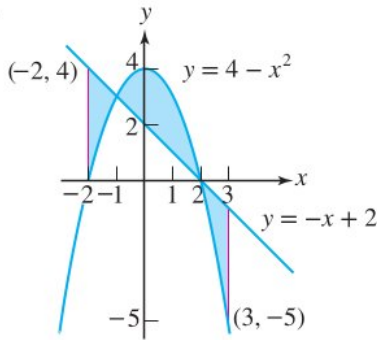
29.



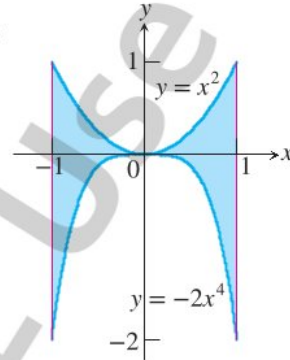
24.



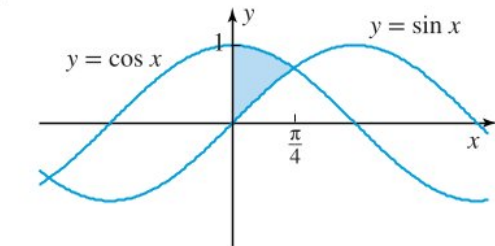
30.



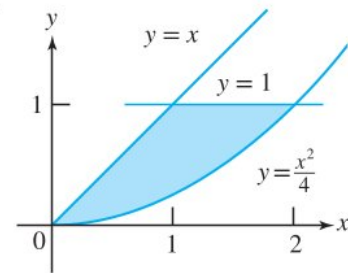
25.



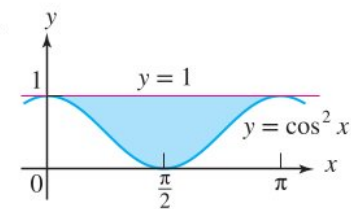
26.



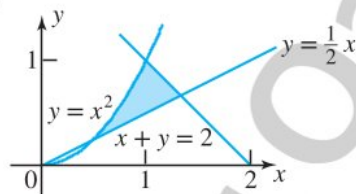
31.



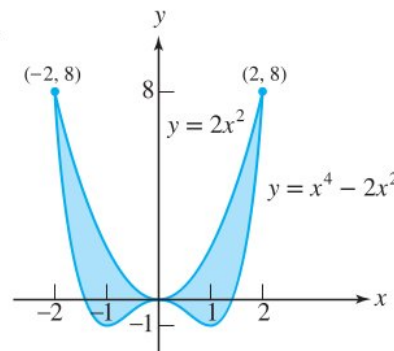
27.



32.



28.



أسئلة اختبار معيارية

37. صواب أم خطأ مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 10$ تساوي 36 وحدة مربعة. بّرر إجابتك.

38. صواب أم خطأ يمكن حساب مساحة المنطقة الواقعة في

الربع الأول والمحددة بالمحور y والمستقيم $y = \frac{1}{2}$

ومنحنى الدالة $y = \cos x$ باستعمال التكامل المحدود

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) dx.$$

39. اختيار من متعدد لتكن R المنطقة المحددة بالمنحنى

$$y = -x^3 + 8 \text{ والمنحنى } y = 7x \text{ والمحور } y.$$

أي الخيارات التالية يعطي مساحة R ؟

- A. $\int_0^1 (-x^3 + 8 - 7x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 8 - 7x) dx$
- B. $\left| \int_{-2}^1 (-x^3 + 8 - 7x) dx \right| + \int_1^2 (-x^3 + 8 - 7x) dx$
- C. $\int_0^1 (-x^3 + 8 - 7x) dx$
- D. $\int_0^2 \left(-\frac{x^4}{4} + 8x - 7x \right) dx$
- E. $\int_0^1 (-x^3 + 8 + 7x) dx$

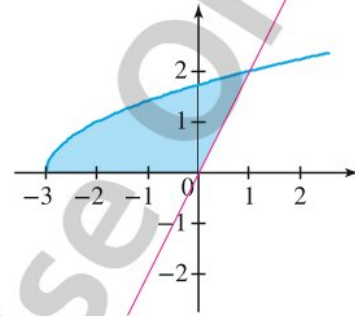
40. اختيار من متعدد أي الخيارات التالية يعطي قيمة مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمستقيم

$$y = -x \text{ بين } x = 0 \text{ و } x = 3$$

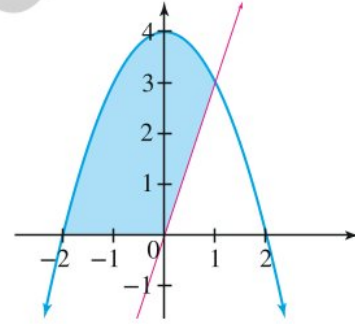
- A. 2
- B. $\frac{9}{2}$
- C. $\frac{13}{2}$
- D. 13
- E. $\frac{27}{2}$

في التمرينين 33 و 34، أوجد المساحة من خلال طرح مساحة مثلث من مساحة أكبر.

33. المساحة فوق المحور x والمحددة بمنحنى الدالة $y = \sqrt{x+3}$ والمستقيم $y = 2x$.



34. المساحة فوق المحور x والمحددة بمنحنى الدالة $y = 4 - x^2$ والمستقيم $y = 3x$.



35. أوجد المساحة في الربع الأول والمحددة

بالمحور y من اليسار والمستقيم $y = \frac{x}{4}$ وبمنحنى الدالة

إلى $y = 1 + \sqrt{x}$ من الجهة العلوية اليسرى وبمنحنى

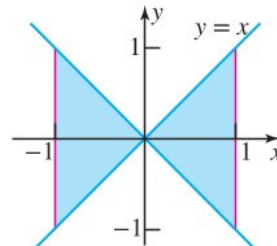
الدالة $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ من الجهة العلوية اليمنى.

36. أي من التكاملين التاليين يمكن استعماله لحساب المساحة

المظللة المبينة أدناه إن أمكن؟ بّرر إجابتك.

$$\text{a. } \int_{-1}^1 (x - (-x)) dx = \int_{-1}^1 2x dx$$

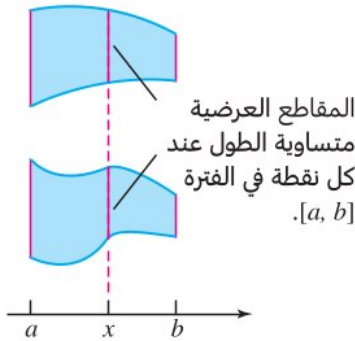
$$\text{b. } \int_{-1}^1 (-x - (x)) dx = \int_{-1}^1 -2x dx$$



استكشاف

توسيع الأفكار

44. **نظرية «كافاليري»** اكتشف عالم الرياضيات الإيطالي بونافينتورا كافاليري (1598-1647) أنه إذا كان شكلان يقعان بين مستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي، وكان كل خط موازٍ لهذين المستقيمين، ضمن نفس الفترة بالنسبة للإحداثي x ، يقطع الشكلين إلى مقاطع عرضية متساوية الطول (انظر الشكل أدناه)، فإن لهذين الشكلين نفس المساحة. أثبت صحة هذه النظرية.



45. أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ والمستقيم $y = mx$ ، حيث $0 < m < 1$

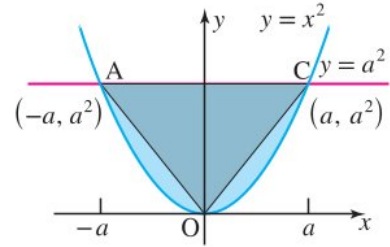
41. قُسمت مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y = x^2$ من الأسفل وبالمستقيم $y = 4$ من الأعلى إلى مساحتين متساويتين بواسطة المستقيم الأفقي $y = c$.

a. ارسم هذه المنطقة والمستقيم $y = c$ الذي يقسمها إلى نصفين متساويين بحيث يبدو الرسم معقولاً. أوجد إحداثيات نقاط تقاطع منحنى القطع المكافئ والمستقيم بدلالة c ، ثم عيّن هذه النقاط على الرسم.

b. أوجد قيمة c من خلال التكامل بالنسبة للمتغير x . (يضع هذا الأمر c في حدود التكامل)

42. أوجد المساحة الواقعة بين منحنى الدالة $y = \sec^2 x$ ومنحنى الدالة $y = \tan^2 x$ من $x = -\frac{\pi}{4}$ إلى $x = \frac{\pi}{4}$.

43. يبين الشكل أدناه المثلث AOC المحاط بالجزء المحدد بالمستقيم $y = a^2$ من القطع المكافئ $y = x^2$. أوجد نهاية نسبة مساحة المثلث إلى مساحة المنطقة المجتزأة من القطع المكافئ عندما تقترب قيمة a من الصفر.



The Solid of Revolution

5.4 الحجوم الدورانية

تعريف الحجوم الدورانية

يبين الشكل 5.4.1 مساحة المنطقة بين منحنى الدالة f والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$. لقد تعلمنا في الدروس السابقة كيفية إيجاد هذه المساحة باستعمال التكامل المحدود. يبين الشكل 5.4.2 المجسم الناتج عن دوران هذه المساحة حول المحور x . حجم هذا المجسم يسمى **الحجم الدوراني**، ويمكن إيجاده باستعمال التكامل المحدود.

ما ستتعلمه

- تعريف الحجوم الدورانية
- الحجوم الأسطوانية والمخروطية

... ولماذا

بما أن الحجوم الدورانية هي تلك التي يمكن تكوينها من خلال دوران مساحة معينة، فإن التكامل المحدود يساعدنا في حساب أحجام أجسام معينة بتعذر إيجادها باستعمال القواعد الجبرية لحجوم المجسمات الهندسية كحجم جرة فخار مثلاً.

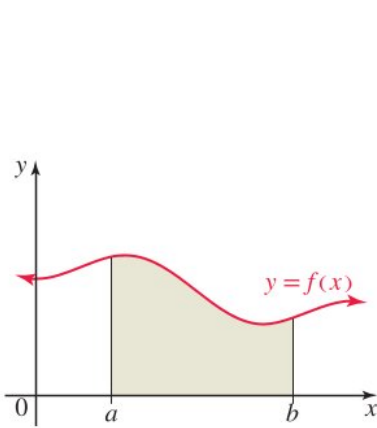
معياري الدرس

12A.6.2

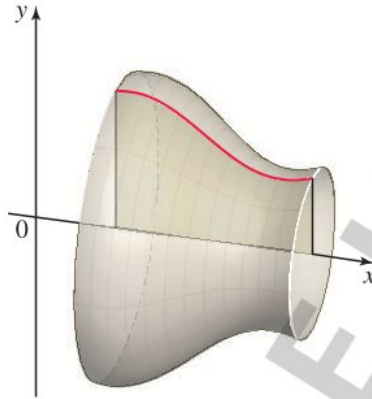
المصطلحات

- حجم دوراني

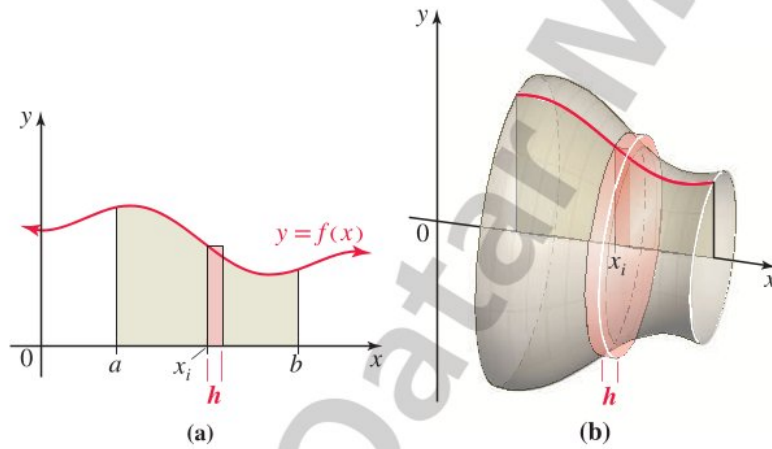
solid of revolution



الشكل 5.4.1

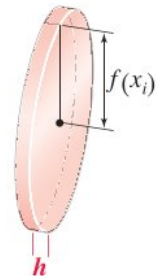


الشكل 5.4.2



الشكل 5.4.3

لنتخيل أننا نقسم الحجم الدوراني إلى شرائح رقيقة سمك كل منها h . كلما صغرت قيمة h ، اقترب شكل الشريحة من الشكل الأسطواني الدائري القائم كما هو مبين في الشكل 5.4.3b، ونعلم أن حجم الإسطوانة القائمة يساوي $\pi r^2 h$ حيث r طول نصف قطر القاعدة الدائرية للأسطوانة و h هو ارتفاع الأسطوانة. نلاحظ من الشكل 5.4.4 أن ارتفاع الشريحة يساوي سمكها الذي يساوي h . أما طول نصف قطر القاعدة الدائرية لكل شريحة فهو $f(x_i)$.



الشكل 5.4.4

إذن الحجم التقريبي لكل شريحة هو $\pi [f(x_i)]^2 h$ ، وبالتالي فإن الحجم التقريبي للحجم الدوراني هو جمع هذه الشرائح وهو ما يجعلنا نتجه نحو التكامل المحدود للدالة $\pi f^2(x)$ لإيجاد هذا الحجم.

الحجم الدوراني

إذا كانت R هي المنطقة بين منحنى الدالة f والمحور x (حيث $f(x) \geq 0$) من $x = a$ إلى $x = b$ ، فإن الحجم الدوراني الناتج عن دوران هذه المنطقة حول المحور x هو

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

لا يتغير الحجم الدوراني سواء كانت المساحة أعلى محور x أو أسفل محور x أو مقسمة إلى جزئين يقع أحدهما فوق المحور x والآخر تحته، حيث أن المساحة تدور دورة كاملة حول محور x .

مثال 1 إيجاد الحجم الدوراني

أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$ حول المحور x .

الحل

يبين الشكل 5.4.5 دوران المساحة المحصورة بين $y = \sqrt{x}$ والمحور x والمستقيم $x = 4$ حول المحور x .

باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

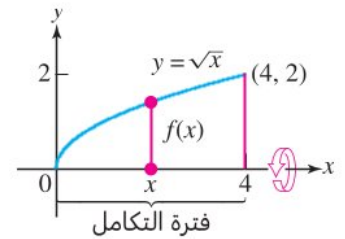
$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi [f(x)]^2 dx \\ &= \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 \pi x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} - \pi \frac{0^2}{2} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi \end{aligned}$$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب هو 8π وحدة مكعبة.

حاول أن تحل التمرين 1

ملاحظة

يعود اكتشاف تقنية إيجاد الحجم الدوراني التقريبي من خلال تجميع عدد كبير من الشرائح الدائرية إلى عالم الفلك الألماني المعروف يوهانس كيبلر (1571-1630) الذي اكتشف ثلاثة قوانين لحركة الكواكب. كان كيبلر يعمل على إيجاد القيم التقريبية لحجوم البراميل باعتبارها حجوماً دورانية.



الشكل 5.4.5 نصف قطر المقطع العرضي هو $f(x)$. إذن، مساحة

المقطع العرضي هي:

$$A(x) = \pi [f(x)]^2 = \pi [\sqrt{x}]^2 = \pi x$$

يبين المثال التالي كيفية إيجاد الحجم الدوراني باستعمال التكامل المحدود واتباع خطوات محددة.

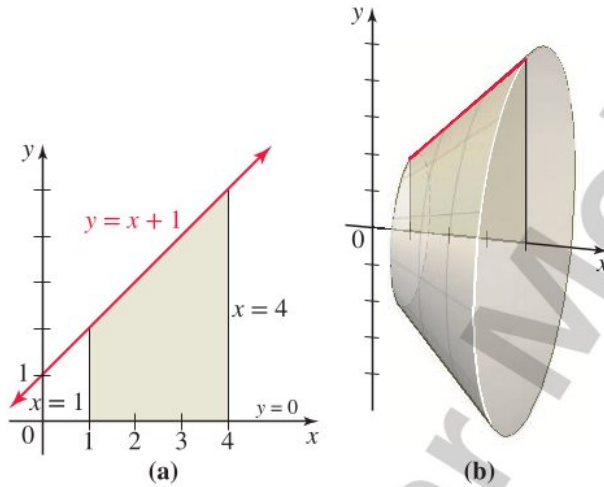
مثال 2 الحجم الدوراني لمساحة محددة بمستقيمين رأسيين

أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $y = x + 1$ و $y = 0$ من $x = 1$ إلى $x = 4$ حول المحور x .

الحل

يحدد الرسم البياني للدالة $y = x + 1$ مع المستقيمين $x = 1$ و $x = 4$ المنطقة المطلوب دورانها لينتج الحجم الدوراني.

المنطقة والحجم الناتج عن دورانها مبينان في الشكل أدناه مع ملاحظة الفرق الطفيف في رسم المحور x بين الشكل a والشكل b بهدف إبراز الحجم الدوراني في صورة ثلاثة الأبعاد.



الخطوة 1 بما أن المنطقة المطلوب دورانها تقع بين $x = 1$ و $x = 4$ ، فإن حدود التكامل تصبح $a = 1$ و $b = 4$.

الخطوة 2 باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi (f(x))^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi (x+1)^2 dx = \pi \left. \frac{(x+1)^3}{3} \right|_1^4 = \frac{\pi}{3} (5^3 - 2^3) = \frac{117\pi}{3} = 39\pi \end{aligned}$$

إذن، الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $y = x + 1$ و $y = 0$ من $x = 1$ إلى $x = 4$ حول المحور x هو 39π وحدة مكعبة.

حاول أن تحل التمرين 2

قد يكون الحجم الدوراني مغلقًا، بمعنى أن لا جهة مسطحة له، وذلك عندما يكون ناتجًا عن دوران مساحة محددة بمنحنى دالة والمحور x فقط، كما يبين المثال التالي.

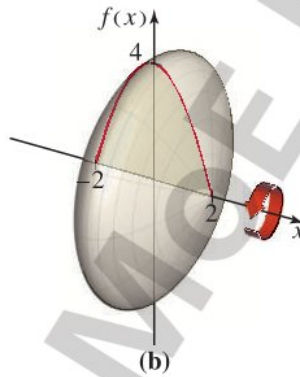
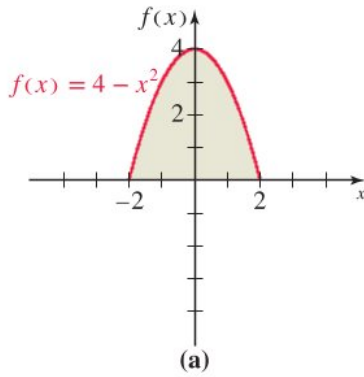
مثال 3 الحجم الدوراني لمجسم مغلق

أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول المحور x .

الحل

الرسم البياني للدالة $f(x) = 4 - x^2$ يحدد المنطقة المراد دورانها لينتج الحجم الدوراني.

يبين الشكل a أدناه أن المساحة تحت منحنى الدالة تقع بين المنحنى والمحور x فقط، أي أن كل من a و b هي مقطع x للدالة.



الخطوة 1 أوجد حدود التكامل بإيجاد نقاط التقاطع مع محور x .

$$4 - x^2 = 0$$

$$(2 + x)(2 - x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2$$

بما أن المنطقة المطلوب دورانها تقع بين $x = -2$ و $x = 2$ ،

فإن حدود التكامل تصبح $a = -2$ و $b = 2$

الخطوة 2 باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \pi (4 - x^2)^2 dx \\ &= \int_{-2}^2 \pi (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left(16x - 8 \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 \end{aligned}$$

(تابع)

$$= \pi \left(16 \times 2 - 8 \left(\frac{2^3}{3} \right) + \frac{2^5}{5} \right) - \pi \left(16 \times (-2) - 8 \left(\frac{(-2)^3}{3} \right) + \frac{(-2)^5}{5} \right)$$

$$= \frac{512}{15} \pi$$

إذن، الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $f(x) = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول المحور x هو $\frac{512}{15} \pi$ وحدة مكعبة.

حاول أن تحل التمرين 19

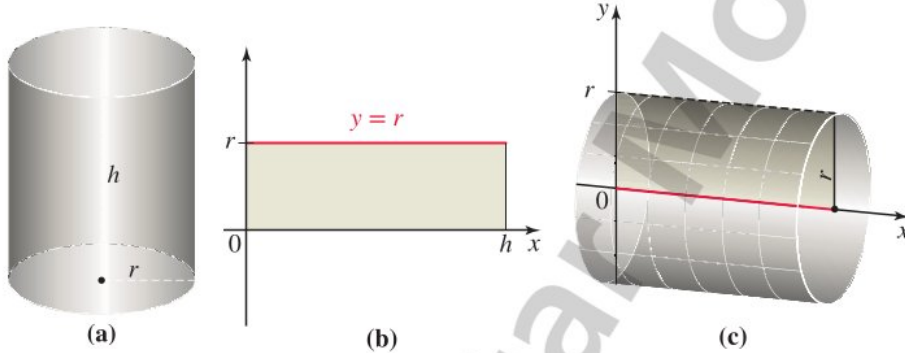
الحجوم الأسطوانية والمخروطية

لإيجاد الحجوم الدورانية الأسطوانية والمخروطية نحتاج إلى قواعد هندسية، ويمكننا إيجاد هذه القواعد من خلال التكامل المحدود المستعمل في إيجاد الحجوم الدورانية. في حالة الحجوم الأسطوانية، طول نصف قطر الشريحة الدائرية ثابت يساوي r . وبالتالي الحجم هو

$$V = \int_0^h \pi r^2 dx$$

$$= \pi r^2 h$$

وهي قاعدة إيجاد حجم الأسطوانة التي نعرفها (انظر الشكل 5.4.6).



الشكل 5.4.6 حجم أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h يساوي $\int_0^h \pi r^2 dx$

أما في حالة الحجوم المخروطية فهي كذلك من تطبيقات التكامل المحدود في إيجاد الحجوم الدورانية.

مثال 4 حجم مخروط

أوجد حجم المخروط القائم الذي طول نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h .

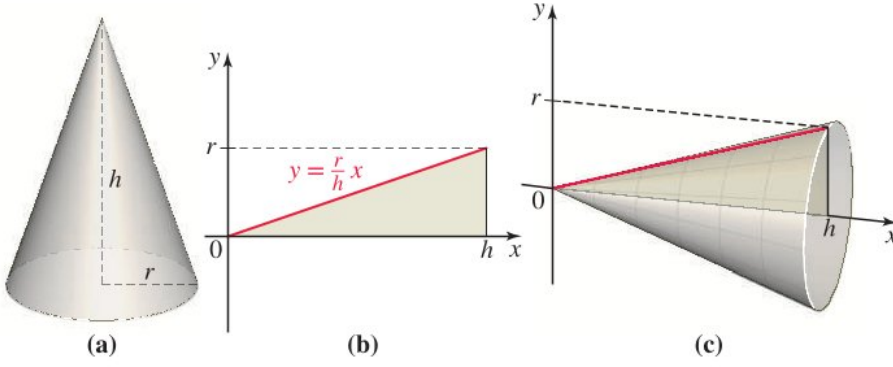
الحل

يبين الشكل a المخروط المطلوب وهو يمكن أن يُرى على أنه ناتج عن دوران المنطقة في الشكل b حول المحور x كما يبين الشكل c.

(تابع)

ملاحظة تكنولوجية

تعطي حاسبة التمثيل البياني بوضعية fnInt القيمة على شكل 107.2330292، والذي يتفق مع تقريب $\frac{512\pi}{15}$ إلى أقرب 7 وحدات عشرية.



تذكير

قانون معادلة المستقيم: معادلة المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي $y = mx + b$ حيث m هي ميل المستقيم ويساوي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ و b هو المقطع y للمستقيم.

الخطوة 1 تقع المنطقة تحت الخط الذي يمر بالنقطتين $(0, 0)$ و (h, r) ، والذي معادلته هي $y = mx$ حيث m هي ميل المستقيم والذي يساوي $m = \frac{r-0}{h-0} = \frac{r}{h}$. إذن، معادلة المستقيم هي $y = \frac{r}{h}x$.

الخطوة 2 باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi \left[\frac{r}{h}x \right]^2 dx \\ &= \pi \int_0^h \left(\frac{r^2}{h^2}x^2 \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{r^2}{3h^2}x^3 \right) \Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$

وهي القاعدة المعروفة لإيجاد حجم المخروط.

حاول أن تحل التمرين 24

مراجعة سريعة 5.4

في التمارين 1-6، أوجد قيمة التكامل المحدود.

5. $\int_0^1 (e^x)^2 dx$

6. $\int_1^3 x \ln x dx$

1. $\int_0^2 (x+5)^2 dx$

2. $\int_0^3 (6-x^2)^2 dx$

3. $\int_{-2}^1 \sqrt{x+3} dx$

4. $\int_2^7 \frac{7}{\sqrt{x+2}} dx$

الدرس 5.4 التمارين

2. أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 0$ من $x = -1$ إلى $x = 1$.

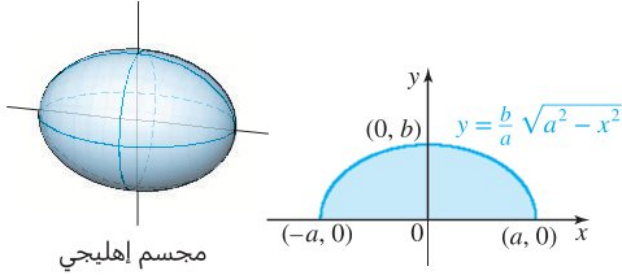
1. أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المساحة المحددة بمنحنى الدالة $y = 2\sqrt{x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = 1$ حول المحور x .

22. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

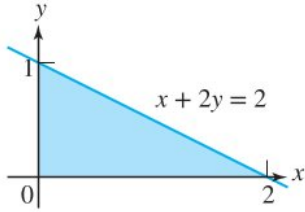
23. $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$

24. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

25. **مجسم إهليجي** أوجد صيغة حجم المجسم الناتج عن دوران القطع الناقص. انظر التمارين 22-24 والشكلين التاليين.



26. أوجد الحجم الدوراني الناشء عن دوران المساحة المظللة حول المحور x .



27. استعمل طرائق حل التمارين السابقة لإيجاد حجم أسطوانة ارتفاعها h وطول نصف قطرها r .

أسئلة اختبار معيارية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للإجابة عن الأسئلة التالية.

28. **صواب أم خطأ** الحجم الدوراني الناتج عن دوران المساحة الواقعة تحت الدالة $y = \sqrt{1 - x^2}$ ما بين $x = 0$ و $x = 1$ هو نصف حجم الكرة التي نصف قطرها 1.

29. **صواب أم خطأ** عند دوران المساحة المحددة بالمحور x والمستقيم $x = 2$ ومنحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ حول المحور x نحصل على مجسم حجمه الدوراني يساوي $\int_0^2 \pi x^2 dx$. برّر إجابتك.

في التمارين 3-21، أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحددة بمنحنيات الدوال المعطاة حول المحور x .

3. $f(x) = x, y = 0, x = 0, x = 3$

4. $f(x) = 3x, y = 0, x = 0, x = 2$

5. $f(x) = 2x + 1, y = 0, x = 0, x = 4$

6. $f(x) = x - 4, y = 0, x = 4, x = 10$

7. $f(x) = \frac{1}{3}x + 2, y = 0, x = 1, x = 3$

8. $f(x) = \frac{1}{2}x + 4, y = 0, x = 0, x = 5$

9. $f(x) = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 9$

10. $f(x) = \sqrt{x + 5}, y = 0, x = 1, x = 3$

11. $f(x) = \sqrt{2x + 1}, y = 0, x = 1, x = 4$

12. $f(x) = \sqrt{4x + 2}, y = 0, x = 0, x = 2$

13. $f(x) = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$

14. $f(x) = 2e^x, y = 0, x = -2, x = 1$

15. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, y = 0, x = 1, x = 3$

16. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}}, y = 0, x = -1, x = 2$

17. $f(x) = x^2, y = 0, x = 1, x = 5$

18. $f(x) = \frac{x^2}{2}, y = 0, x = 0, x = 4$

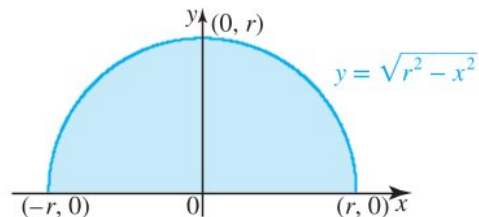
19. $f(x) = 1 - x^2, y = 0$

20. $f(x) = 2 - x^2, y = 0$

21. $f(x) = x - x^2, y = 0$

في التمارين 22-24، التمثيل البياني للدالة المعرفة بالصيغة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ هو نصف دائرة طول نصف قطرها r ومركزها $(0, 0)$ (انظر الشكل أدناه).

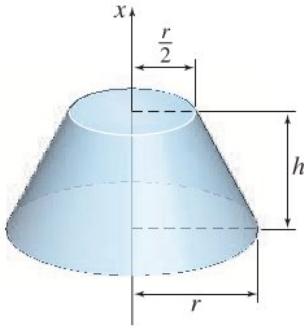
أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران نصف الدائرة حول المحور x (تعطي نتيجة التمرين 24 صيغة حجم كرة طول نصف قطرها r).



توسيع الأفكار

33. المخروط الناقص هو ما يتبقى من مخروط عند قطع جزئه العلوي بمستوي مواز لقاعدته.

افترض أن لمخروط ناقص دائري قائم (وهو الذي نحصل عليه من مخروط دائري قائم) قاعدة سفلية طول نصف قطرها r وقاعدة علوية طول نصف قطرها $\frac{r}{2}$ وأن ارتفاعه h . (انظر الشكل أدناه). أوجد حجم هذا المخروط الناقص عبر تدوير المنطقة الواقعة تحت القطعة المستقيمة الممتدة من $(0, r)$ إلى $(h, \frac{r}{2})$ حول المحور x .



34. **تعبئة وعاء** وعاء على شكل نصف كرة طول نصف قطرها a . إذا كان ارتفاع الماء في الوعاء h ، فما حجم الماء؟

30. **اختيار من متعدد** لتكن R المنطقة في الربع الأول المحددة بالمحور x والخط $x = 0$ والتمثيل البياني للمنحنى $y = 8 - x^{\frac{3}{2}}$. أي الإجابات التالية يعطي أفضل تقريب للحجم الناتج عن دوران R حول المحور x ؟

- A. 60.3
- B. 115.2
- C. 225.4
- D. 319.7
- E. 361.9

31. **اختيار من متعدد** لتكن R المنطقة المحددة بالمحور x والمستقيم $x = 4$ ومنحنى الدالة $y = x^2$. أي الإجابات التالية تعطي القيمة التقريبية الأفضل لحجم المجسم الناتج عن دوران R بين $x = 0$ و $x = 4$ حول المحور x ؟

- A. 64π
- B. 128π
- C. 256π
- D. 204.8π
- E. 409.6π

استكشاف

32. **زهريّة** نريد تقدير حجم زهرية. نقيس ارتفاعها فنجد 10 in، ثم نستعمل خيطاً فنمدّه من نقطة في أعلى الزهرية إلى نقطة توازيها عند قاعدته بحيث يلامس وجهها الجانبي، فيرسم الخيط منحنى يتطابق إلى حدّ بعيد مع منحنى الدالة $y = \frac{x^3}{216} - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + 1$ بين $x = 0$ و $x = 10$. أوجد صيغة حجم الزهرية في صورة تكامل محدود بدلالة المتغير x في الفترة $[0, 10]$. (تخيل الزهرية موضوعة بشكل أفقي وأنّ محورها الأساسي هو المحور x)

Applications of Definite Integrals

5.5 تطبيقات التكامل المحدود

التغير الكلي

التغير الكلي من المسائل المهمة، بالإضافة إلى إيجاد المساحة، التي نحتاج فيها إلى التكامل المحدود، وفي طليعة ما نحتاج إلى تحديد تغيره الكلي دالة التكلفة. لقد عرّفنا التكلفة الحدية بالنسبة للمتغير x ، سابقًا، بأنها معدل تغير التكلفة عند تغير الإنتاج من x قطعة إلى $x + 1$ قطعة. على سبيل المثال، إذا كانت التكلفة الحدية لمنتج ما عند x هي $f(x) = x^2 + 20$ ، فإن $f(2) = 24$ يعني أن معدل تغير التكلفة عند زيادة الإنتاج عند $x = 2$ بمقدار وحدة واحدة يساوي 24، كذلك $f(3) = 29$ يعني أن زيادة الإنتاج عند $x = 3$ بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى تغير متوسط معدله ليصبح 29

غير أن هذا التقريب غير دقيق لأن هناك فرقًا بين التغير ومتوسط معدل التغير. لمعرفة قيمة التغير الدقيق عند زيادة الإنتاج من 2 إلى 3، علينا أن نقسم الفترة $[2, 3]$ إلى فترات صغيرة طول كل منها h . قيمة تغير الدالة $f(x)$ على كل فترة من هذه الفترات تساوي تقريبًا $f(x) \times h$. لإيجاد قيمة تغير الدالة في هذه الفترة نجمع قيم تغيرها خلال الفترات الصغيرة، وهذا يقودنا مرة أخرى إلى التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$ لذا نستعمل التكامل المحدود لإيجاد مقدار التغير في قيمة التكلفة. في التمثيل البياني، تصبح قيمة المساحة الواقعة بين منحنى دالة التكلفة الحدية والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$ هي قيمة التغير الكلي للتكلفة من a إلى b .

ما ستتعلمه

- التغير الكلي
- تطبيقات فيزيائية

...ولماذا

لم يتحدد مفهوم السرعة والتسارع بشكل دقيق في الفيزياء إلا بعد إيجاد مفهوم المشتقة في الرياضيات، وبذلك صار الانتقال من المسافة إلى السرعة فالتسارع في المسائل الفيزيائية يتم عن طريق المشتقة، وبالعكس عن طريق التكامل.

معايير الدرس

12A.4.4

12A.6.3

12A.6.4

المصطلحات

- التغير الكلي

total change

التغير الكلي للدالة f

إذا كانت الدالة f تعطي معدل تغير الدالة F في الفترة $[a, b]$ ، فإن التغير الكلي للدالة F في هذه الفترة هو

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

تنبيه

لا معنى لتغير التكلفة من a إلى b إلا إذا كان a و b عددين صحيحين، أما تغير دالة التكلفة فلا يصح رياضياً إلا بين عددين حقيقيين. هذا الانتقال من التكلفة إلى دالة التكلفة هو ما سمح باستعمال التكامل المحدود.

مثال 1 استهلاك الغاز الطبيعي

تعطي الدالة التالية المعدل السنوي لاستهلاك الغاز الطبيعي في إحدى المدن (بتريليونات الأقدام المكعبة).

$$C'(t) = t + e^{0.01t}$$

حيث t الزمن (بالسنوات) بدءًا من العام 2000، أي $t = 0$. أوجد كمية الغاز الطبيعي التي استهلكتها هذه المدينة من العام 2005 إلى العام 2015

(تابع)

الحل

لإيجاد الاستهلاك الكلي للمدينة من الغاز الطبيعي خلال 10 سنوات بين العامين 2005 و 2015، استعمل التكامل المحدود.

$$\begin{aligned} C(15) - C(5) &= \int_5^{15} (t + e^{0.01t}) dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{e^{0.01t}}{0.01} \right) \Big|_5^{15} \\ &= (112.5 + 100e^{0.15}) - (12.5 + 100e^{0.05}) \\ &\approx 111 \end{aligned}$$

إذن، استهلكت المدينة 111 ترليون قدم مكعب تقريبًا من الغاز الطبيعي بين العامين 2005 و 2015

حاول أن تحل التمرين 1

لمزيد من فهم تطبيقات التكامل المحدود نورد المثال التالي.

مثال 2 توفير

اعتمدت إحدى الشركات إجراءات جديدة في الإنتاج في إحدى منشآتها يؤدي إلى توفير قيمة مالية يمكن حسابها باستعمال دالة التوفير $S(t)$ ، حيث t الزمن بالسنوات و $S(t)$ التوفير بالآلاف الريالات. تتناقص قيمة التوفير وفق دالة المعدل

$$S'(t) = 100 - t^2$$

غير أن هذه الإجراءات الجديدة في الإنتاج ينتج عنها تكاليف إضافية $C(t)$ تزداد بمعدل

$$C'(t) = t^2 + \frac{14}{3}t$$

حيث t الزمن بالسنوات و $C(t)$ التكاليف الإضافية بالآلاف الريالات.

A. حدّد المدة الزمنية التي تحقق فيها الشركة توفيرًا صافيًا.

B. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي الذي وفرته الشركة خلال هذه المدة.

الحل

A. التوفير الصافي يساوي ناتج طرح التكلفة من التوفير.

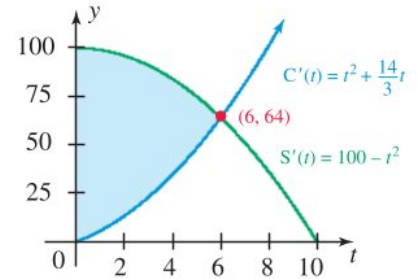
$$f(t) = S(t) - C(t)$$

يبين الشكل 5.5.1 منحنى كل من دالة معدل التوفير ودالة معدل التكلفة. دالة معدل التكلفة في تزايد بينما دالة معدل التوفير في تناقص. على الشركة أن تعتمد هذه الإجراءات الجديدة إلى أن يصبح الفرق بين الكميتين يساوي الصفر، أي إلى الزمن الذي يتقاطع فيه المنحنيان.

يتقاطع المنحنيان عندما

$$C'(t) = S'(t)$$

$$t^2 + \frac{14}{3}t = 100 - t^2$$



الشكل 5.5.1 يبين الشكل أنه قبل حد الست سنوات يكون معدل التوفير أكبر من معدل التكلفة، أما ابتداء من حد 6 سنوات يصبح معدل التكلفة أكبر من معدل التوفير.

أوجد حل المعادلة كما يلي:

$$-2t^2 - \frac{14}{3}t + 100 = 0$$

$$3t^2 + 7t - 150 = 0$$

$$(t - 6)(3t + 25) = 0$$

$$t = 6 \text{ أو } t = -\frac{25}{3}$$

اضرب في $-\frac{3}{2}$

حلل إلى العوامل

استعمل خاصية ناتج الضرب الصفري

فقط $t = 6$ يشكل حلاً ذا معنى هنا.

إذن، على الشركة أن تعتمد الإجراءات الجديدة مدة 6 سنوات فقط.

B. التوفير الصافي الكلي خلال هذه المدة هو $F(6) - F(0)$

ويمكن الحصول على هذه القيمة من خلال التكامل المحدود:

$$\begin{aligned} F(6) - F(0) &= \int_0^6 \left[(100 - t^2) - \left(t^2 + \frac{14}{3}t \right) \right] dt \\ &= \int_0^6 \left(-2t^2 - \frac{14}{3}t + 100 \right) dt \\ &= \left(-\frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{3}t^2 + 100t \right) \Big|_0^6 \\ &= -\frac{2}{3}(216) - \frac{7}{3}(36) + 100(6) \\ &= 372 \end{aligned}$$

لقد وقر اعتماد هذه الإجراءات على الشركة خلال 6 سنوات مبلغًا مقداره QR 372 000.

حاول أن تحل التمرين 6

تطبيقات فيزيائية

في الفيزياء، إذا كانت $s(t)$ هي الدالة التي تحدد موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم خلال الزمن t ، فإن متوسط سرعة الجسيم بين الزمن t_1 والزمن t_2 هو

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

أما السرعة اللحظية عند الزمن t فهي مشتقة دالة الموقع

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

كما أن التسارع عند اللحظة t هو مشتقة دالة السرعة اللحظية عند هذا الزمن.

$$a(t) = v'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

بذلك يتضح أن دالة الموقع هي دالة أصلية لدالة السرعة: $s(t) = \int v(t) dt$

وبالتالي فإن دالة السرعة هي دالة أصلية لدالة التسارع: $v(t) = \int a(t) dt$

السرعة والتسارع

إذا كانت الدالة s هي الدالة التي تحدد موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم وكانت v هي دالة السرعة و a دالة التسارع، إذن:

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

مثال 3 السرعة والتسارع

لنفترض أنه لأي جسم يتحرك، $s(t)$ هي دالة المواقع و $v(t)$ دالة السرعة و $a(t)$ دالة التسارع.

A. إذا كانت دالة السرعة هي $v(t) = 6t^2 - 8t$ وكان الجسيم يبعد 5 وحدات عن نقطة الأصل من الجهة الموجبة عند $t = 0$ (أي أن $s(0) = 5$). أوجد $s(t)$.

B. أثبتت تجارب عديدة أن أي جسم يلقي من مكان مرتفع يسقط بتسارع ثابت (مع تجاهل مقاومة الهواء) يساوي 32 ft/sec^2 إذن، إذا كانت نقطة الأصل عند سطح الأرض فإن $a(t) = -32$ (الإشارة سالبة نظراً لسقوط الجسم واقتربه من الأرض / نقطة الأصل).
لنفترض أن الجسم أُلقي من أعلى برج ارتفاعه 1100 ft بسرعة ابتدائية -20 ft/sec
أوجد ارتفاع الجسم عن سطح الأرض، $s(t)$ ، عند الزمن t .

C. استعمل المعادلات السابقة (في الفرع B) لإيجاد سرعة الجسم لحظة ارتطامه بالأرض. ما الزمن الذي يستغرقه وصول الجسم إلى الأرض؟

الحل

A. بما أن $v(t) = s'(t)$ ، فإن $s(t)$ هي دالة أصلية للدالة $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (6t^2 - 8t) dt$$

$$= 2t^3 - 4t^2 + C$$

لإيجاد الثابت C استعمل المعلومة $s(0) = 5$.

$$s(t) = 2t^3 - 4t^2 + C$$

$$s(0) = 5$$

$$2(0)^3 - 4(0)^2 + C = 5$$

$$C = 5$$

$$s(t) = 2t^3 - 4t^2 + 5$$

B. أوجد أولاً $v(t)$ من تكامل $a(t)$:

$$v(t) = \int (-32) dt = -32t + C$$

عند $t = 0$, $v(t) = -20$ إذن:

$$-20 = -32(0) + C$$

$$C = -20$$

$$v(t) = -32t - 20$$

يجب إيجاد قيمة C قبل استعمال التكامل من جديد لإيجاد $s(t)$.

الدالة $s(t)$ هي الدالة الأصلية للدالة $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$= \int (-32t - 20) dt$$

$$= -16t^2 - 20t + C$$

بما أن $s(t) = 1100$ عند $t = 0$, عوض لإيجاد C .

$$1100 = -16(0)^2 - 20(0) + C$$

$$C = 1100$$

$$s(t) = -16t^2 - 20t + 1100$$

وهو ارتفاع الجسم عن الأرض في اللحظة t التي تسبق ارتطامه بالأرض.

C. عند ارتطام الجسم بالأرض يكون $s = 0$. إذن:

$$0 = -16t^2 - 20t + 1100$$

$$0 = -4(4t^2 + 5t - 275)$$

$$0 = 4t^2 + 5t - 275$$

باستعمال الصيغة العامة لحل المعادلة التربيعية، اكتب:

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4400}}{8} \approx \frac{-5 \pm 66.5}{8}$$

اختر القيمة الموجبة لأن الزمن لا يمكن أن يكون سالباً. إذن، $t \approx 7.69$.

يستغرق الجسم 7.69 ثانية تقريباً ليرتطم بالأرض، وتكون سرعته عند ارتطامه بالأرض:

$$v(7.69) = -32(7.69) - 20 \approx -266 \text{ ft/sec}$$

إذن، يرتطم الجسم بالأرض بسرعة تساوي 266 ft/sec

ملاحظة

إشارة السرعة سالبة لأن الجسم يسقط من الأعلى إلى الأسفل أي أنه يتحرك عكس اتجاه المحور الرأسي.

يمكننا استعمال التكامل المحدود للسرعة أيضًا، باعتباره تغييرًا كليًا، لإيجاد الإزاحة بين زمنيين. إذا كانت السرعة ثابتة، لا نحتاج، بالطبع، إلى حساب التكامل المحدود لأن الإزاحة ببساطة هي السرعة $\times$ الزمن.

أما إذا كانت السرعة غير ثابتة، فإنه يلزمنا حساب الإزاحة في الفترة الزمنية من $t = a$ إلى $t = b$ أي $s(b) - s(a)$ حيث

$$s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

ليس مهمًا أن تكون قيمة $v(t)$ سالبة أو موجبة، لأن الإزاحة $s(b) - s(a)$ يمكن أن تكون سالبة أو موجبة، وذلك بحسب اتجاه الحركة.

لتوضيح ذلك نأخذ جسمًا يتحرك على خط مستقيم بسرعة

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}$$

نلاحظ أن $v(0) = -8$ و $v(5) \approx 24.78$ و $v(1.25) \approx -0.018$.

تكون الإزاحة في الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 5$ هي $s(5) - s(0) = \int_0^5 v(t) dt$.

مثال 4 إيجاد الموقع باستعمال الإزاحة

لنفترض أن جسيمًا يتحرك على خط مستقيم بسرعة

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}$$

وأن موقع الجسيم لحظة انطلاقه $t = 0$ كان عند $s(0) = 9$. أوجد موقع الجسيم في كل من الحالتين التاليتين.

A. عند $t = 1$

B. عند $t = 5$

الحل

A. يمكن إيجاد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 1$ باستعمال التكامل المحدود:

$$\begin{aligned} s(1) - s(0) &= \int_0^1 v(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 - \frac{8}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{2} - 8 \\ &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

ملاحظة

موقع الجسم = الموقع الابتدائي + الإزاحة

احسب موقع الجسم عندما $t = 1$:

$$s(1) = s(0) - \frac{11}{3} = 9 - \frac{11}{3} = \frac{16}{3}$$

في الثانية الأولى تحرك الجسم مسافة مقدارها $\frac{11}{3}$ إلى يسار موقعه الأصلي حيث $s(0) = 9$ ، ووصل إلى النقطة عند $t = 1$ حيث $s(1) = \frac{16}{3}$.

B. يمكن إيجاد إزاحة الجسم في الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 5$ باستعمال التكامل المحدود:

$$\begin{aligned} s(5) - s(0) &= \int_0^5 v(t) dt \\ &= \int_0^5 \left(t^2 - \frac{8}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1} \right) \Big|_0^5 \\ &= 35 \end{aligned}$$

احسب موقع الجسم عندما $t = 5$:

$$s(5) = s(0) + 35 = 9 + 35 = 44$$

حاول أن تحل التمرين 8

للتوسع أكثر في تطبيقات التكامل المحدود نورد المثال التالي.

مثال 5 إيجاد السرعة والإزاحة من التسارع

تحرك جسم في خط مستقيم بسرعة ابتدائية تساوي $v(0) = 5 \text{ m/sec}$.
ثم أخذ يزيد من سرعته خلال 8 ثوان بتسارع يساوي $a(t) = 2.4 t \text{ m/sec}^2$.

A. أوجد سرعة الجسم بعد مرور 8 ثوان.

B. أوجد إزاحة الجسم خلال هذا الزمن.

الحل

A. إذا كانت السرعة $v(t)$ هي دالة أصلية لدالة التسارع $a(t)$ ، فإن تغير السرعة يتمثل بالتكامل المحدود:

$$\begin{aligned} v(8) - v(0) &= \int_0^8 a(t) dt \\ &= \int_0^8 (2.4t) dt \\ &= (1.2t^2) \Big|_0^8 \\ &= 76.8 \end{aligned}$$

إذن

$$v(8) = v(0) + 76.8 = 5 + 76.8 = 81.8 \text{ m/sec}$$

B. لإيجاد إزاحة الجسم يجب إيجاد دالة السرعة، ويمكنك القيام بذلك أيضًا باستعمال التكامل المحدود. تغير السرعة بين 0 و t هو

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= \int_0^t a(u) du \\ &= \int_0^t (2.4u) du \\ &= (1.2u^2) \Big|_0^t \\ &= 1.2t^2 \end{aligned}$$

$$v(t) = v(0) + 1.2t^2 = 5 + 1.2t^2$$

إذن الإزاحة بين $t = 0$ و $t = 8$ هي

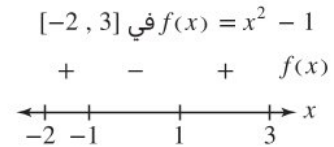
$$\begin{aligned} s(8) &= \int_0^8 v(t) dt \\ &= \int_0^8 (5 + 1.2t^2) dt \\ &= 5t + 0.4t^3 \Big|_0^8 \\ &= 5(8) + 0.4(8)^3 - (5(0) + 0.4(0)^3) \\ &= 244.8 \text{ m} \end{aligned}$$

إذن، إزاحة الجسم في غضون 8 ثوان هي 244.8 m

حاول أن تحل التمرين 16

مراجعة سريعة 5.5

في التمارين 1-8، أوجد كل قيم x (إن وجدت) حيث تغير الدالة إشارتها في الفترة المعطاة. ارسم خط الأعداد الذي يمثل تلك الفترة وحدد عليه إشارة الدالة في كل فترة جزئية. على سبيل المثال:



تغير الدالة إشارتها عند $x = \pm 1$

3. $f(x) = x^2 - 2x + 3, [-4, 2]$

4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, [-2, 2]$

5. $f(x) = x \cos 2x, [0, 4]$

6. $f(x) = xe^{-x}, [0, \infty[$

7. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, [-5, 30]$

8. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}, [-3, 3]$

1. $f(x) = \sin 2x, [-3, 2]$

2. $f(x) = x^2 - 3x + 2, [-2, 4]$

الدرس 5.5 التمارين

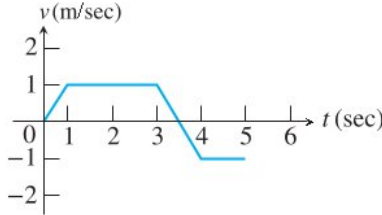
5. **التوفير الصافي** يقوم جهاز جديد لضبط العادم بتخفيض انبعاث غاز أوكسيد الكبريت من عوادم المركبات الآلية. يقدر معدل التوفير المجتمعي (بملايين الريالات سنوياً) بعد t سنة من استعمال الجهاز، من خلال دالة المعدل
- $$S'(t) = -t^2 + t + 8$$
- يخفّض الجهاز الحديد من إنتاج أوكسيد الكبريت ولكنه يزيد من إنتاج أوكسيد النيترات. يُقدر معدل التكلفة الإضافية المجتمعية (بملايين الريالات سنوياً) من جراء استعمال هذا الجهاز لمدة t سنوات من خلال دالة المعدل
- $$C'(t) = \frac{3}{25}t^2$$
- a. حدد المدة الزمنية التي يكون استعمال الجهاز فيها مربحاً.
b. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي الممكن توفيره خلال تلك المدة.
6. **توفير** اشترى سعد سيارة جديدة. ستتيح له السيارة الجديدة توفير مبلغ شهري (بالريالات) يمكن حسابه من خلال الصيغة
- $$R'(t) = 60 - 0.001e^{0.1t}$$
- حيث t الزمن بالأشهر. تكلفة صيانة السيارة الجديدة هي
- $$C'(t) = 0.01e^{0.1t}$$
- a. متى يصبح استعمال هذه السيارة الجديدة ليس مربحاً؟
b. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي حتى ذلك الزمن.
7. بالعودة للمثال 3، أعد حل الفرعين b و c، على أن يكون ارتفاع البرج هذه المرة 2 717 قدماً، وتكون السرعة الابتدائية -20 ft/sec
- في التمارين 8-15، لنفترض أن جسيماً يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)$. أوجد إزاحة الجسيم خلال الفترة المعطاة.
8. $v(t) = 5\cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$.
9. $v(t) = 6\sin 3t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
10. $v(t) = 49 - 9.8t, 0 \leq t \leq 10$.
11. $v(t) = 6t^2 - 18t + 12, 0 \leq t \leq 2$
12. $v(t) = 5\sin^2 t \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

1. **استهلاك الوقود** يتمذج معدل الاستهلاك السنوي للوقود (بمليارات البراميل) في إحدى الدول خلال فترة الثمانينيات من القرن العشرين بالدالة $C'(t) = 27.08e^{\frac{t}{25}}$ ، حيث t عدد السنوات بعد الأول من يناير 1980. أوجد الاستهلاك الكلي للوقود في هذه الدولة من 1 يناير 1980 إلى 1 يناير 1990
2. **استهلاك الكهرباء** يقاس الاستهلاك المنزلي للكهرباء بالكيلوواط. افترض أن الدالة التالية يتمذج معدل استهلاك أحد المنازل من الكهرباء.
- $$C'(t) = 3.9 - 2.4 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$
- حيث تقاس $C(t)$ بالكيلوواط، و t عدد الساعات بعد منتصف الليل. أوجد الاستهلاك اليومي لهذا المنزل من الكهرباء بالكيلوواط ساعة.
3. **حركة السير** يتمذج الدالة $f'(t) = 74 + \cos \frac{t}{3}$ حركة المركبات عند إحدى نقاط التقاطع (بالسيارة في الدقيقة)، حيث t عدد الدقائق بعد منتصف النهار. أوجد عدد السيارات التي تمر في هذا التقاطع بين منتصف النهار والساعة 12:30 بعد الظهر.
4. **التوفير الصافي** اعتمدت إحدى الشركات إجراءات جديدة في الإنتاج في إحدى منشآتها يؤدي إلى توفير قيمة مالية يمكن حسابها باستعمال دالة التوفير $S(t)$ ، حيث t الزمن بالسنوات و $S(t)$ التوفير بآلاف الريالات. تتناقص قيمة التوفير وفق دالة المعدل.
- $$S'(t) = 150 - t^2$$
- غير أن هذه الإجراءات الجديدة في الإنتاج ينتج عنها تكاليف إضافية $C(t)$ تزداد بمعدل
- $$C'(t) = t^2 + \frac{11}{4}t$$
- حيث t الزمن بالسنوات و $C(t)$ التكاليف الإضافية بآلاف الريالات.
- a. حدّد المدة الزمنية التي تحقق فيها الشركة توفيراً صافياً.
b. أوجد مبلغ التوفير الصافي الذي وفرته الشركة خلال السنة الأولى من اعتماد الإجراءات الجديدة.
c. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي الذي وفرته الشركة خلال المدة التي تحقق فيها الشركة توفيراً صافياً.

أسئلة اختبار معيارية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للإجابة عن الأسئلة في هذا القسم.

21. صواب أم خطأ يبين الشكل أدناه سرعة جسيم يتحرك على طول المحور x . الإزاحة لهذا الجسيم سالبة. بّرر إجابتك.



22. صواب أم خطأ إذا كانت سرعة جسيم يتحرك على طول المحور x موجبة دائماً، فإن إزاحة الجسيم تساوي المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم. بّرر إجابتك.

23. اختيار من متعدد. نمذج الدالة $F(t)$ معدل عدد الزبائن الوافدين إلى المكتب:

$$F(t) = 12 + 6\cos\left(\frac{t}{\pi}\right) ; 0 \leq t \leq 60$$

حيث $F(t)$ عدد الزبائن في الدقيقة t الزمن بالدقائق. أي مما يلي يمثل عدد الزبائن الوافدين إلى المكتب خلال 60 دقيقة؟ (الإجابات مقربة إلى أقرب عدد كلي؟)

- A. 720
B. 725
C. 732
D. 744
E. 756

24. اختيار من متعدد. نمذج الدالة التالية معدل كمية الملوثات (بالأطنان) المزالة من إحدى البحيرات. $y = 20e^{-0.5t}$ حيث t عدد السنوات المنقضية منذ 2005، قدر كمية الملوثات المزالة من البحيرة بين العامين 2005 و 2015، قرب الإجابة إلى أقرب طن.

- A. 40
B. 47
C. 56
D. 61
E. 71

13. $v(t) = \sqrt{4-t}, 0 \leq t \leq 4$.

14. $v(t) = e^{\sin t} \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

15. $v(t) = \frac{t}{1+t^2}, 0 \leq t \leq 3$

16. يتسارع جسيم من السكون وفق القاعدة $1 + 3\sqrt{t}$ m/sec² حيث t الزمن بالثواني.

- a. أوجد سرعة الجسيم بعد 9 ثوان.
b. أوجد إزاحة الجسيم خلال هذه الفترة.

17. يتحرك جسيم بسرعة

$$v(t) = (t-2)\sin t \text{ m/sec}$$

حيث $0 \leq t \leq 4$ بالثواني.

أوجد إزاحة الجسيم خلال هذه الفترة.

18. التلوث يصب التلوث من مصنع في بحيرة قريبة. يحسب معدل تركيز المادة الملوثة عند الزمن t باستعمال المعادلة

$$P'(t) = 140 t^{\frac{5}{2}}$$

حيث t هو عدد السنوات منذ بدء المصنع بإلقاء ملوثاته في البحيرة. يقدر البيئيون أنه عندما يصل مستوى التلوث إلى 4 850 وحدة، تكون كل الحياة السمكية في البحيرة قد نفقت. هل يمكن للمصنع أن يعمل لمدة 4 سنوات دون قتل كل الحياة السمكية في البحيرة؟

19. نمو الأشجار استنتج العلماء بعد دراسة وافية أن معدل نمو

$$\text{بعض الأشجار هو } 0.6 + \frac{4}{(t+1)^3}$$

قدم سنوياً، حيث t هو الزمن بالسنوات.

a. أوجد مقدار نمو الشجرة بالأقدام في السنة الثانية.

b. أوجد مقدار نمو الشجرة بالأقدام في السنة الثالثة.

20. قذيفة تم إطلاق قذيفة رأسياً من مستوى سطح الأرض بسرعة 90 ft/sec (تذكر أن التسارع الذي سببه جاذبية الأرض يساوي 32 ft/sec²).

- a. أوجد سرعة القذيفة بعد 3 ثوان.
b. في أي لحظة ترتطم القذيفة بالأرض؟
c. أوجد المسافة الكلية التي تقطعها القذيفة عند ارتطامها بالأرض.

توسيع الأفكار

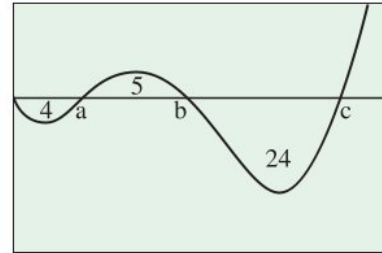
31. **تدفق النفط** يتدفق النفط عبر أنبوب أسطواناني الشكل طول نصف قطره 3 in، لكن سرعة تدفق النفط تتباطأ كلما اتجهنا نحو جدار الأنبوب بسبب الاحتكاك. سرعة تدفق النفط على مسافة r in من المركز تساوي $8(10 - r^2)$ in/sec
- a. في مقطع عرضي مسطح من الأنبوب، تتحول حلقة رفيعة بسماكة Δr على مسافة r in من المركز إلى شكل شريط مستطيل عندما نمددها. أوجد مساحة الشريط (وبالتالي المساحة التقريبية للحلقة).
- b. وضح لماذا نعرف أن النفط يمر عبر هذه الحلقة بسرعة $8(10 - r^2)(2\pi r)\Delta r$ in³/sec
- c. اكتب التكامل المحدود الذي يعطي معدل تدفق النفط عبر الأنبوب، ثم أوجد قيمته.

25. **اختيار من متعدد** تستهلك إحدى الدول النامية الوقود بمعدل $r(t) = 20e^{0.2t}$ مليون برميل سنوياً، حيث t الزمن بالسنوات و $0 \leq t \leq 10$. أي الخيارات التالية يعطي كمية الوقود الذي تستهلكه هذه الدولة في الفترة الزمنية $0 \leq t \leq 10$ ؟

- A. $r(10)$
 B. $r(10) - r(0)$
 C. $\int_0^{10} r'(t) dt$
 D. $\int_0^{10} r(t) dt$
 E. $10 r(10)$

استكشاف

- في التمارين 26-30، يتحرك جسيم على طول المحور x (المسافة مقيسة بالسنتيمترات). موقعه الأصلي عند $t = 0$ sec هو $x(0) = 15$. يبين الشكل أدناه التمثيل البياني لسرعة الجسيم $v(t)$. الأعداد هي مساحات المناطق المغلقة علماً بأن المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية $[a, b]$ تساوي $\int_a^b |v(t)| dt$



26. أوجد إزاحة الجسيم بين $t = 0$ و $t = c$.
27. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في نفس الفترة الزمنية.
28. حدّد موقع الجسيم عند الزمن $t = a$ والزمن $t = b$ والزمن $t = c$.
29. عند أي زمن تقريباً تتحقق القيمة العظمى التقريبية الموجبة لتسارع الجسيم في الفترة $[0, b]$.
30. عند أي زمن تقريباً تتحقق القيمة العظمى التقريبية الموجبة لتسارع الجسيم في الفترة $[0, c]$.

Differential Equations

5.6 المعادلات التفاضلية

تعريف المعادلة التفاضلية

بقيت المسائل المتعلقة بحركة الأجسام المتحركة عالقة من دون حل لقرون، ولقد بات واضحاً اليوم الدور الكبير الذي لعبه التفاضل في حل هذه المسائل. فقد تمكّن لينز ونيوتن من نمذجة حركة الأجسام المتحركة بمعادلات تشتمل على مشتقات الدوال، تُعرف اليوم **بالمعادلات التفاضلية**. بعد ذلك نشطت الأبحاث في هذا المجال وتمكّن علماء الرياضيات من ابتداء طرائق وتقنيات لحل هذه المعادلات التي لا تزال تحظى باهتمام الباحثين في جميع مجالات الرياضيات التطبيقية.

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تشمل مشتقات. رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة في هذه المعادلة.

لنأخذ على سبيل المثال المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x$$

يمكننا القول ببساطة إن الدالة y هي حل لهذه المعادلة التفاضلية إذا كانت مشتقتها تساوي $3x^2 - 2x$ أو بمعنى آخر، إذا كانت y دالة أصلية للدالة $3x^2 - 2x$ ، إذن:

$$y = \int (3x^2 - 2x) dx = x^3 - x^2 + C$$

ويمكننا التحقق من ذلك بمطابقة مشتقة y مع العبارة المعطاة في هذه المعادلة. أي أن **الحل العام** لهذه المعادلة هو

$$y = x^3 - x^2 + C$$

كل قيمة للثابت C تعطي حلاً مختلفاً للمعادلة يُسمى **الحل الخاص** للمعادلة التفاضلية.

يبين الشكل 5.6.1 التمثيلات البيانية لعدد من الحلول الخاصة لهذه المعادلة.

هذا النوع من المعادلات التفاضلية هو النوع الأبسط ويكتب في الصورة $\frac{dy}{dx} = g(x)$ ، وقاعدة حله هي التالية:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ المعادلة العام للحل}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ المعادلة العام للحل هو:}$$

$$y = \int g(x) dx$$

حيث g دالة متصلة.

ما ستتعلمه

- تعريف المعادلة التفاضلية
- المعادلات التفاضلية القابلة للفصل
- تطبيقات المعادلات التفاضلية

...ولماذا

تتطلب دراسة الأجسام المتحركة إيجاد حلول للمعادلات التي تشتمل على مشتقات. لهذه المعادلات أهمية كبيرة في التطبيقات الواقعية مثل المعادلات التي تنمذج النمو السكاني. هذه المعادلات تسمى المعادلات التفاضلية.

معايير الدرس

12A.6.5

12A.6.6

المصطلحات

- معادلات تفاضلية

differential equations

general solution

- حل عام

particular solution

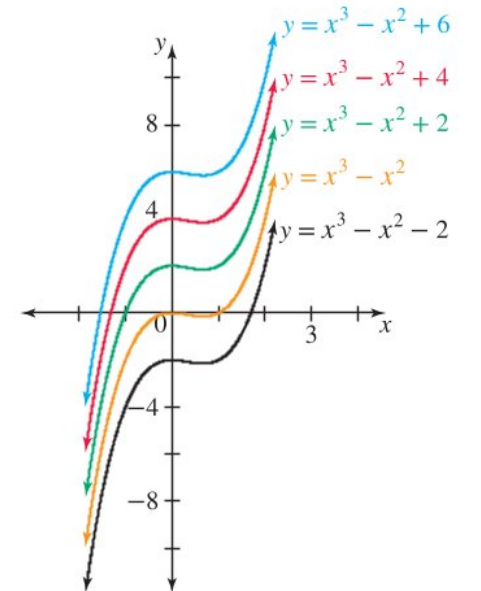
- حل خاص

initial conditions

- شرط ابتدائي

- معادلات تفاضلية قابلة للفصل

separable differential equations



الشكل 5.6.1 يبين الشكل التمثيلات البيانية لعدد من الحلول الخاصة للمعادلة. لاحظ التمثيل البياني باللون الأزرق مثلاً، قيمة الثابت هي 6

تميزت أهمية المعادلات التفاضلية في العلوم الفيزيائية والهندسية منذ القرن الثامن عشر. وقد أصبحت مؤخرًا ذات فائدة في العلوم الاجتماعية، والعلوم الطبيعية، والعلوم الاقتصادية لحل مسائل تتعلق بالنمو السكاني، والتوازن البيئي، ومعدلات الفوائد.

تُسمى المعادلة التفاضلية التي تكون فيها قيمة y محددة عند $x = x_0$ (أو $t = t_0$) **المسألة ذات القيمة الابتدائية**. ويطلق على قيمة y عند $x = x_0$ **الشرط الابتدائي**. نعرض فيما يلي مثالاً من واقع الحياة على المسألة ذات القيمة الابتدائية.

مثال 1 التزايد السكاني

يتزايد تعداد مجموعة من الطيور وفق دالة أسية P بحيث

$$\frac{dP}{dt} = 20 e^{0.05t}$$

حيث t الزمن (بالسنوات). أوجد الدالة P بدلالة الزمن t إذا كان العدد الابتدائي للطيور في المجموعة هو 20 طيرًا.

الحل

لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية، عليك إيجاد الدالة الأصلية المناسبة للدالة $20 e^{0.05t}$

$$P = \int 20 e^{0.05t} dt = \frac{20}{0.05} e^{0.05t} + C = 400 e^{0.05t} + C$$

وبما أن العدد الابتدائي للطيور هو 20، فإن $P(0) = 20$. إذن:

$$20 = 400 e^{0.05(0)} + C$$

$$C = -380$$

$$P = 400 e^{0.05t} - 380$$

يمكنك التحقق من أن P هو حل للمعادلة التفاضلية بالمطابقة بين مشتقتها والدالة في المعادلة التفاضلية.

ملاحظة

يمكننا كتابة الشرط $P = 20$ عند $t = 0$ على الشكل $P(0) = 20$. سوف نستعمل هذا الترميز من الآن فصاعدًا.

حاول أن تحل التمرين 1

لقد استعملت هذه المعلومة في المثال 1 لإيجاد القيمة المناسبة للثابت C ، التي تعطي بدورها حلًا للمعادلة التفاضلية هو الحل الخاص. هذه المعطيات هي $P = 20$ عند $t = 0$.

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

هناك أنواع أخرى من المعادلات التفاضلية التي لا يمكننا حلها بمجرد إيجاد التكامل لدالة،

ويمكن كتابة بعض الأنواع من تلك المعادلات في الصيغة $\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}$.

يمكننا فصل كل ما هو دالة بدلالة y ومشتقتها بكتابتهما في الطرف الأيسر وكتابة الدالة بدلالة x في الطرف الأيمن.

تنبيه

يعتقد بعضهم أن $\frac{dy}{dx}$ كسر بسيط dy ومقامه dx وهو أمر لا معنى له بالتأكيد لكنه يقضي إلى الشكل $q(y) dy = p(x) dx$ الذي سوف نعتمده في الحل. تمهيداً لإيجاد التكامل نكتب: $\int q(y) dy = \int p(x) dx$ أي أننا حصلنا على نتيجة صحيحة بالرغم من التبسيط السابق الذي لا معنى له.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{p(x)}{q(y)} \\ q(y) dy &= p(x) dx \\ \int q(y) dy &= \int p(x) dx \\ Q(y) &= P(x) + C\end{aligned}$$

نجد تكامل طرفي المعادلة

حيث P و Q دالتان أصليتان للدالتين p و q على الترتيب.

هذا النوع من المعادلات يسمى **المعادلات التفاضلية القابلة للفصل**.

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

كل معادلة تفاضلية تُسمى معادلة قابلة للفصل إذا كانت في الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$$

و تُحل بإيجاد دالتين أصليتين F و G للدالتين f و g على الترتيب، وكتابة

$$F(y) = G(x) + C$$

مثال 2

الحل العام للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل

أوجد الحل العام للمعادلة $x^2 \frac{dy}{dx} = y$.

الحل

ابداً بفصل المتغيرين لتحصل على:

$$y dy = x^2 dx$$

يمكن الحل في إيجاد التكامل لكل طرف.

$$\int y dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y^2 = \frac{2}{3} x^3 + 2C$$

$$y^2 = \frac{2}{3} x^3 + K$$

أوجد تكامل طرفي المعادلة

اضرب طرفي المعادلة في 2

أعد تسمية الثابت $K = 2C$

حاول أن تحل التمرينين 6 و 12

تم استبدال الثابت $2C$ بالثابت K في آخر خطوة من المثال. عمومًا، سنستعمل C للتعبير عن الثابت العشوائي، بحيث يصبح الشكل النهائي للإجابة $y^2 = \frac{2}{3} x^3 + C$.

تبقى الإجابة في الصورة الضمنية، ولا نجد حلها بالنسبة للمتغير y بصورة صريحة. كان من الجيد أن نجد الحل بالنسبة للمتغير y من خلال إيجاد الجذر لطرفي المعادلة، ولكن بما أننا لا

نعرف شيئًا عن إشارة y ، فلا يمكننا أن نحدد ما إذا كانت الإجابة هي $y = \sqrt{\frac{2}{3} x^3 + K}$

أم $y = -\sqrt{\frac{2}{3} x^3 + K}$.

إذا كانت قوة y من الدرجة الثالثة، يمكننا أن نجد الحل من خلال إيجاد الجذر التكعيبي لطرفي المعادلة دون أي إشكال.

مثال 3 الحل الخاص للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل

أوجد حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = (xy)^2$ و $y = 1$ عند $x = 1$.

الحل

المعادلة قابلة للفصل لأن بالإمكان كتابتها في الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 x^2$$

$$y^{-2} dy = x^2 dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int x^2 dx$$

$$-y^{-1} = \frac{x^3}{3} + C$$

افصل المتغيرين

اكتب التكامل

لاحظ أنه يكفي إضافة ثابت واحد للمعادلة:

استعمل الآن الشرط الابتدائي لإيجاد الثابت C.

$$-1 = \frac{1}{3} + C$$

$$C = -\frac{4}{3}$$

$$-y^{-1} = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}$$

$$y^{-1} = \frac{4 - x^3}{3}$$

$$y = \frac{3}{4 - x^3}$$

عوّض $x = 1$ و $y = 1$

عوّض قيمة C في المعادلة

وخذ المقامات

ارفع طرفي المعادلة إلى القوة -1

من الواضح أن $y = 1$ عند $x = 1$.

لكن تحقق أن $\frac{dy}{dx} = (xy)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-3)(-3x^2)}{(4 - x^3)^2} = \frac{9x^2}{(4 - x^3)^2} = x^2 \left(\frac{3}{4 - x^3} \right)^2 = x^2 y^2 = (xy)^2$$

وهذه المعادلة مطابقة للمعادلة التفاضلية المعطاة.

حاول أن تحل التمرين 18

تطبيقات المعادلات التفاضلية

لقد درسنا سابقًا ما يكفي من مسائل النمو الأسي لنميز أنها تتضمن نموًا حيث معدل التغير متناسب مع الكمية الحالية الموجودة. كلما ازداد عدد البكتيريا في وعاء الاختبار، كلما تكاثرت بسرعة أكبر. كلما كانت كمية المواد المشعة أكبر، كلما اضمحلت بشكل أسرع. كلما كبرت موجودات حسابك المصرفي (على افتراض أنها تخضع لفائدة مركبة)، كلما نمت بشكل أسرع.

المعادلة التفاضلية التي تصف هذه العملية هي

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

حيث k هو ثابت النمو الأسي إذا كان موجبًا أو ثابت الاضمحلال الأسي إذا كان سالبًا.

الربط مع الكيمياء

عمر النصف للعنصر المشع هو الزمن اللازم لتحويل نصف كتلته إلى إشعاع. عمر النصف للعنصر المشع قيمة ثابتة ولا يرتبط بعدد النويات المشعة فيه.

يمثل الاضمحلال الإشعاعي أحد الأمثلة البارزة لهذا النوع من التغير الأسّي. عندما يتحول جزء من كتلة الذرة إلى إشعاع، فإن ما يتبقى منها يعيد ترتيب نفسه من خلال التحول إلى ذرة عنصر آخر كتلته أصغر من كتلة العنصر الأول. هذه العملية تُسمى الاضمحلال الإشعاعي، والعنصر الذي يضمحل على الدوام يُسمى عنصراً مشعاً. على سبيل المثال، الكربون C-14 المشع يضمحل ويتحول بمرور الزمن إلى نيتروجين، وعنصر الراديوم يضمحل ليتحول بعد عدد من الخطوات الإشعاعية، إلى رصاص. أثبتت التجارب أن معدل اضمحلال العنصر المشع (إذا قيس بعدد النويات المتحوّلة خلال وحدة زمنية واحدة) يتناسب تقريباً مع عدد النويات في كتلته المشعة. إذن، يمكن القول إن الاضمحلال الإشعاعي يتم وفقاً للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad k > 0$$

المثال التالي يوضح طريقة حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية باستعمال طريقة فصل المتغيرات.

مثال 4 فصل المتغيرين

أوجد حل المعادلة $\frac{dy}{dt} = ky$.

الحل

هذه المعادلة التفاضلية هي من النوع الذي يمكن فصل المتغيرين فيه.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$dy \left(\frac{1}{y} \right) = k dt$$

$$\ln |y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C}$$

$$|y| = e^C e^{kt}$$

$$y = \pm e^C e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

افصل المتغيرين

أوجد تكامل الطرفين

اكتب الصيغة الأسية للمعادلة

استعمل خواص الدوال الأسية

استعمل تعريف القيمة المطلقة

لتكن $A = \pm e^C$

حاول أن تحل التمرينين 27 و 31

نلاحظ مما سبق عدم إمكانية حل هذا النوع من المعادلات إلا باستعمال دالة أسية، أما الثابت A فهو قيمة y عند $t = 0$ ، لذا يمكن التعبير عنه بالقيمة y_0 .

مثال 5 دالة النمو

لا تستوعب المحميات الطبيعية في بعض المناطق أكثر من 4 000 رأس ماعز جبلي. لنفترض أن معدل نمو تعداد هذا النوع من الماعز في كل زمن يتناسب مع الفرق بين عددها الأقصى (4 000) وعددها في ذلك الزمن. ثابت النمو الأسّي هو 20% وعدد رؤوس الماعز الابتدائي هو 1 000 رأس.

A. إذا كانت المعادلة التفاضلية لهذا النمو المحدود هي

$$\frac{dy}{dt} = 0.2(4000 - y)$$

حل المعادلة لإيجاد عدد رؤوس الماعز في كل زمن.

B. أوجد عدد رؤوس الماعز بعد مرور 5 سنوات.

الحل

A. صيغة المعادلة التفاضلية هي $\frac{dy}{dt} = 0.2(4000 - y)$

$$\frac{dy}{4000 - y} = 0.2 dt$$

نعوّض ونعيد كتابة المعادلة بحيث يصبح كل متغير في أحد طرفيها

$$\int \frac{dy}{4000 - y} = \int 0.2 dt$$

ثم نوجد تكامل الطرفين

$$-\ln |4000 - y| = 0.2t + C$$

$$-\ln(4000 - y) = 0.2t + C$$

$$4000 - y > 0$$

$$\ln(4000 - y) = -0.2t - C$$

$$4000 - y = e^{-0.2t - C}$$

الصيغة الأسّيّة للمعادلة

$$4000 - y = e^{-0.2t} e^{-C}$$

$$y = 4000 - Me^{-0.2t}$$

$$M = e^{-C}$$

نطبّق الآن الشرط الأصلي لإيجاد قيمة M:

$$y_0 = 4000 - Me^{-0.2(0)} = 4000 - M$$

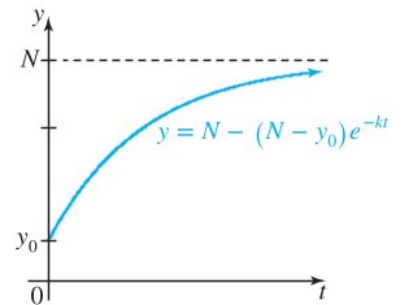
$$M = 4000 - y_0 = 4000 - 1000 = 3000$$

نعوّض قيمة M في المعادلة للحصول على الصيغة العامة للدالة:

$$y = 4000 - 3000 e^{-0.2t}$$

يبين الشكل 5.6.2 التمثيل البياني لهذه الدالة.

(تابع)



الشكل 5.6.2 يبين الشكل التمثيل البياني لدالة النمو المحدود. لاحظ أن المنحنى يبقى تحت خط العدد الأقصى N.

B. نحسب الآن عدد رؤوس الماعز بعد مرور خمس سنوات.

$$\begin{aligned} y &= 4\,000 - 3000 e^{-0.2(5)} \\ &= 4\,000 - 3000 e^{-1} \\ &\approx 4\,000 - 1\,103.6 \\ &= 2\,896.4 \end{aligned}$$

إذن، عدد رؤوس الماعز بعد مرور 5 سنوات هو 2 896 رأس ماعز تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 38

مراجعة سريعة 5.6

5. $0.85^x = 2.5$

6. $2^{k+1} = 3^k$

7. $1.1^t = 10$

8. $e^{-2t} = \frac{1}{4}$

في التمرينين 9 و 10، أوجد y .

9. $\ln(y+1) = 2x - 3$

10. $\ln|y+2| = 3t - 1$

في التمرينين 1 و 2، أعد كتابة المعادلة في الصيغة الأسية أو اللوغاريتمية.

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية

1. $\ln a = b$

2. $e^c = d$

تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية

www.job-jo.com

في التمارين 3-8، حل المعادلة.

3. $\ln(x+3) = 2$

4. $100 e^{2x} = 600$

الدرس 5.6 التمارين

في التمارين 5-12، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية. تحقق من أن الحل يطابق المعادلة التفاضلية المعطاة.

5. $4x^3 - 2 \frac{dy}{dx} = 0$

6. $7y \frac{dy}{dx} = 5x^2$

7. $\frac{dy}{dx} = 15xy$

8. $\frac{dy}{dx} = 3x^2y - 2xy$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad x > 0$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 6}{2y}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{xy^2}$

في التمارين 13-21، أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^3}{4y}, y(0) = 2$

14. $x^2 \frac{dy}{dx} - y\sqrt{x} = 0, y(1) = e^{-2}$

1. بالعودة إلى مثال 1 إذا كان معدل تزايد عدد الطيور $\frac{dP}{dt} = 50 e^{0.04t}$ ، أوجد الدالة P بدلالة الزمن t إذا كان العدد الابتدائي للطيور في المجموعة هو 50 طيرًا.

في التمارين 2-4، أوجد حل المسألة ذات القيمة الابتدائية باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

2. $\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 2x, y(0) = 5$

3. $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + x, y(1) = 0$

4. $x \frac{dy}{dx} = x^2 e^{3x}, y(0) = \frac{8}{9}$

33. **عمر النصف** أوجد عمر النصف لعنصر يضمحل وفق المعادلة

$$y = y_0 e^{-kt}$$

وأثبت أن عمر النصف هذا لا يتعلق إلا بالثابت k .

34. **الضغط الجوي** تتم عادة نمذجة ضغط الأرض الجوي p من

خلال اعتبار أن المعدل $\frac{dp}{dh}$ ، حيث يتغير p مع الارتفاع h عن سطح البحر، متناسب مع p . لنفرض أن الضغط عند مستوى سطح البحر هو 1013 ميلليبار (حوالي $14.7 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$) وأن الضغط على ارتفاع 20 km هو 90 ميلليبار.

a. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dp}{dh} = kp \text{ المعادلة التفاضلية:}$$

القيمة الابتدائية: $p = p_0$ حيث $h = 0$

أوجد قيم كل من p_0 و k بناءً على معطيات الضغط الجوي والارتفاع.

b. أوجد الضغط الجوي على ارتفاع 50 km.

c. أوجد الارتفاع حيث يساوي الضغط 900 ميلليبار.

35. **تفريغ التيار المكثف** لنفرض أن الكهرباء تفرغ من مكثف بمعدل متناسب مع التيار V خلال طرفيه وأنه، إذا كانت t تقاس بالثواني،

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40} V$$

a. أوجد حل المعادلة التفاضلية بالنسبة للتيار V ،

باستعمال V_0 للدلالة على قيمة V عندما $t = 0$.

b. كم سيستغرق التيار ليهبط حتى 10% من قيمته الأصلية؟

36. **تحويل السكر** تتضمن عملية تصنيع السكر الخام خطوة

"تحويل" تغير بنية السكر الجزيئية. عندما تبدأ العملية، يكون معدل تغير كمية السكر الخام متناسباً مع كمية السكر الخام المتبقية. إذا تقلصت كمية السكر الخام من 1 000 kg إلى 800 kg خلال 10 ساعات، أوجد كمية السكر الخام المتبقية بعد 14 ساعة أخرى. علماً أن المعادلة التفاضلية $\frac{dq}{dt} = kq$ تمثل تغير كمية السكر الخام مع مرور الزمن.

$$15. (2x + 3)y = \frac{dy}{dx}, y(0) = 1$$

$$16. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5}{2y - 1}, y(0) = 11$$

$$17. \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{y - 3}, y(0) = 4$$

$$18. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}, y(e) = 3$$

$$19. \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} y^2, y(4) = 9$$

$$20. \frac{dy}{dx} = (y - 1)^2 e^{x-1}, y(1) = 2$$

$$21. \frac{dy}{dx} = 0.001y(100 - y), y(0) = 5$$

في التمارين 22-26، استعمل طريقة فصل المتغيرين لحل معادلات القيمة الابتدائية.

$$22. \frac{dy}{dx} = \cos^2 y, y = 0 \text{ عندما } x = 0$$

$$23. \frac{dy}{dx} = (\cos x) e^{y + \sin x}, y = 0 \text{ عندما } x = 0$$

$$24. \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, y = 2 \text{ عندما } x = 0$$

$$25. \frac{dy}{dx} = -2xy^2, y = 0.25 \text{ عندما } x = 1$$

$$26. \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{y} \ln x}{x}, y = 1 \text{ عندما } x = e$$

في التمارين 27-30، أوجد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = ky$ ، حيث k عدد ثابت، والذي يحقق الشرط الابتدائي المعطى.

$$27. y(0) = 100, k = 1.5$$

$$28. y(0) = 200, k = -0.5$$

$$29. y(5) = 100, y(0) = 50$$

$$30. y(10) = 30, y(0) = 60$$

31. **عمر النصف** يمكن نمذجة اضمحلال الكتلة المشعة في العنصر Sm-151 (نظير مشع لعنصر السماريوم) بالمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = -0.0077y$ ، حيث t الزمن بالسنوات. أوجد عمر النصف للعنصر Sm-151.

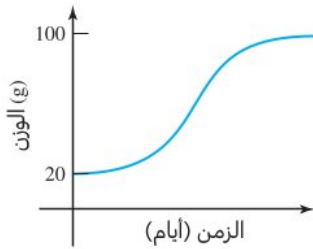
32. **عمر النصف** لإحدى النظائر المشعة للنيبتونيوم Np-240 عمر نصف هو 65 دقيقة. إذا قمنا بنمذجة اضمحلال العنصر Np-240 باستعمال المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = -ky$ ، حيث t بالدقائق. أوجد ثابت الاضمحلال k .

41. **نمو الطيور** يتناسب معدل اكتساب الوزن لطيور صغير مع الفرق بين وزن الطير البالغ ووزنه الحالي. عند $t = 0$ ، أي عند قياس وزن الطير لأول مرة، كان وزنه 20 g. إذا كان $B(t)$ وزن الطير بالجرام، بعد t يوم من قياس وزنه لأول مرة، يكون

$$\frac{dB}{dt} = 0.2(100 - B)$$

- a. هل يكتسب الطير الوزن بشكل أسرع عندما يكون وزنه 40 g أم 70 g؟ أشرح طريقة تفكيرك.

- b. أوجد $\frac{d^2 B}{dt^2}$ بدلالة t . استعمل $\frac{d^2 B}{dt^2}$ لتشرح لماذا لا يمكن للتمثيل البياني للدالة B أن يشبه التمثيل البياني التالي.



- c. استعمل فصل المتغيرات لإيجاد $y = B(t)$ ، الحل الخاص للمعادلة التفاضلية بالقيمة الابتدائية $B(0) = 20$.

أسئلة اختبار معيارية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للإجابة عن الأسئلة في هذا القسم.

42. **صواب أم خطأ** إذا كان $\frac{dy}{dx} = ky$ ، فإن $y = e^{kx} + C$. برّر إجابتك.

43. **صواب أم خطأ** يمكن كتابة الحل العام للمعادلة $\frac{dy}{dt} = 2y$ في الصورة $y = C(3^{kt})$ حيث C و k ثابتان. برّر إجابتك.

44. **اختيار من متعدد** تخسر عينة من العنصر Ce-143 (نظير مشع للسيريوم) 99% من كتلتها المشعة خلال 199 ساعة. إذا كانت المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = -ky$ تمثل اضمحلال الكتلة المشعة مع مرور الزمن، ما عمر النصف للعنصر Ce-143؟

- A. 4 ساعات
B. 6 ساعات
C. 30 ساعة
D. 100.5 ساعة
E. 143 ساعة

37. **تكاثر البكتيريا** تنمو مستعمرة بكتيريا في مختبر ضمن شروط مثالية بحيث يزداد عدد البكتيريا في المستعمرة أسّيًا بمرور الزمن. بعد 3 ساعات، أصبح في المستعمرة 10 000 بكتيريا. وبعد 5 ساعات، أصبح عدد البكتيريا في المستعمرة 40 000. أوجد العدد الابتدائي للبكتيريا في هذه المستعمرة. علّم أن المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = ky$ تمثل عدد البكتيريا مع مرور الزمن.

38. بالعودة للمثال 5، أوجد عدد رؤوس الماعز بعد 5 سنوات إذا كان المرعى يستوعب 6 000 رأس. معدل النمو 15%، والعدد الابتدائي لرؤوس الماعز في المرعى هو 1 200 رأس. علّم أن الدالة $y = 6 000 - Me^{-0.15t}$ ، حيث M عدد ثابت، تمثل تغير عدد رؤوس الماعز مع مرور الزمن.

39. **ترطيب التربة** يمثّل المؤشر I مقياسًا لقياس رطوبة التربة. وصفت مقالة تعنى بشؤون الزراعة معدل تغير I بالنسبة لكمية المياه المتوافرة، W ، باستعمال المعادلة

$$\frac{dI}{dW} = 0.088(2.4 - I)$$

- a. حسب المقالة فإن $I = 1$ عند $W = 0$.

أوجد حل المسألة الابتدائية.

- b. ماذا يحصل للمؤشر I كلما ازدادت W ؟

40. **تعداد الأسماك** تم عزل مجموعة من الأسماك وتحديد عددها الأقصى بـ 4 000 حسب كمية الطعام المتوفرة. إذا كان عددها الآن 320 سمكة وكانت المجموعة تنمو بمعدل نمو ثابت هو 2% سنويًا، أوجد عدد الأسماك المتوقع عند نهاية 10 سنوات. علّم أن المعادلة التفاضلية لهذا النمو هي $\frac{dy}{dt} = 0.02(4000 - y)$.

توسيع الأفكار

48. **القفز المظلي الحر** إذا سقط جسم كتلته m سقوطاً حراً من حالة السكون وبتأثير الجاذبية الأرضية فقط، وكانت مقاومة الهواء له تتناسب مع مربع سرعته، يمكن نمذجة سرعة الجسم $v(t)$ من خلال مسألة القيمة الابتدائية، حيث

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

المعادلة التفاضلية:

$$v(0) = 0$$

الشرط الابتدائي:

حيث t الزمن بالثواني، و g هو التسارع بسبب الجاذبية، و k ثابت يتوقف على خصائص الجسم وكثافة الهواء. (نفترض أن زمن السقوط قصير كفاية لتكون كثافة الهواء ثابتة تقريباً ولا تؤثر في النتيجة).

a. أثبت أن الدالة

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{e^{at} - e^{-at}}{e^{at} + e^{-at}}$$

حيث $a = \sqrt{\frac{gk}{m}}$ ، هي حل مسألة القيمة الابتدائية.

b. أوجد سرعة الجسم المحدودة $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$.

c. بالنسبة لشخص يقفز بشكل حر بالمظلة، وزنه 160 lb ($mg = 160$)، بحيث يكون الزمن بالثواني والمسافة بالأقدام، وقيمة k النموذجية هي 0.005. أوجد السرعة المحدودة لهذا الشخص. أعطِ الإجابة بوحدة الميل في الساعة.



يتحكم المظليون بسرعتهم المحدودة من خلال تغيير المساحة المقابلة للسقوط من أجسادهم، ويمكنهم تغيير سرعة سقوطهم من 94 إلى 321 ميلاً في الساعة.

45. **اختيار من متعدد** في أي من النماذج التالية تتناسب $\frac{dy}{dt}$ مع y مباشرة؟

- I. $y = e^{kt} + C$
- II. $y = Ce^{kt}$
- III. $y = 28^{kt}$
- A. فقط I
- B. فقط II
- C. I و II فقط
- D. II و III فقط
- E. I و II و III

استكشاف

46. **التناسب بين مقاومة الهواء والسرعة** من المنطقي افتراض أن مقاومة الهواء لجسم متحرك، مثل سيارة تحاول التوقف، متناسبة مع سرعة الجسم. وبالتالي فإن مقاومة الهواء لجسم كتلته m ويتحرك بسرعة v تساوي $-kv$ ، حيث k ثابت موجب.

a. استعمل القانون: القوة = الكتلة $\times$ التسارع لإثبات أن سرعة جسم يتعرض لمقاومة الهواء (مع تجاهل كل العوامل الأخرى) تحقق المعادلة التفاضلية

$$m \frac{dv}{dt} = -kv$$

b. أوجد حل المعادلة التفاضلية لتثبت أن $v = v_0 e^{-(k/m)t}$ ، حيث v_0 سرعة الجسم في الزمن $t = 0$.

c. إذا كانت قيمة k لجسمين بكتلتين مختلفتين هي نفسها، أي من هذين الجسمين يستغرق تناقص سرعته الابتدائية حتى النصف زمناً أقل؟ بزر إجابتك.

47. **تقليل السرعة حتى التوقف** افترض أن مقاومة الهواء لجسم متحرك تتناسب مع سرعته بحيث تكون السرعة $v = v_0 e^{-(k/m)t}$.

a. أوجد تكامل دالة السرعة بالنسبة للزمن t لإيجاد دالة الموقع s . افترض أن $s(0) = 0$ وأثبت أن

$$s(t) = \frac{v_0 m}{k} \left(1 - e^{-(\frac{k}{m})t} \right)$$

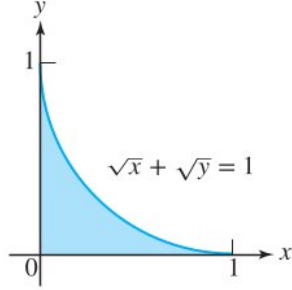
b. أثبت أن المسافة الكلية التي قطعها الجسم حين كان يقلل من سرعته حتى التوقف التام هي $\frac{v_0 m}{k}$.

الوحدة 5 مراجعة الوحدة

في التمارين 1-9، أوجد قيمة التكامل المحدود.
استعمل طريقة التعويض إذا لزم الأمر.

في التمارين 13-16، أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين
المستقيمت والمنحنيات.

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1; y = 0; x = 0$

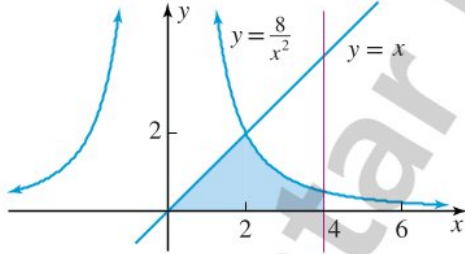


14. $y = x + 1; y = 3 - x^2$

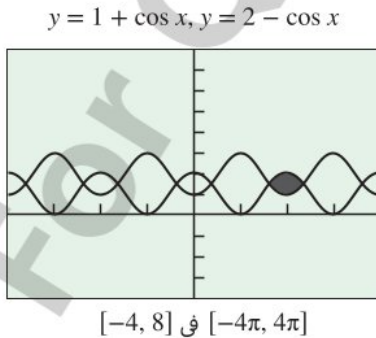
15. $y = -2x^2 + 6; x = 2; y = 0$

16. $y = x^2 + 2; y = x + 4$

17. أوجد المساحة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيم $y = x$ والمستقيم $x = 4$ ومنحنى الدالة $y = \frac{8}{x^2}$ والمحور x .



18. **عقد** أوجد مساحة المنطقة الصغيرة المظللة من العقد، الواقعة بين المنحنيين



1. $\int_{-2}^2 5 dx$

2. $\int_0^{\pi/4} \cos x dx$

3. $\int_{-1}^1 (3x^2 - 4x + 7) dx$

4. $\int_1^2 \frac{4}{x^2} dx$

5. $\int_1^4 \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$

6. $\int_0^{\pi/3} \sec^2 \theta d\theta$

7. $\int_0^1 \frac{36}{(2x+1)^3} dx$

8. $\int_{-\pi/3}^0 \sec x \tan x dx$

9. $\int_0^2 \frac{2}{y+1} dy$

في التمارين 10-12، استعمل التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين المحور x ومنحنى الدالة f في الفترة المحددة.

10. $f(x) = \sqrt{4x-3}, [1, 3]$

11. $f(x) = (3x+2)^6, [-2, 0]$

12. $f(x) = xe^{x^2}, [0, 2]$

30. يتحرك جسم بسرعة

$$v(t) = 3t \sin t \text{ m/sec}$$

حيث $0 \leq t \leq 3$ بالثواني.

أوجد إزاحة الجسم خلال تلك الفترة.

31. إذا كان معدل الاستجابة لدواء جديد بعد تناوله بمدة t

ساعة هو $r'(t) = 0.5te^{-t}$. أوجد قيمة الاستجابة الكلية

بعد 5 ساعات من تناول الدواء.

في التمارين 32-36، أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

$$32. \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+4}, y(-3) = 2$$

$$33. \frac{dy}{d\theta} = \sec^2(2\theta), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$34. \frac{dy}{dx} = y + 2, y(0) = 2$$

$$35. \frac{dy}{dx} = (2x + 1)(y + 1), y(-1) = 1$$

$$36. \frac{dy}{dx} = y(1 - y), y(0) = 0.1$$

19. أوجد مساحة إحدى المناطق الكبيرة في العقد، المحصورة

بين المنحنيين في الشكل الوارد في التمرين السابق.

في التمارين 21-24، أوجد المساحة بين المنحنيين، وحسب

الفترة المحددة في بعض الحالات.

$$20. g(x) = x^2 - 3 \text{ و } f(x) = 5 - x^2$$

$$21. g(x) = x - 6 \text{ و } f(x) = x^2 - 4x$$

$$22. x = 4 \text{ و } x = -2 \text{ و } g(x) = x + 6 \text{ و } f(x) = x^2 - 4x$$

$$23. t = 4 \text{ و } t = 0 \text{ و } g(t) = t^2 - 3 \text{ و } f(t) = 5 - t^2$$

في التمارين 24-26، أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران

المساحة المحددة بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x .

$$24. y = 2x, y = 0, x = 0, x = 2$$

$$25. y = \frac{1}{x}, y = 0, x = \frac{1}{2}, x = 2$$

$$26. y = 3x^2, y = 0, x = -1, x = 1$$

27. أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران المساحة المحددة

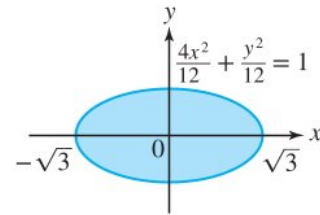
بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x .

$$y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$$

28. المقطع العرضي لكرة القدم الأمريكية يشبه القطع الناقص

المبين في الشكل أدناه (الوحدة المستعملة هي الإنش).

أوجد حجم الكرة مقربًا إلى أقرب إنش مكعب.



29. تتسارع مركبة من الصفر بمعدل $9 + 3t^2 \text{ m/sec}^2$

لمدة 6 ثوان.

a. أوجد سرعة المركبة بعد 6 ثوان.

b. أوجد المسافة التي تقطعها المركبة خلال هذه

المدة.

الوحدة 5 تقويم

في التمارين 1-6، أوجد قيمة التكامل المحدود.

$$1. \int_2^5 4x \, dx$$

$$2. \int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5) \, ds$$

$$3. \int_1^{27} y^{-\frac{4}{3}} \, dx$$

$$4. \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

$$5. \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right) \, dx$$

$$6. \int_{-1}^1 2x \sin(1 - x^2) \, dx$$

7. إن معدل انتشار مرض معدي (بعدد الأشخاص المصابين

في الشهر) يعطى بالدالة $I'(t) = \frac{100t}{t^2 + 1}$ حيث t الزمن

المنقضي على بدء انتشار المرض بالأشهر. أوجد العدد

الكلي للأشخاص المصابين خلال الأشهر الأربعة الأولى من انتشار المرض.

8. أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين المستقيم $y = 2 - 5x$

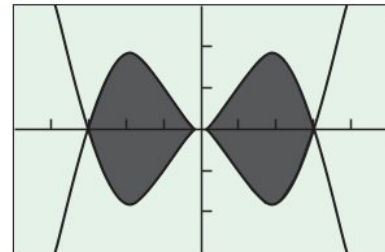
والمنحنى $y = 2x^2 - 1$.

9. استعمل التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين المحور x

ومنحنى الدالة $f(x) = 1 + e^x$ في الفترة $[0, 4]$.

10. أوجد مساحة المنطقة المظللة الواقعة بين المنحنيين

$y = x \sin x$ و $y = -x \sin x$ في الفترة $[-\pi, \pi]$



$[-5, 5]$ في $[-3, 3]$

11. أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران المساحة المحددة

بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x .

$$x = 4, x = 2, y = 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

12. أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران المساحة المحددة

بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x .

$$y^2 = 4x, y = 0, x = 1, x = 4$$

13. يتحرك جسم بسرعة

$$v(t) = t^2 - 2t \text{ m/sec}$$

حيث $0 \leq t \leq 4$ بالثواني.

أوجد إزاحة الجسم خلال تلك الفترة.

في التمارين 14-16، أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

$$14. \frac{dy}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2}, y(0) = 1$$

$$15. \frac{dy}{dx} = (3 - 2x)y; y(0) = 5$$

$$16. \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{y + 3}; y(0) = 16$$

الوحدة 5 المشروع

حساب معدل عدد الزوار

تتمذج الدالة E معدل عدد الزوار الداخلين إلى مدينة ألعاب في يوم معين:

$$E(t) = \frac{15\,600}{t^2 - 24t + 160}$$

وتتمذج الدالة L معدل عدد الزوار الخارجين من مدينة الألعاب في اليوم نفسه:

$$L(t) = \frac{9\,890}{t^2 - 38t + 370}$$

تقاس $E(t)$ و $L(t)$ بعدد الزوار كل ساعة، ويقاس الزمن t بعدد الساعات بعد منتصف الليل. تصح هاتان الدالتان للقيم $9 \leq t \leq 23$ ، التي تمثل عدد الساعات التي تكون فيها مدينة الألعاب مفتوحة للزوار. في الزمن $t = 0$ تكون مدينة الألعاب خالية من الزوار.

$$\left(\frac{d}{dx} [\tan^{-1}(x)] = \frac{1}{x^2 + 1} \right) \text{ (مساعدة)}$$

1. أوجد عدد الزوار الذين دخلوا المدينة بحلول الساعة 5 بعد الظهر ($t = 17$). قَرِّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح.

2. سعر تذكرة الدخول حتى الساعة 5 بعد الظهر هو QR 15، وبعد ذلك يصبح سعر التذكرة QR 11. أوجد المبلغ (بالريالات) الذي حصله مكتب الدخول في ذلك اليوم. قَرِّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح.

3. ليكن

$$H(t) = \int_9^t [E(x) - L(x)] dx, \quad 9 \leq t \leq 23$$

إذا كانت $H(17)$ مقربة إلى أقرب عدد صحيح هي 3 725، أوجد قيمة $H'(17)$ وفسر معنى كل من $H(17)$ و $H'(17)$ في موضوع مدينة الألعاب.

4. أوجد الزمن t ، بحيث $9 \leq t \leq 23$ ، الذي يتوقع أن يبلغ فيه عدد زوار مدينة الألعاب قيمته القصوى بحسب النموذج المعطى.

الوحدة 6



المتجهات

لقد تعلمنا، في ما سبق، كيفية تحديد موقع جسم باستعمال الإحداثيات العددية. لكن يمكننا استعمال هذه الإحداثيات، من خلال تغيير بسيط في تفسيرها، في تحديد التغير في مواقع الأجسام المتحركة، أي السرعة، وبالتالي نمذجة مسائل السرعة. هذا التفسير الجديد مبني على مفهوم "المتجهات" الذي يشكل موضوع هذه الوحدة.

يمكننا تمثيل بعض الكميات، مثل الحرارة والارتفاع والمساحة والحجم، باستعمال عدد حقيقي واحد يُسمى المقدار. لكن بعض الكميات الأخرى، مثل الشغل والسرعة والتسارع، تحتاج إلى عنصرين لتمثيلها هما المقدار والاتجاه. سنتعلم في هذه الوحدة عن المتجهات وكيفية حساب مقاديرها واتجاهاتها، وسندرس العمليات التي يمكنها مساعدتنا في حل مسائل من واقع الحياة. ولأننا ندرس العالم الواقعي من خلال الهندسة التحليلية، فإن لفهم المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد الفائدة الكبرى لحل المسائل الواقعية.

6.1 مدخل إلى المتجهات

6.2 العمليات على المتجهات

6.3 الضرب القياسي للمتجهات

6.4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

Introduction to Vectors

6.1 مدخل إلى المتجهات

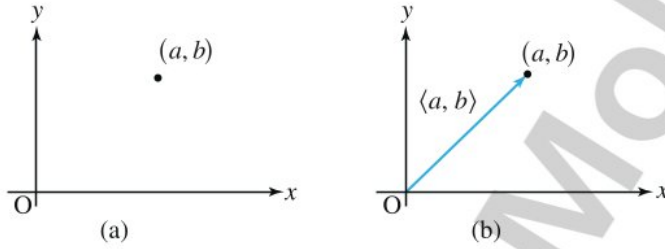
المتجهات الثنائية البعد

للحديث عن بعض الكميات، مثل الحرارة والمسافة والارتفاع والمساحة والحجم، يكفي استعمال الأعداد الحقيقية لتحديد مقاديرها أو قيمها من دون أي إضافة. غير أن بعض الكميات الأخرى، مثل السرعة والتسارع والقوة، لا يكفي استعمال الأعداد فقط لتوصيفها، لأنها تتحدد بمقاديرها واتجاهاتها. إذا كانت الاتجاهات الممكنة لحركة جسم ما على سطح مستوي غير منتهية، فإن عددين فقط سيكونان كافيين لتحديد سرعته، من حيث **المقدار والاتجاه**، في أي لحظة، وهو ما قد يبدو غريبًا. ببساطة، سوف نرى أن زوجًا مرتبًا (a, b) من الأعداد الحقيقية، لا يمثل نقطة فقط في المستوى الإحداثي، بل يمثل **قطعة مستقيمة متجهة** (أو سهم) رأسها عند النقطة (a, b) وذيلها عند نقطة الأصل (انظر الشكل 6.1.1).

يمثل طول هذا **السهم** المقدار وتحدد النقطة (a, b) الاتجاه.

لأنه في هذا السياق، يمثل الزوج المرتب (a, b) كائنًا رياضيًا ذا مقدار واتجاه.

لذا نسميه **متجه الموضع** للنقطة (a, b) ونرمز له بالرمز $\langle a, b \rangle$ لنميزه عن النقطة (a, b) .



الشكل 6.1.1 النقطة تمثل الزوج المرتب (a, b) . السهم (قطعة مستقيمة متجهة) يمثل المتجه $\langle a, b \rangle$.

تعريف المتجهات الثنائية البعد

المتجه v الثنائي البعد هو زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يُرمز له في **الصورة التركيبية**

بالرمز $\langle a, b \rangle$ حيث تصبح كل من a و b **مركبتي** المتجه v .

التمثيل القياسي للمتجه $\langle a, b \rangle$ هو السهم الذي يمتد من نقطة الأصل إلى النقطة (a, b) .

مقدار المتجه v هو طول هذا السهم **واتجاهه** هو الاتجاه الذي يدل السهم عليه.

المتجه $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ يُسمى **المتجه الصفري** وهو متجه مقداره صفر ولا اتجاه له.

كثيرًا ما يكون من المفيد التعبير عن المتجهات باستعمال أسهم تبدأ بنقاط غير نقطة الأصل. الأمر المهم الذي يجب التنبيه إليه هو أن سهمين لهما نفس الطول ونفس الاتجاه يعتبران عن نفس المتجه. في الشكل 6.1.2 على سبيل المثال، يعتبر السهم $\overrightarrow{RS}$ الذي **نقطة البداية** فيه هي R و**نقطة النهاية** هي S عن المتجه $\langle 3, 4 \rangle$ كما يعتبر عن نفس هذا المتجه التمثيل القياسي $\overrightarrow{OP}$. نقول عن هذين السهمين الذين يعتبران عن متجه واحد إنهما **متكافئان**.

ما ستتعلمه

- المتجهات الثنائية البعد
- متجهات الوحدة
- زاوية الاتجاه

...ولماذا

تبرز ضرورة المتجهات في الكثير من التطبيقات الواقعية، كدراسة تأثير الرياح على مسار الطائرة على سبيل المثال.

معايير الدرس

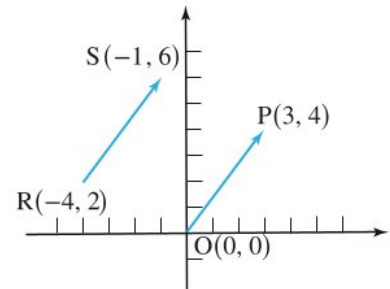
12A.7.1

12A.7.2

12A.7.5

المصطلحات

- قطعة مستقيمة متجهة
- directed line segment
- متجه الموضع
- position vector
- متجه ثنائي البعد
- two-dimensional vector
- الصورة التركيبية
- component form
- مركبتا المتجه
- components of vector
- التمثيل القياسي
- standard representation
- مقدار المتجه
- magnitude
- اتجاه المتجه
- direction
- المتجه الصفري
- zero vector
- زاوية الاتجاه
- direction angle



الشكل 6.1.2 يعتبر كلا السهمان $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{RS}$

عن المتجه $\langle 3, 4 \rangle$ ، كما هو الحال مع أي سهم بنفس الطول يشير إلى نفس الاتجاه. نقول عن هكذا أسهم إنها متكافئة.

الطريقة الأبسط لمعرفة الأسهم التي تعبر عن المتجهات هي استعمال القاعدة التالية.

الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة

السهم الذي نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2) يعبر عن المتجه:

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

ملاحظة

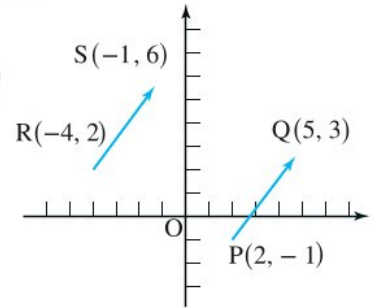
على الرغم من أن السهم يمثل متجهًا، إلا أنه لا يعتبر متجهًا بحد ذاته، وذلك لأن المتجه يمكن أن يعبر عنه بعدد غير محدود من الأسهم المتكافئة. لكننا رغم ذلك سوف نكتب $\vec{PQ} = \vec{u}$ للقول أن السهم $\vec{PQ}$ يمثل المتجه $\vec{u}$ من غير أن يكون هو المتجه نفسه.

مثال 1 القطع المستقيمة المتجهة المتكافئة

أثبت أن السهم من $R(-4, 2)$ إلى $S(-1, 6)$ يكافئ السهم من $P(2, -1)$ إلى $Q(5, 3)$ (انظر الشكل 6.1.3).

الحل

باستعمال الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة، لاحظ أن $\vec{RS}$ يمثل المتجه $\langle 3, 4 \rangle = \langle -1 - (-4), 6 - 2 \rangle$. كذلك فإن $\vec{PQ}$ يمثل المتجه $\langle 3, 4 \rangle = \langle 5 - 2, 3 - (-1) \rangle$. على الرغم من وقوعهما في موضعين مختلفين في المستوى إلا أنهما يمثلان المتجه نفسه، وبالتالي هما متكافئان.



الشكل 6.1.3 يبدو أن للسهمين $\vec{RS}$

و $\vec{PQ}$ نفس المقدار والاتجاه.

ثبتت الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة أنهما يمثلان نفس المتجه.

حاول أن تحل التمرين 1

نشاط استكشافي توجيه المتجهات

حاول أن ترى كيف يمكنك توجيه الأسهم في المستوى الإحداثي من خلال المعلومات عن المتجهات وباستعمال الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة.

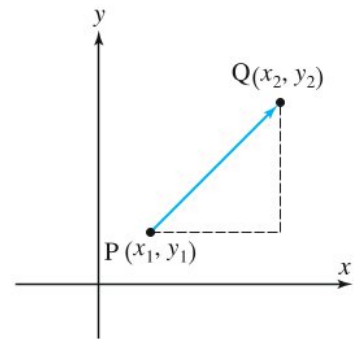
1. سهم نقطة بدايته $(2, 3)$ ونقطة نهايته $(7, 5)$. أوجد المتجه الذي يمثله.
2. سهم نقطة بدايته $(3, 5)$ ويمثل المتجه $\langle -3, 6 \rangle$. أوجد نقطة النهاية لهذا المتجه.
3. إذا كانت P هي النقطة $(4, -3)$ ، وكان $\vec{PQ}$ يمثل $\langle 2, -4 \rangle$ ، أوجد إحداثي Q.
4. إذا كانت Q هي النقطة $(4, -3)$ ، وكان $\vec{PQ}$ يمثل $\langle 2, -4 \rangle$ ، أوجد إحداثي P.

يساعد النشاط الاستكشافي السابق على فهم التمثيل الهندسي للمتجهات، الذي يساعد بدوره على فهم مسائل الجبر المتعلقة بالمتجهات بشكل عام، وأولها مفهوم مقدار المتجه.

مقدار المتجه $\vec{v}$ ، ويسمى أيضًا **القيمة المطلقة للمتجه $\vec{v}$** ويرمز له بالرمز $|\vec{v}|$ (أو $\|\vec{v}\|$ في بعض الكتب)، هو عدد حقيقي موجب، وليس متجهًا، يساوي طول السهم الذي يعبر عن المتجه. يمكننا إذن استعمال صيغة المسافة في المستوى الإحداثي لإيجاد مقدار المتجه (انظر الشكل 6.1.4).

الشكل 6.1.4 مقدار $\vec{v}$ هو طول السهم $\vec{PQ}$ ، ويمكن إيجاده باستعمال صيغة المسافة:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



مقدار المتجه (أو طول المتجه)

إذا كان المتجه $\mathbf{v}$ ممثلًا بسهم من (x_1, y_1) إلى (x_2, y_2) ، فإن مقداره هو:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بصورة أخرى إذا كان $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، فإن $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

مثال 2 إيجاد مقدار متجه

أوجد مقدار (طول) المتجه الذي يمثله $\overrightarrow{PQ}$ حيث $P(-3, 4)$ و $Q(-5, 2)$.

الحل

باستعمال القاعدة السابقة ومن خلال النظر إلى $\overrightarrow{PQ}$ يمكنك أن تكتب:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (2 - 4)^2} = 2\sqrt{2}$$

وباستعمال الصور التركيبية للمتجهات تجد أن $\mathbf{v} = \langle -2, -2 \rangle$. إذن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

حاول أن تحل التمرين 5

متجهات الوحدة

يتطلب العمل في المتجهات أحيانًا التعامل مع المتجهات والأعداد في نفس الوقت.

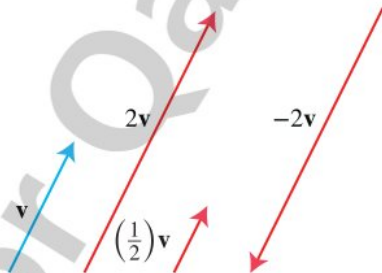
نسمي الأعداد في هذا السياق "الكمية غير المتجهة" أو "الكمية القياسية".

إذا كان $\mathbf{v}$ هو المتجه $\langle a, b \rangle$ وكان k عددًا حقيقيًا، يمكننا تعريف المتجه $k\mathbf{v}$ بأنه المتجه

$\langle ka, kb \rangle$. ويمكننا ملاحظة أن اتجاه هذا المتجه هو نفس اتجاه $\mathbf{v}$ إذا كان $k > 0$ ،

واتجاه معاكس للمتجه $\mathbf{v}$ إذا كان $k < 0$ ، أي أنه يوازي المتجه $\mathbf{v}$ ، كما أن طوله هو $|k| |\mathbf{v}|$

(انظر الشكل 6.1.5).



الشكل 6.1.5 يبين الشكل تمثيل المتجه $\mathbf{v}$ وتمثيلات بعض المتجهات التي تشكل حاصل ضرب

المتجه $\mathbf{v}$ بكمية قياسية، وجميعها متجهات متوازية.

كل متجه u مقداره $|u| = 1$ يُسمى متجه الوحدة. لكل متجه يوجد متجه وحدة خاص به مقداره وحدة واحدة وله نفس الاتجاه. إذا كان v متجهًا غير صفري $\langle 0, 0 \rangle \neq v$ ، فإن المتجه

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|} v$$

هو متجه وحدة في اتجاه المتجه v ، وقد يُسمى أيضًا **متجه الاتجاه**، وهو طريقة للتعبير عن اتجاه v ، لأن أي متجه اتجاهه نفس اتجاه v أو معاكس لاتجاهه هو $k\hat{v}$ ، حيث k عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

ملاحظة

إن كتابة المقدار $\frac{v}{|v|}$ هي مجرد رمز، لأن عملية قسمة متجه على عدد حقيقي لم يتم تعريفها، وهذا يساعدنا في الوصول إلى أن $\hat{v} = \frac{1}{|v|} v$.

مثال 3 إيجاد متجه وحدة

أوجد متجه الوحدة للمتجه $v = \langle -3, 2 \rangle$ وتحقق من أن مقداره يساوي 1

الحل

أوجد مقدار v :

$$\begin{aligned} |v| &= |\langle -3, 2 \rangle| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|} v = \frac{1}{\sqrt{13}} \langle -3, 2 \rangle \\ &= \left\langle \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle \end{aligned}$$

مقدار هذا المتجه هو

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle \right| &= \sqrt{\left(\frac{-3}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1 \end{aligned}$$

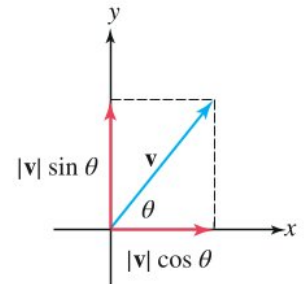
إذن، مقدار المتجه $\frac{v}{|v|}$ يساوي 1، وله نفس اتجاه v لأنه ناتج ضرب المتجه v بكمية قياسية موجبة.

حاول أن تحل التمرين 11

زاوية الاتجاه

من المعروف أن تحديد الاتجاه يتم بطرق متعددة، ولعل أبسط الطرق وأكثرها دقة لمعرفة اتجاه متجه هي في تعريف **زاوية الاتجاه** الخاصة به، وهي الزاوية θ التي ضلع الابتداء فيها هو الجزء الموجب من المحور x وضلع الانتهاء فيها هو السهم الذي يمثل المتجه v تمثيلًا قياسيًا (انظر الشكل 6.1.7).

يمكننا، باستعمال حساب المثلثات، أن نتبين أن **المركبة الأفقية** للمتجه v هي $|v| \cos \theta$ و**المركبة الرأسية** هي $|v| \sin \theta$. تسمى عملية إيجاد المركبات الأفقية والرأسية لمتجه تحليل المتجه إلى مركباته الأساسية.



الشكل 6.1.7 مركبتا المتجه v الأفقية والرأسية.

تحليل متجه إلى مركباته الأساسية

إذا كانت θ هي زاوية الاتجاه للمتجه $\mathbf{v}$ ، فيمكن إيجاد مركبتي $\mathbf{v}$ الأساسيتين باستعمال الصيغة:

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$$

نلاحظ أن متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v}$ بحسب القاعدة السابقة هو

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$$

مثال 4 إيجاد مركبتي المتجه

أوجد مركبتي المتجه $\mathbf{v}$ الأساسيتين إذا كانت زاوية اتجاهه قياسها 115° ومقداره 6

الحل

(انظر الشكل 6.1.8) إذا كانت كل من a و b هما المركبتين الأفقية والرأسية للمتجه $\mathbf{v}$ ، فإن:

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = \langle 6 \cos 115^\circ, 6 \sin 115^\circ \rangle$$

$$\text{إذن، } a = 6 \cos 115^\circ \approx -2.54 \text{ و } b = 6 \sin 115^\circ \approx 5.44$$

حاول أن تحل التمرين 19

إن سرعة جسم متحرك تمثل متجهًا لأن للسرعة مقدار واتجاه. يبين المثال التالي تطبيق مفهوم المتجهات في موضوع السرعة.

مثال 5 كتابة السرعة بالصورة التركيبية للمتجه

تطير طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها 65° مع الشمال الجغرافي بسرعة 500 mph (انظر الشكل 6.1.9). أوجد الصورة التركيبية للمتجه الذي يمثل سرعة الطائرة.

الحل

إذا كان $\mathbf{v}$ هو متجه سرعة الطائرة، فإن مسارًا بزاوية قياسها 65° مع الشمال الجغرافي يكافئ زاوية اتجاه للمتجه $\mathbf{v}$ قياسها 25°

السرعة 500 هي مقدار $\mathbf{v}$ ، $|\mathbf{v}| = 500$. إذن،

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos 25^\circ, |\mathbf{v}| \sin 25^\circ \rangle$$

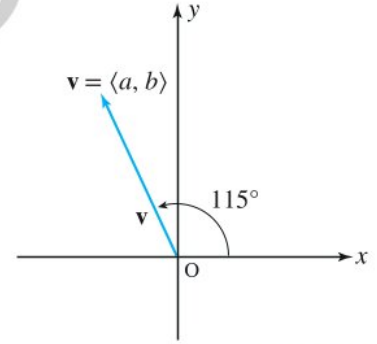
$$= \langle 500 \cos 25^\circ, 500 \sin 25^\circ \rangle$$

$$\approx \langle 453.15, 211.31 \rangle$$

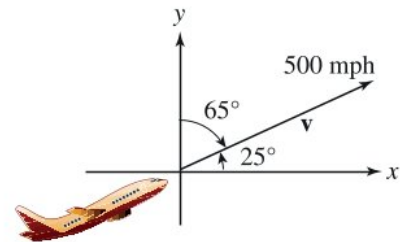
(تابع)

ملاحظة

فيما يلي، نقصد بمركبتي المتجه المركبتين الأساسيتين، أي المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.



الشكل 6.1.8 زاوية اتجاه $\mathbf{v}$ قياسها 115°



الشكل 6.1.9 الزاوية التي يشكلها مسار الطائرة هي الزاوية بين خط الطيران والخط الذي يمثل الشمال، وتقاس في اتجاه حركة عقارب الساعة.

تمثل مركبتا متجه السرعة v السرعة الشمالية والسرعة الشرقية للطائرة. أي أنه عندما تسير الطائرة في مسار بزاوية مع اتجاه الشمال قياسها 65° وبسرعة 500 mph، فهذا يعني أنها تطير شرقاً بسرعة مقدارها 453.15 mph وتطير شمالاً بسرعة مقدارها 211.31 mph

حاول أن تحل التمرين 23

إذا كان لدينا مركبتا متجه ما، يمكننا إيجاد قياس زاوية اتجاهه. كما في المثال التالي.

مثال 6 إيجاد قياس زاوية الاتجاه

أوجد مقدار كل متجه أدناه وقياس زاوية اتجاهه.

A. $u = \langle 3, 2 \rangle$

B. $v = \langle -2, -5 \rangle$

الحل

A. $|u| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

إذا كانت α هي زاوية الاتجاه، فإن

$$u = \langle 3, 2 \rangle = \langle |u| \cos \alpha, |u| \sin \alpha \rangle$$

$$3 = |u| \cos \alpha$$

$$3 = \sqrt{13} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

بما أن مركبتي المتجه موجبتان فإن $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ وبالتالي تكون:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right) \approx 33.69^\circ$$

إذن، قياس زاوية اتجاه المتجه v تساوي 33.69° تقريباً.

B. $|v| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

إذا كانت β هي زاوية الاتجاه، فإن

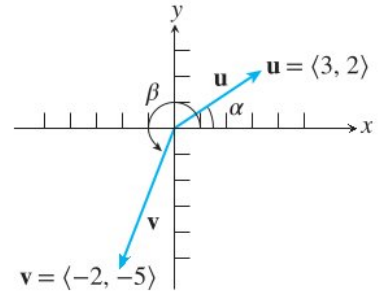
$$v = \langle -2, -5 \rangle = \langle |v| \cos \beta, |v| \sin \beta \rangle$$

$$-2 = |v| \cos \beta$$

$$-2 = \sqrt{29} \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{29}}$$

(تابع)



الشكل 6.1.10 التمثيل القياسي للمتجهين

$$v = \langle -2, -5 \rangle \text{ و } u = \langle 3, 2 \rangle$$

ملاحظة

يمكن استعمال معكوس الظل في حساب زاوية الاتجاه

للمتجه v

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

حيث v_2 هي المركبة الرأسية للمتجه و v_1 هي المركبة الأفقية للمتجه. ويمكن تحديد الربع الذي تقع فيه بناءً على إشارتي مركبتي المتجه.

بما أن مركبتَي المتجه سالبتان فإن $180^\circ < \beta < 270^\circ$ وبالتالي تكون:

$$\beta' = \cos^{-1} \left(\left| \frac{-2}{\sqrt{29}} \right| \right) \approx 68.2$$

$$\beta = 180 + 68.2 = 248.2^\circ$$

إذن، قياس زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ تساوي 248.2° تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 25

مراجعة سريعة 6.1

في التمرينين 5 و 6، أوجد قيمة θ بالدرجات إذا كان $0^\circ < \theta < 360^\circ$

5. $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{29}} \right)$

6. $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{\sqrt{15}} \right)$

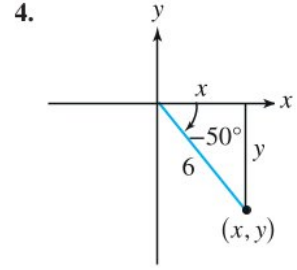
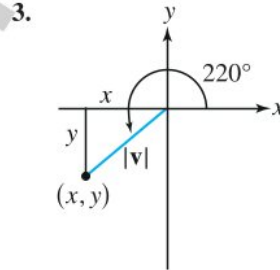
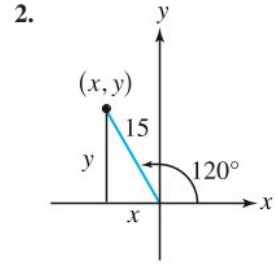
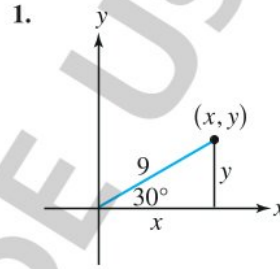
في التمارين 7-9، تقع النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية θ .
أوجد قيمة θ إذا كانت $0^\circ < \theta < 360^\circ$

7. $P(5, 9)$

8. $P(5, -7)$

9. $P(-2, -5)$

في التمارين 1-4، أوجد قيمة كل من x و y في كل حالة.



الدرس 6.1 التمارين

في التمارين 1-4، برهن أن $\vec{PQ}$ و $\vec{RS}$ متكافئان من خلال إثبات أنهما يمثلان نفس المتجه.

1. $R(-4, 7), S(-1, 5), P(0, 0), Q(3, -2)$
2. $R(7, -3), S(4, -5), P(0, 0), Q(-3, -2)$
3. $R(2, 1), S(0, -1), P(1, 4), Q(-1, 2)$
4. $R(-2, -1), S(2, 4), P(-3, -1), Q(1, 4)$

في التمارين 5-10، ليكن $P(-2, 2), S(2, -8), R(-2, 5)$ و $Q(3, 4)$. اكتب المتجه بالصورة التركيبية ثم أوجد مقداره.

5. $\vec{PQ}$
6. $\vec{RS}$
7. $\vec{QR}$
8. $\vec{PS}$
9. $2\vec{QS}$
10. $(\sqrt{2})\vec{PR}$

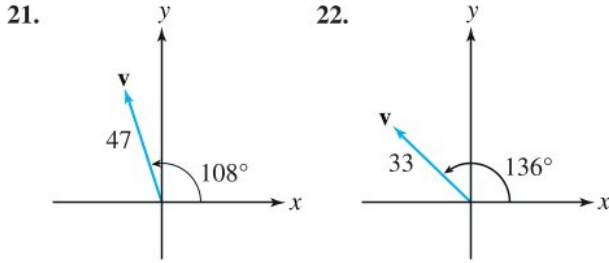
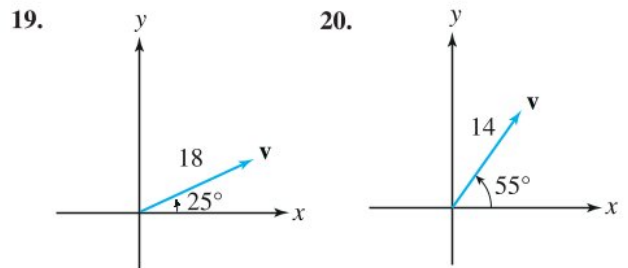
في التمارين 11-16، أوجد متجه الوحدة في نفس اتجاه المتجه المعطى.

11. $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle$
12. $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$
13. $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$
14. $\mathbf{u} = \langle -3, 2 \rangle$
15. $\mathbf{u} = \langle -4, -5 \rangle$
16. $\mathbf{u} = \langle 3, -4 \rangle$

في التمرينين 17 و 18، أوجد المتجه $\mathbf{v}$ حسب المقدار المعطى وفي اتجاه $\mathbf{u}$.

17. $|\mathbf{v}| = 2, \mathbf{u} = \langle 3, -3 \rangle$
18. $|\mathbf{v}| = 5, \mathbf{u} = \langle -5, 7 \rangle$

في التمارين 19-22، أوجد مركبتي المتجه $\mathbf{v}$. حل جبريًا وأوجد القيم الدقيقة باستعمال الحاسبة.



23. **ملاحظة** تحلق طائرة في مسار بشكل زاوية قياسها 335° مع الشمال الجغرافي بسرعة 530 mph، أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة.

24. **ملاحظة** تحلق طائرة في مسار بشكل زاوية قياسها 170° مع الشمال الجغرافي بسرعة 460 mph، أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة.

التمارين 25-28، أوجد مقدار وقياس زاوية اتجاه المتجه. قرب إجابتك باستعمال الحاسبة إذا لزم الأمر.

25. $\langle 3, 4 \rangle$
26. $\langle -1, 2 \rangle$
27. $\langle -2, -3 \rangle$
28. $\langle 5, -1 \rangle$

29. **تحريك جسم ثقيل** يتم دفع صندوق صعودًا نحو مخزن عبر مسار منحدر بشكل زاوية قياسها 15° مع مستوى الأرض بقوة مقدارها 2.5 lb كما هو مبين في الشكل.



- a. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل القوة.
- b. **الكتابة للتعلم** أعط تفسيرًا للمركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

أسئلة اختبار معيارية

30. **صواب أم خطأ** إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة، فإن $-\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة أيضًا. بَرِّر إجابتك.

31. **صواب أم خطأ** إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة، فإن $\frac{1}{\hat{\mathbf{u}}}$ متجه وحدة أيضًا. بَرِّر إجابتك.

توسيع الأفكار

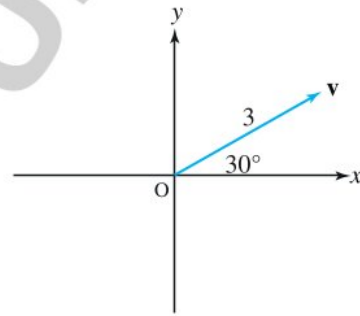
35. ليكن $A = (3, 0)$ ، و $B = (4, 1)$ ، و $C = (1, 1)$.
- a. أثبت من خلال معادلة بين منحنيين أن OABC متوازي أضلاع.
- b. لتكن N هي نقطة منتصف المقطع [AB] و M نقطة منتصف المقطع [BC] و P نقطة منتصف القطر [OB]. إذا كانت S هي نقطة تقاطع (OM) و (AC)، أثبت أن S هي مركز المثلث OBC.
- c. استنتج أن $\vec{SC} = -\vec{SP}$ أوجد إحداثيي النقطة S.
- d. إذا كانت النقطة T هي نقطة تقاطع (ON) و (AC)، أوجد إحداثيي T واستنتج مقدار $\vec{ST}$.
- e. أثبت أن $|\vec{ST}| = \frac{|\vec{AC}|}{3}$ ما القاعدة العامة التي يمكن استنتاجها؟

في التمرينين 32 و 33، يمكنك استعمال الحاسبة.

32. **اختيار من متعدد** أي مقدار من المقادير التالية هو مقدار المتجه $\langle 2, -1 \rangle$ ؟

- A. 1
B. $\sqrt{3}$
C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
D. $\sqrt{5}$
E. 5

33. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية يمثل المتجه $\mathbf{v}$ المبين في الشكل أدناه؟



- A. $\langle 3 \cos 30^\circ, 3 \sin 30^\circ \rangle$
B. $\langle 3 \sin 30^\circ, 3 \cos 30^\circ \rangle$
C. $\langle 3 \cos 60^\circ, 3 \sin 60^\circ \rangle$
D. $\langle \sqrt{3} \cos 30^\circ, \sqrt{3} \sin 30^\circ \rangle$
E. $\langle \sqrt{3} \sin 30^\circ, \sqrt{3} \cos 30^\circ \rangle$

استكشاف

34. ليكن $A = (2, 0)$ ، و $B = (3, 2)$ ، و $C = (1, 2)$.
- a. أوجد مركبات المتجهين $\vec{OC}$ و $\vec{AB}$ استنتج أن OABC متوازي أضلاع.
- b. لتكن N هي نقطة منتصف المقطع [OA] و M نقطة منتصف المقطع [BC]. أوجد مكونات المتجهين $\vec{OM}$ و $\vec{NM}$ ثم أوجد مقداريهما.
- c. ليكن OS منصف زاوية في المثلث MON. أثبت أن $\vec{MS} = 2\sqrt{2} \vec{SN}$ استنتج إحداثيي النقطة S.

6.2

Operations on Vectors

العمليات على المتجهات

العمليات على المتجهات جبريًا

تتطلب العمليات الجبرية على المتجهات العمل على المتجهات والأعداد في الوقت نفسه. في هذا السياق، سوف نسمي الأعداد **كميات قياسية**.

لقد رأينا في الدرس السابق كيف يمكننا ضرب المتجه $\mathbf{v}$ ، في عدد k (كمية قياسية) للحصول على متجه آخر له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ إذا كان $k > 0$ ، واتجاهًا معاكسًا لاتجاهه إذا كان $k < 0$ ، ويكون مقداره هو $|\mathbf{v}| |k|$. فيما يلي نعرف هذه العملية جبريًا.

ما ستتعلمه

- العمليات على المتجهات جبريًا
- فهم العمليات على المتجهات

...ولماذا

يساعدنا فهم العمليات على المتجهات على الاستفادة من مفهوم المتجهات في تطبيقات متنوعة وفي مسائل من واقع الحياة، مثل الملاحة الجوية والبحرية، وفي بعض التطبيقات الفيزيائية.

ضرب متجه بكمية قياسية

إذا كان $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ متجه، k عدد حقيقي، فإن ناتج ضرب الكمية القياسية k بالمتجه $\mathbf{u}$ هو

$$k \mathbf{u} = k \langle u_1, u_2 \rangle = \langle ku_1, ku_2 \rangle$$

ويكون طول المتجه $k\mathbf{u}$:

$$|k \mathbf{u}| = |k| |\mathbf{u}| = |k| \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

معايير الدرس

12A.7.4

12A.7.8

المصطلحات

- كمية قياسية scalar quantity
- طريقة الرأس للذيل head to tail method

مثال 1

ضرب متجه في كمية قياسية

في كل حالة أدناه، اضرب الكمية القياسية المعطاة في المتجه، ثم قارن مقدار واتجاه المتجه الناتج بمقدار واتجاه المتجه الأصلي.

A. $\mathbf{r} = \langle 9, 3 \rangle, k = 5$

B. $\mathbf{s} = \langle 4, 5 \rangle, k = -3$

الحل

A. لضرب متجه في كمية قياسية، يكفي ضرب هذه الكمية في مركبتي المتجه.

$$5\mathbf{r} = 5\langle 9, 3 \rangle = \langle 45, 15 \rangle$$

بما أن $k > 0$ ، فإن اتجاه $5\mathbf{r}$ نفس اتجاه $\mathbf{r}$. أما مقداره فقد تضاعف 5 مرات.

للتحقق من ذلك جبريًا اكتب:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90}$$

$$|5\mathbf{r}| = \sqrt{(45)^2 + (15)^2} = \sqrt{2250} = 5\sqrt{90}$$

إذن، طول $5\mathbf{r}$ يساوي 5 أضعاف طول $\mathbf{r}$.

أوجد زاوية الاتجاه لكل من المتجهين $\mathbf{r}$ و $5\mathbf{r}$:

$$\theta_r = \tan^{-1} \left(\frac{3}{9} \right) \approx 18.4^\circ \text{ و } \theta_{5r} = \tan^{-1} \left(\frac{15}{45} \right) \approx 18.4^\circ$$

(تابع)

ملاحظة

إن ضرب المتجه بعدد ثابت ينتج عنه متجه موازي إما في نفس الاتجاه أو عكس الاتجاه وذلك حسب إشارة العدد الثابت.

B. أوجد مركبتي المتجه $-3s$:

$$-3s = -3\langle 4, 5 \rangle = \langle -12, -15 \rangle$$

بما أن $k < 0$ ، فإن اتجاه $-3s$ عكس اتجاه s . أما مقداره فقد تضاعف 3 مرات.

للتحقق من ذلك جبريًا اكتب:

$$|s| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$|-3s| = \sqrt{(-12)^2 + (-15)^2} = \sqrt{369} = 3\sqrt{41}$$

إذن، طول $-3s$ يساوي 3 أضعاف طول s .

أوجد زاوية الاتجاه لكل من المتجهين s و $-3s$:

$$\theta_s = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51.3^\circ \text{ و } \theta_{-3s} = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{-12}\right) \approx 231.3^\circ$$

لاحظ أن الفرق بين زاويتي المتجهين s و $-3s$ هو 180° لأن s و $-3s$ لهما اتجاهان متعاكسان.

حاول أن تحل التمرينين 1 و 2

سوف نعرّف هنا عمليتي جمع وطرح المتجهات، وهما عمليتان مهمتان للغاية في تطبيقات واقعية كثيرة.

جمع وطرح متجهين

إذا كان $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ و $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ متجهين، فإن مجموع u و v هو المتجه

$$u + v = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$$

والفرق $u - v$ هو المتجه

$$u - v = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$$

مثال 2 العمليات على المتجهات

ليكن $u = \langle -1, 3 \rangle$ و $v = \langle 4, 7 \rangle$. أوجد المتجهات التالية بالصورة التركيبية ثم ارسم التمثيل البياني لكل منها.

A. $u + v$

B. $3u$

C. $2u - v$

الحل

باستعمال تعريف العمليات الجبرية على المتجهات، لدينا ما يلي:

A. $u + v = \langle -1, 3 \rangle + \langle 4, 7 \rangle$

$$= \langle -1 + 4, 3 + 7 \rangle$$

$$= \langle 3, 10 \rangle$$

(تابع)

B. $3\mathbf{u} = 3\langle -1, 3 \rangle = \langle -3, 9 \rangle$

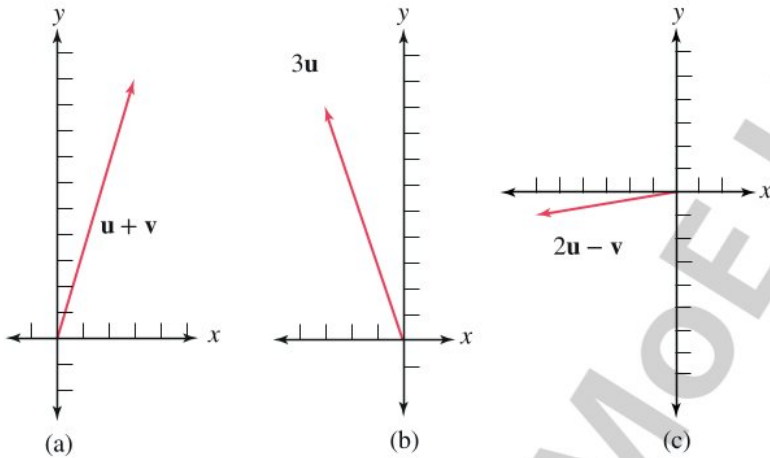
C. $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

$$= 2\langle -1, 3 \rangle + (-1)\langle 4, 7 \rangle$$

$$= \langle -2, 6 \rangle + \langle -4, -7 \rangle$$

$$= \langle -6, -1 \rangle$$

في ما يلي التمثيل القياسي للمتجه $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (انظر الشكل a) وللمتجه $3\mathbf{u}$ (انظر الشكل b) وللمتجه $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (انظر الشكل c).

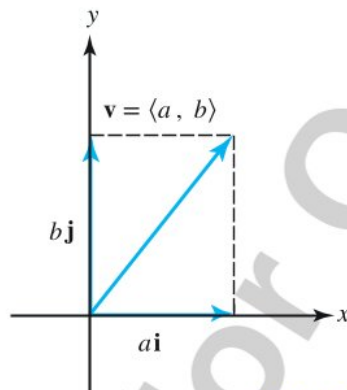


حاول أن تحل التمرينين 6 و 11

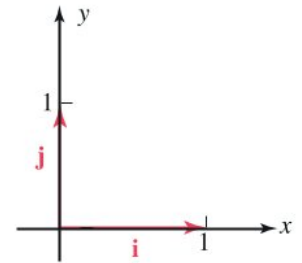
يُسمى المتجهان $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ متجهي الوحدة القياسيين. حيث اتجاه $\mathbf{i}$ باتجاه المحور x واتجاه $\mathbf{j}$ باتجاه المحور y كما هو موضح في الشكل 6.2.1، تكمن أهمية هذين المتجهين في أن بإمكاننا كتابة أي متجه بدلالة هذين المتجهين وذلك كما يلي

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \langle a, b \rangle \\ &= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle \\ &= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle \\ &= a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \end{aligned}$$

يتم هنا التعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على شكل الترتيب الخطي $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ للمتجهين $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$. تمثل الكميتان القياسيتان a و b المركبتين الأفقية والرأسية، بالتالي، للمتجه $\mathbf{v}$. (انظر الشكل 6.2.2)



الشكل 6.2.2 يمكن كتابة أي متجه في المستوى الإحداثي ثنائي البعد بدلالة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$.

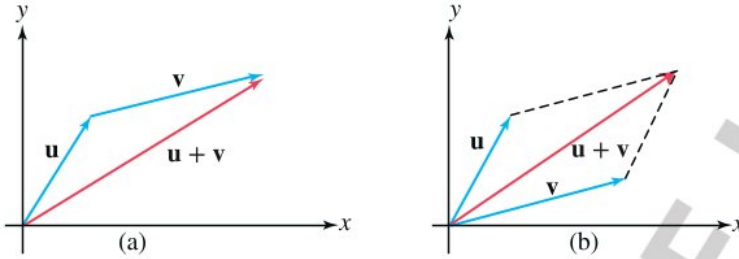


الشكل 6.2.1 متجهي الوحدة القياسيين: $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ في المستوى الإحداثي ثنائي البعد

فهم العمليات على المتجهات

يمكننا التعبير عن مجموع المتجهات هندسيًا باستعمال أسهم بطريقتين:
الطريقة الأولى هي **طريقة الرأس للذيل**، وتقوم على تمثيل المتجه u بسهم من نقطة الأصل إلى النقطة (u_1, u_2) . السهم من النقطة (u_1, u_2) إلى النقطة $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ يمثل المتجه v . إذن، السهم من نقطة الأصل إلى النقطة $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ يعتبر عن $u + v$ (انظر الشكل 6.2.3a).

فيما تعتمد الطريقة الثانية، على استعمال **متوازي أضلاع**، وذلك بإكمال السهمين اللذين يمثلان المتجهين u و v في التمثيل القياسي لتكوين متوازي أضلاع وتره هو السهم الذي يمثل $u + v$



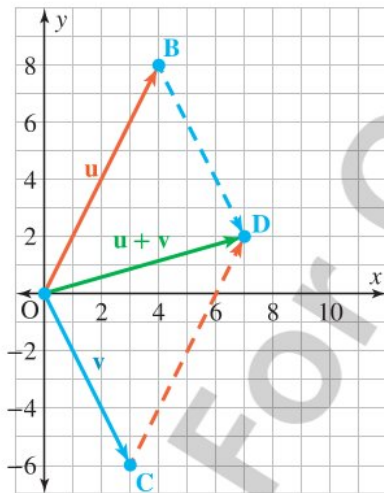
الشكل 6.2.3 طريقتا تمثيل الجمع هندسيًا للمتجهات: (a) الرأس للذيل، و (b) متوازي الأضلاع. لتمثيل جمع المتجهين u و v بيانًا، كما ذكرنا سابقًا، نقوم بتمثيل u و v بسهمين يبدأان عند نقطة الأصل، ثم تكمل رسم متوازي الأضلاع ليصبح السهم الممتد على طول الوتر المبتدئ من نقطة الأصل هو ما يعبر عن $u + v$.

مثال 3 جمع المتجهات

أوجد مجموع المتجهين $u = \langle 4, 8 \rangle$ و $v = \langle 3, -6 \rangle$ بيانًا بطريقة متوازي الأضلاع. ثم جبريًا.

الحل

لجمع المتجهين بيانًا، ابدأ بتمثيل u قياسيًا بالسهم $\vec{OB}$ وتمثيل v بالسهم $\vec{OC}$.
ثم أكمل متوازي الأضلاع برسم سهم يمثل المتجه u يبدأ من C وآخر يمثل المتجه v ويبدأ من B .



(تابع)

لاحظ أن رأسي نسختي المتجهين u و v هاتين يلتقيان عند النقطة $D = (7, 2)$ التي تمثل الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع.

بحسب القاعدة، السهم الذي يعبر عن $u + v$ هو السهم الذي يبدأ عند نقطة الأصل وينتهي عند النقطة D (وهو وتر متوازي الأضلاع الذي يبدأ من نقطة الأصل). إذن، $u + v = \langle 7, 2 \rangle$. يمكن أيضًا إيجاد مركبات المتجه $u + v$ جبريًا من خلال جمع مركبات u و v .

$$\begin{aligned} u + v &= \langle 4, 8 \rangle + \langle 3, -6 \rangle \\ &= \langle 4 + 3, 8 - 6 \rangle \\ &= \langle 7, 2 \rangle \end{aligned}$$

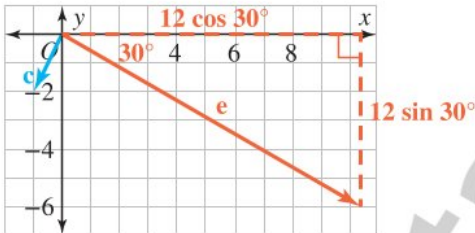
حاول أن تحل التمرين 14

يمكننا استعمال قواعد العمليات على المتجهات في تطبيقات مهمة كما يبين المثال التالي

مثال 4 إيجاد مقدار واتجاه مجموع متجهين

يبحر جاسم في النهر بقارب ذي محرك سرعته 12 mph في اتجاه بزاوية قياسها 30° من الشرق إلى الجنوب. تبلغ سرعة التيار النهري 2 mph وهو يتجه بزاوية قياسها 30° من الجنوب إلى الغرب. أوجد مقدار واتجاه المسار الذي يسلكه قارب جاسم عبر النهر.

الحل



الخطوة 1 استعمال النسب المثلثية لإيجاد مركبتي المتجه.

إذا كان e هو المتجه الذي يمثل سرعة المحرك، فإن مقدار e هو 12 mph وزاوية اتجاهه مع المحور x (الذي يمثل الاتجاه شرق-جنوب) قياسها 30° نحو الأسفل. إذن، مركبات المتجه هما:

$$12 \sin 30^\circ = 6$$

$$12 \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \approx 10.39$$

وبما أن اتجاه المركبة الرأسية نحو الأسفل فإنها تكون سالبة:

$$-12 \sin 30^\circ = -6$$

$$e = \langle 10.39, -6 \rangle$$

إذا كان c هو المتجه الذي يمثل سرعة التيار، فإن مقدار c هو 2 mph وزاوية اتجاهه مع المحور الرأسي (الذي يمثل الاتجاه جنوب-غرب) قياسها 30° ، يشكل هذا المتجه زاوية قياسها 60° مع المحور الأفقي لكنه يقع في الربع الثالث، وبالتالي فإن مركبته سالبتين:

(تابع)

$$-2 \cos 60^\circ = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$-2 \sin 60^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \approx -1.73$$

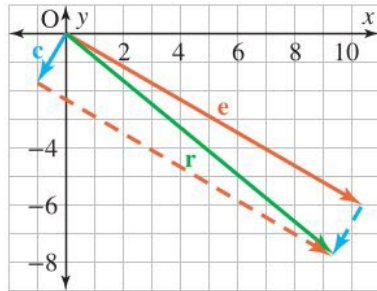
$$\mathbf{c} = \langle -1, -1.73 \rangle$$

الخطوة 2 أوجد جمع المتجهين الذين يمثلان سرعة المحرك وسرعة التيار. إذن متجه سرعة القارب هو:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e} + \mathbf{c}$$

$$= \langle 10.39, -6 \rangle + \langle -1, -1.73 \rangle$$

$$= \langle 9.39, -7.73 \rangle$$



لاحظ أن المركبة الأولى للمتجه $\mathbf{r}$ موجبة ومركبته الثانية سالبة، وبالتالي فإن تمثيله القياسي يقع في الربع الرابع (انظر الشكل أعلاه).

الخطوة 3 أوجد مقدار $\mathbf{r}$ باستعمال نظرية فيثاغورس. مقدار المتجه هو:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{(9.39)^2 + (-7.73)^2}$$

$$\approx 12.16$$

الخطوة 4 استعمل مركبتي $\mathbf{r}$ لإيجاد زاوية اتجاهه.

إذا كانت θ هي زاوية اتجاه $\mathbf{r}$ ، فإن

$$|\mathbf{r}| \cos \theta = 9.39$$

$$12.2 \cos \theta = 9.39$$

$$\cos \theta = \frac{9.39}{12.2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{9.39}{12.2} \right) \approx 39.5^\circ$$

إذن، يبحر القارب بسرعة 12.2 mph وبزاوية قياسها 40° تقريباً من الشرق إلى الجنوب.

حاول أن تحل التمرين 17

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jo.com

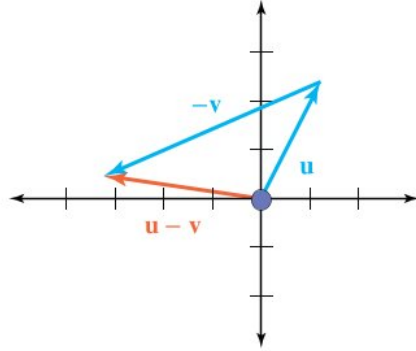
ملاحظة

إن الاتجاه بزاوية مقدارها 40° من الشرق إلى الجنوب يكافئ زاوية اتجاه مقدارها $320^\circ - 40^\circ = 360^\circ$ مع محور x الموجب، وذلك لأن ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الرابع.

يمكن كذلك تمثيل الفرق بين متجهين u و v تمثيلاً هندسياً، كما فعلنا في مجموع متجهين:

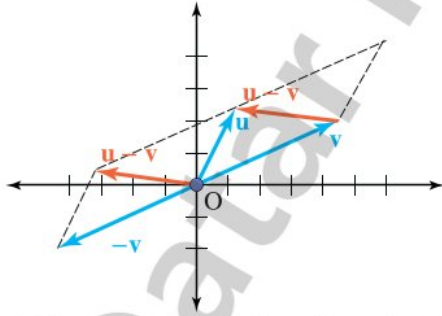
$$u - v = u + (-1)v$$

في التمثيل القياسي، إذا كان السهم من نقطة الأصل إلى النقطة (u_1, u_2) يمثل المتجه u ، يمكننا إثبات أن السهم من النقطة (u_1, u_2) إلى النقطة $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$ يمثل المتجه $-v$. بذلك يكون المتجه من نقطة الأصل إلى النقطة $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$ هو $u - v$ (انظر الشكل 6.2.4).



الشكل 6.2.4 يبين الشكل الفرق بين المتجهين u و v هندسياً على أنه جمع المتجه u مع سالب المتجه v .

يمكننا أيضاً تمثيل الفرق بين متجهين باستعمال متوازي الأضلاع: نأخذ التمثيل القياسي للمتجه u وللمتجه $-v$ الذي هو عكس المتجه v ، ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع ونأخذ السهم من نقطة الأصل على طول الوتر، فهو يمثل المتجه $u - v$. يمكننا أن نلاحظ أن السهم على طول الوتر الآخر لمتوازي الأضلاع الذي يشكله u و v يمثل أيضاً المتجه $u - v$ (انظر الشكل 6.2.5).



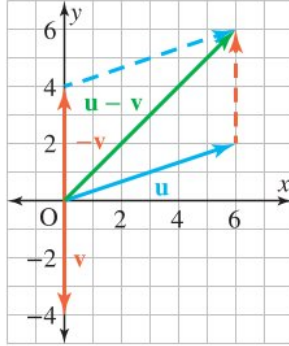
الشكل 6.2.5 يبين الشكل أن السهم الذي على الوتر الآخر لمتوازي الأضلاع الذي يشكله u و v يمثل أيضاً المتجه $u - v$ وهو الفرق بين المتجهين u و v .

مثال 5 طرح المتجهات

إذا كان $u = \langle 6, 2 \rangle$ و $v = \langle 0, -4 \rangle$ ، أوجد $u - v$ بيانيًا وجبريًا ثم أوجد مقداره واتجاهه.

الحل

بيانيًا، مثل المتجهين u و v قياسيًا ثم مثل المتجه $-v$ الذي له نفس مقدار v لكنه يعاكسه في الاتجاه ويبدأ من نقطة الأصل.



أكمل متوازي الأضلاع المكوّن من u و $-v$ لتجد أن السهم الذي يقع على طول الوتر الذي يمثل $u - v$ ينتهي عند النقطة $(6, 6)$. إذن:

$$u - v = \langle 6, 6 \rangle$$

أما جبريًا فاكتب ببساطة:

$$u - v = \langle 6, 2 \rangle - \langle 0, -4 \rangle = \langle 6 - 0, 2 - (-4) \rangle = \langle 6, 6 \rangle$$

مقدار $u - v$:

$$|u - v| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

إذا كانت θ هي زاوية اتجاه $u - v$ ، فإن

$$|u - v| \cos \theta = 6$$

$$6\sqrt{2} \cos \theta = 6$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{6}{6\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 45^\circ$$

حاول أن تحل التمرين 18

مساعدة دراسية

يمكننا إيجاد الزاوية θ بطريقة أخرى.

نستعمل مركبتي متجه الفرق $u - v$ لإيجاد زاوية الاتجاه:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{6}{6} \right) = 45^\circ$$

مراجعة سريعة 6.2

4. $A(-2, 0), B(1, -\sqrt{3})$

في التمرينين 5 و 6، أوجد المتجه u حسب المقدار المعطى وفي اتجاه v .

5. $|u| = 2, v = \langle 2, 3 \rangle$

6. $|u| = 3, v = \langle -4, 3 \rangle$

في التمارين 1-4، تقع النقطتان A و B على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$. أوجد مركبات المتجه $\vec{AB}$.

1. $A(-2, 0), B(1, \sqrt{3})$

2. $A(2, 0), B(1, \sqrt{3})$

3. $A(2, 0), B(1, -\sqrt{3})$

الدرس 6.2 التمارين

في التمرينين 1 و 2، ليكن $t = \langle -5, -7 \rangle$. أوجد مركبتي ومقدار واتجاه المتجه التالي.

1. $-4t$

2. $2t$

في التمارين 3-5، أوجد ku في كل من الحالات التالية.

3. $u = \langle -7, -9 \rangle, k = 4$

4. $u = \langle 4, 12 \rangle, k = -6$

5. $u = \langle 6, -1 \rangle, k = 2$

في التمارين 6-13، ليكن $u = \langle -1, 3 \rangle$ و $v = \langle 2, 4 \rangle$ و $w = \langle 2, -5 \rangle$. أوجد المتجه المطلوب.

6. $u + v$

7. $u + (-1)v$

8. $u - w$

9. $3v$

10. $2u + 3w$

11. $2u - 4v$

12. $-2u - 3v$

13. $-u - v$

في التمارين 14-16، أوجد الحل جبريًا وبيانيًا.

14. ليكن $\vec{MN} = \langle 9, 12 \rangle$ و $\vec{NO} = \langle 2, 7 \rangle$. أوجد $\vec{NO} + \vec{MN}$.

15. ليكن $v = \langle -3, 4 \rangle$ و $w = \langle 5, -8 \rangle$. أوجد $v + w$.

16. ليكن $v = \langle 3, -4 \rangle$ و $w = \langle 1, -3 \rangle$. أوجد $v + w$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

17. بالعودة إلى المثال 4، إذا كانت سرعة المحرك 9 mph وكان القارب يبحر في اتجاه الشمال الغربي بزاوية قياسها 135° مع اتجاه التيار، ماذا يصبح مقدار واتجاه سرعة القارب؟ قزب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

في التمارين 18-20، أوجد الحل جبريًا وبيانيًا.

18. ليكن $\vec{MN} = \langle 4, 2 \rangle$ و $\vec{NO} = \langle 5, -7 \rangle$. أوجد $\vec{MN} - \vec{NO}$.

19. ليكن $v = 3i + 7j$ و $w = 4i - 3j$. أوجد $v - w$.

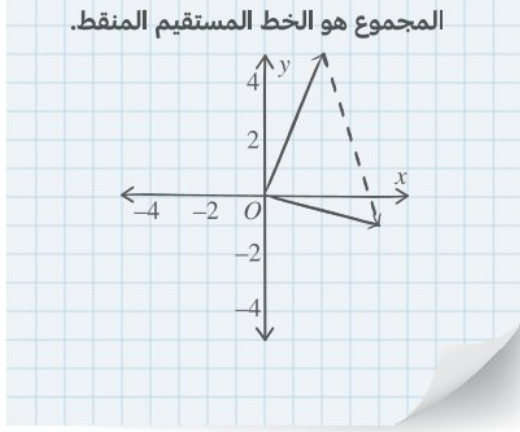
20. ليكن $v = -3i + 2j$ و $w = 4i + 4j$. أوجد $v - w$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

في التمرينين 21 و 22، أوجد مركبتي ومقدار واتجاه مجموع المتجهين المعطيين ومقدار واتجاه $s - t$.

21. $s = 6i - 3j, t = 3i + j$

22. $s = i - 3j, t = -2i + 7j$

36. **صواب أم خطأ** جمع خالد المتجهين $\vec{BA} = \langle 2, 5 \rangle$ و $\vec{CB} = \langle 4, -1 \rangle$ بيانيًا ورسم التمثيل البياني التالي حيث عثر عن مجموع المتجهين بالخط المنقط. هل إجابه صححة؟ بزر إجابتك.



37. **اختيار من متعدد** ليكن $s = \langle -2, 8 \rangle$ و $t = \langle 7, 11 \rangle$. أي الخيارات التالية يمثل المتجه $s + t$ ؟

- A. $\langle -5, 3 \rangle$
- B. $\langle 9, 19 \rangle$
- C. $\langle 9, 3 \rangle$
- D. $\langle 5, 19 \rangle$
- E. $\langle 2, 9 \rangle$

38. **اختيار من متعدد** ليكن $u = \langle -2, 3 \rangle$ و $v = \langle 4, -1 \rangle$. أي الخيارات التالية يمثل المتجه $u - v$ ؟

- A. $\langle 6, -4 \rangle$
- B. $\langle 2, 2 \rangle$
- C. $\langle -2, 2 \rangle$
- D. $\langle -6, 2 \rangle$
- E. $\langle -6, 4 \rangle$

في التمرينين 23 و 24، أوجد مقدار واتجاه القوة الناتجة.

23. **جمع القوى** تُطبق قوة مقدارها 50 lb على جسم بزاوية قياسها 45° ، وتطبق على الجسم في الوقت نفسه قوة أخرى مقدارها 75 lb بزاوية قياسها 30° .

24. **جمع القوى** تُطبق ثلاث قوى هي 100 lb، 50 lb، 80 lb على جسم بزوايا قياساتها 20° ، 160° ، 50° على الترتيب.

في التمارين 25-28، أوجد مركبتي وقياس زاوية اتجاه المتجه المعطى. استعمل الطريقة الجبرية وقرب الإجابات إذا لزم الأمر.

25. $3i - 4j$

26. $-3i - 5j$

27. $7(\cos 135^\circ i + \sin 135^\circ j)$

28. $2(\cos 60^\circ i + \sin 60^\circ j)$

الكتابة للتعلم في التمارين 29-34، استعمل مركبتي كل متجه لإثبات صحة العمليات التالية على المتجهات، حيث a و b عددين حقيقيين ثابتين.

29. $u + v = v + u$

30. $(u + v) + w = u + (v + w)$

31. $u + 0 = u$, $0 = \langle 0, 0 \rangle$

32. $u + (-u) = 0$, $-\langle a, b \rangle = \langle -a, -b \rangle$

33. $a(u + v) = au + av$

34. $(a + b)u = au + bu$

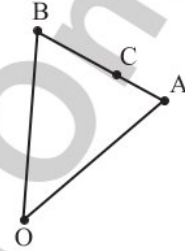
أسئلة اختبار معيارية

35. **صواب أم خطأ** يقول تامر إن مجموع المتجهين $\vec{BA} = \langle 7, 13 \rangle$ و $\vec{CB} = \langle 2, -4 \rangle$ هو المتجه $\vec{CA} = \langle 7, 13 \rangle$. هل هذا صحيح؟ بزر إجابتك.

استكشاف

توسيع الأفكار

39. **تقسيم قطعة مستقيمة وفق نسبة معطاة** لتكن A و B نقطتين في المستوى الإحداثي (انظر الشكل أدناه).



a. أثبت أن $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$ حيث O نقطة الأصل.

b. لتكن C نقطة تقع على القطعة المستقيمة BA، تقسمها

بالنسبة $x : y$ حيث $x + y = 1$ أي أن

$$\frac{|\vec{BC}|}{|\vec{CA}|} = \frac{x}{y}$$

أثبت أن

$$\vec{OC} = x \vec{OA} + y \vec{OB}$$

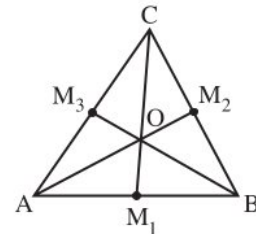
40. **الخطوط الوسيطة في المثلث** نَقِّد الخطوات التالية باستعمال

المتجهات لتبرهن أن الخطوط الوسيطة في المثلث تتقاطع

في النقطة O التي تقسم كل وسيط حسب النسبة 1 : 2

M_1 و M_2 و M_3 هي نقاط منتصف القطع المستقيمة للمثلث

كما هو مبين في الشكل.



a. استعمل التمرين السابق لإثبات أن

$$\vec{OM}_1 = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$$

$$\vec{OM}_2 = \frac{1}{2} \vec{OC} + \frac{1}{2} \vec{OB}$$

$$\vec{OM}_3 = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OC}$$

b. أثبت أن كلاً من $\vec{AO} + 2\vec{M}_2\vec{O}$ و $\vec{CO} + 2\vec{M}_1\vec{O}$

و $\vec{BO} + 2\vec{M}_3\vec{O}$ تساوي $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO}$.

c. **الكتابة للتعليم** وضح لماذا يثبت الفرع b صحة النتيجة

المطلوبة.

41. **صيغة المستقيم في صورة معادلة متجهات**

ليكن L المستقيم الذي يمر بالنقطتين A و B. برهن أن النقطة

$C = (x, y)$ تقع على المستقيم L إذا وفقط إذا كان

$$\vec{OC} = t \vec{OA} + (1 - t) \vec{OB}$$

حيث t عدد حقيقي و O نقطة الأصل.

Scalar Product of Vectors

6.3 الضرب القياسي للمتجهات

ما ستتعلمه

- الضرب القياسي
- الزاوية بين متجهين

... ولماذا

للضرب القياسي لمتجهين والعدد الحقيقي الذي ينتج عنه أهمية كبيرة في الرياضيات وفي سائر العلوم التطبيقية، فيساعدنا في دراسة القوى وتأثيرها على الأجسام والشغل الناشئ عنها.

معايير الدرس

12A.7.6

12A.7.8

المصطلحات

vector product
scalar product

- الضرب الاتجاهي
- الضرب القياسي

الضرب القياسي

هناك نوعان من ضرب المتجهات، وقد نشأ كلاهما عن حاجات تطبيقية. الأول هو **الضرب الاتجاهي** الذي ينتج عنه متجه جديد يشكّل زاوية قائمة مع المستوى الذي يتضمن المتجهين الذين أجري عليهما عملية الضرب والذي يأخذنا إلى بعد ثالث وهو خارج اهتمامنا في هذه الوحدة، والثاني هو **الضرب القياسي** الذي ينتج عنه عدد حقيقي يعطي معلومة هندسية عن المتجهين اللذين أجري عليهما عملية الضرب، ما يضيف على هذا النوع من ضرب المتجهات أهمية خاصة.

لتبسيط هذا التعريف، سوف نجمع بين المتجه والسهم الذي يمثله في عبارة واحدة. على سبيل المثال، إذا كان السهم $\overrightarrow{PQ}$ يمثل المتجه $\mathbf{u}$ ، نكتب $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$. كذلك سوف نستعمل للتعبير عن متجه كلا الصيغتين: الصيغة التركيبية $\langle a, b \rangle$ والصيغة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب القياسي لمتجهين

الضرب القياسي للمتجه $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ في المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ هو:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

مثال 1 إيجاد الضرب القياسي

أوجد الضرب القياسي في كل من الحالات التالية.

A. $\langle 3, 4 \rangle \cdot \langle 5, 2 \rangle$

B. $\langle 1, -2 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle$

C. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$

الحل

A. $\langle 3, 4 \rangle \cdot \langle 5, 2 \rangle = (3)(5) + (4)(2) = 23$

B. $\langle 1, -2 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle = (1)(-4) + (-2)(3) = -10$

C. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = (2)(3) + (-1)(-5) = 11$

حاول أن تحل التمرينين 3 و 5

الضرب القياسي ومتجهي الوحدة القياسيين

$$(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = u_1v_1 + u_2v_2$$

للضرب القياسي عدد من الخصائص المهمة التي سنعمل على برهان بعضها ونترك بعضها الآخر لنعالجها في التمارين.

خصائص الضرب القياسي

لتكن u و v و w متجهات، وليكن c عددًا حقيقيًا.

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot u = |u|^2$
3. $0 \cdot u = 0$
4. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
5. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
6. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$

ليكن $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ و $v = \langle v_1, v_2 \rangle$.

برهان الخاصية 1:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$= v_1 u_1 + v_2 u_2$$

$$= v \cdot u$$

نستعمل تعريف $u \cdot v$

الخاصية الإبدال ل ضرب الأعداد الحقيقية

نستعمل تعريف $u \cdot v$

برهان الخاصية 2:

$$u \cdot u = u_1^2 + u_2^2$$

$$= (\sqrt{u_1^2 + u_2^2})^2$$

$$= |u|^2$$

نستعمل تعريف $u \cdot v$

نستعمل تعريف $|u|$

تعطينا الخاصية 2 للضرب القياسي طريقة ثانية لإيجاد مقادير المتجهات، كما يبين المثال التالي.

مثال 2 إيجاد طول المتجه باستخدام الضرب القياسي

أوجد مقدار (طول) المتجه $u = \langle 4, -3 \rangle$ باستخدام الضرب القياسي.

الحل

استعمل القاعدة الثانية لضرب المتجهات:

$$|u|^2 = u \cdot u$$

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 4, -3 \rangle}$$

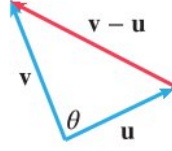
$$= \sqrt{(4)(4) + (-3)(-3)} = \sqrt{25} = 5$$

ملاحظة تقنية

تقوم بعض الحاسبات بالعمليات على المتجهات بشكل مباشر، ويقوم بعضها الآخر بهذه العملية باستخدام المصفوفات، وهي طريقة يمكن تعلمها ورفقًا أيضًا.

الزاوية بين متجهين

ليكن u و v متجهين غير صفريين في الوضع القياسي كما هو مبين في الشكل 6.3.1



الشكل 6.3.1 الزاوية بين u و v هي الزاوية θ حيث $0 \leq \theta \leq \pi$ أو $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

الزاوية بين متجهين هي الزاوية بين السهمين اللذين يمثلانها في الوضع القياسي. سوف نستعمل الضرب القياسي لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين كما تبين النظرية التالية.

نظرية الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين u و v ($u \neq 0$ و $v \neq 0$) فإن

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{u \cdot v}{|u||v|} \right)$$

البرهان:

نستعمل قاعدة جيب التمام في المثلث الذي يتكوّن من u و v و $v - u$ (انظر الشكل 6.3.1).

$$|v - u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

$$(v - u) \cdot (v - u) = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

باستعمال خاصية 2 للضرب القياسي

$$v \cdot v - v \cdot u - u \cdot v + u \cdot u = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

باستعمال الخاصية التوزيعية

$$|v|^2 - 2u \cdot v + |u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

باستعمال خاصية 2 للضرب القياسي

$$-2u \cdot v = -2|u||v| \cos \theta$$

نطرح الحدود المتساوية

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

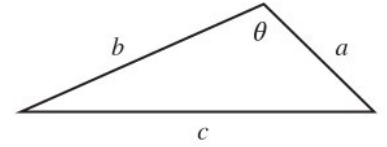
من طرفي المعادلة

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{u \cdot v}{|u||v|} \right)$$

قاعدة جيب التمام

إذا كانت θ هي زاوية في مثلث كما يبين الشكل، فإن قاعدة جيب التمام تنص على التالي:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



مثال 3 إيجاد قياس زاوية بين متجهين

استعمل طريقة جبرية لإيجاد قياس الزاوية بين المتجهين u و v في الحالتين التاليتين.
استعمل الحاسبة عند الحاجة لإيجاد قيمة تقريبية للإجابة الدقيقة.

A. $u = \langle 2, 3 \rangle, v = \langle -2, 5 \rangle$

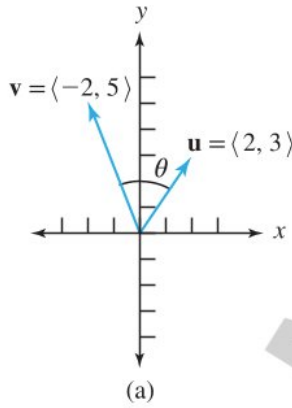
B. $u = \langle 2, 1 \rangle, v = \langle -1, -3 \rangle$

الحل

A. انظر الشكل a واستعمل قاعدة إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{\langle 2, 3 \rangle \cdot \langle -2, 5 \rangle}{|\langle 2, 3 \rangle||\langle -2, 5 \rangle|} = \frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{29}}$$

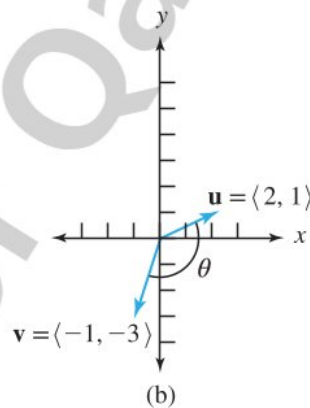
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right) \approx 55.5^\circ$$



B. انظر الشكل b واستعمل قاعدة إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{\langle 2, 1 \rangle \cdot \langle -1, -3 \rangle}{|\langle 2, 1 \rangle||\langle -1, -3 \rangle|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$$



يكون $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{u} \neq 0$ و $\mathbf{v} \neq 0$) فقط عندما تكون الزاوية بينهما قائمة لأن

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos 90^\circ$$

و $\cos 90^\circ = 0$.

المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدين إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

وفق هذا التعريف، يمكن القول إن الزاوية بين متجهين غير صفريين تكون قائمة إذا كان المتجهان متعامدين. أما إذا كان أحد المتجهين أو كلاهما صفراً، فلا تعود هناك إمكانية للحديث عن زاوية بين المتجهين لأن المتجه الصفري لا زاوية اتجاه له.

مثال 4 إثبات تعامد متجهين

أثبت أن المتجه $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle$ والمتجه $\mathbf{v} = \langle -6, 4 \rangle$ متعامدان.

الحل

لإثبات أن المتجهين متعامدان يكفي أن تثبت أن ضربهما القياسي يساوي الصفر.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle -6, 4 \rangle = -12 + 12 = 0$$

إذن المتجهان متعامدان.

حاول أن تحل التمرين 23

الشغل

إذا كانت $\mathbf{F}$ قوة ثابتة واتجاهها نفس اتجاه $\overrightarrow{AB}$ ، فإن قيمة الشغل الناتج عن $\mathbf{F}$ عند تحريكها جسماً من A إلى B تساوي:

$$W = |\mathbf{F}| |\overrightarrow{AB}|$$

إذا كانت $\mathbf{F}$ قوة ثابتة في أي اتجاه، فإن قيمة الشغل الناتج عن $\mathbf{F}$ عند تحريكها جسماً من A إلى B تساوي:

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= |\mathbf{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \theta$$

حيث θ هي الزاوية بين $\mathbf{F}$ و $\overrightarrow{AB}$

بغض النظر عن الإشارة، فإن قيمة الشغل تساوي ناتج ضرب قيمة القوة الفاعلة في المتجه $\overrightarrow{AB}$.

مثال 5 إيجاد الشغل

أوجد الشغل الناشئ عن قوة مقدارها 10 نيوتن (N) في الاتجاه $\langle 1, 2 \rangle$ عند تحريك جسم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(3, 0)$.

الحل

إذا كان مقدار القوة F هو 10 نيوتن (N) في الاتجاه $\langle 1, 2 \rangle$ ، فإن

$$\mathbf{F} = 10 \cdot \frac{\langle 1, 2 \rangle}{|\langle 1, 2 \rangle|} = \frac{10}{\sqrt{5}} \langle 1, 2 \rangle$$

المتجه الذي يعبر عن الحركة من $A(0, 0)$ إلى $B(3, 0)$ هو $\overrightarrow{AB} = \langle 3, 0 \rangle$.

إذن الشغل يساوي

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{10}{\sqrt{5}} \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle 3, 0 \rangle = \frac{30}{\sqrt{5}} \approx 13.42 \text{ J}$$

وحدة الشغل

يتم قياس الشغل عادة باستعمال القدم-باوند أو نيوتن-متر. تتم الإشارة عادة إلى 1 نيوتن-متر على أنه 1 جول (1 J).

حاول أن تحل التمرين 37

مراجعة سريعة 6.3

في التمارين 4-1، أوجد $|\mathbf{u}|$ في كل حالة.

8. $\mathbf{u} = \langle -8, -10 \rangle, k = 3$

9. $\mathbf{u} = \langle 3, 11 \rangle, k = -7$

10. $\mathbf{u} = \langle 5, -2 \rangle, k = 1$

1. $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$

2. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

3. $\cos 35^\circ \mathbf{i} + \sin 35^\circ \mathbf{j}$

4. $2(\cos 75^\circ \mathbf{i} + \sin 75^\circ \mathbf{j})$

في التمارين 7-5، أوجد $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ و $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ في كل من الحالات التالية.

5. $\mathbf{u} = \langle 6, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 1 \rangle$

6. $\mathbf{u} = \langle -1, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

7. $\mathbf{u} = \langle -3, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle 0, 0 \rangle$

الدرس 6.3 التمارين

في التمارين 8-1، أوجد الضرب القياسي للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

5. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

7. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

8. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 11\mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

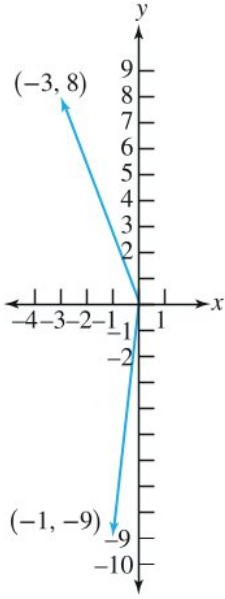
1. $\mathbf{u} = \langle 5, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 12, 4 \rangle$

2. $\mathbf{u} = \langle -5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 13 \rangle$

3. $\mathbf{u} = \langle 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -7 \rangle$

4. $\mathbf{u} = \langle -2, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -8 \rangle$

22.



في التمرينين 23 و 24، أثبت أن المتجهين u و v متعامدان.

23. $u = \langle 2, 3 \rangle, v = \langle \frac{3}{2}, -1 \rangle$

24. $u = \langle -4, -1 \rangle, v = \langle 1, -4 \rangle$

في التمرينين 25 و 26، أوجد قياسات الزوايا الداخلية للمثلث حسب الرؤوس المعطاة.

25. $(-4, 5), (1, 10), (3, 1)$

26. $(-4, 1), (1, -6), (5, -1)$

في التمرينين 27 و 28، أوجد $u \cdot v$ الذي يحقق الشروط المعطاة حيث θ هي الزاوية بين المتجهين u و v .

27. $\theta = 150^\circ, |u| = 3, |v| = 8$

28. $\theta = \frac{\pi}{3}, |u| = 12, |v| = 40$

في التمارين 9-12، استعمل الضرب القياسي لإيجاد $|u|$.

9. $u = \langle 5, -12 \rangle$

10. $u = \langle -8, 15 \rangle$

11. $u = -4i$

12. $u = 3j$

في التمارين 13-22، استعمل الطريقة الجبرية لإيجاد قياس الزاوية بين المتجهين. استعمل الحاسبة لتقريب الإجابة إذا لزم الأمر.

13. $u = \langle -4, -3 \rangle, v = \langle -1, 5 \rangle$

14. $u = \langle 2, -2 \rangle, v = \langle -3, -3 \rangle$

15. $u = \langle 2, 3 \rangle, v = \langle -3, 5 \rangle$

16. $u = \langle 5, 2 \rangle, v = \langle -6, -1 \rangle$

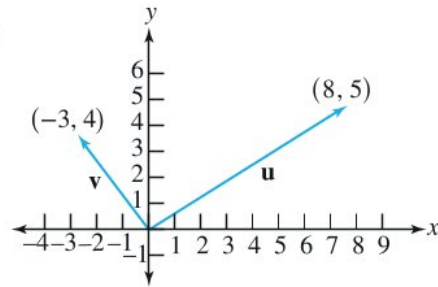
17. $u = 3i - 3j, v = -2i + 2\sqrt{3}j$

18. $u = -2i, v = 5j$

19. $u = (2\cos \frac{\pi}{4})i + (2\sin \frac{\pi}{4})j, v = (\cos \frac{3\pi}{2})i + (\sin \frac{3\pi}{2})j$

20. $u = (\cos \frac{\pi}{3})i + (\sin \frac{\pi}{3})j, v = (3\cos \frac{5\pi}{6})i + (3\sin \frac{5\pi}{6})j$

21.



في التمارين 29-34، حدد ما إذا كان المتجهان u و v متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك.

29. $u = \langle 5, 3 \rangle, v = \langle -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

30. $u = \langle 2, 5 \rangle, v = \langle \frac{10}{3}, \frac{4}{3} \rangle$

31. $u = \langle 15, -12 \rangle, v = \langle -4, 5 \rangle$

32. $u = \langle 5, -6 \rangle, v = \langle -12, -10 \rangle$

33. $u = \langle -3, 4 \rangle, v = \langle 20, 15 \rangle$

34. $u = \langle 2, -7 \rangle, v = \langle -4, 14 \rangle$

35. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن رفع سيارة كتلتها 2600 lb إلى ارتفاع مقداره 5.5 ft

36. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن رفع كيس بطاطس كتلته 100 lb إلى ارتفاع مقداره 3 ft

37. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 12 N في اتجاه $\langle 1, 2 \rangle$ لتحريك جسم مسافة 4 m من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(4, 0)$.

38. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 24 N في اتجاه $\langle 4, 5 \rangle$ لتحريك جسم مسافة 5 m من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(5, 0)$.

39. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 30 N في اتجاه $\langle 2, 2 \rangle$ لتحريك جسم مسافة 3 m من النقطة $(0, 0)$ إلى نقطة في الربع الأول على امتداد المستقيم $y = \frac{1}{2}x$.

40. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 50 N باتجاه $\langle 2, 3 \rangle$ لتحريك جسم مسافة 5 m من النقطة $(0, 0)$ إلى نقطة في الربع الأول على امتداد المستقيم $y = x$.

41. **الشغل** قياس الزاوية بين قوة F قيمتها 200 N والمتجه $\vec{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ هو 30° ، أوجد الشغل الناشئ عن قيمة F اللازمة لتحريك جسم من A إلى B.

الكتابة للتعلم الشغل في التمارين 42-45، لتكن u و v و w متجهات وليكن c عددًا حقيقيًا. استعمل مركبات كل متجه لبرهان الخصائص التالية.

42. $0 \cdot u = 0$

43. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

44. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

45. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$

46. **نشاط جماعي الربط بين الهندسة والمتجهات** أثبت أن مجموع مربعي طولي القطرين في متوازي الأضلاع يساوي مجموع مربعات أطوال أضلاعه.

47. إذا كان u أي متجه، أثبت أن بالإمكان كتابته في الصورة $u = (u \cdot i)i + (u \cdot j)j$

أسئلة اختبار معيارية

48. **صواب أم خطأ** إذا كان $u \cdot v = 0$ ، فإن u و v متعامدان. برّر إجابتك.

49. **صواب أم خطأ** إذا كان $\hat{u}$ متجه وحدة، فإن $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$. برّر إجابتك.

حل التمرينين التاليين من دون استعمال الحاسبة.

50. **اختيار من متعدد** ليكن $u = \langle 1, 1 \rangle$ و $v = \langle -1, 1 \rangle$. أي الخيارات التالية يساوي قياس الزاوية الواقعة بين u و v ؟

- A. 0°
- B. 45°
- C. 60°
- D. 90°
- E. 135°

51. **اختيار من متعدد** ليكن $u = \langle 4, -5 \rangle$ و $v = \langle -2, -3 \rangle$. أي الخيارات التالية يساوي $u \cdot v$ ؟

- A. -23
- B. -7
- C. 7
- D. 23
- E. $\sqrt{7}$

توسيع الأفكار

54. إذا كان المتجهان u و v غير متوازيين، أثبت أن
- $$au + bv = cu + dv \implies a = c, b = d$$
55. إيجاد المسافة بين نقطة ومستقيم ليكن L المستقيم الذي معادلته $2x + 5y = 10$ ، ولتكن $P(3, 7)$.
- a. أثبت أن $A(0, 2)$ و $B(5, 0)$ هما المقطعان x و y لهذا المستقيم.
- b. أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $u = \langle 2, 5 \rangle$ متعامدان.
- c. لتكن $Q \in L$ بحيث تكون الزاوية بين (PQ) و L زاوية قائمة. أثبت أن $|\overrightarrow{PQ} \cdot u| = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |u|$.
- d. أثبت أن $|\overrightarrow{AP} \cdot u| = |\overrightarrow{PQ} \cdot u|$ ثم استنتج قيمة المسافة بين P و L .
- e. ما القاعدة العامة التي يمكن استنتاجها؟

استكشاف

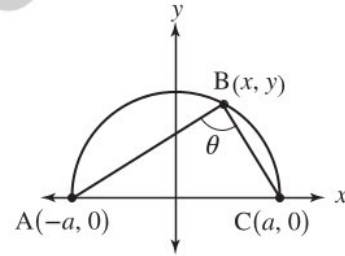
52. الكتابة للتعلم ليكن $w = (\cos t)u + (\sin t)v$ حيث u و v متجهان غير متوازيين.

a. هل يمكن أن يكون المتجه w موازيًا للمتجه u ؟ وضح إجابتك.

b. هل يمكن أن يكون المتجه w موازيًا للمتجه v ؟ وضح إجابتك.

c. هل يمكن أن يكون المتجه w موازيًا للمتجه $u + v$ ؟ وضح إجابتك.

53. الزوايا المحاطة بنصف الدائرة بين الشكل أدناه الزاوية $\angle ABC$ المحاطة بالنصف العلوي من الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$.



a. إذا كان $a = 2$ ، أوجد مركبات المتجهين $u = \overrightarrow{BA}$ و $v = \overrightarrow{BC}$.

b. أوجد $u \cdot v$ ماذا يمكنك أن تستنتج بالنسبة للزاوية θ بين هذين المتجهين؟

c. أعد حل الفرعين السابقين لأي قيمة عشوائية للعدد a .

Vectors in Space

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

6.4

المتجهات في الفضاء

ما ستتعلمه

- المتجهات في الفضاء
- الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

...ولماذا

الفضاء الثلاثي الأبعاد هو الفضاء الواقعي الذي نعيش فيه وندرس ظواهره، لذلك لا ندرس المتجهات إلا في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

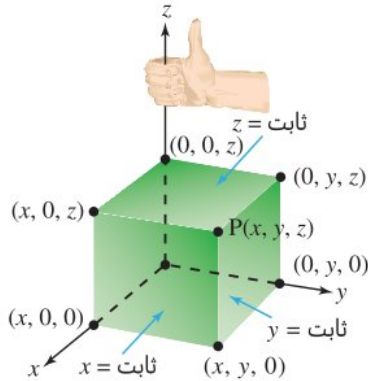
معايير الدرس

12A.7.7

12A.7.8

المصطلحات

- الفضاء الثلاثي الأبعاد
- three-dimensional space
- ثلاثي مرتب
- ordered triple
- زوايا الاتجاه
- direction angles
- جيبوس التمام للاتجاه
- direction cosines



الشكل 6.4.1 يبين الشكل إحداثيات النقطة $P(x, y, z)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

لاحظ أن الشكل يبين خصائص مهمة للنظام الإحداثي الديكارتي الثلاثي الأبعاد:

- المحاور هي المحور x والمحور y والمحور z ، وهي مرسومة بحيث أنك لو وجهت أصابعك نحو القيم الموجبة للمحور x وحركتها دائريًا باتجاه القيم الموجبة للمحور y ، فسيكون اتجاه إبهامك في اتجاه القيم الموجبة للمحور z .

- يمكن التعبير عن أي نقطة P في الفضاء من خلال **ثلاثي مرتب** (x, y, z) حيث x و y و z أعداد حقيقية تمثل **الإحداثيات الديكارتية** للنقطة P .

- إحداثيات النقاط الواقعة على المحور x هي $(x, 0, 0)$ وإحداثيات النقاط الواقعة على المحور y هي $(0, y, 0)$ ، وإحداثيات النقاط الواقعة على المحور z هي $(0, 0, z)$.

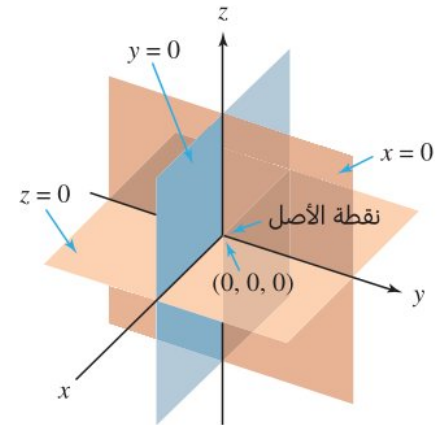
يبين الشكل 6.4.2 **المستويات الإحداثية** الثلاثة.

- المستويات الإحداثية هي المستوى xy والمستوى xz والمستوى yz ، ومعادلات هذه المستويات هي بالترتيب $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

- إحداثيات النقاط الواقعة في المستوى xy هي $(x, y, 0)$ وإحداثيات النقاط الواقعة في المستوى xz هي $(x, 0, z)$ ، وإحداثيات النقاط الواقعة في المستوى yz هي $(0, y, z)$.

- تتقاطع هذه المستويات الثلاثة عند نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

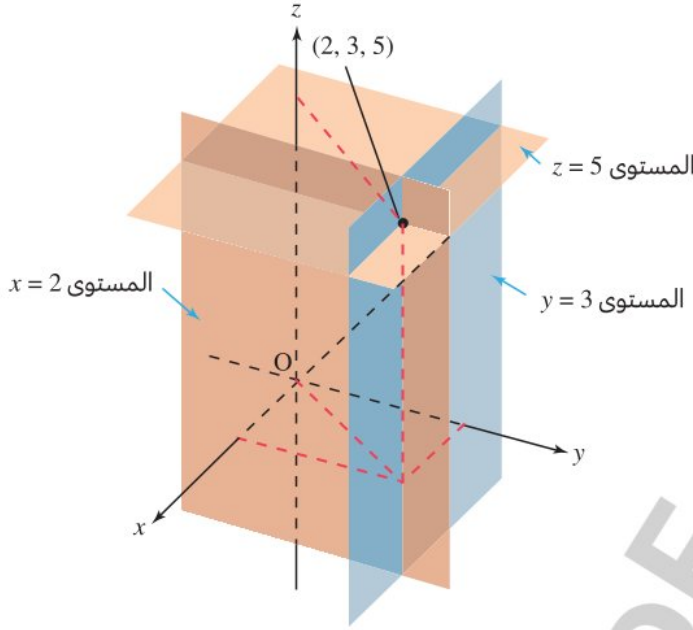
- تقسم المستويات الإحداثية الفضاء إلى ثمانية أثمان، حيث يتضمن أول ثمن النقاط التي إحداثياتها الثلاثة موجبة.



الشكل 6.4.2 تقسم المستويات الإحداثية

الفضاء إلى ثمانية أثمان.

لتحديد النقطة $(2, 3, 5)$ في الفضاء الإحداثي، نرسم المستويات $x = 2$ و $y = 3$ و $z = 5$ وهي تتوازي بالترتيب مع المستوى yz والمستوى xz والمستوى xy . النقطة $(2, 3, 5)$ هي نقطة تقاطع هذه المستويات كما يبين الشكل 6.4.3

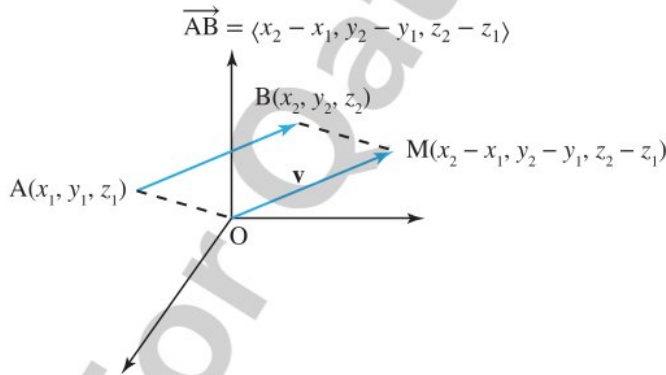


الشكل 6.4.3 يبين الشكل النقطة $(2, 3, 5)$ التي تشكل تقاطع المستويات $x = 2$ و $y = 3$ و $z = 5$.

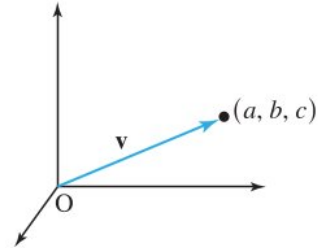
في الفضاء الإحداثي، تمامًا كما في المستوى الثنائي البعد، نسمي مجموعة القطع المستقيمة المتجهة (أو الأسهم) متجهات. يمكن تمثيل المتجه في الفضاء، باعتباره اتجاهًا ومقدارًا، بسهم يبدأ من نقطة الأصل وينتهي عند النقطة (a, b, c) ، فنكتب أن المتجه هو الثلاثي المرتب $\langle a, b, c \rangle$ لتمثيله عن النقطة (a, b, c) . (انظر الشكل 6.4.4).

إذا لم تكن نقطة البداية للمتجه عند نقطة الأصل، نُعَمِّم النظرية التالية الرمز السابق ليستعمل في التعبير عن المتجه في أية وضعية:

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ متجهًا بنقطة بداية هي $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهاية هي $B(x_2, y_2, z_2)$ ، يكون عندها



الشكل 6.4.5 يبين الشكل كيف يمكننا من خلال تطبيق قاعدة المسافة أو باستعمال التكافؤ بين المتجه $\overrightarrow{AB}$ و المتجه $\mathbf{v}$ ، أن نجد مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$.



الشكل 6.4.4 يبين الشكل تمثيل

المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ من خلال سهم يبدأ من نقطة الأصل وينتهي عند النقطة (a, b, c) .

يبين الشكل 6.4.5 أنه إما من خلال تطبيق قاعدة المسافة، أو باستعمال التكافؤ بين المتجه $\vec{AB}$ والمتجه $\mathbf{v}$ ، يمكننا أن نكتب

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وهو يمثل طول المتجه $\vec{AB}$.

المتجه في الفضاء الإحداثي

المتجه $\mathbf{v}$ الثلاثي الأبعاد هو ثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية $\langle a, b, c \rangle$. تمثل الأعداد a و b و c مركبات المتجه $\mathbf{v}$.

التمثيل القياسي للمتجه $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ هو السهم من نقطة الأصل إلى النقطة (a, b, c) . مقدار المتجه $\mathbf{v}$ هو طول السهم الذي يمثله واتجاه $\mathbf{v}$ هو اتجاه السهم.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

المتجه الصفري هو المتجه $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

مثال 1 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

ليكن $A(-2, 3, 5)$ و $B(1, 0, -4)$.

A. أوجد المتجه $\vec{AB}$ بالصورة التركيبية.

B. أوجد المتجه $\vec{BA}$ بالصورة التركيبية.

C. أوجد المتجه $3\vec{AB}$ بالصورة التركيبية.

D. أوجد المتجه $\vec{OA} + \vec{OB}$ بالصورة التركيبية.

E. أوجد $|\vec{OA} + \vec{OB}|$ ، $|3\vec{AB}|$ ، $|\vec{BA}|$ ، $|\vec{AB}|$.

الحل

A. $\vec{AB} = \langle 1 - (-2), 0 - 3, -4 - 5 \rangle = \langle 3, -3, -9 \rangle$

B. $\vec{BA} = \langle -2 - 1, 3 - 0, 5 - (-4) \rangle = \langle -3, 3, 9 \rangle$

يمكنك أن تلاحظ أيضًا أن $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

C. $3\vec{AB} = 3\langle 3, -3, -9 \rangle = \langle 9, -9, -27 \rangle$

D. $\vec{OA} + \vec{OB} = \langle -2, 3, 5 \rangle + \langle 1, 0, -4 \rangle = \langle -2 + 1, 3 + 0, 5 - 4 \rangle = \langle -1, 3, 1 \rangle$

E. $|\vec{AB}| = |\langle 3, -3, -9 \rangle| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{9 + 9 + 81} = 3\sqrt{11}$

$|\vec{BA}| = |\langle -3, 3, 9 \rangle| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 9 + 81} = 3\sqrt{11}$

$|3\vec{AB}| = |\langle 9, -9, -27 \rangle| = \sqrt{9^2 + (-9)^2 + (-27)^2} = \sqrt{81 + 81 + 729} = 9\sqrt{11}$

(تابع)

يمكننا أن نكتب أيضًا $|\overrightarrow{3AB}| = 3|\overrightarrow{AB}| = 3 \times 3\sqrt{11} = 9\sqrt{11}$ كما في المستوى الإحداثي الثلاثي البعد، يمكنك أن تلاحظ أن $|k\mathbf{v}| = |k||\mathbf{v}|$ لأي متجه $\mathbf{v}$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد ولأي كمية قياسية k .

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |(-1, 3, 1)| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$$

لاحظ أن $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| \neq |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|$.

$$\text{لأن } |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1 + 0 + 16} = \sqrt{17} \text{ و } |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38} \\ \sqrt{11} \neq \sqrt{38} + \sqrt{17}$$

حاول أن تحل التمرين 1

نقول أن سهمين متكافئان إذا كانا يعبران عن نفس المتجه. (انظر الشكل 6.4.6) في الفضاء، نستعمل الثلاثي المرتب للتعبير عن المتجهات:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

يمكن ضرب المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ بكمية قياسية (عدد حقيقي k) كما يلي:

$$k\mathbf{v} = k\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle kv_1, kv_2, kv_3 \rangle$$

إذا كان k عدد حقيقي موجب، يكون $k\mathbf{v}$ متجهًا مقداره $k|\mathbf{v}|$ وب نفس اتجاه $\mathbf{v}$. وإذا كان k سالبًا، يكون مقدار $k\mathbf{v}$ هو $|k||\mathbf{v}|$ ، ويكون بعكس اتجاه $\mathbf{v}$.

نقول أن متجهين متعاكسان إذا كان لهما نفس المقدار ولكن اتجاهيهما متعاكسان (انظر الشكل 6.4.7).

نقول أن متجهين متوازيان إذا كان أحدهما هو ناتج ضرب المتجه الثاني بكمية قياسية. (انظر الشكل 6.4.8)

على سبيل المثال، المتجه $\langle -3, 4, -2 \rangle$ متوازٍ مع المتجه $\langle 4.5, -6, 3 \rangle$ لأن

$$\langle -3, 4, -2 \rangle = -\frac{2}{3} \langle 4.5, -6, 3 \rangle$$

حيث $k = -\frac{2}{3}$.

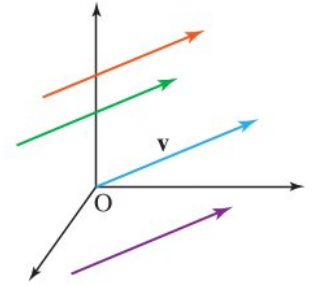
المتجهات المتوازية في الفضاء الإحداثي

يكون المتجهان $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متجهين متوازيين في الفضاء الإحداثي إذا كان

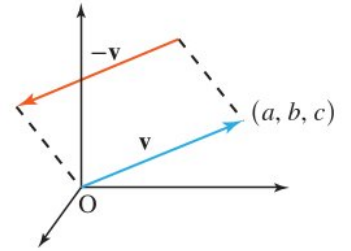
$$\mathbf{w} = k\mathbf{v}$$

حيث $k \in \mathbb{R}$ و $k \neq 0$

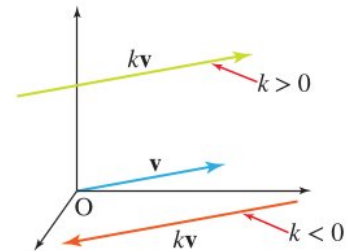
تطبق خصائص أخرى كثيرة على المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد كما في المستوى الثلاثي البعد وبطريقة مشابهة. فيما يلي بعض التعاريف التي نعتمدها أيضًا للمتجهات في الفضاء الإحداثي.



الشكل 6.4.6 يبين الشكل متجهات مكافئة للمتجه $\mathbf{v}$



الشكل 6.4.7 المتجهان المتعاكسان المبينان في الشكل لهما نفس المقدار لكن باتجاهين متعاكسين.



الشكل 6.4.8 يبين الشكل المتجهات المتوازية الناتجة عن ضرب المتجه بكمية قياسية.

العمليات على المتجهات في الفضاء الإحداثي

ليكن $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ متجهين في الفضاء الإحداثي، و $k \in \mathbb{R}$.

المساواة: $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ إذا وفقط إذا $v_1 = w_1$ و $v_2 = w_2$ و $v_3 = w_3$

الجمع: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle$

الطرح: $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3 \rangle$

الضرب في كمية قياسية: $k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2, kv_3 \rangle$

المقدار: $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

متجه الوحدة: $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

هو متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v}$ حيث $\mathbf{v} \neq 0$

يبين المثال التالي بعض العمليات على المتجهات في الفضاء الإحداثي.

مثال 2 العمليات على المتجهات في الفضاء الإحداثي

أوجد ناتج كل مما يلي:

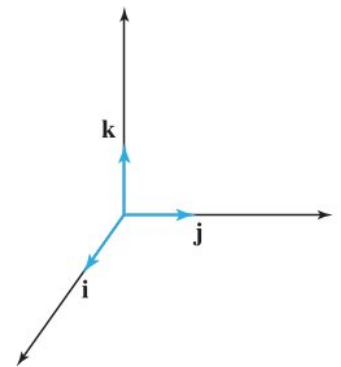
- A. $3\langle -2, 1, 4 \rangle$
- B. $\langle 0, 6, -7 \rangle + \langle -5, 5, 8 \rangle$
- C. $\langle 1, -3, 4 \rangle - \langle -2, -4, 5 \rangle$
- D. $|\langle 2, 0, -6 \rangle|$

الحل

- A. $3\langle -2, 1, 4 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(4) \rangle = \langle -6, 3, 12 \rangle$
- B. $\langle 0, 6, -7 \rangle + \langle -5, 5, 8 \rangle = \langle 0 - 5, 6 + 5, -7 + 8 \rangle = \langle -5, 11, 1 \rangle$
- C. $\langle 1, -3, 4 \rangle - \langle -2, -4, 5 \rangle = \langle 1 - (-2), -3 - (-4), 4 - 5 \rangle = \langle 3, 1, -1 \rangle$
- D. $|\langle 2, 0, -6 \rangle| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$

حاول أن تحل التمرين 8

يُسمى المتجه الذي مقداره 1 متجه الوحدة. في المستوى الإحداثي، المتجهان $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ هما متجهي الوحدة في اتجاه المحور x والمحور y . في الفضاء ثلاثي الأبعاد، متجهات الوحدة القياسية هي: $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ، وهو متجه الوحدة للمحور x ، و $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ وهو متجه الوحدة للمحور y ، و $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، وهو متجه الوحدة للمحور z . تُسمى المتجهات $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ متجهات الوحدة الأساسية للفضاء ثلاثي الأبعاد. (انظر الشكل 6.4.9)



الشكل 6.4.9 متجهات الوحدة القياسية في الفضاء ثلاثي الأبعاد

ينتج مباشرة عن تعريفنا لمتجهات الوحدة الأساسية للمحاور i و j و k أن بالإمكان كتابة أي متجه $v = \langle x, y, z \rangle$ في الصورة

$$v = xi + yj + zk$$

لأن

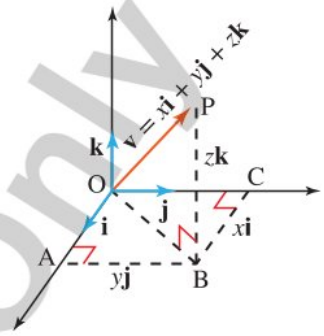
$$\begin{aligned} v = \langle x, y, z \rangle &= \langle x, 0, 0 \rangle + \langle 0, y, 0 \rangle + \langle 0, 0, z \rangle \\ &= x \langle 1, 0, 0 \rangle + y \langle 0, 1, 0 \rangle + z \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= xi + yj + zk \end{aligned}$$

إذن، المتجه v في الفضاء ثلاثي الأبعاد الذي يعبر عنه السهم من $Q(x, y, z)$ إلى $P(a, b, c)$ هو المتجه

$$v = \overrightarrow{PQ} = \langle x - a, y - b, z - c \rangle = (x - a)i + (y - b)j + (z - c)k$$

بممكننا أن نلاحظ أيضًا أن $\frac{v}{|v|}$ هو متجه وحدة له نفس اتجاه أي متجه v في الفضاء الإحداثي. $\hat{v} = \frac{v}{|v|}$ يُسمى متجه الوحدة للمتجه v .

الشكل 6.4.10 يمكن كتابة أي متجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد بدلالة i و j و k .



مثال 3 متجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

A. أوجد متجه الوحدة للمتجه $v = i + 2j - 2k$.

B. أوجد متجهًا مقداره 6 وله نفس اتجاه المتجه $v = i - 2j + 3k$.

C. أوجد متجهًا مقداره 8 واتجاهه عكس اتجاه $v = 2i + 4j - 3k$.

الحل

A. مقدار المتجه v هو $|v| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$.

إذن، متجه الوحدة للمتجه v هو $\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{3}v = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k$.

B. المتجه الذي مقداره 6 واتجاهه نفس اتجاه v هو $6\hat{v}$ ، حيث $\hat{v} = \frac{v}{|v|}$ هو متجه الوحدة للمتجه v .

$$|v| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{14}}v = \frac{1}{\sqrt{14}}i - \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{3}{\sqrt{14}}k$$

$$6\hat{v} = \frac{6}{\sqrt{14}}i - \frac{12}{\sqrt{14}}j + \frac{18}{\sqrt{14}}k$$

وهو المتجه المطلوب.

C. المتجه الذي مقداره 8 وهو في عكس اتجاه v هو $-8\hat{v}$ ، حيث $\hat{v} = \frac{v}{|v|}$ هو متجه الوحدة للمتجه v .

$$|v| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$$

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{29}}v = \frac{2}{\sqrt{29}}i + \frac{4}{\sqrt{29}}j - \frac{3}{\sqrt{29}}k$$

$$-8\hat{v} = -\frac{16}{\sqrt{29}}i - \frac{32}{\sqrt{29}}j + \frac{24}{\sqrt{29}}k$$

وهو المتجه المطلوب.

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

لتعريف الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء، نستعين بتعريف وخصائص الضرب القياسي للمتجهات في المستوى الثنائي البعد.

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

الضرب القياسي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ هو:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

لتكن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متجهات في الفضاء، ولتكن k كمية قياسية. إذن:

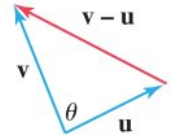
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$



الشكل 6.4.11 يبين الشكل الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ والتي يمكن إيجاد قياسها من خلال الضرب القياسي.

يمكننا أيضًا الاستعانة بالشكل 6.4.11 لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين باستعمال الضرب القياسي وذلك عن طريق البرهان في المستوى الثنائي البعد.

الزاوية بين متجهين في الفضاء

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ حيث $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ و $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ، فإن

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right)$$

ويكون المتجهان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدين إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

مثال 4 إيجاد قياس زاوية بين متجهين في الفضاء

A. أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

B. حدّد المتجهين المتعامدين من بين المتجهات الثلاثة التالية:

$$\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

الحل

A. إذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ، فإن

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(1)(-3) + (-2)(6) + (2)(2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{-11}{3 \times 7} = \frac{-11}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-11}{21} \right) \approx 122^\circ$$

(تابع)

B. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (7)(-3) + (3)(5) + (2)(3) = 0$

إذن، $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدان.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (7)(1) + (3)(0) + (2)(1) = 9$

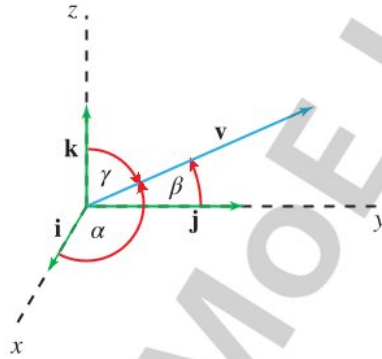
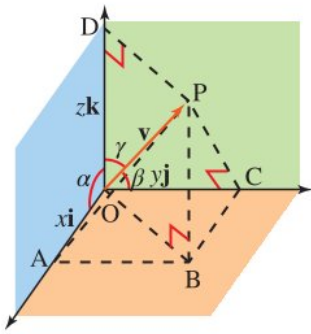
إذن، $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ غير متعامدين.

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-3)(1) + (5)(0) + (3)(1) = 0$

إذن، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعامدان.

حاول أن تحل التمرين 30

يبين الشكل 6.4.12 متجهًا غير صفري $\mathbf{v}$ في التمثيل البياني، والزوايا α و β و γ هي الزوايا بين المتجه $\mathbf{v}$ والمحاور الإحداثية.



الشكل 6.4.12 الزوايا بين المتجه $\mathbf{v}$ والمحاور الثلاثة

نستعمل الضرب القياسي لإيجاد قياسات هذه الزوايا التي تسمى **زوايا اتجاه** $\mathbf{v}$ في حين تُسمى

$\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ **جيوب التمام للاتجاه** $\mathbf{v}$.

لدينا $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{v}| |\mathbf{i}| \cos \alpha$.

من جهة أخرى، إذا كان $\mathbf{v} = \langle x, y, z \rangle$ ، فإن

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \langle x, y, z \rangle \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle = x$$

وبما أن $|\mathbf{i}| = 1$ ، فإن

$$x = |\mathbf{v}| \cos \alpha$$

نلاحظ كذلك أن

$$y = |\mathbf{v}| \cos \beta$$

$$z = |\mathbf{v}| \cos \gamma$$

$$|\mathbf{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

إذن

$$= |\mathbf{v}|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

بالتالي

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

كتابة المتجه باستعمال زوايا الاتجاه

إذا كانت α و β و γ هي الزوايا بين المتجه $\mathbf{v}$ والمحاور الإحداثية x و y و z ، فإن

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| (\cos \alpha)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\cos \beta)\mathbf{j} + |\mathbf{v}| (\cos \gamma)\mathbf{k}$$

وبالتالي فإن متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v}$ هو

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$$

مثال 5 زوايا الاتجاه

أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

الحل

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

إذن

$$4 = |\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \approx 48^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \approx 109^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \approx 48^\circ$$

يمكننا أن نستنتج من هذا المثال قاعدة عامة تفيد أنه إذا كانت α و β و γ هي الزوايا بين متجه والمحاور الثلاثة على التوالي، فإن

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

حاول أن تحل التمرين 43

مراجعة سريعة 6.4

5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

6. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

7. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

في التمرينين 8 و 9، أوجد المتجه $\mathbf{u}$ حسب المقدار المعطى وباتجاه $\mathbf{v}$.

8. $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$, $|\mathbf{u}| = 3$

9. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $|\mathbf{u}| = 4$

في التمارين 1-3، أوجد قيمة $|\mathbf{u}|$ في كل من الحالات التالية.

1. $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$

2. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

3. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

في التمارين 4-7، أوجد متجه الوحدة للمتجه المعطى.

4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

الدرس 6.4 التمارين

في التمارين 1-4، أوجد المتجهات $\vec{AB}$ و $\vec{BA}$ و $5\vec{AB}$ بالصورة التركيبية في كل من الحالات التالية.

1. $A\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right), B\left(1, \frac{-5}{2}, 1\right)$

2. $A\left(-2, -\sqrt{3}, \frac{-1}{2}\right), B\left(1, \sqrt{3}, \frac{-1}{2}\right)$

3. $A(2, -3, 5), B(1, -1, 3)$

4. $A(a, -a, 2a), B(-a, -2a, a)$

في التمارين 5-7، إذا كان المعطى إحداثيات إحدى النقطتين P أو Q ومركبات المتجه $\vec{PQ}$ ، أوجد المعلومات الناقصة.

5. $\vec{PQ} = \left\langle 1, \frac{-5}{2}, 1 \right\rangle, P\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)$

6. $\vec{PQ} = \left\langle \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right\rangle, Q\left(1, \frac{-5}{2}, 1\right)$

7. $\vec{PQ} = \langle -a, -2a, a \rangle, P(a, -2a, 2a)$

8. أوجد كلاً مما يلي:

a. $4\langle 2, 0, 4 \rangle$

b. $\langle 1, 6, 7 \rangle + \langle 5, 1, 8 \rangle$

c. $\langle 1, -3, 4 \rangle + \langle 2, 0, 1 \rangle$

d. $|\langle 3, 1, 6 \rangle|$

9. أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون للمتجهين

$\mathbf{w} = \langle 2, 4, -6 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m - 2, m + n, -2m + n \rangle$

نفس الاتجاه.

في التمارين 10-12، أوجد متجه الوحدة للمتجه المعطى.

10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

11. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

في التمارين 13-15، أوجد المتجه $\mathbf{u}$ حسب المقدار المعطى وباتجاه $\mathbf{v}$.

13. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 2$

14. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 4$

15. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 5$

في التمارين 16-20، ليكن $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

16. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$

17. $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

18. $|-3\mathbf{u}| + |3\mathbf{v}|$

19. $\frac{1}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u}$

20. $\left| \frac{1}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right|$

في التمارين 21-23، أوجد الكمية القياسية t (أو أثبت أنها غير موجودة) بحيث يكون المتجه $\mathbf{v}$ متجه وحدة.

21. $\mathbf{v} = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

22. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

23. $\mathbf{v} = 0.5\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 1.5t\mathbf{k}$

في التمارين 24-29، أوجد الضرب القياسي للمتجهين وقياس الزاوية بينهما (إن لم تكن معطاة).

24. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

25. $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 5 \rangle$

26. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

27. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

28. $|\mathbf{u}| = 3, |\mathbf{v}| = 4$ والزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ هي $\frac{\pi}{3}$.

29. $|\mathbf{u}| = 3, |\mathbf{v}| = 4$ والزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ هي $\frac{2\pi}{3}$.

47. أوجد قيمة m بدلالة n بحيث يكون المتجهان $\mathbf{u} = \langle 3, 5, 0 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m - 2, n + 3, 0 \rangle$ متعامدين.

48. أوجد قيمة m بحيث يكون المتجهان $\mathbf{w} = \langle 6, 3, 4 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m + 2, 3, m \rangle$ متكافئين.

49. أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون المتجهان $\mathbf{w} = \langle -1, 5, 6 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m - 2, n + 4, 6 \rangle$ متكافئين.

في التمرينين 50 و 51، حدّد ما إذا كان المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متوازيين أم لا.

50. $\mathbf{u} = \langle 2, -7, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -9, 10 \rangle$

51. $\mathbf{u} = \langle 9, -12, -9 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 4, 3 \rangle$

في التمرينين 52 و 53، أوجد قيمة كل من a و b علماً بأن المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متوازيين.

52. $\mathbf{u} = \langle 8, 7, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2a, 3b, 4 \rangle$

53. $\mathbf{u} = \langle 12, -5, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 2a, -5b \rangle$

أسئلة اختبار معيارية

54. صواب أم خطأ تعتقد خولة أن $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ ، هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

55. صواب أم خطأ تعتقد ماجدة أن $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ ، هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

56. اختيار من متعدد إذا كان $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ متجهين وكانت c كمية قياسية، أي الخيارات التالية كمية قياسية؟

A. $\mathbf{w} + \mathbf{v}$

B. $\mathbf{w} - \mathbf{v}$

C. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

D. $c\mathbf{v}$

E. $|\mathbf{v}| \mathbf{w}$

57. اختيار من متعدد ليكن $A = (2, 0, 2)$ و $B = (2, 1, 0)$. أي الخيارات التالية يمثل مركبات $\overrightarrow{AB}$ ؟

A. $\langle 0, 2, -2 \rangle$

B. $\langle 2, 1, -2 \rangle$

C. $\langle 0, 1, 2 \rangle$

D. $\langle 1, 1, -2 \rangle$

E. $\langle 0, 1, -2 \rangle$

في التمارين 30-32، حدّد ما إذا كان المتجهان متعامدين. إن لم يكونا كذلك، حدّد ما إذا كانت الزاوية بينهما حادة أم لا.

30. $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 3, 5 \rangle$

31. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

32. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

في التمارين 33-42، ليكن $\mathbf{r} = \langle 0, 1, 3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, -4, 5 \rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

33. $\mathbf{r} + \mathbf{v}$

34. $\mathbf{r} - \mathbf{w}$

35. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

36. $|\mathbf{w}|$

37. $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

38. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$

39. $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$

40. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$

41. $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle$

42. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

في التمارين 43-46،

i. أوجد جيوب التمام لاتجاه $\mathbf{v}$.

ii. أثبت أنها تحقق الصيغة $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

iii. قَرّب قياسات زوايا الاتجاه إلى أقرب درجة.

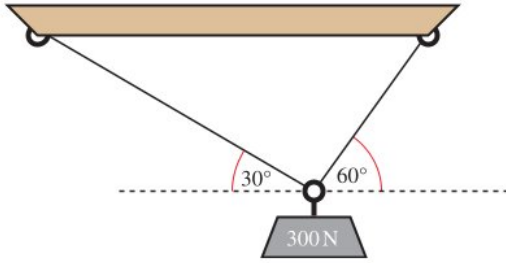
43. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

44. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

45. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

46. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$

61. أوجد قوة الشد في السلك لسلكين يحملان وزنًا مقداره 300 N كما هو مبين في الرسم.

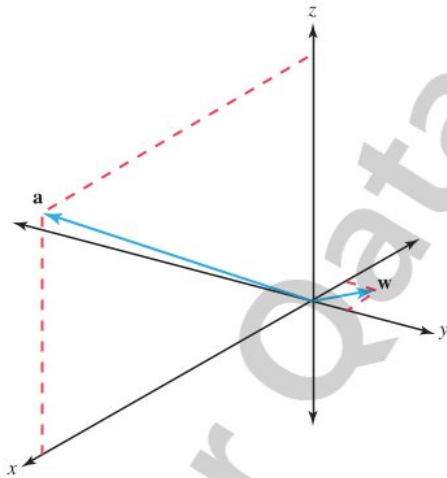


62. إذا كانت قياسات كل زوايا الاتجاه لمتجه متساوية، فما قياس كل زاوية؟

63. أثبت أن المتجه $|a|b + |b|a$ يقسم الزاوية بين المتجهين a و b إلى زاويتين متساويتين.

64. **السرعة الثلاثية الأبعاد** أقلعت طائرة في اتجاه الغرب بسرعة 200 mph وبزاوية قياسها 20° مع سطح الأرض. إذا كانت الرياح تهب من الشمال الشرقي بسرعة 10 mph، أوجد المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة لحظة إقلاعها.

65. **المتجهات في الفضاء** أقلعت طائرة في اتجاه الشرق بسرعة 250 mph وبزاوية قياسها 30° مع مستوى سطح الأرض. إذا كانت الرياح تهب باتجاه الجنوب الشرقي بسرعة 32 mph، أوجد المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة لحظة إقلاعها (انظر الشكل أدناه).

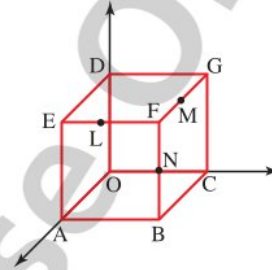


استكشاف

58. أوجد قيمة a بحيث يكون

$$|ai + (a - 1)j + (a + 1)k| = 2$$

59. يبين الشكل أدناه مكعبًا طول ضلعه 8 وحدات.



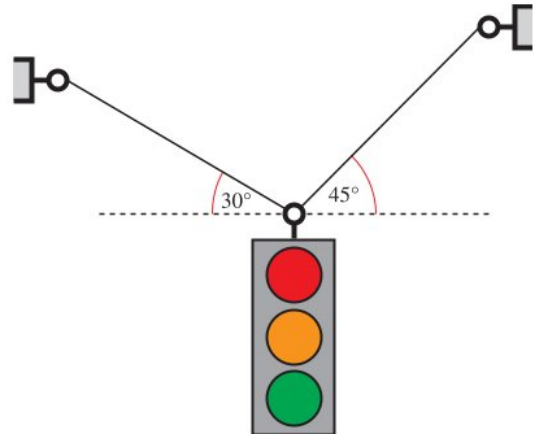
a. أوجد متجه الموضع لكل رأس من رؤوس المكعب.

b. النقاط M و L و N هي نقاط منتصف الأضلاع الثلاثة كما هو مبين. أوجد متجه الموضع لكل من النقاط M و L و N.

c. أثبت أن $\vec{LM} + \vec{MN} + \vec{NL} = \vec{0}$.

توسيع الأفكار

60. تتدلى إشارة ضوئية من سلكين مرنيين بقوة مقدارها 125 N مقدار القوة التي يطبقها كل سلك على الدائرة المعدنية التي في الوسط تُسمى "قوة الشد في السلك". أوجد قوة الشد في كل سلك إذا كانت الإشارة الضوئية متوازنة.



الوحدة 6 مراجعة الوحدة

في التمارين 17-26، ليكن $\mathbf{r} = \langle 1, 0, -3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 4, -5 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 4, -3, 12 \rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

17. $\mathbf{r} + \mathbf{v}$

18. $\mathbf{r} - \mathbf{w}$

19. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

20. $|\mathbf{w}|$

21. $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

22. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$

23. $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$

24. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$

25. $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle$

26. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

في التمارين 27-29، أوجد المتجه $\mathbf{u}$ حسب المقدار المعطى وباتجاه $\mathbf{v}$.

27. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 3$

28. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 2$

29. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 6$

في التمارين 30-34،

i. أوجد جيوب التمام لاتجاه $\mathbf{v}$.

ii. أثبت أنها تحقق الصيغة

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta = 1$$

30. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

31. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

32. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

33. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

في التمارين 1-4، ليكن $A(2, -1)$ و $B(3, 1)$ و $C(-4, 2)$ و $D(1, -5)$. اكتب المتجه بالصورة التركيبية ثم أوجد مقداره.

1. $3\overrightarrow{AB}$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

3. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

4. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$

5. ليكن $A\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ و $B(8, -6)$. أوجد ما يلي:

a. متجه وحدة اتجاهه نفس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

b. متجه مقداره 3 واتجاهه عكس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

في التمارين 6-11، ليكن $\mathbf{u} = \langle 2, -1 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 1, -3 \rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

6. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

7. $3\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$

8. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$

9. $|\mathbf{w} - 2\mathbf{u}|$

10. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

11. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

12. ليكن $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, 5 \rangle$. أوجد ما يلي:

a. قياس زاوية الاتجاه للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

b. قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

في التمارين 13-16، أوجد مقدار المتجه الذي تشكل فيه النقطتان A و B نقطتا البداية والطرف.

13. $A(-1, 2, 5), B(3, -4, 6)$

14. $A(6, -3, 4), B(2, -1, -8)$

15. $A(1, -3, 2), B(a, b, c)$

16. $A(p, q, r), B(x, y, z)$

38. **جمع القوى** تُطبّق قوة مقدارها 180 lb على جسم بزاوية قياسها 20° ، وتطبّق على الجسم في الوقت نفسه قوة أخرى مقدارها 300 lb بزاوية قياسها 5° . أوجد مقدار واتجاه القوة الناتجة.

39. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 12 N في اتجاه $\langle 1, 2 \rangle$ لتحريك جسم مسافة 5 m من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(5, 0)$.

34. أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون للمتجهين $w = \langle 2, 6, -4 \rangle$ و $v = \langle m + 2, m - n, m - 2n \rangle$ نفس الاتجاه.

35. أوجد قيمة m بحيث يكون المتجهان $u = \langle 3, 4, 1 \rangle$ و $v = \langle m + 1, m - 3, 2 \rangle$ متعامدين.

36. أوجد الزاوية بين المتجهين $v = \langle 1, 3, 2 \rangle$ و $u = \langle 3, -4, -1 \rangle$ والزاوية بين u و $u + v$.

37. **هندسة الطيران** تحلق طائرة بزاوية مسار مع الشمال 285° بسرعة 480 mph، وتهبّ الرياح بزاوية مسار مع الشمال قياسها 265° بسرعة 30 mph

a. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل السرعة الابتدائية للطائرة.

b. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل سرعة الرياح.

c. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة.

الوحدة 6 تقويم

في التمرينين 15 و 16، أوجد المتجه u حسب المقدار المعطى وباتجاه v .

15. $v = i + 2j - 3k, |u| = 1$

16. $v = 4i - 3j + 4k, |u| = 4$

في التمارين 17-19،

i. أوجد جيوب التمام لاتجاه v .

ii. أثبت أنها تحقق الصيغة

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

iii. قزب زوايا الاتجاه إلى أقرب درجة.

17. $v = 2i - j$

18. $v = 3i - 2j + 4k$

19. $v = 3j + 2k$

20. أوجد قيمة m بحيث يكون المتجهان

$$u = \langle 3, -4, 1 \rangle \text{ و } v = \langle m + 1, 3, m \rangle$$
 متعامدين.

21. إذا كان $v = \langle -1, -3, 2 \rangle$ و $u = \langle 3, 4, 1 \rangle$

أوجد الزاوية بين v و $u + v$.

22. تحلق طائرة بزاوية مسار مع الشمال قياسها 80°

بسرعة 540 mph، و تهب رياح بزاوية مسار مع الشمال

قياسها 100° بسرعة 55 mph

a. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل السرعة الابتدائية للطائرة.

b. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل سرعة الرياح.

c. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة.

23. تُطبق قوة مقدارها 160 lb على جسم بزاوية قياسها 100° ،

وتطبق على الجسم في الوقت نفسه قوة أخرى مقدارها 250

lb بزاوية قياسها 8° . أوجد مقدار واتجاه القوة الناتجة.

24. أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 10 N

في اتجاه $\langle 1, 3 \rangle$ لتحريك جسم مسافة 6 m من النقطة

$(0, 0)$ إلى النقطة $(6, 0)$.

في التمرينين 1 و 2، ليكن $A(-2, 1)$ و $B(-3, 2)$ و $C(-2, 3)$. اكتب المتجه بالصورة التركيبية ثم أوجد مقداره.

1. $3 \overrightarrow{CB}$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

في التمارين 3-6، ليكن $u = \langle 2, 1 \rangle$ و $v = \langle -3, 2 \rangle$

و $w = \langle 2, 3 \rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

3. $u + v$

4. $2v - w$

5. $|u - v|$

6. $v \cdot w$

7. ليكن $u = \langle -2, 4 \rangle$ و $v = \langle 6, 4 \rangle$. أوجد ما يلي:

a. قياس زاوية الاتجاه للمتجهين u و v .

b. قياس الزاوية بين المتجهين u و v .

8. ليكن $A(3, 1)$ و $B(5, 1)$. أوجد ما يلي:

a. متجه وحدة اتجاهه نفس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

b. متجه مقداره 3 واتجاهه عكس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

في التمارين 9-14، ليكن $r = \langle 1, 0, -3 \rangle$ و $v = \langle -3, 4, -5 \rangle$ و $w = \langle 4, -3, 12 \rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

9. $v \cdot r$

10. $|r|$

11. $r \cdot (v - w)$

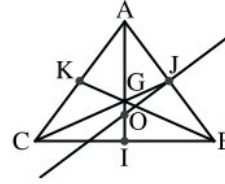
12. $\frac{v}{|v|}$

13. $j \cdot w$

14. $\langle i \cdot r, j \cdot r, k \cdot r \rangle$

الوحدة 6 المشروع

ليكن المثلث ABC ولتكن G نقطة ارتكازه، و O مركز الدائرة المحيطة به، و H ملتقى الارتفاعات.



نريد استعمال المتجهات لإثبات أن هذه النقاط الثلاث متسامتة (أي تقع على خط واحد).

1. أثبت أن

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$$

2. أثبت أن

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3 \vec{OG}$$

3. لتكن E النقطة بحيث يكون

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OE}$$

a. أثبت أن

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{CE}$$

$$\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{AE}$$

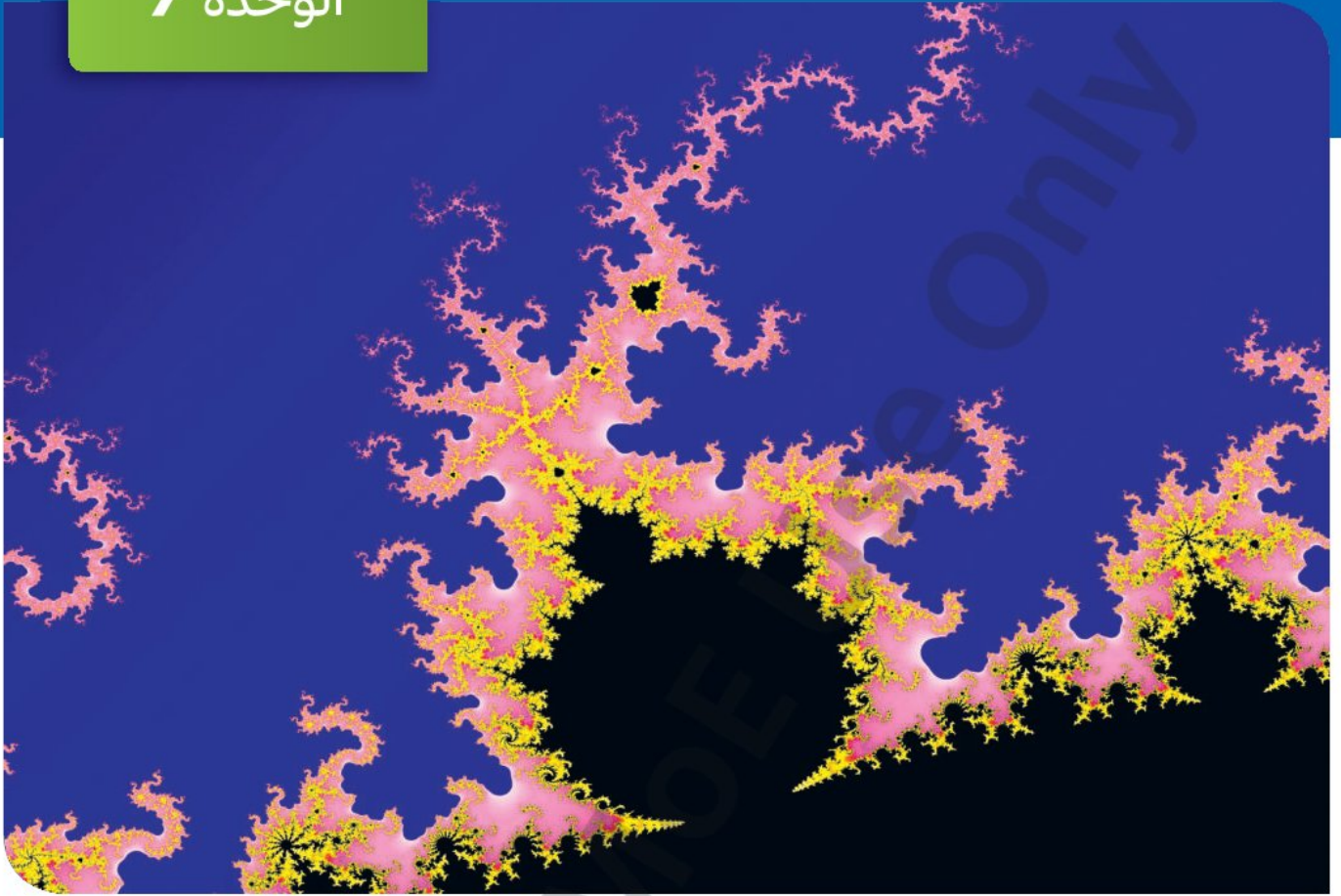
$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{BE}$$

b. أثبت أن $\vec{OA} + \vec{OB}$ متجه متعامد مع $\vec{AB}$ وأن $\vec{OB} + \vec{OC}$ متجه متعامد مع $\vec{BC}$ وأن $\vec{OA} + \vec{OC}$ متجه متعامد مع $\vec{AC}$.

c. استنتج أن $\vec{AE}$ متعامد مع $\vec{BC}$ وأن $\vec{BE}$ متعامد مع $\vec{AC}$ وأن $\vec{CE}$ متعامد مع $\vec{AB}$.

d. استنتج أن $E = H$.

4. أثبت أن $\vec{OH} = 3 \vec{OG}$ ثم استنتج أن النقاط O و G و H متسامتة.



الأعداد المركبة

7.1 الأعداد المركبة والعمليات عليها

7.2 المستوى المركب

7.3 الصورة القطبية للأعداد المركبة

7.4 قوى وجذور الأعداد المركبة

يعتقد كثيرون أن علماء الرياضيات ابتكروا العدد التخيلي i عند البحث عن حل للمعادلة التربيعية $x^2 + 1 = 0$ ، وهو اعتقاد خاطئ لأن فكرة اعتبار العدد $\sqrt{-1}$ عددًا موجودًا ظهرت في إطار البحث عن الحل الحقيقي للمعادلة التكعيبية، فقد لاحظ الرياضيون أن كتابة هذا العدد التخيلي في معادلة جبرية لا تُفسد النتيجة إذا كانت هذه النتيجة حقيقية. على سبيل المثال، إذا كتبنا $1 + \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 1$ ، فإن الخطأ يكمن في ادعاء وجود العدد $\sqrt{-1}$ ، لكن هذا الوجود الشاذ يزول عند حل المعادلة جبريًا لتصبح صحيحة من الناحية الرياضية. لكن الأمر اللافت حقًا هو أن هذا النوع من الأعداد، الذي ابتكره العقل الرياضي لمعالجة مسائل مجردة، دخل في صميم الدراسات الفيزيائية الحديثة كالكهرياء والموجات الكهرومغناطيسية وغير ذلك من التطبيقات التي لم تكن متوقعة.

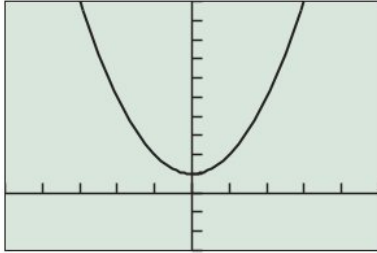
لاحظ في الصورة أعلاه كيف تتضمن حدود الشكل الأساسي المتكرر أشكالًا صغيرة تشابهه مما يكون ما يسمى "التشابه الذاتي"، وهو شكل مشابه أو شبه مشابه لجزء من ذاته وتنتج هذه الصورة عن تكرار صيغة ارتدادية بسيطة تستعمل الأعداد المركبة.

Complex Numbers and Operations with Complex Numbers الأعداد المركبة والعمليات عليها

7.1

الأعداد المركبة

يبين (الشكل 7.1.1) أن الدالة $f(x) = x^2 + 1$ لا أصفار لها. إذن، المعادلة $x^2 + 1 = 0$ لا حل حقيقي لها.



في $[-3, 10]$ في $[-5, 5]$

الشكل 7.1.1 ليس للتمثيل البياني مقطع x

كان من الممكن ترك هذا الأمر على حاله، وما كان ذلك ليسبب أي مشكلة، غير أنه تبين أن إيجاد حل للمعادلات الجبرية التربيعية دفع علماء الرياضيات في القرن السابع عشر إلى اقتراح تعريف عدد تخيلي هو $i = \sqrt{-1}$ ، يُسمى **الوحدة التخيلية**، يحقق المعادلة $i^2 + 1 = 0$ ، فيكون حلًا للمعادلة $x^2 + 1 = 0$.

لاحظ أن قوى العدد i تتبع نمطًا محددًا نظرًا لكون $i^2 = -1$. مثلًا

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \times i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \times -1 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \times i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \times -1 = -1$$

إذن، نستنتج أن

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

حيث $k \in \mathbb{N}$.

على هذا النحو نشأت الأعداد $i\sqrt{a} = \sqrt{a}i$ لكل عدد سالب a ، ونشأ كذلك نظام عددي جديد أوسع من الأعداد الحقيقية هو نظام **الأعداد المركبة** التي هي عبارة عن جمع عدد حقيقي a مع عدد حقيقي آخر b مضروبًا في الوحدة التخيلية i : $a + bi$.

فيما يلي أمثلة على بعض الأعداد المركبة المتضمنة في هذا النظام العددي الجديد:

$$-6, 5i, \sqrt{5}, -7i, \frac{5}{2}i + \frac{2}{3}, -2 + 3i, \frac{1}{3} + \frac{4}{5}i$$

في العدد المركب $-2 + 3i$ قيمة الجزء الحقيقي هي -2 وقيمة الجزء التخيلي هي 3

أما في العدد المركب $5i$ ، فقيمة الجزء الحقيقي هي 0 وقيمة الجزء التخيلي هي 5

أما في العدد المركب -6 ، فقيمة الجزء الحقيقي هي -6 وقيمة الجزء التخيلي هي 0

مما سبق نستنتج أن أي عدد حقيقي a هو، في الواقع، عدد مركب لأن بالإمكان كتابته في الصورة $a + 0i$. إذن، كل الأعداد الحقيقية هي أعداد مركبة.

من جهة أخرى، إذا كان $a = 0$ و $b \neq 0$ ، يصبح العدد المركب $bi = a + bi$ ، ويُسمى

العدد التخيلي. مثلًا، $5i$ و $-7i$ عدنان تخيليان.

ما ستتعلمه

- الأعداد المركبة
- العمليات على الأعداد المركبة
- مرافق العدد المركب

...ولماذا

لا يمكننا دراسة أصفار الدوال كثيرات الحدود إلا من خلال تعريف الأعداد المركبة ودراستها. كذلك بينت الأبحاث المتتالية أهمية الأعداد المركبة في مواضيع شتى أهمها مجال الهندسة الكهربائية وتحديداً في التيارات المتناوبة.

معايير الدرس

12A.1.1

12A.1.2

12A.1.4

المصطلحات

imaginary unit	• الوحدة التخيلية
complex number	• عدد مركب
imaginary number	• عدد تخيلي
additive identity	• المحايد الجمعي
additive inverse	• النظير الجمعي
complex conjugate	• مرافق عدد مركب
multiplicative Identity	• المحايد الضربي
multiplicative inverse	• النظير الضربي

ملاحظة تاريخية

خرج رينيه ديكارت (1596-1650) بمصطلح "تخيلي" في وقت كان يعتبر فيه الحل السالب لمعادلة خاطئًا. أعطانا كارل غاوس (1777-1855) مصطلح "العدد التخيلي" والرمز i للإشارة إلى $\sqrt{-1}$. توجد اليوم تطبيقات للأعداد المركبة في الكثير من المجالات.

الأعداد المركبة

العدد المركب هو أي عدد يُكتب في الصورة

$$a + bi$$

حيث a و b عدنان حقيقيان و $i = \sqrt{-1}$. العدد a يُسمى **الجزء الحقيقي** والعدد b يُسمى **الجزء التخيلي** للعدد المركب، والصيغة $a + bi$ هي **الصيغة القياسية** لهذا العدد.

يكون العدنان المركبان **متساويين** إذا تساوى الجزآن الحقيقيان والجزآن التخيليان فيهما.

مثلاً، $x + yi = 2 + 5i$ إذا فقط إذا كان $x = 2$ و $y = 5$.

مثال 1 كتابة الأعداد المركبة

A. اكتب المقدار $\sqrt{-49}$ في صورة bi ، حيث b عدد حقيقي.

B. أوجد العددين الحقيقيين x و y اللذين يحققان المعادلة $4 + 5i = 2x - yi$

الحل

$$A. \sqrt{-49} = \sqrt{(-1) \times 49}$$

$$= \sqrt{(-1)} \sqrt{49}$$

$$= 7i$$

حلل المجذور وافصل إشارة السالب

افصل الجذر $\sqrt{-1}$

عوّض قيمة $i = \sqrt{-1}$

إذن، كتابة المقدار $\sqrt{-49}$ في صورة bi هي $7i$

B. حسب القاعدة، إذا كان عدنان مركبان متساويين، تساوى الجزآن الحقيقيان والتخيليان للعددين.

بما أن، $4 + 5i = 2x - yi$ فإن

$$2x = 4 \text{ و } 5i = -yi$$

إذن، $x = 2$ و $y = -5$.

حاول أن تحل التمرينين 1 و 7

العمليات على الأعداد المركبة

لجمع أو طرح عددين مركبين يكفي أن نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معاً، والجزأين التخيليين معاً، كما هو مبين في التعريف التالي.

جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان $a + bi$ و $c + di$ عددين مركبين، فإن

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

الجمع:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

الطرح:

المحايد الجمعي في الأعداد المركبة هو $0 = 0 + 0i$ ، كما أن **النظير الجمعي** للعدد المركب $a + bi$ هو العدد المركب $-a - bi$ ، وذلك لأن

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0$$

نُستعمل بعض خواص الجمع والضرب، كخاصيتي **التجميع والإبدال**، في الأعداد المركبة بنفس طريقة استعمالها في الأعداد الحقيقية.

مثال 2 جمع وطرح الأعداد المركبة

أوجد الناتج في كل ما يلي.

A. $(7 - 3i) + (4 + 5i)$

B. $(2 - i) - (8 + 3i)$

الحل

A. $(7 - 3i) + (4 + 5i) = (7 + 4) + (-3 + 5)i$

اجمع الجزأين الحقيقيين ثم اجمع

الجزأين التخيليين

$$= 11 + 2i$$

اكتب المقدار في الصورة $a + bi$

$$\text{إذن، } (7 - 3i) + (4 + 5i) = 11 + 2i$$

B. $(2 - i) - (8 + 3i)$

$$= (2 - i) + (-8 - 3i)$$

وَرَّع إشارة السالب على العدد المركب

$$= [2 + (-8)] + [-1 + (-3)]i$$

اجمع الجزأين الحقيقيين ثم اجمع

الجزأين التخيليين

$$= -6 - 4i$$

اكتب المقدار في الصورة $a + bi$

$$\text{إذن، } (2 - i) - (8 + 3i) = -6 - 4i$$

حاول أن تحل التمرينين 12 و 13

استعمال الحاسبة

اختر في حاسبتك وضعية CMPLX في الحاسبة البيانية أدخل العددين المركبين وبينهما العملية المطلوبة. يمكنك إيجاد الرمز i في بعض الحاسبات باختيار SHIFT ثم ENG.

أما عند ضرب العددين المركبين، فيمكننا استعمال $i^2 = -1$ ، وتُستعمل خاصية التوزيع في ضرب الأعداد المركبة كما لو أنها أعداد حقيقية، وذلك كما يلي.

مثال 3 ضرب عددين مركبين

أوجد الناتج في كل ما يلي.

A. $-2.5i(8 - 9i)$

B. $(2 + 3i) \cdot (5 - i)$

الحل

A. $-2.5i(8 - 9i) = -2.5i(8) - 2.5i(-9i)$

$$= -20i + 22.5i^2$$

$$= -20i + 22.5(-1)$$

$$= -22.5 - 20i$$

استعمل خاصية التوزيع

اضرب

استعمل $i^2 = -1$ لتبسيط المقدار

اكتب المقدار في الصورة $a + bi$

إذن، ناتج الضرب هو $-22.5 - 20i$

B. $(2 + 3i) \cdot (5 - i) = 2(5 - i) + 3i(5 - i)$

$$= 10 - 2i + 15i - 3i^2$$

$$= 10 + 13i - 3(-1)$$

$$= 13 + 13i$$

استعمل خاصية التوزيع

استعمل خاصية التوزيع

استعمل $i^2 = -1$

إذن، ناتج الضرب هو $13 + 13i$

حاول أن تحل التمرينين 18 و 23

تتوفر في بعض الحاسبات خاصية إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. يبين الشكل 7.1.2 العمليات الحسابية المطلوبة في المثالين 2 و 3

ضرب الأعداد المركبة

يمكننا تعريف ضرب عددين مركبين بشكل عام كما يلي:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad)i + (bc)i + bdi^2$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$(7-3i)+(4+5i)$	$11+2i$
$(2-i)-(8+3i)$	$-6-4i$
$(2+3i) \cdot (5-i)$	$13+13i$

الشكل 7.1.2 العمليات على الأعداد المركبة باستعمال الحاسبة

يمكننا إيجاد القوى الصحيحة الموجبة للأعداد المركبة من خلال تطبيق خواص الإبدال والتجميع والتوزيع في العمليات على الأعداد المركبة، بالإضافة إلى المعادلة $i^2 = -1$.

مثال 4 إيجاد قوى الأعداد المركبة

إذا كان $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أوجد قيمة كل من z^2 و z^3 .

الحل

$$z^2 = z \cdot z$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}(-1)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استعمل خاصية التوزيع

استعمل $i^2 = -1$ لتبسيط المقدار

اكتب المقدار في الصورة $a + bi$

$$z^3 = z^2 \cdot z$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2$$

$$= -\frac{1}{4} + 0i + \frac{3}{4}(-1)$$

$$= -1$$

استعمل خاصية التوزيع

اجمع الحدود المتشابهة و عوض $i^2 = -1$

يؤكد الشكل 7.1.4 صحة هذه النتيجة رقميًا.

$$\begin{array}{r} (1/2+i\sqrt{3}/2)^2 \\ - .5+.8660254038i \\ (1/2+i\sqrt{3}/2)^3 \\ -1 \end{array}$$

الشكل 7.1.4 يبين الشكل تربيع

وتكعيب عدد مركب باستعمال الحاسبة.

حاول أن تحل التمرين 26

نلاحظ أن **المحايد الضربي** في الأعداد المركبة هو $1 = 1 + 0i$ ، أما **النظير الضربي** للعدد

المركب $z = a + bi \neq 0$ فهو

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$$

$$= \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi}$$

$$= \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

عدد حقيقي، وبالتالي هذه هي الصيغة القياسية.

مثلاً، ليكن العدد المركب $z = 2 + 3i$. النظير الضربي للعدد z هو

$$z^{-1} = \frac{1}{2 + 3i} = \frac{1}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

للتذكير

متطابقة الفرق بين مربعين

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

ومنه

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

وهو عدد حقيقي.

مرافق العدد المركب

إن ناتج ضرب العدد المركب $a + bi$ في العدد $a - bi$ هو عدد حقيقي موجب.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

يُسمى العدد $a - bi$ **مرافق العدد المركب** $a + bi$ ، ويبيّن التعريف التالي العلاقة بين العددين $a + bi$ و $a - bi$.

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

للعددين المركبين المرافقين جزآن حقيقيان متساويان وجزآن تخيليان متعاكسان يشكل ناتج ضربهما عددًا حقيقيًا هو $a^2 + b^2$.

فيما يلي بعض خواص مرافق العدد المركب.

خصائص مرافق العدد المركب

لتكن z_1 و z_2 و z أعدادًا مركبة، إذن

1. $\overline{\bar{z}} = z$ أي أن المرافق لمرافق العدد المركب هو العدد المركب نفسه.
2. $\bar{\bar{z}} = z$ إذا وفقط إذا كان z عددًا حقيقيًا.
3. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ أي أن مرافق المجموع هو مجموع المرافقات.
4. $\overline{(-z)} = -\bar{z}$ أي أن مرافق النظير الجمعي للعدد المركب هو النظير الجمعي لمرافق العدد المركب.
5. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ أي أن مرافق ناتج الضرب هو ناتج ضرب المرافقات.
6. $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$ إذا كان $z \neq 0$. أي أن مرافق النظير الضربي للعدد المركب هو النظير الضربي لمرافق العدد المركب.

فيما يلي برهان لبعض هذه الخصائص.

$$1. \overline{(\overline{a + bi})} = \overline{(a - bi)} = a - (-bi) = a + bi$$

$$2. a - bi = a + bi \implies 2bi = 0 \implies b = 0$$

3. نستعمل الحساب المباشر:

ليكن $z_2 = a_2 + b_2i$ و $z_1 = a_1 + b_1i$ إذن:

$$\begin{aligned} \overline{(z_1 + z_2)} &= \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{aligned}$$

يمكننا، بشكل عام، تحويل أي كسر بسطه ومقامه عدداً مركبان $\frac{z_1}{z_2}$ إلى الصيغة القياسية للأعداد المركبة من خلال ضرب البسط والمقام في العدد المرافق للعدد z_2 .

على سبيل المثال:

$$\frac{7 - 3i}{5 + 2i} = \frac{7 - 3i}{5 + 2i} \times \frac{5 - 2i}{5 - 2i} = \frac{29 - 29i}{29} = 1 - i$$

مثال 5 قسمة الأعداد المركبة

اكتب الأعداد المركبة التالية في الصيغة القياسية.

A. $\frac{2}{3-i}$

B. $\frac{5+i}{2-3i}$

الحل

عندما يكون المقام عدد تخيلي، يمكنك إيجاد عدد مركب بالصيغة القياسية بكافء الكسر المعطى وذلك من خلال ضرب البسط والمقام بنفس العدد المركب المرافق للمقام.

A. $\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$ استعمل مرافق العدد المركب في المقام للضرب بقيمة 1
 $= \frac{6+2i}{3^2+1^2}$ استعمل خاصية التوزيع
 $= \frac{6}{10} + \frac{2}{10}i$ بسط وافصل بين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي
 $= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ بسط

B. $\frac{5+i}{2-3i} = \frac{5+i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i}$ استعمل مرافق العدد المركب في المقام للضرب بقيمة 1
 $= \frac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$ استعمل خاصية التوزيع
 $= \frac{7+17i}{13}$ استعمل $i^2 = -1$ لتبسيط المقدار
 $= \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$ افصل بين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي

حاول أن تحل التمرين 32

تذكر أن حل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c$ ، حيث a و b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ ، يُعطى من خلال القاعدة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المجذور في هذه القاعدة هو **المميز** الذي يبين ما إذا كان للمعادلة حل ضمن الأعداد الحقيقية.

إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ ، فإن بالإمكان إيجاد جذر للمميز ضمن الأعداد المركبة، وهو ما يؤدي إلى إيجاد حل للمعادلة نلخصه كما يلي:

مميز المعادلة التربيعية

لتكن $ax^2 + bx + c = 0$ معادلة تربيعية، حيث a و b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

• إذا كانت $b^2 - 4ac > 0$ ، يكون هناك حلان حقيقيان مختلفان للمعادلة وهما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• إذا كانت $b^2 - 4ac = 0$ ، يكون هناك حل حقيقي واحد (مكرر) للمعادلة، $x = \frac{-b}{2a}$.

• إذا كانت $b^2 - 4ac < 0$ ، يكون هناك حلان مركبان مختلفان للمعادلة، الواحد منهما

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
 مرافق للآخر وهما:

مثال 6 حل معادلة تربيعية في مجموعة الأعداد المركبة

أوجد حل المعادلة في كل ما يلي.

A. $x^2 + 4 = 0$.

B. $x^2 + x + 1 = 0$.

الحل

اكتب المعادلة الأصلية

أعد كتابتها على شكل الفرق بين مربعين

استعمل متطابقة الفرق بين مربعين

اكتب كل عامل يساوي الصفر

حل لإيجاد x إذن، حلول المعادلة هي $x = -2i$ و $x = 2i$.B. استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية، حيث $a = b = c = 1$ ، لتحصل على

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-(1) \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

إذن، الحلان هما $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ و $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ، وهما عدداً مركبان كل منهما مرافق للآخر.

تحقق عددياً

عوض الحل الأول $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ في المعادلة الأساسية لتحصل على

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 1 = 0 \end{aligned}$$

يمكنك التحقق من الحل الثاني بنفس الطريقة.

حاول أن تحل التمرينين 38 و 44

7.1 مراجعة سريعة

في التمارين 4-1، اجمع أو اطرح ثم بشط.

في التمارين 5-8، اضرب وبشط. تأكد من إجاباتك بالنظر إلى الصيغة الأساسية.

5. $(x - 3)(x + 2)$

6. $(2x - 1)(x + 3)$

7. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

8. $(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$

1. $(3x + 3) + (-x + 6)$

2. $(3y - x) + (2x - y)$

3. $(2a + 4d) - (a + 2d)$

4. $(6z - 1) - (z + 3)$

الدرس 7.1 التمارين

في التمارين 1-5، اكتب المقدار في الصيغة bi ، حيث b عدد حقيقي.

1. $\sqrt{-16}$

2. $\sqrt{-25}$

3. $\sqrt{-3}$

4. $\sqrt{-13}$

5. $\sqrt{-7}$

في التمارين 6-9، أوجد العددين الحقيقيين x و y اللذين يحققان المعادلة المعطاة.

6. $2 + 3i = x + yi$

7. $3 + yi = x - 7i$

8. $x - 4i = 8 + yi$

9. $x + yi = 1$

في التمارين 10-17، اكتب المجموع أو الفرق في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الحاسبة.

10. $(2 - 3i) + (6 + 5i)$ 11. $(2 - 3i) + (3 - 4i)$

12. $(7 - 3i) + (6 - i)$ 13. $(2 + i) - (9i - 3)$

14. $(2 - i) + (3 - \sqrt{-3})$ 15. $(\sqrt{5} - 3i) + (-2 - \sqrt{-9})$

16. $(i^2 + 3) - (7 + i^3)$ 17. $(\sqrt{7} + i^2) - (6 - \sqrt{-81})$

في التمارين 18-23، اكتب ناتج الضرب في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الحاسبة.

18. $(2 + 3i)(2 - i)$ 19. $(2 - i)(1 + 3i)$

20. $(1 - 4i)(3 - 2i)$ 21. $(5i - 3)(2i + 1)$

22. $(7i - 3)(2 + 6i)$ 23. $(\sqrt{-4} + i)(6 - 5i)$

في التمارين 24-27، اكتب العدد المركب في الصيغة القياسية.

24. $(3 - 2i)^2$ 25. $(1 - i)^3$

26. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$ 27. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$

في التمارين 28-31، أوجد ناتج ضرب العدد المركب في مرافقه.

28. $2 - 3i$ 29. $5 - 6i$

30. $-3 + 4i$ 31. $-1 - \sqrt{2}i$

في التمارين 32-37، اكتب ناتج القسمة في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الحاسبة.

32. $\frac{1}{2 + i}$ 33. $\frac{i}{2 - i}$

34. $\frac{2 + i}{3i}$ 35. $\frac{(2 + i)^2(-i)}{1 + i}$

36. $\frac{(2 - i)(1 + 2i)}{5 + 2i}$ 37. $\frac{(1 - \sqrt{2}i)(1 + i)}{1 + \sqrt{2}i}$

في التمارين 38-47، حلّ المعادلة المعطاة في مجموعة الأعداد المركبة.

38. $x^2 + 81 = 0$ 39. $25x^2 + 9 = 0$

40. $x^2 = -16$ 41. $4 + 49y^2 = 0$

42. $y^2 + 1 = 0$ 43. $x^2 + \frac{1}{4} = 0$

44. $x^2 + 2x + 5 = 0$ 45. $3x^2 + x + 2 = 0$

46. $4x^2 - 6x + 5 = x + 1$ 47. $x^2 + x + 11 = 5x - 8$

في التمارين 48 و 49، أوجد قيمة كل من x و y .

48. $(5 - 2i) - 7 = x - (3 + yi)$

49. $(x + 6i) = (3 - i) + (4 - 2yi)$

50. ليكن $z = a + bi$. أوجد a و b إذا كان $(2 + 3i)z = 7 + i$.

51. اكتب العدد المركب z في الصورة $a + bi$ إذا كان

$$z = 3 + \frac{2i}{2 - \sqrt{2}i}$$

52. أوجد قيمتي العددين الحقيقيين x و y بحيث يكون

$$(x + iy)(4 - 7i) = 2i$$

53. أوجد العدد المركب z في الصورة $a + bi$ إذا كان

$$(z + 1)i = 3z - 2$$

استكشاف

60. عمل جماعي قوى i

- a. بسط الأعداد المركبة $i^8, i^7, \dots, i^2, i$ من خلال إيجاد قيمة كل عدد منها.
- b. بسط الأعداد المركبة $i^{-8}, i^{-7}, \dots, i^{-2}, i^{-1}$ من خلال إيجاد قيمة كل عدد منها.
- c. أوجد قيمة i^0 .

d. **الكتابة للتعلم** ناقش النتائج التي توصلت إليها في كل من a و b و c مع أفراد مجموعتك، ثم اكتب ملخصاً عن الأعداد الصحيحة التي تمثل القوى الصحيحة للعدد i .

61. **الكتابة للتعلم** وضح طبيعة التمثيل البياني للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث a و b و c أعداد حقيقية، علماً أن حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هو عدد مركب غير حقيقي.

توسيع الأفكار

62. أثبت أن ناتج طرح عدد مركب ومرافقه هو عدد مركب جزؤه الحقيقي 0.
63. أثبت أن ناتج ضرب عدد مركب في مرافقه هو عدد مركب جزؤه التخيلي 0.
64. أثبت أنه إذا كان $|z_1| = |z_2| = 1$ ، فإن $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ هو عدد حقيقي، مستعملًا أن العدد المركب المرافق لضرب (أو قسمة) عددين مركبين هو ضرب (أو قسمة) مرافقيهما المركبين.
65. **الكتابة للتعلم** وضح لماذا $-i$ هو حل للمعادلة $x^2 - ix + 2 = 0$ ، بينما i ليس حلًا لها.

54. أثبت الخصائص التالية من خصائص مرافق العدد المركب.

لتكن z_1, z_2, z أعداداً مركبة، إذن

a. $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

b. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ أي أن مرافق ناتج الضرب هو ناتج ضرب المرافقات.

c. $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$ ، إذا كان $z \neq 0$ ، أي أن مرافق النظير الضربي للعدد المركب هو النظير الضربي لمرافق العدد المركب.

55. a. أوجد $(1 + \sqrt{3}i)^3$.

b. أثبت أن $(1 + \sqrt{3}i)^{6n} = 8^{2n}$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

c. أوجد $(1 + \sqrt{3}i)^{48}$.

أسئلة اختبار معيارية

56. **صواب أم خطأ** لا يوجد عدد مركب z يحقق المعادلة $z = -\bar{z}$. وضح إجابتك.

57. **صواب أم خطأ** إذا كان i عددًا مركبًا،

فإن $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$. وضح إجابتك.

58. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية يمثل الصيغة القياسية للكسر $\frac{1}{i}$ ؟

- A. $1 + 0i$
B. $-1 + 0i$
C. $13 - 3i$
D. $-\frac{1}{i}$
E. $0 - i$

59. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية يمثل الصيغة القياسية لناتج الضرب $(2 + 3i)(2 - 3i)$ ؟

- A. $-5 + 12i$
B. $4 - 9i$
C. i
D. -5
E. $13 + 0i$

The Complex Plane

7.2 المستوى المركب

ما ستتعلمه

- تعريف المستوى المركب
- العمليات على الأعداد المركبة بيانيًا

... ولماذا

يمكننا في هذا الدرس إعادة تعريف الأعداد المركبة وصياغة العمليات عليها بطريقة بيانية، الأمر الذي يساعدنا لاحقًا على إيجاد الجذور النونية للأعداد المركبة.

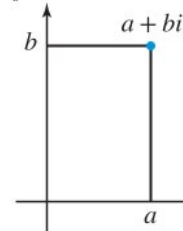
معياري الدرس

12A.1.3

المصطلحات

- المستوى المركب complex plane
- المحور الحقيقي real axis
- المحور التخيلي imaginary axis
- مقياس العدد المركب modulus of a complex number

المحور التخيلي i



الشكل 7.2.1 يبين الشكل تمثيل العدد $a + ib$ في المستوى المركب.

تعريف المستوى المركب

كما أن فهم التحليل الرياضي يعتمد على التمثيل البياني للدوال في المستوى الإحداثي المكوّن من محورين متعامدين، كذلك لا يمكن فهم الأعداد المركبة إلا من خلال تمثيلها بيانيًا، وهذا ممكن في مستوى ذي محورين، حيث يمكن إيجاد نقطة واحدة فقط في المستوى الإحداثي لتمثيل أي عدد مركب، تمامًا كما هو الحال بالنسبة للأعداد الحقيقية الممثلة على محور واحد.

هذا المستوى يُسمى **المستوى المركب**، وقد نشأت هذه الفكرة وتطورت من خلال أعمال كل من جاسبر ويسل (1745-1818) وجان روبرت أرغند (1768-1822) وكارل فريدريش غاوس (1777-1855). في المستوى المركب، الأعداد الحقيقية توضع على المحور الأفقي (**المحور الحقيقي**) والأعداد التخيلية توضع على المحور الرأسي (**المحور التخيلي**).

يمكن تسمية النقطة في المستوى المركب كما في المستوى xy من خلال الزوج المرتب (a, b) . في المستوى المركب يمكن أيضًا الإشارة إلى النقطة في الصورة $a + bi$.

إذن، يُمثّل العدد المركب $a + ib$ بالنقطة (a, b) (انظر الشكل 7.2.1).

مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة في المستوى المركب

A. مثّل العدد $5 - 3i$ في المستوى المركب.

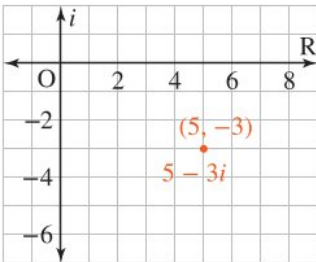
B. مثّل العددين $-6 + 2i$ و $-6 - 2i$ في المستوى المركب، وأوجد العلاقة بينهما.

الحل

A. النقطة $(5, -3)$ هي النقطة التي تمثّل

العدد المركب $5 - 3i$

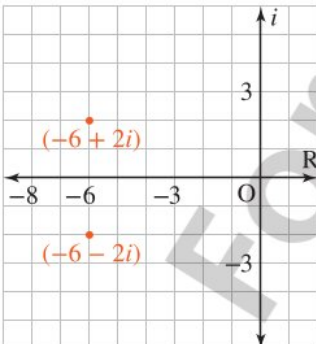
تقع الأعداد الحقيقية على المحور الحقيقي وتقع الأعداد التخيلية (كالعدد $-3i$) على المحور التخيلي.



B. العدد $-6 + 2i$ تمثله النقطة $(-6, 2)$ ،

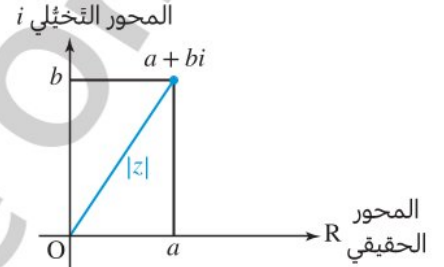
أما العدد $-6 - 2i$ فتمثله النقطة $(-6, -2)$.

بشكل عام، إذا كان كل من العددين المركبان مرافق للآخر، فإنهما يمثّلان بنقطتين كل منهما هي انعكاس للآخرى حول المحور الحقيقي R.



ملاحظة

كما تعطي القيمة المطلقة لعدد حقيقي إزاحته عن الصفر على خط الأعداد، فإن مقياس العدد المركب يعطي إزاحته عن نقطة الأصل في المستوى المركب.



الشكل 7.2.2 يمثل $|z|$ المسافة من نقطة الأصل إلى النقطة التي تمثل z .

مقياس العدد المركب (قيمته المطلقة)

مقياس العدد المركب $z = a + bi$ هو

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

يمثل مقياس العدد المركب $|z| = |a + bi|$ في المستوى المركب المسافة بين النقطة التي تمثل $a + bi$ ونقطة الأصل (انظر الشكل 7.2.2).

مثال 2 إيجاد مقياس عدد مركب

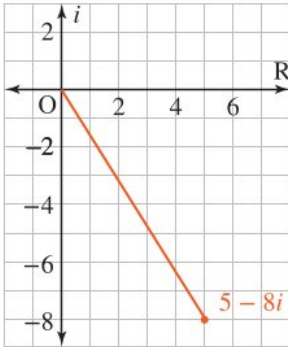
أوجد مقياس العدد المركب $5 - 8i$

الحل

مقياس العدد المركب $5 - 8i$ هو:

$$|5 - 8i| = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$$

وهو يمثل المسافة بين النقطتين O و $(5, -8)$ في المستوى المركب.



حاول أن تحل التمرين 2

من السهل ملاحظة أن $|\bar{z}| = |z|$ لأنه لأي عدد مركب $z = a + bi$ يكون $\bar{z} = a - bi$:

$$|\bar{z}| = |a - bi| = |a + (-b)i| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

من جهة أخرى نجد أن $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

بذلك يمكننا أن نبين الخواص التالية لأي عددين مركبين z_1 و z_2 :

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})$$

$$= (z_1 z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2})$$

$$= (z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2})$$

$$= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

نستعمل خاصية المرافق

نستعمل خاصية التجميع

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ وعليه يكون}$$

إذا كان $z_2 \neq 0$ ، نضرب ونقسم على نفس القيمة:

$$|z_1| = \left| z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_2| \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$$

وبالتالي

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

نستخلص مما سبق الخواص التالية:

خواص مقياس العدد المركب

إذا كان z_1 و z_2 عددين مركبين، فإن

$$1. |z_1| = |\overline{z_1}|$$

$$2. z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$$

$$3. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$4. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ حيث } (z_2 \neq 0)$$

مثال 3 إيجاد مقياس ضرب الأعداد المركبة

أوجد المقياس $|(3 + 4i)(5 + 12i)|$ بطريقتين.

الحل

الطريقة 1

$$\begin{aligned} |(3 + 4i)(5 + 12i)| &= |(3 + 4i)| |(5 + 12i)| \\ &= \sqrt{9 + 16} \times \sqrt{25 + 144} \\ &= 5 \times 13 \\ &= 65 \end{aligned}$$

الطريقة 2

$$\begin{aligned}
 |(3 + 4i)(5 + 12i)| &= |-33 + 56i| \\
 &= \sqrt{(-33)^2 + 56^2} \\
 &= \sqrt{4255} \\
 &= 65
 \end{aligned}$$

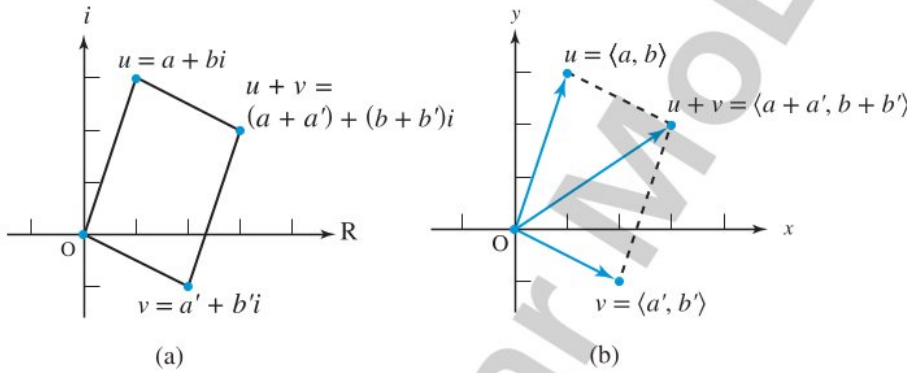
حاول أن تحل التمرين 3

العمليات على الأعداد المركبة بيانيًا

ملاحظة

إن التمثيل البياني لمجموع أي عددين مركبين هو نفسه التمثيل البياني لمتجه المجموع.

إذا كان لدينا عددين مركبان $u = a + bi$ و $v = a' + b'i$ وأردنا إيجاد مجموعهما بطريقة بيانية، علينا أن ندرك، من خلال ما تعلمناه في المتجهات، أن النقطة $\langle a + a', b + b' \rangle$ التي تمثل $u + v$ هي التي تكمل متوازي الأضلاع مع النقاط $\langle a, b \rangle$ التي تمثل u و $\langle a', b' \rangle$ التي تمثل v و نقطة الأصل O (انظر الشكل 7.2.3).



الشكل 7.2.3 يبين الشكل كيف أن التمثيل البياني لمجموع أي عددين مركبين هو نفسه التمثيل البياني لمتجه المجموع.

مثال 4 جمع وطرح الأعداد المركبة بيانيًا

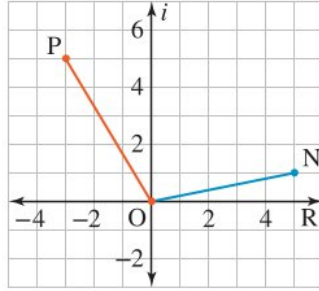
A. أوجد المجموع $(-3 + 5i) + (5 + i)$ بيانيًا باستعمال المستوى المركب.

B. أوجد الفرق $(-3 + 5i) - (5 + i)$ بيانيًا باستعمال المستوى المركب.

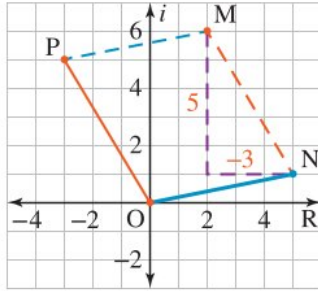
(تابع)

الحل

A. عَيِّن أولاً النقطة $P(-3, 5)$ التي تمثل العدد $-3 + 5i$ والنقطة $N(5, 1)$ التي تمثل العدد $5 + i$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين OP و ON .



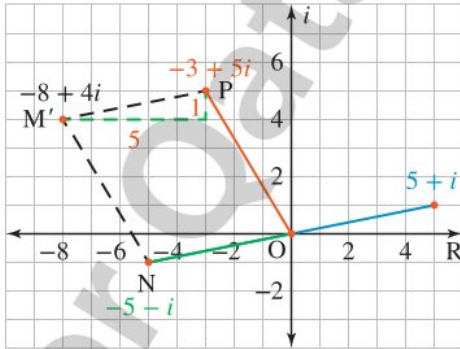
ارسم النقطة M بحيث يشكل $OPMN$ متوازي أضلاع. النقطة M هي التي ستمثل $(-3 + 5i) + (5 + i)$ ، إذن $M(-3 + 5, 5 + 1)$ أي $M(2, 6)$



يمكنك إيجاد النقطة M بإزاحة النقطة N أفقيًا بمقدار 3 وحدات إلى اليسار ثم 5 وحدات إلى الأعلى.

B. اكتب أولاً النظير الجمعي للعدد $5 + i$: $-(5 + i) = -5 - i$

ثم مثل $(-3 + 5i) - (5 + i) = (-3 + 5i) + (-5 - i)$ بيانيًا.



ثم نجمع العددين بيانيًا كما فعلنا في الفرع A، فنعيّن النقطة $P(-3, 5)$ التي تمثل $-3 + 5i$ والنقطة $N(-5, -1)$ التي تمثل $-5 - i$ ، ثم نكمل متوازي الأضلاع لنحصل على النقطة $M'(-8, 4)$ التي تمثل ناتج طرح هذين العددين.

مساعدة دراسية

تمامًا كما في الأعداد الحقيقية، تماثل عملية الجمع عملية طرح النظير الجمعي. لذا، عند طرح عددين مركبين بيانيًا، نرسم النظير الجمعي للقيمة المطروحة ثم نجمع.

يمكننا استعمال مفهوم مقياس العدد المركب لإيجاد المسافة بين عددين مركبين باعتبارها المسافة بين النقطتين اللتين تمثلانها في المستوى المركب.

بالفعل، إذا كان $z = a + bi$ و $z' = a' + b'i$ ، فإن المسافة بين النقطة $A(a, b)$ التي تمثل z والنقطة $A'(a', b')$ التي تمثل z' هي

$$d = \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2}$$

$$d = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}$$

أي أن المسافة بين A و A' هي بالضبط مقياس العدد $z - z'$ أي $|z - z'|$.

مثال 5 إيجاد المسافة بين عددين مركبين

أوجد المسافة بين النقطة التي تمثل العدد $r = -7 + 3i$ والنقطة التي تمثل العدد $s = 2 - 8i$.

الحل

المسافة بين النقطتين r و s هي ذاتها مقدار $r - s$

$$|r - s| = |(-7 + 3i) - (2 - 8i)|$$

$$= |-9 + 11i|$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (11)^2}$$

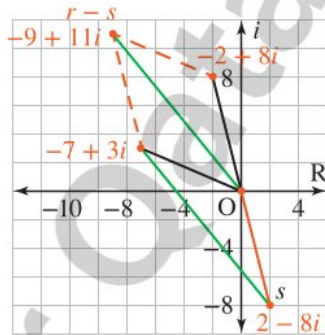
$$= \sqrt{81 + 121}$$

$$= \sqrt{202}$$

اجمع الجزأين الحقيقيين ثم الجزأين التخيليين

استعمل قاعدة حساب مقدار العدد المركب

احسب تربيع الأعداد



حاول أن تحل التمرين 5

مراجعة سريعة 7.2

في التمارين 1-3، أوجد $r + s$ من دون استعمال الحاسبة.

1. $r = -1 + 2i, s = 2 + 5i$

2. $r = 3 - 5i, s = -5 + 3i$

3. $r = -4 + 2i, s = 4 - 2i$

في التمارين 4-6، أوجد $r - s$ من دون استعمال الحاسبة.

4. $r = -1 + 5i, s = 1 + 4i$

5. $r = -2 + i, s = -2 + i$

6. $r = -3 + 10i, s = 3 + 10i$

في التمارين 7-9، أوجد المسافة بين النقطتين A و B.

7. A(1, 0), B(1, 2)

8. A(2, 2), B(2, 3)

9. A(1, 2), B(2, 1)

التمارين 7.2

1. a. ما إحداثيا النقطة التي تمثل العدد $-3 + 4i$ في المستوى المركب؟

b. مثل العدد المركب $4 + i$ والمرافق له بيانًا.

2. أوجد مقياس كل من العددين التاليين.

a. $-5 - 12i$

b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$

3. أوجد القيم التالية.

a. مقياس $3 + i$

b. مقياس $-5 - 4i$

c. قيمة $|(3 + i)(-5 - 4i)|$ بطريقتين مختلفتين.

4. استعمل متوازي أضلاع لإيجاد المجموع أو الفرق في ما يلي.

a. $(-2 + i) + (-5 - 3i)$

b. $(-8 + 3i) - (-2 - 3i)$

5. أوجد المسافة بين النقطة التي تمثل العدد r والنقطة التي تمثل العدد s .

a. $r = 4 - 3i, s = 10 + 2i$

b. $r = -3 - i, s = -5 - 4i$

في التمرينين 6 و 7، اكتب الزوج المرتب الذي يمثل العدد المركب.

6. $14 - 7i$

7. $-6 + 2i$

في التمرينين 8 و 9، مثل النقاط الأربع بيانًا في نفس المستوى المركب.

8. $1 + 2i, 3 - i, -2 + 2i, i$

9. $2 - 3i, 1 + i, 3, -2 - i$

في التمرينين 10 و 11، أوجد متوسط العددين المركبين. (تذكر أن متوسط عددين a و b هو $\frac{a+b}{2}$).

10. $8 + i, 5 - 6i$

11. $-2 + 3i, -7 - 4i$

12. أوجد النقطة S التي تكمل متوازي الأضلاع PTSR الذي تمثل النقاط P(0, 0) و R(-4, -5) و T(8, -1) رؤوسه الثلاثة الأخرى.

في التمرينين 13 و 14 مثل العدد المركب والمرافق له بيانًا.

13. $9 + i$

14. $-3 + 2i$

أسئلة اختبار معيارية

24. صواب أم خطأ وجد عادل أن مرافق العدد المركب $7 + 3i$ هو العدد المركب $-7 - 3i$ ، بّرر إجابتك.

25. صواب أم خطأ يقول مالك إن بالإمكان إيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين اللتين تمثلان العددين المركبين $5 + 8i$ و $4 - 4i$ بالطريقة المبينة أدناه. بّرر إجابتك.

$$\begin{aligned} M &= \frac{(5 + 8i) + (4 - 4i)}{2} \\ &= \frac{(5 + 4) + (8 - 4)i}{2} \\ &= \frac{9 + 4i}{2} \\ &= \frac{13i}{2} = 6.5i \end{aligned}$$

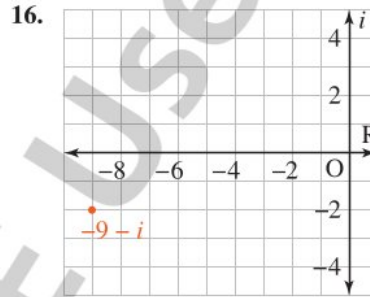
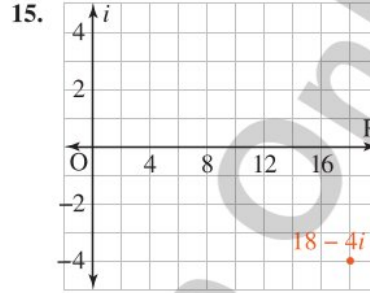
26. اختيار من متعدد أي الخيارات التالية يمثل مقياس العدد المركب $1 + 8i$ ؟

- A. $\sqrt{63}$
- B. 8
- C. $\sqrt{65}$
- D. $\sqrt{66}$
- E. 9

27. اختيار من متعدد أي الخيارات التالية يمثل نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين اللتين تمثلان العددين المركبين $7 - 9i$ و $-6 - 8i$ ؟

- A. $-0.5 - 8.5i$
- B. $-0.5 + 8.5i$
- C. $0.5 - 8.5i$
- D. $0.5 + 8.5i$
- E. $8.5 + 0.5i$

في التمرينين 15 و 16، أوجد مقياس العدد المركب.



في التمارين 17-20، استعمل متوازي أضلاع لتمثيل العملية الحسابية.

17. اجمع $7 - 4i$ و $11 + 6i$

18. اجمع $4 - 3i$ و $7 + 5i$

19. اطرح $8 + 3i$ من $15 + i$

20. اطرح $3 - 9i$ من $10 - 7i$

في التمارين 21-23، أوجد المسافة بين النقطة التي تمثل العدد r والنقطة التي تمثل العدد s .

21. $r = 7 - 10i$, $s = 4 + 6i$

22. $r = -2 + i$, $s = -12 + 2i$

23. $r = 1 + 4i$, $s = -5 - 7i$

توسيع الأفكار

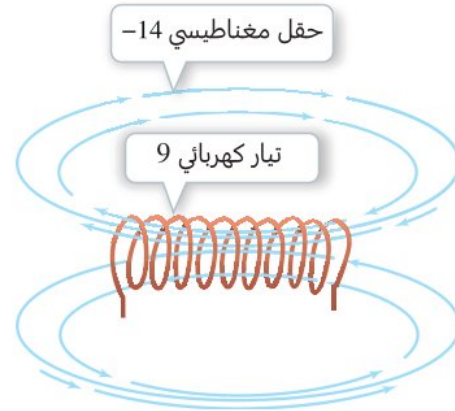
استكشاف

31. ليكن $z = 2 + i$ وليكن P النقطة التي تمثلها في المستوى المركب. أوجد العدد المركب الذي تمثلها النقطة Q إذا كان $OQ = OP$ وكان $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ متعامدين.

28. مجموعة "ماندليبروت" يبدأ بعدد مركب c . أوجد تربيعه وأضفه إلى العدد c لتحصل على عدد مركب جديد. ثم أوجد تربيع العدد المركب الجديد وأضف إليه c من جديد. استمر على هذا المنوال. إذا ظل مقياس العدد الجديد أصغر من 2 مع استمرار العملية، فإن العدد c الذي اخترته ينتمي إلى مجموعة نقاط تسمى مجموعة "ماندليبروت". ينتمي العددان $1 + \frac{1}{8}i$ و $\frac{1}{8} - \frac{1}{4}i$ إلى مجموعة "ماندليبروت". أوجد المسافة بين النقطتين اللتين تمثلان هذين العددين.

29. في الكهرباء تستعمل دوائر التيار المتناوب AC الأعداد المركبة لتمثيل المقاومة الكهربائية (impedance) بالوحدة ohm. لإيجاد المقاومة الكلية في دائرة كهربائية، يجب إيجاد مجموع المقاومات في كل جزء من الدائرة. دائرة كهربائية تتضمن المقاومتين الجزائيتين $5 - 2.2i$ و $4.2 + 3i$ ، أوجد المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية.

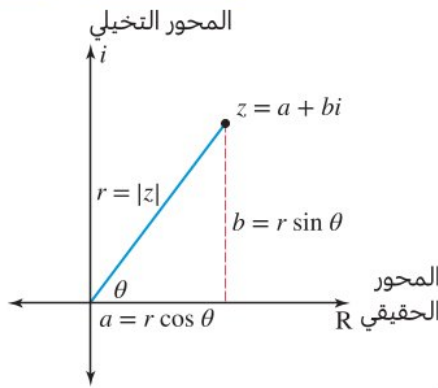
30. الحقل الكهرومغناطيسي يستعمل عدد مركب لتمثيل حقل كهرومغناطيسي. يمثل الجزآن الحقيقي والتخيلي للعدد المركب المكوّنين الكهربائي والمغناطيسي (بالترتيب) الناتجين عن حركة شحن كهربائي أو تيار كهربائي. أوجد الزوج المرتب في المستوى المركب الذي يمثل الحقل الكهرومغناطيسي المبين في الشكل أدناه.



7.3 الصورة القطبية للأعداد المركبة The Polar Form of Complex Numbers

الصورة القطبية للعدد المركب

يبين الشكل 7.3.1 التمثيل البياني للعدد $z = a + bi$ في المستوى المركب. المسافة r من النقطة التي تمثل z إلى نقطة الأصل هي مقياس العدد z . إذا عرّفنا **السعة** θ للعدد z والتي تقاس باتجاه عكس عقارب الساعة انطلاقًا من الاتجاه الموجب للمحور الحقيقي R ، كما فعلنا بالنسبة للمتجه، نحصل على $a = r \cos \theta$ و $b = r \sin \theta$. عندما نعوّض a و b يصبح العدد z على الشكل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ وهو ما يُسمى **الصورة القطبية** (أو **الصورة المثلثية**) للعدد المركب z .



الشكل 7.3.1 يبين الشكل الجزأين الحقيقي والتخيلي في الصورة القطبية للعدد المركب

الصورة القطبية للعدد المركب

الصورة القطبية للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$$

حيث $a = r \cos \theta$ و $b = r \sin \theta$ و $\tan \theta = \frac{b}{a}$ و $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

العدد r هو **المقياس** للعدد z ، و θ هي **سعة** العدد z .

بما أن كل الزوايا المتطابقة مع θ تصلح أن تكون سعة للعدد المركب z ، فهذا يعني أن أي عدد مركب يمكن أن تكون له صور قطبية بعدد الزوايا المتطابقة. لذا يمكننا أن نختار دائمًا الزاوية θ بحيث تحقق $0 \leq \theta < 2\pi$

مثال 1 إيجاد الصورة القطبية من الصورة القياسية وبالعكس

A. أوجد الصورة القطبية للعدد المركب في كل مما يلي.

1. $1 - \sqrt{3}i$

2. $-3 - 4i$

B. اكتب العدد $5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ بالصورة القياسية.

(تابع)

ما ستتعلمه

- الصورة القطبية للعدد المركب
- العمليات على الأعداد المركبة في الصورة القطبية

ولماذا...

تمكن الصورة القطبية من امتلاك مزيد من التقنيات التي تُستعمل في حل معادلات في الصورة $z^n = c$ حيث n عدد صحيح موجب و c و z أعداد مركبة.

معايير الدرس

12A.1.5

12A.1.7

المصطلحات

- الصورة القطبية
- الصورة المثلثية
- السعة
- polar form
- trigonometric form
- argument

ملاحظة

كما تدل إشارة العدد الحقيقي (سالب أو موجب) على اتجاهه بالنسبة للصفر على خط الأعداد، فإن سعة العدد المركب تدل على اتجاهه بالنسبة لنقطة الأصل في المستوى المركب.

الصورة القطبية

ماذا يعني بالرمز $\operatorname{cis} \theta$ ؟

نجد الصورة القطبية (أو المثلثية) في الكثير من النصوص العلمية حتى استُخدمت أن يكون لها رمز مختصر يشير إليها. غالبًا ما نختصر المقدار $\cos \theta + i \sin \theta$ بالعبارة " $\operatorname{cis} \theta$ ". لذا، يصبح التعبير عن العدد المركب على الشكل $z = r \operatorname{cis} \theta$. بين العالم "ليونهارت أويلر" أن $re^{i\theta} = r \operatorname{cis} \theta$ ، مما أعطى النسخة الأسية للصورة القطبية.

الحل

A. لتحويل العدد المركب من الصورة القياسية إلى القطبية أوجد المقياس والسعة للعدد المركب:

$$\begin{aligned} 1. r &= |1 - \sqrt{3}i| \\ &= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

أوجد قياس الزاوية المرجعية θ' للزاوية θ التي تمثل سعة العدد المركب

$$\tan \theta' = \left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{-\sqrt{3}}{1} \right| = \sqrt{3}$$

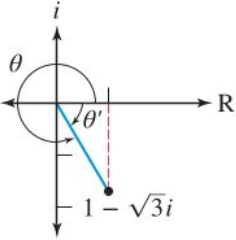
$$\theta' = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

بما أن $a > 0$ و $b < 0$ فإن ضلع الانتهاء

للزاوية θ يقع في الربع الرابع.

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{إذن، } 1 - \sqrt{3}i = 2 \cos \frac{5\pi}{3} + 2i \sin \frac{5\pi}{3}$$



$$\begin{aligned} 2. r &= |-3 - 4i| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

قياس الزاوية المرجعية θ' للزاوية θ تحقق المعادلة $\tan \theta' = \frac{4}{3}$ ، إذن:

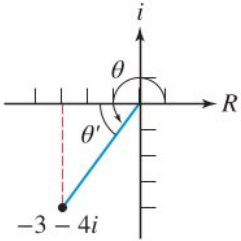
$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.93$$

بما أن $a < 0$ و $b < 0$ فإن ضلع الانتهاء

للزاوية θ يقع في الربع الثالث.

$$\theta = \pi + \theta' \approx 4.07$$

$$\text{إذن } -3 - 4i = 5 (\cos 4.07 + i \sin 4.07)$$



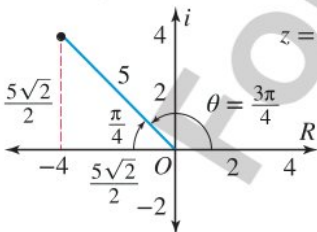
B. لتحويل العدد المركب $5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ من الصورة القطبية إلى الصورة القياسية

حدد قيمة كل من $r = 5$ و $\theta = \frac{3\pi}{4}$ و $z = a + bi$ و $b = r \sin \theta$ و $a = r \cos \theta$. عوّض هذه القيم:

$$\begin{aligned} a &= 5 \cos \frac{3\pi}{4} & b &= 5 \sin \frac{3\pi}{4} \\ &= 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & &= 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\frac{5\sqrt{2}}{2} & &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

إذن، الصورة القياسية للعدد $z = 5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

$$\text{هي } z = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$



تذكير

الزاوية المرجعية لزاوية ما هي الزاوية الحادة θ' ($0^\circ < \theta' < 90^\circ$) ما بين المحور x وضلع انتهاء الزاوية.

ملاحظة

يمكننا كتابة الإجابة بالشكل المختصر أيضًا:

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \cos \frac{5\pi}{3} + 2i \sin \frac{5\pi}{3} = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$$

ملاحظة

في هذه الحالة في الفرع (B)، تحديد موقع النقطة التي تمثل العدد المركب z من خلال الصورة القطبية أسهل من الصورة القياسية، حيث أنها التقاء المنصف الثاني ذو المعادلة $y = -x$ والدائرة المتمركزة في نقطة الأصل ونصف قطرها 5 فوق المحور x . بينما لا يمكننا تحديد إحداثيات هذه النقطة بشكل دقيق في الصورة القياسية.

العمليات على الأعداد المركبة في الصورة القطبية

تناسب الصورة القطبية بشكل خاص مع عمليتي ضرب وقسمة الأعداد المركبة، وذلك لأن ناتج ضرب عددين مركبين هو عدد مركب مقياسه يساوي ناتج ضرب مقياسي هذين العددين وسعته تساوي مجموع سعتهما. كما أن ناتج قسمة عددين مركبين هو عدد مركب مقياسه يساوي ناتج قسمة مقياسي هذين العددين وسعته تساوي الفرق بين سعتهما.

ضرب وقسمة الأعداد المركبة في الصورة القطبية

إذا كان $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ و $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ، فإن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \quad \text{الضرب:}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{القسمة:}$$

يمكننا برهان قاعدة ضرب الأعداد المركبة باستعمال متطابقتي الجيب وجيب التمام للمجموع:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

يمكننا برهان قاعدة القسمة بالطريقة نفسها.

مثال 2 ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية

أوجد الصورة القياسية لضرب العددين المركبين.

$$z_2 = 14 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ و } z_1 = 25\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

الحل

$$z_1 z_2 = 25\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \times 14 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{استعمل قاعدة ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية}$$

$$= 25 \times 14\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \right) \quad \text{بسط}$$

$$= 350\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{استعمل الحاسبة لإيجاد القيم واكتب العدد المركب في الصورة القياسية}$$

$$\approx 478.11 + 128.11i$$

حاول أن تحل التمرين 19

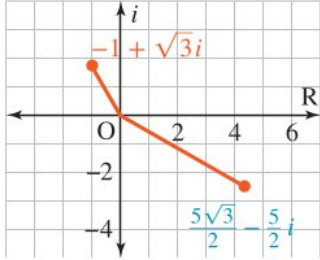
نستعمل، في المثال التالي، الصورة القطبية لإيجاد ناتج الضرب.

مثال 3 الضرب باستعمال الصورة القطبية

أوجد الصورة القياسية لناتج ضرب العددين $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ و $z_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$ باستعمال الصورة القطبية.

الحل

عبر عن كل عدد مركب في الصورة القطبية:



$$\begin{aligned} r_1 = |z_1| &= |-1 + \sqrt{3}i| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta'_1 &= -\sqrt{3} \\ \theta'_1 &= \tan^{-1} |-\sqrt{3}| \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

استعمل قاعدة حساب مقياس العدد المركب

أوجد ظل سعة العدد المركب

استعمل قاعدة الظل لإيجاد الزاوية المرجعية

بما أن العدد $-1 + \sqrt{3}i$ يقع في الربع الثاني، فإن

$$\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{إذن، } z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

بالطريقة نفسها تجد أن:

$$\begin{aligned} r_2 = |z_2| &= \left| \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{5}{2} \right)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta'_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta'_2 &= \tan^{-1} \left| -\frac{\sqrt{3}}{3} \right| \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

استعمل قاعدة حساب مقياس العدد المركب

أوجد ظل سعة العدد المركب

استعمل قاعدة الظل لإيجاد الزاوية المرجعية

بما أن العدد $\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$ يقع في الربع الرابع، فإن

$$\theta_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{إذن } z_2 = 5 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

(تابع)

أوجد ناتج ضرب العددين المركبين z_1 و z_2 .

$$[r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)]$$

استعمل قاعدة ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية

$$z_1 z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \times 5 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

عوّض قيمتي العددين المركبين

باستعمال قاعدة ضرب الأعداد المركبة بالصورة القطبية

$$z_1 z_2 = 10 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} \right) \right]$$

استعمل قاعدة ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية

$$= 10 \left(\cos \frac{15\pi}{6} + i \sin \frac{15\pi}{6} \right)$$

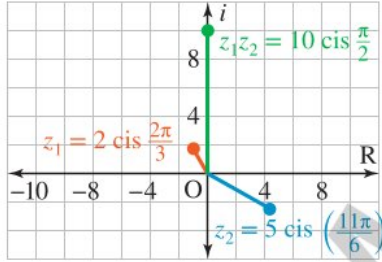
اجمع الزاويتين للحصول على زاوية واحدة

$$= 10 \left[\cos \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

أوجد السعة θ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

$$= 10 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

بسط



إذن، ناتج ضرب العددين في الصورة القياسية هو

$$z_1 z_2 = 10i$$

مساعدة دراسية

يمكنك التحقق من إجابتك من خلال إيجاد ناتج ضرب العددين z_1 و z_2 في صورتهم القياسية.

حاول أن تحل التمرين 26

يبين المثال التالي أن القسمة تتم بنفس الطريقة باستعمال قاعدة القسمة.

مثال 4 قسمة الأعداد المركبة باستعمال الصورة القطبية

أوجد ناتج $\frac{z_1}{z_2}$ في الصورة القياسية.

$$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \text{ و } z_2 = 6(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

الحل

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)}{6(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} [(\cos (135^\circ - 300^\circ) + i \sin (135^\circ - 300^\circ))]$$

استعمل قاعدة قسمة الأعداد المركبة في الصورة القطبية

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} [(\cos (-165^\circ) + i \sin (-165^\circ))]$$

بسط

$$\approx -0.46 - 0.12i$$

أوجد القيم المطلوبة واكتب العدد المركب في الصورة القياسية

إذن ناتج قسمة العددين المركبين $\frac{z_1}{z_2}$ في الصورة القياسية هو $-0.46 - 0.12i$ تقريباً.

حاول أن تحل التمرين 33

تذكير

عند قسمة عددين مركبين في الصورة القياسية، $\frac{z_1}{z_2}$ ، ولإيجاد الإجابة في الصورة القياسية، نضرب الكسر، أي البسط والمقام، بمرافق العدد المركب في المقام $\frac{z_1}{z_2}$. أما عند قسمة عددين مركبين في الصورة القطبية، $\frac{z_1}{z_2}$ ، فنستعمل القاعدة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

مراجعة سريعة 7.3

في التمارين 4-7، أوجد قياس الزاوية θ في الفترة $0 \leq \theta < 2\pi$ التي تحقق المعادلتين المعطاتين.

4. $\sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}$

7. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

في التمارين 1-4، أوجد الصورة القياسية للمقدار المعطى من دون استعمال الحاسبة.

1. $(1+i)^2 (2-i)$

2. $(2+3i)(1-i)$

3. $\frac{1-2i}{1+i}$

الدرس 7.3 التمارين

17. $5(\cos \pi + i \sin \pi)$

18. $6\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

في التمارين 19-25، أوجد ناتج ضرب العددين z_1 و z_2 في الصورة القطبية ثم اكتب الناتج في الصورة القياسية.

19. $z_1 = 7(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ),$

$z_2 = 2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)$

20. $z_1 = \sqrt{2}(\cos 118^\circ + i \sin 118^\circ),$

$z_2 = 0.5(\cos (-19^\circ) + i \sin (-19^\circ))$

21. $z_1 = 5\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), z_2 = 3\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

22. $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right), z_2 = \frac{1}{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

23. $z_1 = 5\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right), z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$

24. $z_1 = 2\left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}\right), z_2 = 3\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

25. $z_1 = 3\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right), z_2 = 7\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين 26-28، اكتب العددين z_1 و z_2 في الصورة القطبية، ثم أوجد ناتج ضربهما في الصورتين القطبية والقياسية.

26. $z_1 = \sqrt{2}i, z_2 = -1 + i$

27. $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -3 + 3i$

28. $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$

في التمارين 1-10، أوجد الصورة القطبية للعدد المركب بحيث تكون سعته في الفترة $0 \leq \theta < 2\pi$

1. $3i$

2. $-2i$

3. $2 + 2i$

4. $\sqrt{3} + i$

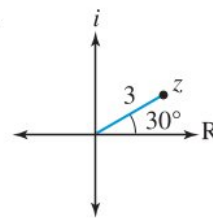
5. $-2 + 2\sqrt{3}i$

6. $3 - 3i$

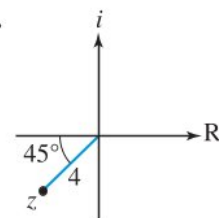
7. $3 + 2i$

8. $4 - 7i$

9.



10.



في التمارين 11-18، اكتب العدد المركب في الصورة القياسية $a + bi$.

11. $3(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)$

12. $8(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

13. $5(\cos (-60^\circ) + i \sin (-60^\circ))$

14. $5\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

15. $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$

16. $\sqrt{7}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

- A. $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ B. $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
 C. $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$ D. $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$
 E. $2\left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3}\right)$

45. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية يمثل الصورة القياسية

لناتج الضرب

$$\left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

- A. 2 B. -2
 C. $-2i$ D. $-1 + i$
 E. $1 - i$

استكشاف

46. **المرافق المركب** العدد المرافق للعدد المركب $z = a + bi$

$$\bar{z} = a - bi \text{ هو علفاً أن } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

a. أثبت أن $\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$

b. أوجد ناتج z باستعمال الصورة القطبية.

c. استعمل الصورة القطبية لإيجاد ناتج $\frac{z}{\bar{z}}$ إذا كان $z \neq 0$

d. أثبت أن $-\bar{z} = r[\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)]$

47. **مقادير الأعداد المركبة** ليكن $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

a. أثبت أن $|z| = |r|$

b. استعمل الصورة القطبية للعدد المركب z_1 و z_2

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

توسيع الأفكار

48. **استعمال الصورة القطبية في الحاسبة البيانية** يمكن إدخال

معطيات العدد المركب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ في صورته القطبية إلى الحاسبة البيانية في الصورة $re^{i\theta}$.

a. أثبت صحة نتيجة المثال 2 من خلال إدخال الصورة القطبية للعدد المركب z_1 و z_2 إلى الحاسبة البيانية وحساب ناتج الضرب على الحاسبة.

b. أثبت صحة نتيجة المثال 4 من خلال إدخال الصورة القطبية للعدد المركب z_1 و z_2 إلى الحاسبة البيانية وحساب ناتج القسمة على الحاسبة.

في التمارين 29-32، مثل العدد المركب في المستوى المركب بيانياً.

29. $5\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ 30. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$
 31. $3(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))$ 32. $1\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

في التمارين 33-36، أوجد الصورة القياسية للعدد المركب ومثله في المستوى المركب.

33. $\frac{2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}{3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$ 34. $\frac{5(\cos 220^\circ + i \sin 220^\circ)}{2(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)}$
 35. $\frac{6(\cos 5\pi + i \sin 5\pi)}{3(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}$ 36. $\frac{\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}$

في التمارين 37-40، أوجد ناتج الضرب $z_1 z_2$ وناتج القسمة $\frac{z_1}{z_2}$

a. باستعمال الصورة القطبية للعدد z_1 و z_2

b. باستعمال الصورة القياسية للعدد z_1 و z_2

$$37. z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 + i$$

$$38. z_1 = 1 - i, z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$39. z_1 = 3 + i, z_2 = 5 - 3i$$

$$40. z_1 = 2 - 3i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

41. **صيغة القسمة** ليكن $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

و $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ إذا كان $r_2 \neq 0$ ، أثبت أن

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

أسئلة اختبار معيارية

42. **صواب أم خطأ** لكل عدد مركب صورة قطبية واحدة.

بزر إجابتك.

43. **صواب أم خطأ** أوجدت منال ناتج ضرب العدد z_1 و z_2 كما يلي:

$$\left(2\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

هل حلها صحيح؟ بزر إجابتك.

44. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية يمثل الصورة القطبية

للعدد المركب $-1 + \sqrt{3}i$ ؟

7.4 قوى وجذور الأعداد المركبة Powers and Roots of Complex Numbers

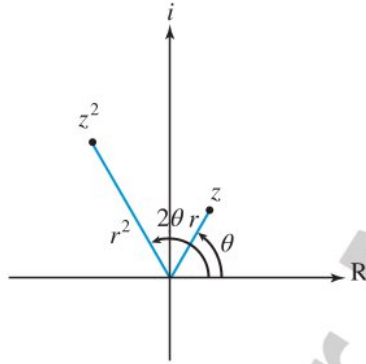
7.4

نظرية دي موافر

تمكننا قاعدة ضرب الأعداد المركبة من إيجاد قوى هذه الأعداد. على سبيل المثال، إذا كان $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z \\ &= [r(\cos \theta + i \sin \theta)][r(\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= r^2(\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)) \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{aligned}$$

يصف الشكل 7.4.1 تربيع العدد z الذي مقياسه r وسعته θ هندسيًا، حيث تتضاعف السعة لتصبح 2θ ، أما البعد عن نقطة الأصل فيضرب في r ، وبالتالي يزداد هذا البعد إذا كان $r > 1$ ويتناقص إذا كان $r < 1$.



الشكل 7.4.1 يبين الشكل تربيع العدد المركب حيث تتضاعف سعته بينما نقوم بتربيع البعد عن نقطة الأصل.

يمكننا أيضًا إيجاد z^3 بضرب z في z^2 .

$$\begin{aligned} z^3 &= z \cdot z^2 = r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= r^3[\cos(\theta + 2\theta) + i \sin(\theta + 2\theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)$$

⋮

يمكننا تعميم هذا النموذج من خلال النظرية التالية التي سُميت باسم عالم الرياضيات الفرنسي أبراهام دي موافر (1667-1754) الذي له إسهامات كبيرة في حساب الاحتمالات.

ما ستتعلمه

- نظرية دي موافر
- جذور الأعداد المركبة

... ولماذا

يسمح تحويل ضرب الأعداد المركبة إلى جمع لسعاتها بتعريف الجذور النونية لأي عدد مركب، وعددها n ، وإيجاد هذه الجذور.

معياري الدرس

12A.1.6

المصطلحات

- الجذر النوني للعدد z
- الجذر النوني للوحدة
- n^{th} root of z
- n^{th} root of unity

ملاحظة دراسية

يمكن لتغيير طريقة التعبير عن كمية ما أن يسهل العمليات الحسابية. مثال على ذلك صيغة نظرية دي موافر:

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

نظرية دي موافر

ليكن $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ وليكن n عددًا صحيحًا موجبًا، إذن:

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

مثال 1 استعمال نظرية دي موافر

أوجد قيمة $(1 + \sqrt{3}i)^3$ باستعمال نظرية دي موافر.

الحل

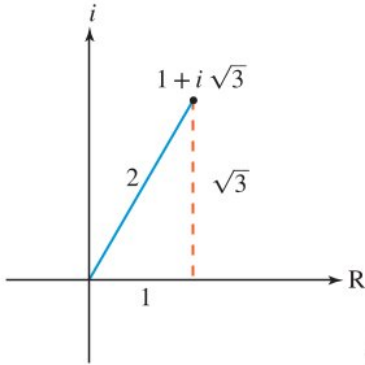
حل جبريًا

يبين الشكل أدناه أن سعة العدد $z = 1 + \sqrt{3}i$ هي نفسها قياس الزاوية المرجعية لأنها تقع في الربع الأول، لذلك $\theta' = \theta$ وبالتالي:

$$\theta' = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{1} \right) = \frac{\pi}{3}$$

ومقياسه:

$$r = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$



$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

اكتب القاعدة العامة

$$z^3 = 2^3 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right)$$

عوّض القيم $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $r = 2$ و $n = 3$

$$= 8(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$= 8(-1 + 0i)$$

عوّض قيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

$$= -8$$

بسط

إذن قيمة العدد المركب z^3 ، حيث $z = 1 + \sqrt{3}i$ ، باستعمال نظرية دي موافر هي -8

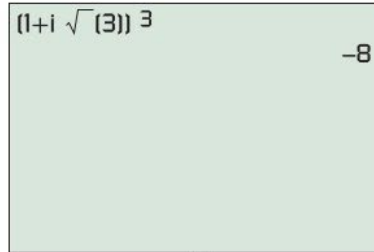
(تابع)

تحقق رقميًا

يبين الشكل a شاشة الحاسبة في وضعية الأعداد المركبة، ويبين الشكل b النتيجة التي توصلنا إليها جبريًا.



(a)



(b)

حاول أن تحل التمرينين 1 و 5

يمكننا استعمال نظرية دي موافر لإيجاد أي قوة وليس القوى الصغيرة فقط.

مثال 2 إيجاد قوى الأعداد المركبة

أوجد قيمة $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$ باستعمال نظرية دي موافر.

الحل

مقياس العدد المركب هو:

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

قياس الزاوية المرجعية θ' للزاوية θ التي تمثل سعة العدد المركب هو

$$\begin{aligned} \tan \theta' &= \left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| = |-1| = 1 \\ \theta' &= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

بما أن $a < 0$ و $b > 0$ فإن ضلع الانتهاء للزاوية θ يقع في الربع الثاني. إذن

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{إذن}$$

$$z^8 = \left(\cos 8\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin 8\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \quad \text{استعمل نظرية دي موافر}$$

$$= (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) \quad \text{بسط السعة}$$

$$= 1 + 0i \quad \text{عوض قيمتي الجيب وجيب التمام للسعة}$$

$$= 1$$

إذن قيمة $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$ باستعمال نظرية دي موافر هي 1

حاول أن تحل التمرين 6

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jo.com

جذور الأعداد المركبة

نلاحظ من المثالين السابقين أن العدد المركب $z = 1 + \sqrt{3}i$ هو حل للمعادلة $z^3 = -8$ والعدد المركب $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ هو حل للمعادلة $z^8 = 1$.

نقول إن العدد المركب $1 + \sqrt{3}i$ هو جذر تكعيبي للعدد -8 ، والعدد المركب $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ هو جذر من الرتبة الثامنة للعدد 1 أو جذر ثماني للعدد 1 .

الجذر النوني للعدد المركب

نقول إن العدد المركب $v = a + bi$ هو **الجذر النوني للعدد z** (الجذر من الرتبة n) إذا كان $v^n = z$. إذا كان $z = 1$ ، فإن v هو **الجذر النوني للوحدة**.

يمكننا استعمال نظرية دي موافر لوضع قاعدة عامة لإيجاد الجذور النونية لعدد مركب z ($z \neq 0$). لنفترض أن الجذر النوني للعدد $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ هو $v = s(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. إذن:

$$v^n = z$$

$$[s(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$s^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{المعادلة (1)}$$

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \text{ و } s^n = r, s > 0, r > 0$$

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \text{ و } s = \sqrt[n]{r} \text{ أي}$$

أي أن المعادلة (1) لا تتحقق إلا إذا كان $s = \sqrt[n]{r}$ وكانت الزاوية $n\alpha$ متطابقة مع الزاوية θ ، أي إذا كان هناك عدد صحيح k يحقق المعادلة $n\alpha = \theta + 2k\pi$ أو

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

عندما تقع قيمة k بين 0 و $n - 1$ ، تتغير قيمة α وبالتالي تتغير قيمة v . تظهر هذه القيم المختلفة للعدد v من جديد عندما يأخذ k القيم $n, n + 1, \dots$ يمكننا تلخيص كيفية إيجاد الجذور النونية للأعداد المركبة كما يلي:

إيجاد الجذور النونية لعدد مركب

إذا كان $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ فإن الأعداد المركبة المختلفة

$$\sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

التي تحددها قيم $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ هي الجذور النونية للعدد z وعددها n .

مثال 3 إيجاد الجذور من الرتبة الرابعة

أوجد الجذور الرابعة (من الرتبة الرابعة) في الصورة القطبية للعدد المركب $z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

الحل

الجذور من الرتبة الرابعة للعدد z هي

$$\sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) \right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3$.

مع الأخذ في الحسبان أن $\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ تكون قائمة الجذور كما يلي:

$$z_1 = \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{0}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{0}{2} \right) \right] \quad \text{عوض قيمة } k = 0$$

$$= \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right] \quad \text{بسط السعة}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad \text{عوض قيمة } k = 1$$

$$= \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right] \quad \text{بسط السعة}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} \right) \right] \quad \text{عوض قيمة } k = 2$$

$$= \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{13\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{13\pi}{12} \right) \right] \quad \text{بسط السعة}$$

$$z_4 = \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] \quad \text{عوض قيمة } k = 3$$

$$= \sqrt[4]{5} \left[\cos \left(\frac{19\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{19\pi}{12} \right) \right] \quad \text{بسط السعة}$$

حاول أن تحل التمرين 16

الأعداد الحقيقية، التي لكل منها جذر تكعيبي واحد ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية، لها ثلاثة جذور تكعيبية في مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 4 إيجاد الجذور التكعيبية

أوجد الجذور التكعيبية للعدد -1

الحل

اكتب أولاً العدد -1 في صورته القطبية:

$$z = -1 + 0i = \cos \pi + i \sin \pi$$

الجذور التكعيبية للعدد $z = -1$ هي

$$\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$$

حيث $k = 0, 1, 2$. إذن، الجذور التكعيبية الثلاثة هي:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

عوض قيمة $k = 0$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

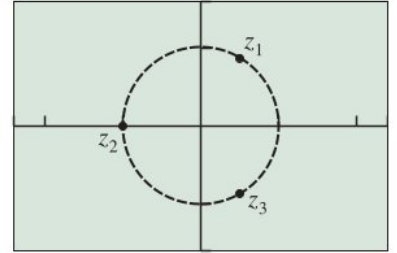
$$z_2 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} = -1 + 0i$$

عوض قيمة $k = 1$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

$$z_3 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

عوض قيمة $k = 2$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

انظر الشكل 7.4.2



$[-2.4, 2.4]$ في $[-1.6, 1.6]$

الشكل 7.4.2 يبين التمثيل البياني

للجذور التكعيبية الثلاثة z_1 و z_2 و z_3 ، حيث تتوزع النقاط بشكل متساوٍ على دائرة الوحدة وتفصل بين كل نقطة وأخرى زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ راديان.

حاول أن تحل التمرين 23

إذن الجذران التكعيبان المركبان للعدد -1 يكونان على شكل عدد مركب ومرافقه. يمكننا ملاحظة هذا الأمر كذلك في الرتب الأعلى لجذور الأعداد المركبة كما سنبين في المثال التالي.

مثال 5 إيجاد جذور الوحدة

أوجد الجذور الثمانية من الرتبة 8 للوحدة.

الحل

لنكتب أولاً العدد المركب $z = 1$ في صورته القطبية:

$$z = 1 + 0i = \cos 0 + i \sin 0$$

إذن الجذور الثمانية ذات الرتبة 8 للوحدة هي

$$\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2k\pi}{8} \right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. إذن

(تابع)

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0i$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_3 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i$$

$$z_4 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_5 = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i$$

$$z_6 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_7 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i$$

$$z_8 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

عوض قيمة $k = 0$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

عوض قيمة $k = 1$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

عوض قيمة $k = 2$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

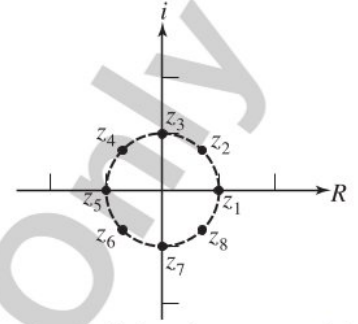
عوض قيمة $k = 3$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

عوض قيمة $k = 4$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

عوض قيمة $k = 5$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

عوض قيمة $k = 6$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة

عوض قيمة $k = 7$ وقيمتي الجيب وجيب التمام للسعة



الشكل 7.4.3 يبين التمثيل البياني

للجذور الثمانية، حيث تتوزع النقاط بشكل متساوٍ على محيط دائرة الوحدة وتفصل بين كل نقطة وأخرى زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ راديان.

ملاحظة دراسية

لاحظ في حل المثال 5 ومن الشكل أعلاه العلاقة بين الجذور الثمانية من الرتبة 8 للوحدة.

الجذران z_8 و z_2 مترافقان.

الجذران z_7 و z_3 مترافقان.

الجذران z_6 و z_4 مترافقان.

أما الجذران z_5 و z_1 فكل منهما مترافق مع نفسه.

حاول أن تحل التمرين 29

مراجعة سريعة 7.4

في التمارين 5-8، أوجد كل الحلول الحقيقية.

في التمارين 1-4، أوجد الصورة القياسية للعدد المركب من دون استعمال الحاسبة.

5. $x^2 - 4 = 0$

6. $x^3 - 1 = 0$

7. $x^4 - 1 = 0$

8. $x^5 - 32 = 0$

1. $(1 + i)^3$

2. $(1 - i)^4$

3. $(1 + i)^5$

4. $(1 - i)^6$

الدرس 7.4 التمارين

في التمارين 21-26، أوجد الجذور النونية للعدد المركب حسب قيمة n المعطاة.

21. $n = 4, z = 1 + i$

22. $n = 6, z = 1 - i$

23. $n = 3, z = 2 + 2i$

24. $n = 4, z = -2 + 2i$

25. $n = 6, z = -2i$

26. $n = 5, z = 32$

في التمارين 27-30، اكتب جذور الوحدة في الصورة القياسية $a + bi$ ، ثم مثل هذه الجذور في المستوى المركب بيانيًا.

27. الجذور التكعيبية للوحدة

28. الجذور من الرتبة الرابعة للوحدة

29. الجذور من الرتبة السادسة للوحدة

30. الجذور التربيعية للوحدة

31. **عمل جماعي الجذور النونية** أثبت أن النقاط التي تمثل الجذور النونية للعدد المركب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ تقع على محيط دائرة طول نصف قطرها $\sqrt{r}$ ، وتفصل بينها زوايا متساوية قياس كل منها $\frac{2\pi}{n}$ راديان.

في التمارين 1-8، استعمل نظرية دي موافر لإيجاد القوة المطلوبة للعدد المركب المعطى. اكتب الإجابات في الصورة القياسية $a + bi$.

1. $(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^3$

2. $[3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})]^5$

3. $[2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})]^3$

4. $[6(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})]^4$

5. $(1 + i)^5$

6. $(3 + 4i)^{20}$

7. $(1 - \sqrt{3}i)^3$

8. $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$

في التمارين 9-14، أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب المعطى. قرب الإجابات إذا لزم الأمر.

9. $2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$

10. $2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

11. $3(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$

12. $27(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$

13. $3 - 4i$

14. $-2 + 2i$

في التمارين 15-20، أوجد الجذور من الرتبة الخامسة للعدد المركب.

15. $\cos \pi + i \sin \pi$

16. $32(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

17. $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

18. $2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

19. $2i$

20. $1 + \sqrt{3}i$

توسيع الأفكار

38. أوجد قيمة z وجذوره التكعيبية الثلاثة، علماً أن أحد جذوره التكعيبية $1 + \sqrt{3}i$
39. أوجد قيمة z وجذوره الأربعة من الرتبة الرابعة، علماً أن أحد جذوره من الرتبة الرابعة $2i - 2$.
40. **جمع متتالية هندسية** استعمل قاعدة جمع المتتالية الهندسية $z = (\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $1 + z + z^2 + \dots + z^n$ لتبسيط المقدار
- $$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$$

أسئلة اختبار معيارية

32. **صواب أم خطأ** العدد المركب i هو جذر تكعبي للعدد $-i$.
بزر إجابتك.
33. **صواب أم خطأ** تقول منال إن الجذر النوني للعدد المركب z هو v إذا وفقط إذا كان $v^n = z$. هل كلامها صحيح؟ بزر إجابتك.
34. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية هو عدد الحلول المركبة المختلفة للمعادلة $z^5 = 1 + i$ ؟
- A. 0
B. 1
C. 3
D. 4
E. 5
35. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية ليس جذراً من الرتبة الرابعة للعدد i ؟
- A. i^2
B. $-i^2$
C. $\sqrt{-1}$
D. $-\sqrt{-1}$
E. $\sqrt{i}$

استكشاف

36. **الأعداد المركبة المرافقة** مرافق العدد المركب $z = a + ib$ هو $\bar{z} = a - ib$. ليكن $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$:
- a. أثبت أن $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$.
- b. استعمل الصورة القطبية لإيجاد z إذا كان $z^2 = \bar{z}$.
- c. استعمل الصورة القطبية لإيجاد z إذا كان $z^n = \bar{z}$.
37. **مقدار الأعداد المركبة** ليكن $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، استعمل الصورة القياسية لتبرهن أن $|z^2| = |z|^2$.

الوحدة 7 مراجعة الوحدة

في التمارين 22-24، مثل العدد المركب في المستوى المركب ثم أوجد مقياسه.

22. $13 + 8i$

23. $-3 + i$

24. $4 - 3i$

في التمارين 25-28، اكتب العدد المركب في الصيغة القياسية $a + bi$.

25. $2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

26. $1\left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}\right)$

27. $4\left[\cos \left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$

28. $3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

في التمارين 29-32، أوجد الصورة القطبية للعدد المركب.

29. $-\sqrt{3} + i$

30. $2 - 3i$

31. $4 + 5i$

32. $-3 - 3i$

في التمارين 33-36، أوجد ناتج ضرب z_1 و z_2 وناتج قسمة $\frac{z_1}{z_2}$ في الصورة القطبية.

33. $z_2 = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

$z_1 = 3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

34. $z_2 = 5(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

$z_1 = -2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

35. $z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

$z_1 = 3\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$

36. $z_2 = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

$z_1 = 6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين 1-3، اكتب المقدار في الصورة bi ، حيث b عدد حقيقي.

1. $\sqrt{-15}$

2. $\sqrt{-9}$

3. $\sqrt{-5}$

في التمارين 4-7، اكتب المجموع أو الفرق في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

4. $(3 - 2i) + (-9 + i)$

5. $(2i) - (2i - 11)$

6. $\left(\frac{3-i}{4}\right) - \left(\frac{2+i}{3}\right)$

7. $4.5i - 4.5 + 3.5i + 2.5$

في التمارين 8-13، اكتب ناتج الضرب في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

8. $(11i)(3i)$

9. $(3i)(5 - 4i)$

10. $(5 - 2i)(5 + 2i)$

11. $(8 + 3i)(8 + 3i)$

12. $\frac{1}{3}i(3 + 6i)$

13. $(-2i + 7)(7 + 2i)$

في التمارين 14-18، اكتب ناتج القسمة في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

14. $\frac{12}{1-i}$

15. $\frac{5}{6+2i}$

16. $\frac{6+12i}{3i}$

17. $\frac{4-4i}{1+3i}$

18. $\frac{(1-i)(2-i)}{1-2i}$

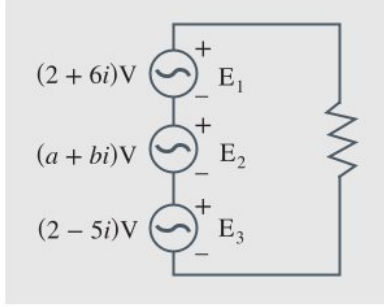
في التمارين 19-21، حل المعادلة.

19. $x^2 + 4x + 13 = 0$

20. $x^2 - 2x + 5 = 0$

21. $x^2 + 8x + 41 = 0$

44. **في الكهرباء** تبلغ قيمة محصلة الجهد الكهربائي لكل المصادر في الدائرة الكهربائية $3i - 6$ فولت. أوجد قيمة الجهد الكهربائي للمصدر في وسط الدائرة.



45. **في الكهرباء** تستعمل الصيغة $E = IZ$ لحساب الجهد الكهربائي حيث E يمثل الجهد الكهربائي و I شدة التيار، و Z المقاومة الكهربائية. إذا كان الجهد الكهربائي في دائرة كهربائية $(35 + 10i)V$ ، المقاومة $(4 + 4i)$ ohm، أوجد شدة التيار بالأمبير (amp). اكتب الإجابة في الصورة $a + bi$.

46. **في المستوى الإحداثي المركب**، تقع مكتبة عند النقطة $5 + 9i$ ، وتقع مدرسة عند النقطة $7 - 7i$ ، أوجد المسافة بين المكتبة والمدرسة.

في التمارين 37-39، استعمل نظرية دي موافر لإيجاد القوة المطلوبة للأعداد المركبة. اكتب الإجابة في الصورة القطبية ثم في الصيغة القياسية $a + bi$.

37. $\left[3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^3$

38. $\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)\right]^8$

39. $\left[5 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)\right]^3$

في التمارين 40-42، أوجد الجذور النونية للعدد المركب تبعاً لقيمة n المعطاة.

40. $n = 4, z = 3 + 3i$

41. $n = 3, z = 8$

42. $n = 5, z = 1$

43. **في الكهرباء** تستعمل دوائر التيار المتناوب AC الأعداد المركبة لتمثيل المقاومة الكهربائية بوحدة ohm. لإيجاد المقاومة الكلية في دائرة كهربائية، عليك إيجاد مجموع المقاومات من كل جزء من الدائرة. لدائرة كهربائية مقاومات جزئية هي $4 + 7i$ و $6.3 - 2i$ أوجد المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية.

الوحدة 7 تقويم

في التمارين 14-16، مثل العدد المركب في المستوى المركب ثم أوجد مقياسه.

14. $13 - 8i$

15. $-3 - i$

16. $3i$

في التمارين 17 و 18، أكتب العدد المركب في الصيغة القياسية $a + bi$.

17. $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

18. $6\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

في التمارين 19-21، أوجد الصورة القطبية للعدد المركب.

19. $3 + 5i$

20. $-1 - 2i$

21. $4 - 5i$

22. أوجد ناتج ضرب z_1 و z_2 وناتج قسمة $\frac{z_1}{z_2}$ في الصورة القطبية.
 $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$ و $z_2 = 3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

23. استعمل نظرية دي موافر لإيجاد القوة المطلوبة للعدد المركب. اكتب الإجابة في الصورة القطبية ثم في الصيغة القياسية $a + bi$

$$\left[2\left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]^2$$

24. أوجد الجذر النوني للعدد المركب تبعاً لقيمة n المعطاة.

$$n = 6, z = 1 - i$$

25. **في الكهرباء** تستعمل الصيغة $E = IZ$ لحساب الجهد الكهربائي، حيث E يمثل الجهد الكهربائي، و I شدة التيار، و Z المقاومة الكهربائية. إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ amp والمقاومة الكهربائية $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ ohm، أوجد قيمة الجهد الكهربائي (بالفولت). اكتب الإجابة في الصورة $a + bi$.

في التمارين 1 و 2، اكتب المقدار في الصورة bi ، حيث b عدد حقيقي.

1. $\sqrt{-4}$

2. $\sqrt{-13}$

في التمارين 3 و 4، اكتب المجموع أو الفرق في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

3. $(5 + 1.2i) + (-6 + 0.8i)$

4. $(13 + 2i) - (4 + 8i)$

في التمارين 5-7، اكتب ناتج الضرب في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

5. $(3.5i)(4 - 6i)$

6. $(5 - 3i)(2 + i)$

7. $(-3 + 2i)(2 - 3i)$

في التمارين 8-10، اكتب ناتج القسمة في الصيغة القياسية $a + bi$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

8. $\frac{2+i}{2-i}$

9. $\frac{5}{3+i}$

10. $\frac{2-3i}{1+2i}$

11. أوجد حل المعادلة $x^2 + 8x + 32 = 0$.

في التمارين 12 و 13، أوجد المسافة بين النقطة التي تمثل العدد r والنقطة التي تمثل العدد s .

12. $r = 3 - 4i, s = -2 - i$

13. $r = 3 + 16i, s = -3 + 13i$

الوحدة 7 المشروع

الأعداد المركبة في الهندسة

قد تكون لبعض المعادلات الجبرية البسيطة التي تحققها الأعداد المركبة معاني هندسية عميقة للغاية بحيث لو أردنا الاستدلال عليها هندسيًا لوجدنا أن الأمر ليس سهلًا على الإطلاق.

يهدف هذا المشروع إلى إبراز أهمية الأعداد المركبة في إبراز بعض الخصائص الهندسية المهمة.

ليكن z عددًا مركبًا غير حقيقي، وليكن a و b عددين حقيقيين، ولنفترض أن

$$z_1 = z + i(z - a) \text{ و } z_2 = z - i(z - b)$$

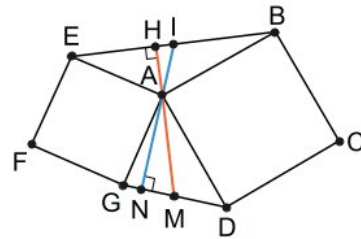
1. تحقق من صحة المعادلتين التاليتين:

a. $i(z_2 - z_1) = (z - a) + (z - b)$

b. $i(b - a) = (z_1 - z) + (z_2 - z)$

لا يحتاج التحقق من صحة المعادلتين السابقتين أكثر من تعويض z_1 و z_2 بقيمتيهما في المعادلتين. غير أن المعنى الهندسي لهاتين المعادلتين يعتبر عن نظرية هندسية قديمة تنص على ما يلي:

"إذا كان لدينا مربعان ABCD و EAGF يلتقيان عند نقطة واحدة فقط هي A (انظر الشكل)،



فإن الخط الوسيط AM في المثلث AGD هو الارتفاع AH في المثلث AEB، والخط الوسيط AI في المثلث AEB هو الارتفاع AN في المثلث AGD.

2. إذا كان العدد المركب z ممثلًا بالنقطة P، والعدد iz ممثلًا بالنقطة Q، أثبت أن المتجهين $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ متعامدان.

3. إذا كان العدد المركب z_1 ممثلًا بالنقطة R، والعدد z_2 ممثلًا بالنقطة S:

a. أثبت أن العدد المركب $z_1 + z_2$ ممثل بالنقطة T حيث $\vec{OT} = \vec{OR} + \vec{OS}$

b. ما العلاقة بين العدد المركب $z_2 - z_1$ والمتجه $\vec{RS}$ ؟

4. أثبت أن $(z_1 \cdot z_2)$ سعة (z_1) + سعة (z_2) .

5. أعد رسم الشكل السابق بحيث تقع النقطتان G و D على المحور x. إذا كان العدد المركب z ممثلًا بالنقطة A،

a. أوجد العدد الذي تمثله النقطة B والعدد الذي تمثله النقطة E.

b. كيف يمكن الاستفادة من المعادلتين المذكورتين في الجزء (1) لاستنتاج النظرية الهندسية التي ذكرناها؟



التوزيعات الاحتمالية

يُعَدّ الاستثمار في الأمن، وحساب الدفعة الأولى لوثيقة التأمين، وسياسة الحجز الزائد في شركات الطيران بعضًا من الأمثلة الكثيرة على تطبيقات الاحتمال والإحصاء في واقع الحياة. على سبيل المثال، يحسب الخبراء في شركات التأمين القيمة المتوقعة للربح أو الخسارة التي يمكن أن تتعرض لها شركة التأمين لتقدير قيمة الدفعة الأولى لوثيقة التأمين. تعتمد هذه التطبيقات بشكل أساسي على ما يسمّى التوزيع الاحتمالي.

يصف التوزيع الاحتمالي سلوك تجمع محدد، أي تسجيل توزيعات النتائج الممكنة لحدث معين بالإضافة إلى احتمال كل نتيجة ممكنة. ويمكن القيام بذلك باستعمال جدول قيم يربط هذه القيم باحتمالاتها، أو باستعمال نموذج رياضي.

سنتعرف في هذه الوحدة على الأفكار الأساسية المتعلقة بالتوزيع الاحتمالي، وسنركز على نوعين من التوزيع: التوزيع ذو الحدين والتوزيع الطبيعي.

8.1 المتغير العشوائي المنفصل

8.2 القيمة المتوقعة والتباين

8.3 التوزيع ذو الحدين

8.4 التوزيع الطبيعي

Discrete Random Variable

8.1 المتغير العشوائي المنفصل

المتغير العشوائي

لقد عَرَّفنا المتغيرات سابقًا بأنها خصائص تتغير أو تختلف إما بمرور الزمن و/أو بسبب أخذ عناصر أخرى في الحسبان. تختلف قيمة المتغير X الممثل عدديًا أو تتغير تبعًا لنتائج التجربة التي نجريها. على سبيل المثال، لنفترض أننا نعدّ الهواتف الجواله التي تملكها العائلات في بلدة معينة. في هذه الحالة قد يأخذ المتغير المقصود، X ، أي قيمة عددية، مثل 0 أو 1 أو 2 أو 3... إلخ، وذلك بحسب النتيجة العشوائية للتجربة. لهذا السبب نسمي المتغير X متغيرًا عشوائيًا. إذن، **المتغير العشوائي** هو المتغير الذي تتغير قيمه تبعًا لتغير نواتج تجربة معينة، حيث يمكننا استبدال قائمة نواتج تجربة معينة بقائمة تتضمن قيمًا عديدة يمثل كل عدد منها إحدى قيم المتغير العشوائي التي تعبر عن ناتج واحد فقط من نواتج التجربة. نستعمل عادة الأحرف الكبيرة كالحرف X للتعبير عن المتغير العشوائي، ونستعمل الأحرف الصغيرة مع المؤشرات كالأحرف $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ للتعبير عن القيم التي قد يتخذها المتغير. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل الرقم الظاهر عند رمي مكعب مرقم يمكن عندها أن يكون للمتغير X القيم $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. على سبيل المثال، إذا أحصينا عدد الهواتف الجواله الذي تملكه كل عائلة، واعتبرنا أن المتغير العشوائي هنا هو X ، يمكن للمتغير أن يأخذ القيم 0، 1، 2، 3، ... تبعًا للعدد الذي نحصل عليه في إحصائنا.

المتغير العشوائي

المتغير العشوائي هو متغير ذو قيم عديدة تحددها نواتج التجربة العشوائية.

قد نكتفي في بعض التجارب برصد بعض القيم العددية في النواتج وتجاهل التفاصيل الأخرى. مثلاً، عند رمي مكعبين على التوالي كل منهما مرقم من 1 إلى 6، فإن فضاء العينة يشتمل على 36 ناتج لهم إمكانية الحدوث نفسها، وكل ناتج مكون من الزوج المرتب (a, b) بحيث يكون a هو العدد الذي يستقر عليه المكعب الأول و b هو العدد الذي يستقر عليه المكعب الثاني. ليكن هدفنا رصد مجموع العددين اللذين نحصل عليهما، وفي هذه الحالة لا يكون العدد الذي يستقر عليه كل مكعب مهمًا بحد ذاته.

إن عدد النواتج الممكنة للمجموع $a + b$ هو 11 ناتجًا كما يبين الجدول التالي.

(1, 1); $x = 2$	(2, 1); $x = 3$	(3, 1); $x = 4$	(4, 1); $x = 5$	(5, 1); $x = 6$	(6, 1); $x = 7$
(1, 2); $x = 3$	(2, 2); $x = 4$	(3, 2); $x = 5$	(4, 2); $x = 6$	(5, 2); $x = 7$	(6, 2); $x = 8$
(1, 3); $x = 4$	(2, 3); $x = 5$	(3, 3); $x = 6$	(4, 3); $x = 7$	(5, 3); $x = 8$	(6, 3); $x = 9$
(1, 4); $x = 5$	(2, 4); $x = 6$	(3, 4); $x = 7$	(4, 4); $x = 8$	(5, 4); $x = 9$	(6, 4); $x = 10$
(1, 5); $x = 6$	(2, 5); $x = 7$	(3, 5); $x = 8$	(4, 5); $x = 9$	(5, 5); $x = 10$	(6, 5); $x = 11$
(1, 6); $x = 7$	(2, 6); $x = 8$	(3, 6); $x = 9$	(4, 6); $x = 10$	(5, 6); $x = 11$	(6, 6); $x = 12$

ما ستتعلمه

- المتغير العشوائي
- التوزيع الاحتمالي

ولماذا...

يساعد مفهوم المتغير العشوائي في دراسة وحساب الاحتمال لاتخاذ القرار الأمثل عند معالجة أحداث تجربة عشوائية. والأمثلة الواقعية على ذلك كثيرة منها أسعار الأسهم، مستوى المياه في بحيرة معينة، أو سرعة الرياح في موقع معين، وجميعها متغيرات عشوائية ناتجة عن ظواهر عشوائية.

معايير الدرس

12A.8.1

12A.8.2

المصطلحات

- المتغير العشوائي random variable
- المتغير العشوائي المنفصل discrete random variable
- المتغير العشوائي المتصل continuous random variable
- التوزيع الاحتمالي probability distribution

للتذكير

فضاء العينة هو المجموعة التي تتضمن كل النواتج الممكنة لتجربة معينة.

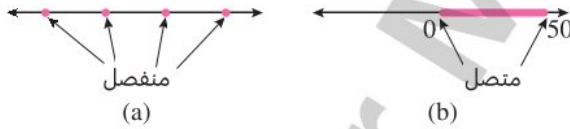
المهم في هذه النواتج هو المجموع وليس كل عدد على حدة. لذلك نعرّف المتغير العشوائي X بأنه قيمة المجموع $a + b$ في كل حالة. لذلك فإن قيم المتغير العشوائي X هي $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

لاحظ أننا، باستعمال المتغير العشوائي X ، يمكننا التعبير عن الأحداث بشكل أبسط، فإذا أردنا، مثلاً، التعبير عن الحدث "أن يكون مجموع العددين 5 على الأقل لكنه أصغر من 9"، نكتب $5 \leq X < 9$

يمكننا أن نعرف متغيراً عشوائياً في العديد من الأمثلة الأخرى:
 X : عدد الاتصالات التي ترد إلى منزل معين كل ليلة جمعة.
 X : عدد الأسرّة المتوافرة في فندقٍ معين كل يوم.
 X : عدد الزبائن الذين يتّصل بهم مندوب مبيعات كل يوم.

نقول عن المتغير العشوائي إنه **متغير عشوائي منفصل** عندما يأخذ قيماً معدودة محدودة، وذلك لتمييزه عن **المتغير العشوائي المتصل** الذي سندرسه لاحقاً. نلاحظ أن المتغير في ما ورد سابقاً في هذا الدرس لا يمكن أن يأخذ إلا قيماً صحيحة. أما إذا قلنا، مثلاً، إن X : وزن المولود الجديد في مستشفى معين، فيمكن للمتغير، في هذه الحالة أن يأخذ أي قيمة في فترة معينة.

المتغير العشوائي المنفصل يأخذ قيماً متباعدة منفصلة في فترة معينة (انظر الشكل 8.1.1a)، أما **المتغير المتصل** فقد يأخذ أي قيمة في فترة معينة (انظر الشكل 8.1.1b).



الشكل 8.1.1 يبيّن الشكل كيف يأخذ المتغير المنفصل قيماً متباعدة منفصلة في فترة معينة أما المتغير المتصل يمكن له أن يأخذ أية قيمة في فترة معينة.

مثال 1 المتغير العشوائي المنفصل

حدّد ما إذا كان المتغير العشوائي منفصلاً أم متصلاً.

- عدد الشعر في رأس فصيلة من الكلاب.
- ارتفاع مبنى.
- كمية الدهن في قطعة من لحم الشواء.
- نتيجة الطالب في مادة الرياضيات في أحد الفصول.
- درجة الحرارة في فرن.

الحل

- A. مع أن عدد الشعر كبير جدًا، لكنه دائمًا عدد صحيح محدود، إذن المتغير منفصل.
- B. إن ارتفاع أي مبنى هو عدد حقيقي دائمًا: 15 m، 15.3 m، 30.1 m، ... إذن المتغير متصل.
- C. يمكن لكمية الدهن أن تبدأ بالصفر وصولاً إلى أكبر عدد حقيقي لكمية الدهن التي قد تحملها قطعة اللحم، لذلك فالمتغير متصل.
- D. قيم الدرجات منفصلة. بغض النظر عن مدى تفصيل الدرجات التي يعطيها المعلم، النواتج عبارة عن قيم منفصلة، إذن المتغير منفصل.
- E. المتغير متصل لأن الحرارة في فرن قد تأخذ أي قيمة حقيقية بدءاً من درجة حرارة الغرفة وصولاً إلى الدرجة مئة.

حاول أن تحل التمارين 5-1

التوزيع الاحتمالي

يبين الجدول أدناه استهلاك 25 عائلة من الحليب في أسبوع معين. كل مقدار من الحليب (عدد اللترات المستهلكة) في الجدول تقابله النسبة التي تستهلكه من العائلات.

عدد اللترات المستهلكة من الحليب	التكرار النسبي
0	0.08
1	0.20
2	0.36
3	0.20
4	0.12
5	0.04

عندما نطلق على هذه النسبة (قيم التكرار النسبي) اسم الاحتمال، فإن كل جدول كهذا يسمى **التوزيع الاحتمالي** للمتغير العشوائي (الذي هو هنا عدد اللترات المستهلكة من الحليب).

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل هو جدول، أو تمثيل بياني، أو قاعدة تعطي لكل قيمة ممكنة للمتغير العشوائي X القيمة الاحتمالية المناسبة $P(X)$.

ننظم جدولاً كهذا عادةً على النحو التالي:

إذا كان X عدد الليترات المستهلكة من الحليب، فإن التوزيع الاحتمالي $P(X)$ هو

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.08	0.20	0.36	0.20	0.12	0.04

من الضروري الانتباه إلى أن مجموع احتمالات قيم X يساوي مجموع احتمالات جميع الحوادث المتضمنة في فضاء العينة الخاصة بالتجربة. أي أن مجموع هذه الاحتمالات يجب أن يساوي 1، ويمكننا التحقق من ذلك بجمع القيم الاحتمالية:

$$\begin{aligned} & P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) \\ &= 0.08 + 0.20 + 0.36 + 0.20 + 0.12 + 0.04 = 1 \end{aligned}$$

التوزيع الاحتمالي لتجربة هو دالة تحدد احتمال كل ناتج من نواتج فضاء العينة لهذه التجربة.

خواص التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً وكانت الدالة $P(x)$ تمثل توزيعه الاحتمالي، فإن

$$0 \leq P(x) \leq 1 \text{ لكل قيم } x \text{ للمتغير العشوائي } X$$

$$\sum_i P(x_i) = 1 \text{ حيث يشمل رمز المجموع كل القيم المحتملة } x \text{ للمتغير العشوائي } X.$$

مثال 2 التوزيع الاحتمالي

يتنافس طلال وحسن على رئاسة مجلس الطلاب. يحتوي وعاء على 3 كرات كُتب عليها اسم طلال و 3 كرات كُتب عليها اسم حسن. لإجراء القرعة.

A. يتم سحب كرة واحدة عشوائياً من الوعاء وتسجيل عدد المرات التي يظهر فيها اسم طلال. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور اسم طلال، حدد قيم المتغير العشوائي ثم اكتب التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي.

B. إذا تم سحب كرة عشوائياً ثم إعادتها إلى الوعاء، ثم سحب كرة أخرى عشوائياً، وتسجيل عدد الكرات التي تحمل اسم طلال في هذه التجربة. إذا دل المتغير العشوائي Y على عدد مرات ظهور اسم طلال، حدد قيم المتغير العشوائي Y ثم اكتب التوزيع الاحتمالي. كيف يختلف التوزيع الاحتمالي هذا عن التوزيع الاحتمالي في الجزء A؟

(تابع)

الحل

A. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور اسم طلال، فإن القيم المحتملة للمتغير العشوائي هي 0 أو 1، بمعنى أنه إما يظهر اسم طلال أو لا يظهر. بما أن سحب الكرة عشوائي، فإن إمكانية الحصول على كرة تحمل اسم طلال وإمكانية الحصول على كرة لا تحمل اسم طلال متساويتان. التوزيع الاحتمالي النظري لهذه التجربة هو الدالة P ، المعزفة على المجموعة $\{0, 1\}$ حيث:

$$P(1) = \frac{1}{2}, P(0) = \frac{1}{2}$$

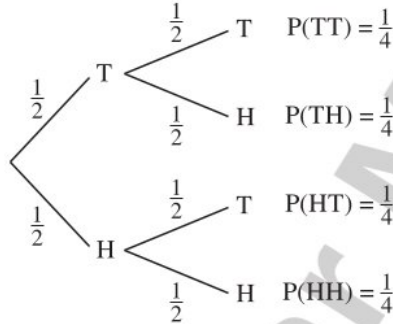
يمكننا كتابة الإجابة النهائية للتوزيع الاحتمالي كما في الجدول التالي:

X	0	1
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

إرشاد

إحدى طرائق التحقق من صحة الحل هي التحقق من أن مجموع احتمالات جميع النواتج يساوي 1

B. إذا كان المتغير العشوائي Y يدل على عدد مرات ظهور اسم طلال مع شرط إعادة الكرة إلى الوعاء في كل مرة، فإن القيم المحتملة للمتغير العشوائي Y تصبح 0 أو 1 أو 2. ارسم مخطط الشجرة الاحتمالية لهذه التجربة. ليكن H = حسن و T = طلال. اضرب احتمالي كل مسار.



اجمع احتمالات كل من HT و TH لإيجاد احتمال الحصول على كرة واحدة تحمل اسم طلال.

$$P(1) = P(TH) + P(HT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

التوزيع الاحتمالي النظري هو الدالة P ، المعزفة على المجموعة $\{0, 1, 2\}$ حيث:

$$P(2) = P(TT) = \frac{1}{4}, P(1) = \frac{1}{2}, P(0) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

يمكننا كتابة الإجابة النهائية للتوزيع الاحتمالي كما في الجدول التالي:

Y	0	1	2
$P(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

قارن بين التوزيع الاحتمالي هذا والتوزيع الاحتمالي في الجزء A.
في الجدول أدناه، التوزيع الاحتمالي المنتظم يحدد نفس الاحتمال لكل النواتج.

مقارنة التوزيعين الاحتماليين		
منتظم	$P(0) = \frac{1}{2}, P(1) = \frac{1}{2}$	سحب كرة واحدة (في الجزء A)
غير منتظم	$P(0) = \frac{1}{4}, P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{1}{4}$	سحب كرتين (في الجزء B)

التوزيع الاحتمالي في الجزء A هو توزيع احتمالي منتظم، بينما التوزيع الاحتمالي في الجزء B ليس كذلك.

حاول أن تحل التمرين 12

علينا دائمًا استعمال قواعد الاحتمال لإيجاد التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة. يساعدنا المثال التالي على التدرب على استعمال هذه القواعد.

مثال 3 التوزيع الاحتمالي من واقع الحياة

يعدّ استنشاق غاز الرادون (وهو غاز مشع ينتج عن الاضمحلال الإشعاعي الطبيعي للراديوم في التراب) من الأسباب الرئيسية لإصابة المدخنين بسرطان الرئة، وأثبتت الدراسات أن الهواء في منزل واحد من كل ثلاثة منازل في المناطق الغنية بالراديوم يشتمل على مستويات خطيرة من هذا الغاز.

لنفرض أننا اخترنا منزلين بشكل عشوائي وقمنا بتعريف المتغير العشوائي X على أنه عدد المنازل التي يشتمل الهواء فيها على مستويات خطيرة من هذا الغاز. أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

الحل

بما أن عدد المنازل المختارة هو 2، إذن القيم الممكنة للمتغير العشوائي المنفصل X هي 0 أو 1 أو 2 نقوم بإيجاد القيم الاحتمالية لكل قيم X باتباع قواعد الاحتمال على افتراض أن عملية الاختيار تتم عشوائيًا وبشكل مستقل كل منهما عن الأخرى.

(أن يكون المنزل الأول خطرًا والمنزل الثاني خطرًا) $P(X = 2) = P(2) = P$

$$= P(\text{أن يكون المنزل الثاني خطرًا}) \times P(\text{أن يكون المنزل الأول خطرًا})$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

احتمال أن يكون المنزل خطرًا هو $\frac{1}{3}$ ، إذن احتمال أن لا يكون هذا المنزل خطرًا هو احتمال متممة الحدث:

$$P(\text{أن يكون البيت خطرًا}) = 1 - P(\text{أن يكون البيت غير خطر})$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(تابع)

ملاحظة تعليمية

يسمى التوزيع الاحتمالي منتظمًا عندما تتساوى قيم الاحتمال لكل قيم المتغير العشوائي، وغير منتظم عندما لا يكون ذلك.

للتذكير

إذا كان احتمال الحدث A هو $P(A)$ واحتمال الحدث B هو $P(B)$ وكان A و B حدثين مستقلين، فإن احتمال حصولهما معًا هو $P(A) \times P(B)$. نكتب $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(0) = P(\text{أن يكون المنزل الأول غير خطر والمنزل الثاني غير خطر}) \\ &= P(\text{أن يكون المنزل الثاني غير خطر}) \times P(\text{أن يكون المنزل الأول غير خطر}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(1) = P(\text{أن يكون البيت الأول خطراً و أن يكون البيت الثاني غير خطر}) \\ &\text{أو } P(\text{أن يكون البيت الثاني خطراً و أن يكون البيت الأول غير خطر}) \\ &= P(\text{أن يكون البيت الأول خطراً}) \times P(\text{أن يكون البيت الثاني غير خطر}) \\ &\quad + P(\text{أن يكون البيت الثاني خطراً}) \times P(\text{أن يكون البيت الأول غير خطر}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

يبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

حاول أن تحل التمرين 13

لإثبات أن توزيعاً ما هو توزيع احتمالي، يكفي إثبات تحقق الشرطين المذكورين أعلاه في خصائص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل. أي أن تكون $0 \leq P(X) \leq 1$ وأن يكون مجموع القيم الاحتمالية لقيم المتغير X يساوي 1

مثال 4 استعمال خصائص التوزيع الاحتمالي

تعلن بعض الجامعات عن نتائج الطلاب في كل مادة حسب توزيع متراتب. مثلاً:

$$A = 4, B = 3, C = 2, D = 1, F = 0$$

من الأضعف (F) إلى الأكثر تفوقاً (A).

لنفترض أن نتائج الطلاب في مادة الإحصاء في أحد الفصول موزعة على النحو التالي: 13% من الطلاب حصلوا على الرتبة A، و 37% حصلوا على الرتبة B، و 45% على الرتبة C، و 4% على الرتبة D، و 1% على الرتبة F. سوف نختار أحد الطلاب عشوائياً ونعرف المتغير المنفصل X بأنه قيمة الرتبة التي حصل عليها هذا الطالب.

A. هل يمثل الجدول أدناه توزيعاً احتمالياً للمتغير العشوائي X ؟

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.01	0.04	0.45	0.37	0.13

B. أوجد احتمال أن تكون رتبة الطالب هي B أو أفضل من ذلك.

(تابع)

طريقة أخرى

يمكننا استعمال خاصية جمع الاحتمالات يساوي 1

لإيجاد $P(X = 1)$:

$$P(X = 1) = 1 - [P(0) + P(2)] = 1 - \left[\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right] = \frac{4}{9}$$

الحل

A. لاحظ أن $0 \leq P(X) \leq 1$ لكل قيم X ، وهذا هو الشرط الأول. اجمع القيم الاحتمالية للتحقق من الشرط الثاني.

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ &= 0.01 + 0.04 + 0.45 + 0.37 + 0.13 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن، يحقق شروط التوزيع الاحتمالي، إذن يمثل توزيعاً احتمالياً.

B. احتمال أن تكون رتبة الطالب هي 3 أو 4

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= 0.37 + 0.13 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 15

مراجعة سريعة 8.1

في التمارين 1-7، حدّد عدد النواتج الممكنة للحدث العشوائي.

1. رمي قطعة نقدية واحدة.
2. رمي ثلاث قطع نقدية مختلفة.
3. عدد مرات الحصول على الصورة عند رمي 3 قطع نقدية مختلفة.
4. تم اختيار 5 بطاقات من أصل 44 بطاقة مرقمة من 1 إلى 44.
5. سحب ثلاث صور من مجموعة مكونة من 52 صورة.
6. خمسة أشخاص يقفون في صف لالتقاط صورة جماعية.
7. رمي أربع مكعبات مرقمة مختلفة.

الدرس 8.1 التمارين

في التمارين 1-11، حدد ما إذا كان المتغير العشوائي منفصلاً أم متصلاً.

1. عدد الكلمات التي كتبها طالب بشكل صحيح في اختبار الإملاء.
2. كمية المياه المتدفقة في شلالات نياجرا سنوياً.
3. مدة تأخر طالب عن حصة تعليمية.
4. عدد البكتيريا في المليلتر الواحد في مياه الشرب.
5. كمية الكربون التي ينتجها كل ليتر من الوقود الخالي من الرصاص.
6. معدل ضربات قلب فأر في مختبر.
7. قياس الضغط الجوي على قمة جبل إفريست.
8. المسافة التي يقطعها سائق سيارة أجرة كل يوم.
9. مجموع الأهداف التي سجّلتها فرق كرة القدم في الدوري الوطني.
10. ارتفاع التيار المحيطي على شواطئ أحد البلدان المطلة على المحيط.
11. عدد الكتب المعادة إلى مكتبة عامة بعد انقضاء زمن إعادتها.

16. للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي التالي.

X	5	10	15	20	25
$P(X)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{30}$	k	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{60}$

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $P(X < 10)$.

c. أوجد $P(5 < X \leq 20)$.

17. تمثل الدالة أدناه دالة الاحتمال لمتغير عشوائي منفصل X .

$$P(X = x) = \frac{kx}{2}, \quad x = 12, 14, 16, 18$$

اكتب الجدول الذي يبين التوزيع الاحتمالي وأوجد قيمة k .

في التمارين 18-21، يحتوي وعاء على 5 كرات: 1 صفراء، 1 حمراء، و 3 خضراء. سُحبت كرة عشوائيًا أربع مرات، بحيث أُرجعت إلى الوعاء بعد كل مرة. أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي إذا دل المتغير العشوائي X على كل من التالي:

18. عدد المرات التي تكون فيها الكرة المسحوبة خضراء.

19. عدد المرات التي تكون فيها الكرة المسحوبة صفراء.

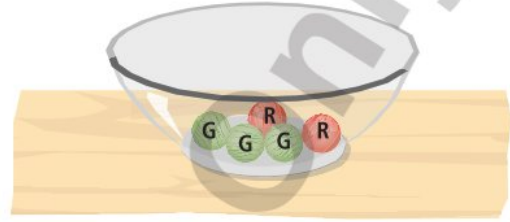
20. عدد المرات التي تكون فيها الكرة المسحوبة حمراء.

21. عدد المرات التي لا تكون فيها الكرة المسحوبة خضراء.

22. **الكتابة للتعلم** قمت بتدوير القرص الدوار المبين أدناه. اكتب توزيعًا احتماليًا للتجربة.



12. يُراد سحب كرتين من الوعاء أدناه.



لكل موقف مما يلي، اكتب التوزيع الاحتمالي لعدد الكرات الحمراء المسحوبة. هل هذا التوزيع توزيع احتمالي منتظم؟

a. سُحبت كرة ثم أُرجعت إلى الوعاء، ثم سُحبت كرة ثانية.

b. سُحبت كرة ولم يتم إرجاعها إلى الوعاء. ثم سُحبت كرة ثانية.

13. تم اختيار بطاقة بشكل عشوائي من صندوق يحتوي على 10 بطاقات:

3 صفراء (Y)، 4 حمراء (R)، 2 خضراء (G)، 1 زرقاء (B).

a. اكتب توزيعًا احتماليًا للعناصر في فضاء العينة $\{Y, R, G, B\}$ لهذه التجربة.

b. عند اختيار بطاقتين عشوائيًا من الصندوق على التوالي دون إرجاع، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد البطاقات الخضراء المسحوبة، فاكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

14. يبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y . أوجد $P(2)$.

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y)$	0.1	0.3		0.1	0.05	0.05

15. قد يكون للمتغير العشوائي X خمس قيم ممكنة هي: 12، 13، 15، 18، و 20، يبين الجدول التالي توزيعه الاحتمالي.

X	12	13	15	18	20
$P(X)$	0.14	0.11		0.26	0.23

a. أوجد $P(15)$.

b. أوجد احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائي X تساوي 12 أو 20.

c. أوجد $P(X \leq 18)$.

أسئلة اختبار معيارية

استكشاف

27. تعطي الدالة التالية التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

$$P(X=x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} & x = 2, 3, 4, 5, 6 \\ k & x = 7 \\ 0 & \text{للقيم الأخرى} \end{cases}$$

حيث k عدد ثابت. أوجد قيمة k .

28. يعبر الجدول التالي عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y .

أوجد قيمة k .

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	0.1	0.11	k	$(k-1)^2$

توسيع الأفكار

29. يعبر الجدول التالي عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

X	1	2	3	4
$P(X)$	$2a$	a^2	$2a^2 - \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$

a. أوجد قيمة a .

b. أثبت أن $P(X=x) \neq P(X \neq x)$ لكل قيمة x للمتغير X .

23. صواب أم خطأ يتألف رباعي أوجه منتظم من أربعة أوجه مثلثة

الشكل كُتبت عليها الأحرف التالية: D, C, B, A.

لنفترض أنك إذا رميت رباعي الأوجه، فإن فرص استقرار

رباعي الأوجه بحيث يكون أي من هذه الأحرف الأربعة في

الأسفل لها نفس إمكانية الحدوث. فضاء العينة لهذه التجربة

هو $\{A, B, C, D\}$. أوجد حامد التوزيع الاحتمالي النظري لهذه

التجربة كما هو مبين أدناه. هل إجابته صحيحة؟ بّرر إجابتك.

$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.3$$

$$P(C) = 0.3$$

$$P(D) = 0.3$$

24. صواب أم خطأ يمكن أن تكون قيمة المتغير العشوائي

المنفصل عددًا غير صحيح. بّرر إجابتك.

25. اختيار من متعدد لكي يمثل الجدول أدناه توزيعًا احتماليًا،

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a

يجب أن تكون قيمة a :

A. $-\frac{4}{12}$

B. $-\frac{11}{12}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{10}{12}$

E. $\frac{7}{12}$

26. اختيار من متعدد إذا كانت $P(X=x) = x^2 + a$ دالة

احتمالية، فإن

A. $a > 1$

B. $a = 1$

C. $a \geq 1$

D. $a < 1$

E. $a \leq 1$

Expected Value and Variance

8.2 القيمة المتوقعة والتباين

القيمة المتوقعة

يبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل الذي يشتمل على الأعداد التي تظهر عند رمي مكعب منتظم مرقم من 1 إلى 6

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

كنا سابقًا نحسب الوسط الحسابي للأعداد 1, 2, 3, 4, 5, 6 بجمعها وقسمتها على عددها وهو 6، عند توزيع المقام على هذه الأعداد في الجمع نجد أن **الوسط الحسابي** لهذه الأعداد تساوي مجموع نواتج ضرب كل قيم المتغير العشوائي X في قيم احتمالات حدوثها:

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$$

وهو ما نسميه **القيمة المتوقعة** للمتغير العشوائي.

ما ستتعلمه

- القيمة المتوقعة
- التباين
- خصائص القيمة المتوقعة والتباين

... ولماذا

للقيمة المتوقعة والتباين دور مهم في فهم الظواهر العشوائية، وتمكننا خصائصهما من فهم التجارب الاحتمالية من كافة جوانبها بشكل دقيق.

معياري الدرس

12A.8.3

المصطلحات

- القيمة المتوقعة
- التباين
- expected value
- variance

القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا في تجربة وكانت P(X) دالة الاحتمال، فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X هي E(X) أو مجموع نواتج ضرب كل قيم المتغير X في قيم احتمالاتها P(X).

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$$

حيث $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

مثال 1 حساب القيمة المتوقعة

صُمم مكعب مرقم بحيث تكون إمكانية الحصول على العددين 5 و 6 عند رميه أكبر. يبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لنواتج تجربة رمي هذا المكعب. أوجد القيمة المتوقعة لتجربة رمي المكعب وفشر معناها.

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.4

(تابع)

الحل

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \\
 &= 1(0.1) + 2(0.1) + 3(0.1) + 4(0.1) + 5(0.2) + 6(0.4) \\
 &= 4.4
 \end{aligned}$$

أي أنه إذا رُمي المكعب المرة تلو الأخرى من دون توقف، فإن المتوسط (ناتج قسمة مجموع الأعداد التي ظهرت أثناء رمي المكعب على عدد الرميات) يقترب من العدد 4.4 بمعنى آخر، إذا رُمي هذا المكعب عشر مرات فإنه من المتوقع أن يكون مجموع هذه الأعداد 44

حاول أن تحل التمرين 2

يمكننا تعريف المتغير المنفصل بما يناسب إعطاء القيمة المتوقعة دلالة منطقية.

نشاط استكشافي 1 عقد صيانة

كان على مدير مكتب أن يقرر ما إذا كان عليه أن يبرم عقد صيانة لآلة النسخ في مكتبه. يمكننا من تجارب السنوات السابقة وضع جدول التوزيع الاحتمالي التالي لعدد مرات الاتصال بخدمة الصيانة.

عدد مرات الاتصال	0	1	2	3
الاحتمال	0.2	0.4	0.3	0.1

الخيارات هي:

الخيار A: دفع مبلغ سنوي مقطوع مقداره QR 350 وعدم دفع أي شيء عند إجراء الصيانة.

الخيار B: دفع QR 250 مقابل كل مرة صيانة.

الخيار C: دفع قيمة QR 300 على أن تكون الصيانة الأولى مجانية وتكون تكلفة كل صيانة بعد ذلك QR 60.

أي من هذه الخيارات يتوقع أن يكون الأقل تكلفة بالنسبة لمدير المكتب؟

نحتاج أحيانًا إلى استعمال قواعد حساب الاحتمال لإيجاد التوزيع الاحتمالي المناسب.

مثال 2 حساب الاحتمالات لإيجاد التوزيع الاحتمالي

لاجتذاب مزيد من الزبائن خلال أيام الأسبوع، قدّم نادٍ للجولف عرضًا يتيح للاعبين إمكانية توفير بعض المال، حيث توضع أمام اللاعب أربع بطاقات كتب على كل منها أحد الأحرف التالية:

D (باللون الأحمر)

H (باللون الأحمر)

C (باللون الأسود)

S (باللون الأسود)

تكون البطاقات مقلوبة (الحرف من الجهة السفلية)، وعلى اللاعب سحب إحداها. إذا كانت البطاقة المسحوبة هي D، يلعب اللاعب جولة جولف مجانيًا من دون أن يدفع رسم الدخول الاعتيادي وهو QR 50. وإذا كانت البطاقة المسحوبة هي H، فعلى اللاعب سحب بطاقة أخرى. إذا كانت البطاقة الثانية هي D، يدفع اللاعب نصف رسم الدخول الاعتيادي ليلعب جولة جولف. وإذا كانت البطاقة الأولى أو الثانية باللون الأسود، يحظى اللاعب بحسم قيمته QR 10. أوجد القيمة المتوقعة لتكلفة لعب جولة جولف خلال أيام الأسبوع.

الحل

عليك أولاً إيجاد القيمة الاحتمالية لكل ناتج. ليكن B رمز الحصول على بطاقة باللون الأسود. إذن:

$$P(D) = \frac{1}{4} \quad \text{احتمال أن يسحب البطاقة D هو واحد من أربع بطاقات}$$

$$P(HD) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \quad \text{استعمل قاعدة ضرب الاحتمال}$$

لاحظ أن احتمال D في حال كانت الأولى H هو 1 من 3 بطاقات وكذلك بالنسبة للبطاقة السوداء يكون 2 من 3 بطاقات، إذن:

$$P(HB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{احتمال أن تكون البطاقة الأولى سوداء هو اثنان من أربع بطاقات.}$$

ثم تحقق مما إذا كان مجموع القيم الاحتمالية يساوي 1:

$$\begin{aligned} P(D) + P(HD) + P(HB) + P(B) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{6}{12} = \frac{12}{12} = 1 \end{aligned}$$

إذا كان المتغير X هو تكلفة جولة الجولف، فإن الجدول التالي يبين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

الناتج	D	H ثم D	H ثم B	B
التكلفة X =	0	25	40	40
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

أوجد القيمة المتوقعة

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 25\left(\frac{1}{12}\right) + 40\left(\frac{1}{6}\right) + 40\left(\frac{1}{2}\right) = 28.75$$

إذن القيمة المتوقعة للتكلفة بعد إجراء عملية السحب هي QR 28.75.

حاول أن تحل التمرين 10

التباين

استعملنا في السابق الانحراف المعياري لوصف انتشار مجموعة من الأعداد حول وسطها الحسابي. سوف نعتمد نفس هذه الفكرة، عندما يكون لدينا توزيع احتمالي لمتغير عشوائي، لتعريف **التباين** بأنه متوسط مربع انحراف كل قيمة للمتغير عن الوسط الحسابي.

التباين

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا منفصلًا، وكانت $P(X)$ دالة التوزيع الاحتمالي، فإن التباين هو

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 P(x_i)$$

حيث $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

يمكننا أيضًا، كما في **الانحراف المعياري**، أن نجد صيغة أخرى للتباين.

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 P(x_i)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left\{ [x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)] P(x_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n [x_i^2 P(x_i)] - 2E(X) \sum_{i=1}^n [x_i P(x_i)] + E^2(X) \sum_{i=1}^n P(x_i) \end{aligned}$$

نجد تربيع الفرق

$x_i - E(X)$
استعمل خاصية التوزيع
وخواص المجموع

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n [x_i^2 P(x_i)] - 2E^2(X) + E^2(X) \\ &= \sum_{i=1}^n [x_i^2 P(x_i)] - E^2(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [P(x_i)] &= 1 \text{ عوض} \\ \sum_{i=1}^n [x_i P(x_i)] &= E(X) \text{ و} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

نعرف الانحراف المعياري لأي متغير عشوائي كما يلي:

الانحراف المعياري

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو الجذر التربيعي لتباين هذا المتغير.

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

يبين الجدول التالي، وهو الجدول الذي رأيناه في الدرس السابق حول استهلاك الحليب، كيفية حساب التباين. نذكر أن

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^6 [x_i P(x_i)] \\ &= 0 \times 0.08 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.36 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.12 + 5 \times 0.04 \\ &= 2.2 \end{aligned}$$

لحساب التباين ننشئ الجدول التالي

X	P(X)	الانحراف (x - E(X))	مربع الانحراف (x - E(X)) ²	(x - E(X)) ² · P(x)
0	0.08	-2.2	4.84	0.3872
1	0.20	-1.2	1.44	0.2880
2	0.36	-0.2	0.04	0.0144
3	0.20	0.8	0.64	0.1280
4	0.12	1.8	3.24	0.3888
5	0.04	2.8	7.84	0.3136
المجموع الكلي				1.52

إذن،

$$\text{Var}(X) = \sum (x - E(X))^2 \cdot P(x) = 1.52$$

مثال 3 التباين

يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي لطلبات الزبائن اليومية من الحواسيب في متجر لبيع الحواسيب المحمولة.

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0.08	0.40	0.24	0.15	0.08	0.05

حيث X هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الحواسيب المطلوبة يوميًا. أوجد القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري للطلب اليومي على الحواسيب.

الحل

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \\ &= 0 \times 0.08 + 1 \times 0.40 + 2 \times 0.24 + 3 \times 0.15 + 4 \times 0.08 + 5 \times 0.05 \\ &= 1.9 \end{aligned}$$

لإيجاد التباين أنشئ الجدول التالي:

- ضع قيم X و P(X) المعطاة في العمودين الأول والثاني.
- ضع قيم الانحراف، أي قيم الفرق (X - E(X))، في العمود الثالث.
- ضع قيم تربيع قيم الانحراف، أي قيم (X - E(X))²، في العمود الرابع.
- ضع قيم (X - E(X))² · P(X) في العمود الأخير.

طريقة أخرى

يمكننا إيجاد التباين باستعمال الصورة الأخرى كما يلي:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

نجد أولاً:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^n [x_i^2 P(x_i)] \\ &= 0^2 \times 0.08 + 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.24 + 3^2 \\ &\quad \times 0.15 + 4^2 \times 0.08 + 5^2 \times 0.05 \\ &= 5.24 \\ E(X)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n [x_i P(x_i)] \right)^2 = (1.9)^2 = 3.61 \end{aligned}$$

إذن،

$$\text{Var}(X) = 5.24 - 3.61 = 1.63$$

X	$P(X)$	الانحراف $(x - E(X))$	مربع الانحراف $(x - E(X))^2$	$(x - E(X))^2 \cdot P(x)$
0	0.08	-1.9	3.61	0.2888
1	0.40	-0.9	0.81	0.324
2	0.24	-0.1	0.01	0.0024
3	0.15	1.1	1.21	0.1815
4	0.08	2.1	4.41	0.3528
5	0.05	3.1	9.61	0.4805

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 P(x_i)$$

استعمل قاعدة التباين

التباين هو مجموع القيم الواردة في العمود الأخير:

$$= 0.2888 + 0.324 + 0.0024 + 0.1815 + 0.3528 + 0.4805$$

$$= 1.63$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1.63} = 1.28$$

استعمل القاعدة لإيجاد الانحراف المعياري

حاول أن تحل التمرين 12

خصائص القيمة المتوقعة والتباين

يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.2	0.05	0.5	0.1	0.1	0.05

يمكننا إيجاد القيمة المتوقعة والتباين كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.05 + 2 \times 0.5 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.05 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 P(x_i) \\ &= (0 - 2)^2 \times 0.2 + (1 - 2)^2 \times 0.05 + (2 - 2)^2 \times 0.5 \\ &\quad + (3 - 2)^2 \times 0.1 + (4 - 2)^2 \times 0.1 + (5 - 2)^2 \times 0.05 \\ &= 1.8 \end{aligned}$$

المتغير العشوائي $Y = aX + b$ هو ببساطة المتغير الذي يأخذ القيمة $ax + b$ عندما يأخذ المتغير X القيمة x . أي أنه إذا كانت القيم الممكنة للمتغير X هي المجموعة $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ فإن القيم الممكنة للمتغير Y هي المجموعة $\{ax_1 + b, \dots, ax_i + b, \dots, ax_n + b\}$.

يمكننا ملاحظة العلاقة بين القيمة المتوقعة والتباين لكل من المتغيرين X و Y .

ونلاحظ أيضًا أن

$$P(X = x_i) = P(Y = ax_i + b)$$

على سبيل المثال، إذا كان المتغير العشوائي هو $3X$ بدلًا من X ، فإن

$$\begin{aligned}
 E(3X) &= \sum_{i=1}^n (3x_i) P(3x_i) \\
 &= 0 \times 0.2 + 3 \times 0.05 + 6 \times 0.5 + 9 \times 0.1 + 12 \times 0.1 + 15 \times 0.05 \\
 &= 6 \\
 &= 3(2) \\
 &= 3E(X)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(3X) &= \sum_{i=1}^n [3x_i - E(3X)]^2 P(3x_i) \\
 &= (0 - 6)^2 \times 0.2 + (3 - 6)^2 \times 0.05 + (6 - 6)^2 \times 0.5 \\
 &\quad + (9 - 6)^2 \times 0.1 + (12 - 6)^2 \times 0.1 + (15 - 6)^2 \times 0.05 \\
 &= 16.2 \\
 &= 9(1.8) \\
 &= 3^2 \text{Var}(X)
 \end{aligned}$$

وإذا كان المتغير العشوائي هو $3X + 5$ بدلاً من X ، فإن

$$\begin{aligned}
 E(3X + 5) &= \sum_{i=1}^n (3x_i + 5) P(3x_i) \\
 &= 5 \times 0.2 + 8 \times 0.05 + 11 \times 0.5 + 14 \times 0.1 + 17 \times 0.1 + 20 \times 0.05 \\
 &= 11 \\
 &= 3(2) + 5 \\
 &= 3E(X) + 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(3X + 5) &= \sum_{i=1}^n [(3x_i + 5) - E(3X + 5)]^2 P(3x_i + 5) \\
 &= (5 - 11)^2 \times 0.2 + (8 - 11)^2 \times 0.05 + (11 - 11)^2 \times 0.5 \\
 &\quad + (14 - 11)^2 \times 0.1 + (17 - 11)^2 \times 0.1 + (20 - 11)^2 \times 0.05 \\
 &= 16.2 \\
 &= 9(1.8) \\
 &= 3^2 \text{Var}(X)
 \end{aligned}$$

نلاحظ مما تقدم أن

$$E(3X) = 3E(X) \text{ و } E(3X + 5) = 3E(X) + 5$$

كذلك

$$\text{Var}(3X) = 9 \text{Var}(X) = 3^2 \text{Var}(X) \text{ و } \text{Var}(3X + 5) = 9 \text{Var}(X) = 3^2 \text{Var}(X)$$

لاحظ أن التباين لا يتأثر بالإضافة وإنما يتأثر بالضرب فقط.

يمكننا تعميم ما سبق كما يلي:

خصائص القيمة المتوقعة والتباين

إذا كان X هو متغيرًا عشوائيًا وكان a و b عددين ثابتين، فإن

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

مثال 4 استعمال خصائص القيمة المتوقعة والتباين (1)

يبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X .

X	5	10	15	20	25
$P(X)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{60}$

أوجد كلاً مما يلي:

A. $E(X)$

B. $E(2X - 3)$

C. $\text{Var}(2X - 3)$

الحل

A. $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$

$$= 5\left(\frac{3}{20}\right) + 10\left(\frac{7}{30}\right) + 15\left(\frac{1}{10}\right) + 20\left(\frac{3}{10}\right) + 25\left(\frac{13}{60}\right)$$

عوض قيم X واحتمالاتها

$$= 16$$

B. $E(2X - 3) = 2E(X) - 3 = 2 \times 16 - 3 = 29$

استعمل القاعدة وقيمة $E(X)$

C. $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 P(x_i)$

استعمل القاعدة وقيمة $\text{Var}(X)$

$$= 121\left(\frac{3}{20}\right) + 36\left(\frac{7}{30}\right) + 1\left(\frac{1}{10}\right) + 16\left(\frac{3}{10}\right) + 81\left(\frac{13}{60}\right)$$

$$= 49$$

$$\text{Var}(2X - 3) = 2^2 \text{Var}(X) = 4 \times 49 = 196$$

حاول أن تحل التمرين 14

يقدم المثال التالي المزيد من التدريب على إيجاد القيمة المتوقعة والتباين لتحويل خطي للمتغير العشوائي انطلاقاً من دالة احتماله.

مثال 5 استعمال خصائص القيمة المتوقعة والتباين (2)

إذا كانت دالة الاحتمال للمتغير X معرفة كما يلي:

$$P(X = x) = k(25 - x^2), x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

أوجد كلاً مما يلي:

A. k

B. $P(1 < x \leq 3)$

C. $E(X)$

(تابع)

D. $E(3X + 2)$

E. $\text{Var}(X)$

الحل

A. أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي بحساب $P(X)$ بدلالة k .

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	$24k$	$21k$	$16k$	$9k$	0

بما أن X متغير عشوائي، فإن مجموع الاحتمالات يجب أن يساوي 1، إذن

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 24k + 21k + 16k + 9k + 0 = 1$$

$$70k = 1$$

إذن

$$k = \frac{1}{70}$$

B. $P(1 < x \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= 37k$$

$$= \frac{37}{70}$$

$$k = \frac{1}{70}$$

C. $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$

استعمل قاعدة القيمة المتوقعة

$$= 1 \times 24k + 2 \times 21k + 3 \times 16k + 4 \times 9k + 5 \times 0$$

$$= 150k$$

$$= \frac{15}{7}$$

عوّض قيمة k

D. $E(3X + 2) = 3E(X) + 2$

استعمل القاعدة وقيمة $E(X)$

$$= 3 \times \frac{15}{7} + 2$$

$$= \frac{59}{7}$$

E. $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [(x_i - E(X))]^2 P(x_i)$

استعمل قاعدة التباين وقيم الجدول

$$= \left(1 - \frac{15}{7}\right)^2 \times 24k + \left(2 - \frac{15}{7}\right)^2 \times 21k + \left(3 - \frac{15}{7}\right)^2 \times 16k$$

$$+ \left(4 - \frac{15}{7}\right)^2 \times 9k + \left(5 - \frac{15}{7}\right)^2 \times 0$$

$$= \frac{261}{245}$$

بسط وعوّض قيمة k

حاول أن تحل التمرين 17

في التمارين 5-8، أوجد الانحراف المعياري في كل من الحالات التالية.

5. 1, 2, 4, 5
6. -1, 3, -6, 12, 0
7. 2.3, -1, 6.2
8. 1, 2, 10, 100

في التمارين 1-4، أوجد الوسط الحسابي لكل مجموعة من الأعداد التالية.

1. 1, 2, 4, 5
2. -1, 3, -6, 12, 0
3. 2.3, -1, 6.2
4. 1, 2, 10, 100

الدرس 8.2 التمارين

الرقم 5، والوجهان المتبقيان يحملان الرقم 10، أوجد القيمة المتوقعة لرمي هذا المجسم.

7. يدفع رواد مهرجان مبلغ QR 2 لأحد المهرجين ليخمن أوزانهم بهامش خطأ مقداره 5 lb، إذا كان تخمين المهرج صحيحاً يخسر اللاعب ماله ولا يربح شيئاً، وإذا كان هامش الخطأ في تخمينه من 5 إلى 10 lb يربح اللاعب جائزة قيمتها QR 5، وإذا كان هامش الخطأ أكبر من 10 lb يربح اللاعب QR 10. يكون تخمين المهرج صحيحاً في 72% من المرات، ويكون هامش الخطأ في تخمينه من 5 إلى 10 lb في 21% من المرات، ويكون هامش الخطأ أكبر من 10 lb في 7% من المرات. إذا كان المهرج يخمن أوزان 300 لاعب في المتوسط كل يوم، فهل يربح مهرج المهرجان المال أو يخسره؟ كم يربح أو يخسر يومياً؟

8. تعرض شركة لبيع الحواسيب المحمولة على زبائنها كفالة صيانة لمدة 3 سنوات بقيمة QR 79. تبين تقارير الاستهلاك، بشكل عام، أن تكلفة صيانة حواسيب 4% من الزبائن خلال هذه الفترة تبلغ QR 200 وتكلفة صيانة حواسيب 1% من الزبائن خلال هذه الفترة تبلغ QR 300. هل القيمة المتوقعة للكفالة خلال هذه الفترة جيدة بالنسبة للزبون الذي يدفع ثمنها؟

9. تعرض شركة لبيع أجهزة التلفاز على الزبائن كفالة صيانة لمدة 3 سنوات بقيمة QR 49، حيث تكون صيانة التلفاز مجانية خلال هذه الفترة. تشير تقارير الاستهلاك أن احتمال أن تبلغ تكلفة صيانة التلفاز QR 300 خلال هذه الفترة هو 5%، واحتمال أن تبلغ هذه التكلفة QR 500 هو 1%، لكن احتمال أن لا يحتاج التلفاز إلى أي صيانة خلال هذه الفترة هو 94%، بناءً على القيمة المتوقعة، هل يجب على الزبون شراء هذه الكفالة؟

1. أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي باستعمال القيم الواردة في الجدول التالي:

X	10	20	30
$P(X)$	0.5	0.3	0.2

2. أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي باستعمال القيم الواردة في الجدول التالي:

X	2	4	6	8
$P(X)$	0.1	0.2	0.3	0.4

3. تتضمن لعبة تحقيق النقاط من خلال رمي مكعب منتظم ذي تصميم خاص له 6 أوجه، 3 منها تحمل الرقم 5، ووجهان يحملان الرقم 10، والوجه السادس يحمل العدد 25، أوجد عدد النقاط المتوقعة التي قد يحققها اللاعب من رمي هذا المكعب.

4. تم تغيير تصميم وتوزيع وزن مكعب مرقم من 1 إلى 6 بحيث يظهر الرقم 6 في 60% من المرات. إذا كانت احتمالات ظهور الأوجه الخمسة الباقية متساوية، أوجد القيمة المتوقعة لرمي هذا المكعب.

5. يُستعمل القرص الدوار في العديد من ألعاب الأطفال. لنفترض أن القرص الدوار يتألف من 5 أقسام مرقمة من 1 إلى 5، وأن كل قسم من الأقسام 1 و 2 و 3 ربع دائرة والقسمين 4 و 5 يفتسمان الربع الرابع من الدائرة. أوجد القيمة المتوقعة لدورة واحدة للقرص الدوار.

6. يُستعمل في إحدى الألعاب مجسم اثنا عشري (أي له 12 وجهًا)، سبعة أوجه تحمل الرقم 1 وثلاثة أوجه تحمل

15. للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي التالي.

X	5	10	15	20	25
$P(X)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{30}$	k	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{60}$

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $P(X > 10)$.

c. أوجد $E(X)$.

d. أوجد $\text{Var}(X)$.

16. للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي التالي.

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	$\frac{9}{60}$	$\frac{7}{30}$	k	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{60}$

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $E(X)$.

c. أوجد $E(4X - 3)$.

d. أوجد $\text{Var}(5X)$.

17. للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P(X = x) = \frac{3k}{5}x, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $E(X)$.

c. أوجد $\text{Var}(X)$.

d. أوجد $E(3X + 5)$.

18. للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P(X = x) = \frac{kx}{4}, \quad x = 2, 4, 6, 8$$

اكتب جدولاً تبين فيه التوزيع الاحتمالي للمتغير X وأوجد قيمة k .

19. للمتغير العشوائي Y التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P(Y = y) = k(4 - y), \quad y = 0, 1, 2, 3, 4$$

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $P(1 \leq y < 3)$.

10. يتكوّن قرص دوار من 8 أقسام متساوية. احتمالات استقرار مؤشر

القرص الدوار على أيّ من هذه الأقسام متساوية. إذا استقر المؤشر على أربعة من الأقسام الثمانية لا يربح اللاعب شيئاً، وإذا استقر على ثلاثة منها يربح 6 QR، وإذا استقر على القسم الثامن يربح 10 QR. تكلفة الجولة الواحدة هو 5 QR. استعمل القيمة المتوقعة لتحديد ما إذا كان من الحكمة لعب هذه اللعبة.

11. قرر زوجان أن يواصلوا إنجاب الأطفال حتى يُرزقا بنت، لكنهما اتفقا على عدم إنجاب أكثر من 3 أولاد حتى لو كان الثلاثة صبياناً.

a. على افتراض أن احتمالي إنجاب صبي أو بنت متساويان، اكتب نموذجاً احتمالياً لعدد الأطفال الذين يمكن أن ينجبهم هذان الزوجان.

b. أوجد عدد الأطفال المتوقع لهذين الزوجين.

12. يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة، خمسة منها تحمل الرقم

1 و ثلاثة تحمل الرقم 2 و سبعة تحمل الرقم 3 و أربعة تحمل الرقم 4، وكرة واحدة تحمل الرقم 5، ليكن Y المتغير العشوائي الذي يمثل رقم الكرة المسحوبة عشوائياً من الكيس.

a. نطّم جدولاً يبيّن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y .

b. أوجد القيمة المتوقعة للمتغير Y .

c. أوجد قيمة التباين للمتغير Y .

13. يحتوي صندوق مغلق على ثمان كرات حمراء وأربع كرات بيضاء.

تم اختيار كرة بشكل عشوائي، وتم تسجيل لونها، ثم أعيدت إلى الصندوق. قمنا بهذه العملية ثلاث مرات. ليكن المتغير العشوائي X عدد الكرات الحمراء المسجلة.

a. اكتب جدولاً تبين فيه التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

b. أوجد القيمة المتوقعة لعدد الكرات الحمراء لهذه التجربة.

14. للمتغير العشوائي X خمس قيم ممكنة: 12، 13، 16، 18، 20، و يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي لهذه القيم.

X	12	13	16	18	20
$P(X)$	0.14	0.11		0.3	0.23

a. أوجد $P(16)$.

b. أوجد $E(X)$.

c. أوجد $E(2X + 4)$.

d. أوجد $\text{Var}(X)$.

e. أوجد $\text{Var}(5X)$.

استكشاف

27. **الانحراف المعياري** تقدم لعبة في مهرجان الجوائز حسب التوزيع الاحتمالي التالي:

$X =$ جائزة	QR 0	QR 10	QR 50	QR 100
$P(X)$	0.80	0.15	0.04	0.01

a. أوجد القيمة المتوقعة $E(X)$ للجائزة.

b. أوجد الانحراف المعياري لقيمة الجوائز.

c. **الكتابة للتعلم** فسر لماذا الانحراف المعياري كبير جدًا.

d. **الكتابة للتعلم** هل من الحكمة أن تدفع QR 5 للعب هذه اللعبة؟ بّين السبب.

توسيع الأفكار

28. للمتغير العشوائي Y التوزيع الاحتمالي التالي. أوجد قيمة k ، ثم أوجد القيمة المتوقعة والتباين.

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	0.1	0.11	k	$(2k - 1)^2$

29. للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي التالي.

$$P(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} & x = 2, 3, 4, 5, 6 \\ k & x = 7 \\ 0 & \text{للقيم الأخرى} \end{cases}$$

حيث k عدد ثابت. أوجد قيمة k ، ثم أوجد القيمة المتوقعة والتباين.

20. للمتغير العشوائي Y التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P(Y = y) = k(16 - y^2), y = 0, 1, 2, 3, 4$$

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $P(1 \leq y \leq 3)$.

c. أوجد $E(Y)$.

d. أوجد $\text{Var}(Y)$.

21. أثبت أن $E(aX + b) = aE(X) + b$

22. أثبت أن $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

أسئلة اختبار معيارية

23. **صواب أم خطأ** القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي هي إحصاء يمكن حسابه من عينة من البيانات. بّزر إجابتك.

24. **صواب أم خطأ** في أي مجموعة بيانات، يكون 16% من القيم أكبر من القيمة المتوقعة بمقدار انحراف معياري واحد. بّزر إجابتك.

25. **اختيار من متعدد** يبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي.

X	50	20	5
$P(X)$	0.1	0.3	0.6

أي خيار من الخيارات التالية هو القيمة المتوقعة للمتغير؟

A. 4.67

B. 5

C. 7.5

D. 14

E. 25

26. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية صحيح دائمًا؟

A. $\text{Var}(X) > 1$

B. $\text{Var}(X) < 1$

C. $\text{Var}(X) > 0$

D. $\text{Var}(X) < 0$

E. $\text{Var}(X) \geq 0$

Binomial Distribution

8.3 التوزيع ذو الحدين

ما ستتعلمه

- التجربة ذات الحدين
- التوزيع ذو الحدين

...ولماذا

عندما تعتمد تجربة احتمالية على التكرار، ويكون إحصاء نواتج التجربة مستندًا إلى مبدأ العد، يكون للتوزيع الاحتمالي لنواتج هذه التجربة إطار خاص يسمى التوزيع ذو الحدين. مثال على ذلك عند رمي قطعة نقدية عدة مرات يكون للنتيجة في كل مرة احتمالان يشكل أحدهما نجاحًا والثاني إخفاقًا.

معايير الدرس

12A.9.1

12A.9.2

12A.9.3

12A.9.4

المصطلحات

- التجربة ذات الحدين binomial experiment
- التوزيع ذو الحدين binomial distribution

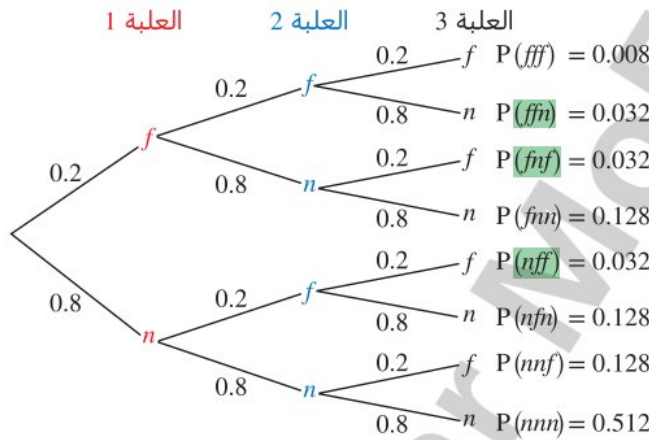
التجربة ذات الحدين

نبدأ أولاً بشرح نوع التجارب الاحتمالية التي تؤدي إلى اعتماد التوزيع الاحتمالي. على سبيل المثال، لنفترض أن شركة لبيع أطعمة الأطفال وضعت صوزًا في 20% من علب حبوب الإفطار التي تنتجها لاجتذاب الأطفال. إذا اشترت ثلاث علب من هذه العلب، ما قيمة احتمال أن تحصل على ثلاث صوز؟

الحصول على ثلاث صوز يعني أن العلبة الأولى تحتوي على صورة (باحتمال 0.2) وكذلك الثانية (0.2) والثالثة أيضًا (0.2). إذن الحصول على ثلاث صوز يعني أن تتقاطع ثلاثة أحداث، أي أن تحتوي كل علبة على صورة، ما يعني أن قيمة الاحتمال هي $0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.008$

إذا كان السؤال عن قيمة احتمال الحصول على صورتين بالضبط، فإن المسألة تصبح معقدة أكثر. يمكننا الاستعانة بمخطط الشجرة للحصول على الإجابة.

ليكن f حدث "الحصول على صورة" و n حدث "عدم الحصول على صورة":



نحصل على صورتين في الحالات التالية:

- أن تحتوي كل من العلبتين الأولى والثانية فقط على صورة.
- أن تحتوي كل من العلبتين الأولى والثالثة فقط على صورة.
- أن تحتوي كل من العلبتين الثانية والثالثة فقط على صورة.

إن قيمة احتمال الحصول على صورتين بالضبط في كل من هذه الحالات هي $0.2 \times 0.2 \times 0.8 = 0.032$ ، وهي نفسها في جميع الحالات لأن الترتيب لا يؤثر في نتيجة عملية الضرب. إذن احتمال الحصول على صورتين بالضبط تساوي ناتج ضرب قيمة احتمال كل حالة في عدد الحالات.

لكن ماذا لو كانت لدينا خمس علب ونريد معرفة قيمة احتمال الحصول على صورتين فقط؟ هنا أيضًا نحتاج إلى معرفة عدد الحالات التي نحصل فيها على صورتين فقط وقيمة احتمال كل حالة.

تذكير

نرمز لعدد توافيق مجموعة مكونة من r عنصر من العناصر المتميزة مأخوذة من n عنصر بالرمز ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \leq r \leq n$$

إذا كان $r > n$ ، فإن ${}_nC_r = 0$

إن استعمال مخطط الشجرة ليس عمليًا في هذه الحالة، وذلك نظرًا لتضاعف الأعداد. لمعرفة قيمة احتمال كل حالة علينا أن نلاحظ أن علبتين فقط يجب أن تحتويا على صورة (باحتمال 0.2) دون العلب الثلاث الأخرى (باحتمال 0.8)، وليس مهمًا أي العلب تحتوي على صورة وأياها خالية من الصور.

إذن، قيمة احتمال كل حالة على حدة هي $(0.2)^2 \times (0.8)^3$ ، أي أن احتمال أن تحتوي العلبتان الأولى والثانية على صور دون العلب الأخرى هو $(0.2)^2 \times (0.8)^3$ ، واحتمال أن تحتوي العلبتان الثانية والثالثة على صور دون العلب الأخرى هو $(0.2)^2 \times (0.8)^3$ ، وهكذا. إذا قمنا بتعداد هذه الحالات نجد أنها 10، وهذا العدد، أي 10، هو عدد التوافيق الذي حصلنا عليه عند دراسة مبادئ العد. في هذا المثال عدد التوافيق اثنين من أصل خمسة أي ${}_5C_2 = 10$ لذلك فإن احتمال أن نحصل على صورتين في الخمس علب يساوي:

$${}_5C_2 (0.2)^2 \times (0.8)^3 = 10 (0.2)^2 \times (0.8)^3$$

يمكننا تمييز هذا النوع من التجارب في العديد من الحالات، كما في تجربة رمي قطعة نقدية بشكل متكرر على سبيل المثال.

ثمة أمثلة واقعية تحاكي هذا النوع من التجارب بالتحديد، مثل استطلاعات الرأي التي تجري قبل الانتخابات لتقدير اتجاهات الرأي العام، حيث يمكننا تمثيل احتمال تصويت الناخبين لأحد المرشحين بوجهي القطعة النقدية، فهو "صورة" إذا كان الناخب سيصوّت لهذا المرشح، و"كتابة" إذا كان سيصوّت لغيره، وليست هناك احتمالات أخرى.

هذا النوع من التجارب يُسمى **التجربة ذات الحدين** ونعرّفها كما يلي:

خصائص التجربة ذات الحدين

التجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تتصف بما يلي:

1. تقوم التجربة ذات الحدين على تكرار المحاولة n مرة.
2. لكل محاولة ناتجان ممكنان، الأول يدلّ على "نجاح" المحاولة (S) والثاني يدلّ على "إخفاق" المحاولة (F).
3. قيم احتمال النجاح في المحاولة هي قيمة ثابتة تساوي p ، وبالتالي إذا كانت q هي قيمة احتمال الإخفاق، فإن $p + q = 1$ أو $q = 1 - p$.

إرشاد

في تجربة ذات الحدين يجب أن تكون جميع المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.

مثال 1 تجربة ذات حدين

حدد ما إذا كانت التجربة في كل من الحالتين التاليتين تجربة ذات حدين أم لا.



A. يتم تدوير القرص المجاور 3 مرات. لنفترض أن فرص استقرار مؤشر القرص على جميع الأقسام لها نفس إمكانية الحدوث، وأن المحاولة الناجحة هي عندما يستقر المؤشر على القسم "تقدم خطوتين".

B. صف مكون من 23 طالبًا، 7 طلاب منهم يتعلمون اللغة اليابانية. اخترنا أحد طلاب الصف عشوائيًا ثم اخترنا طالبًا ثانيًا عشوائيًا. النجاح في هذه التجربة يكون في اختيار طالب يتعلم اللغة اليابانية.

الحل

A. قارن بين هذه التجربة ومتطلبات التجربة ذات الحدين.

- هناك ناتجان محتملتان لكل محاولة، وهما استقرار مؤشر القرص على أحد القسمين "تقدم خطوتين" (نجاح) وعدم استقرار المؤشر على أي من هذين القسمين (إخفاق).
- لا تؤثر نتيجة أي محاولة في احتمال النجاح في المحاولات الأخرى.
- احتمال النجاح هو 0.25 واحتمال الإخفاق هو 0.75 لكل محاولة. إذن، هذه التجربة هي تجربة ذات حدين.

B. احتمال أن يكون الطالب الأول يتعلم اليابانية هو $\frac{7}{23}$.

- إذا كان الطالب الأول يتعلم اليابانية، فإن احتمال أن يكون الطالب الثاني يتعلم اليابانية هو $\frac{6}{22}$.
- أما إذا لم يكن الطالب الأول يتعلم اليابانية فإن احتمال أن يكون الطالب الثاني يتعلم اليابانية هو $\frac{7}{22}$.
- بما أن الاحتمالين في المحاولتين مختلفان أي أن نتيجة المحاولة الثانية تتأثر بنتيجة المحاولة الأولى، فإن التجربة ليست تجربة ذات حدين.

حاول أن تحل التمرينين 1 و 2

التوزيع ذو الحدين

ثمة أطر للتوزيع الاحتمالي يمكن اعتمادها على نطاق واسع في العديد من التجارب. سوف نتناول في هذا الدرس واحدًا من هذه الأطر هو **التوزيع ذو الحدين**. يمكننا في تجربة ذات حدين استعمال مبادئ العد لإيجاد قيمة احتمال الحصول على r ناتج ناجح من أصل n محاولة، وهذا ما يُعرف "بالتوزيع ذي الحدين".

التوزيع ذي الحدين

إذا كان المتغير المنفصل لتجربة ذات حدين هو عدد المحاولات الناجحة من أصل n محاولة، فإن التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يُسمى **التوزيع ذا الحدين**، ويعطى بدالة الاحتمال

$$P(X = r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$$

حيث p قيمة احتمال النجاح في كل محاولة، و $q = 1 - p$ قيمة احتمال الإخفاق.

نكتب $X \sim B(n, p)$ للقول بأن التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو توزيع ذو حدين لتجربة عدد المحاولات فيها n محاولة واحتمال النجاح في كل محاولة منها هو p .

مثال 2 رمي مكعب منتظم مرقم

إذا رمينا مكعبًا مرقمًا (من 1 إلى 6) 4 مرات، أوجد قيمة احتمال

A. أن نحصل على العدد 3 في كل مرة.

B. أن لا نحصل على العدد 3 في أي مرة.

C. أن نحصل على العدد 3 مرتين.

الحل

التجربة هنا هي تجربة ذات حدين لأن قيمة احتمال الحصول على العدد 3 في كل مرة هي $\frac{1}{6}$ وهي قيمة ثابتة، ولا يؤثر ناتج أي محاولة في نواتج المحاولات الأخرى. لذلك تمثل احتمال "النجاح" أي أن $p = \frac{1}{6}$ و $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ويكون عدد المحاولات $n = 4$.
A. ليكن X عدد المرات التي تحصل فيها على العدد 3 (أي عدد النجاحات).

استعمل قاعدة دالة الاحتمال للتوزيع ذي الحدين

$$\begin{aligned} P(X = r) &= {}_nC_r p^r q^{n-r} \\ P(X = 4) &= {}_4C_4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-4} \\ &= {}_4C_4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\ &\approx 0.00077 \end{aligned}$$

عوض $r = 4$ و $q = \frac{5}{6}$ و $p = \frac{1}{6}$

عوض ${}_4C_4 = 1$

إذن، احتمال الحصول على رقم 3 أربع مرات هو 0.00077 تقريبًا.

B. أن لا نحصل على العدد 3 في أي مرة يعني أن $X = 0$.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= {}_4C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0} \\ &= {}_4C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &\approx 0.48225 \end{aligned}$$

استعمل قاعدة دالة الاحتمال للتوزيع ذي الحدين حيث $r = 0$ و $q = \frac{5}{6}$ و $p = \frac{1}{6}$

عوض ${}_4C_0 = 1$

إذن، احتمال أن لا نحصل على رقم 3 في أي مرة هو 0.48225 تقريبًا.

النواتج الممكنة

النواتج الممكنة للحصول على العدد 3 مرتين هي
 $\{33NN, 3N3N, 3NN3, N33N, N3N3, NN33\}$
 حيث N يمثل الحصول على عدد غير العدد 3

C. أن تحصل على العدد 3 مرتين يعني أن $X = 2$.

$$P(X = 2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

استعمل قاعدة دالة الاحتمال للتوزيع

ذي الحدين حيث $p = \frac{1}{6}$ و $q = \frac{5}{6}$ و $r = 2$

$$= 6 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

عوض ${}_4C_2 = 6$

$$= 0.11574$$

إذن، احتمال أن نحصل على رقم 3 مرتين هو 0.11574

حاول أن تحل التمرين 6

ندرك أهمية التوزيع ذي الحدين عندما تكون الأعداد كبيرة وعملية العد والحساب تحتاج إلى خطوات متعددة.

مثال 3 رميات حرة

على فرض أن جاسم يسجل 90% من رمياته الحرة في لعبة كرة السلة. إذا نفذ 20 رمية حرة وكان احتمال تسجيل هدف في كل رمية مستقلاً عن الرميات الأخرى (وهذا قد لا يكون ممكناً في مباراة فعلية)، فأوجد قيمة الاحتمال في كل من الحالات التالية:

A. أن يسجل جاسم هدفًا في كل رمية من رمياته العشرين.

B. أن يسجل 18 هدفًا في 20 محاولة.

C. أن يسجل 18 هدفًا على الأقل في 20 محاولة.

الحل

التوزيع الاحتمالي هنا هو توزيع ذو حدين. لأن هناك عددًا محددًا من الرميات حيث يشكل تسجيل الهدف نجاحًا.

إذن $n = 20$ و $p = 90\% = 0.9$ و $q = 0.1$.

A. أن يسجل جاسم هدفًا في كل رمية يعني أن $X = 20$.

$$P(X = 20) = {}_{20}C_{20} (0.9)^{20} (0.1)^0$$

استعمل قاعدة دالة الاحتمال للتوزيع ذي الحدين.

$$= (0.9)^{20}$$

عوض ${}_{20}C_{20} = 1$

$$\approx 0.12158$$

إذن، احتمال أن يصيب الهدف في كل رمية من رمياته العشرين هو 0.12158 تقريبًا.

B. أن يسجل جاسم 18 هدفًا في 20 محاولة يعني أن $X = 18$.

$$P(X = 18) = {}_{20}C_{18} (0.9)^{18} (0.1)^2$$

استعمل قاعدة دالة الاحتمال للتوزيع ذي الحدين.

$$\approx 0.28518$$

إذن، احتمال أن يسجل 18 هدفًا في عشرين محاولة هو 0.28518 تقريبًا.

(تابع)

قانون جمع احتمالات الحوادث المتنافية

يسمى الحدثان A و B من فضاء عينة S حدثين متنافيين إذا كان $A \cap B = \emptyset$ ، أي أنه لا يوجد بينهما أي ناتج مشترك. إذن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C. أن يسجل جاسم 18 هدفًا على الأقل في 20 محاولة يعني أن $X \geq 18$ أي أن $X = 18$ أو $X = 19$ أو $X = 20$.
استعمل قانون الجمع في الاحتمالات:

$$P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$$

استعمل قاعدة دالة الاحتمال للتوزيع ذي الحدين

$$= {}_{20}C_{18} (0.9)^{18} (0.1)^2 + {}_{20}C_{19} (0.9)^{19} (0.1)^1 + {}_{20}C_{20} (0.9)^{20} (0.1)^0 \\ = 0.6769$$

إذن، احتمال أن يسجل 18 هدفًا على الأقل في عشرين محاولة هو 0.6769

حاول أن تحل التمرين 7

تذكر أننا، لوصف أي توزيع احتمالي لمتغير منفصل بدقة، نقوم بتحديد الوسط الحسابي الذي هو القيمة المتوقعة، وشكل انتشار قيم المتغير حول القيمة المتوقعة من خلال التباين. سنعمل الأمر ذاته بالنسبة للتوزيع ذي الحدين.

في المثال السابق، كان القول إن قيمة احتمال النجاح هي 0.9 يعني أن القيمة المتوقعة لعدد المحاولات الناجحة هي 90% من أصل 20 رمية أي 18، لكن هذه الطريقة تعتمد على ضرب عدد المحاولات في قيمة احتمال "النجاح" لإيجاد القيمة المتوقعة، وهي ليست القاعدة المتبعة مع أنها يجب أن تكون كذلك منطقيًا.

على سبيل المثال، نرمي قطعة نقدية خمس مرات ونريد معرفة القيمة المتوقعة لعدد المرات التي نحصل فيها على "صورة".

من الناحية المنطقية، بما أن قيمة احتمال الحصول على "الصورة" كل مرة هو $\frac{1}{2}$ ، فإن القيمة المتوقعة هي $5 \left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$

هذا يؤكد صحة تطبيق القاعدة المتبعة لإيجاد القيمة المتوقعة.

قيم المتغير المنفصل الذي يمثل عدد المرات التي نحصل فيها على "الصورة" هي:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

نحسب مثلًا

$$P(X = 2) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ = \frac{10}{32}$$

يبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي ذو الحدين لهذا المتغير.

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

القيمة المتوقعة هي:

$$E(X) = 0 \times P(0) + 1 \times P(1) + 2 \times P(2) + 3 \times P(3) + 4 \times P(4) + 5 \times P(5) \\ = 0 \left(\frac{1}{32}\right) + 1 \left(\frac{5}{32}\right) + 2 \left(\frac{10}{32}\right) + 3 \left(\frac{10}{32}\right) + 4 \left(\frac{5}{32}\right) + 5 \left(\frac{1}{32}\right) \\ = 2.5$$

فيما يلي القاعدة العامة لكل من القيمة المتوقعة والتباين في التوزيع ذي الحدين.

القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري في التوزيع ذي الحدين

إذا كان المتغير X هو عدد المحاولات الناجحة في تجربة ذات حدين تقوم على تكرار n محاولة، وكانت قيم احتمال النجاح في كل محاولة هي p ، و $q = 1 - p$ ، فإن

القيمة المتوقعة: $E(X) = np$

التباين: $Var(X) = npq$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{npq}$

يكفي أن نلاحظ أن $r({}_nC_r) = n({}_{n-1}C_{r-1})$ لكل $r \geq 1$ لنثبت أن

$$E(X) = \sum r P(r)$$

$$= \sum_{r=0}^n r({}_nC_r) p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=1}^n np({}_{n-1}C_{r-1}) p^{r-1} q^{(n-1)-(r-1)}$$

$$= np[{}_{n-1}C_0 p^0 q^{n-1} + {}_{n-1}C_1 p^1 q^{n-2} + \dots + {}_{n-1}C_{n-1} p^{n-1} q^0]$$

$$= np(p + q)^{n-1}$$

$$= np$$

يمكننا إثبات أن $Var(X) = npq$ بالطريقة نفسها، إذ لا يمكننا إيجاد قيمة التباين بطريقة حدسية كما نفعل عند إيجاد القيمة المتوقعة.

مثال 4 الشامبانزي والكيمياء العضوية

تم عرض مئة سؤال اختيار من متعدد في الكيمياء العضوية (سؤال واحد كل مرة) على شاشة موضوعة أمام شامبانزي، مع خيارات متعددة (A, B, C, D, E)، واحد منها هو الإجابة الصحيحة. وكان على الشامبانزي أن يختار عشوائيًا إجابة واحدة في كل مرة.

A. أوجد عدد الإجابات الصحيحة المتوقعة.

B. أوجد التباين لهذه التجربة.

الحل

A. بما أن الشامبانزي لا يمكنه أن يميز بين خيارات الإجابة، فإن احتمالات الإجابات الخمس لكل سؤال متساوية. هكذا نحصل على تجربة ذات حدين احتمال الإجابة الصحيحة لكل سؤال فيها هو $p = \frac{1}{5} = 0.2$ وبالتالي احتمال الإجابة الخطأ هو $q = 0.8$ وعدد المحاولات هو $n = 100$.

إذن القيمة المتوقعة هي:

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 100\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= 20 \end{aligned}$$

(تابع)

جزء التخمين

قد تعلم أنه يتم تسجيل النتائج في بعض الاختبارات المعيارية من خلال صيغة تسمى "صيغة جزء التخمين". في اختبار يتضمن خمسة خيارات، كما في المثال 4، صيغة أن يكون هناك R جواب صحيح و W جواب خاطئ هي $W = \frac{1}{4}R - \frac{1}{4}$. تتحول بذلك نتيجة الشامبانزي المتوقعة التي قيمتها 20 إلى $0 = \frac{1}{4}(80) - \frac{1}{4}$ ، والتي هي انعكاس أدق عما يعرفه الشامبانزي فعليًا عن الكيمياء العضوية، وهي في الحقيقة ليست جزءًا من أي نوع.

أي أن من المتوقع أن تكون 20% من إجابات الشامبانزي صحيحة.
B. التباين هو:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= npq \\ &= 100(0.2)(0.8) \\ &= 16\end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 8

فيما يلي مثال عن حساب احتمالات تجربة ذات حدين.

مثال 5 فعالية الإعلانات

- أفادت بعض الدراسات حول فعالية الإعلانات لتسويق المنتجات أن 4 من كل 10 متصفحين لشبكة الإنترنت يتذكرون لاحقًا بعض الإعلانات التي مرت في أعلى الشاشة. إذا اخترنا عشوائيًا 20 متصفحًا من بين الذين قمنا بتمرير أحد الإعلانات على شاشاتهم.
- A. أوجد العدد المتوقع للأشخاص الذين سيتذكرون الإعلان من هؤلاء العشرين.
B. أوجد احتمال أن يتذكر الإعلان 5 أشخاص من هؤلاء العشرين.
C. أوجد احتمال أن يتذكر الإعلان متصفح واحد على الأكثر.
D. أوجد احتمال أن يتذكر الإعلان متصفحان على الأقل.

الحل

A. إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد الأشخاص الذين يتذكرون الإعلان بعد تصفح الإنترنت من أصل 20 شخصًا، فإن التوزيع الاحتمالي هو توزيع ذو حدين:

$$X \sim B(20, 0.4)$$

إذن العدد المتوقع للأشخاص الذين يتذكرون الإعلان هو

$$E(X) = np = 20 \times 0.4 = 8$$

إذن من المتوقع أن يتذكر 8 أشخاص الإعلان بعد تصفح الإنترنت.

B. أن يتذكر الإعلان 5 أشخاص يعني أن $X = 5$.

$$\begin{aligned}P(X = 5) &= {}_{20}C_5 (0.4)^5 (0.6)^{15} \\ &\approx 0.0746\end{aligned}$$

استعمل قاعدة دالة الاحتمال للتوزيع ذي الحدين

إذن، احتمال أن يتذكر الإعلان خمسة أشخاص من هؤلاء العشرين هو 0.0746 تقريبًا.

C. أن يتذكر الإعلان متصفح واحد على الأكثر يعني أن $X \leq 1$ أي أن $X = 0$ أو $X = 1$.

$$\begin{aligned}P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= {}_{20}C_0 (0.4)^0 (0.6)^{20} + {}_{20}C_1 (0.4)^1 (0.6)^{19} \\ &\approx 0.000524\end{aligned}$$

(تابع)

```
binompdf(20, .4, 5)
.0746
```

```
binomcdf(20, .4, 1)
5.24049377E-4
```

الشكل 8.3.1 يمكننا أيضًا استعمال الحاسبة لإيجاد الإجابة في المثال 5، وذلك بإدخال المدخلات المطلوبة لكل سؤال.

إذن، احتمال أن يتذكر الإعلان متصفح واحد على الأكثر هو 0.000524

D. أن يتذكر الإعلان متصفهان على الأقل يعني أن $X \geq 2$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - 0.000524$$

$$= 0.999476$$

إذن، احتمال أن يتذكر الإعلان متصفهان على الأقل هو 0.999475

حاول أن تحل التمرين 9

مراجعة سريعة 8.3

في التمارين 5-8، أوجد قيمة المقدار.

$$5. {}_9C_2 + {}_9C_7$$

$$6. {}_9C_7 - {}_9C_2$$

$$7. {}_{10}C_0 + {}_{10}C_{10}$$

$$8. {}_4C_2 - {}_6C_2$$

في التمارين 1-10، أوجد قيمة المقدار.

$$1. {}_4C_4$$

$$2. {}_4C_0$$

$$3. {}_8C_2$$

$$4. {}_8C_6$$

الدرس 8.3 التمارين

5. يرمي لاعب كرة سلة رميتين حرتين. احتمال التسجيل في المرة الأولى 0.86 وفي الرمية الثانية 0.92

6. نرمي مكعبًا منتظمًا مرقمًا 4 مرات. أوجد قيمة احتمال كل مما يلي:

a. أن نحصل على الرقم 6 مرة واحدة.

b. أن نحصل على الرقم 6 مرتين فقط.

c. أن نحصل على الرقم 6 مرتين على الأقل.

7. نرمي عملة معدنية 10 مرات. أوجد قيمة احتمال كل مما يلي:

a. أن نحصل على "الصورة" 5 مرات بالضبط.

b. أن نحصل على "الصورة" 8 مرات بالضبط.

c. أن نحصل على "الصورة" 8 مرات على الأقل.

8. يرمي خالد سهامًا نحو لوح هدف. احتمال أن يصيب مركز الهدف هو 0.85، إذا رمى خالد 50 سهمًا، أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد المرات التي يمكن أن يصيب فيها مركز الهدف.

في التمارين 1-5، حدد ما إذا كانت التجربة ذات حدين أم لا. إذا كانت تجربة ذات حدين، أوجد احتمال النجاح وفشره.

1. لديك 7 بطاقات، كُتب على 4 منها الحرف A وعلى 3 منها الحرف B. تختار بطاقة عشوائيًا من دون إعادتها، ثم تختار بطاقة ثانية عشوائيًا كذلك. "النجاح" هو أن تختار بطاقة كُتب عليها الحرف A في كل مرة.

2. نرمي مكعبًا منتظمًا مرقمًا 4 مرات. افترض أن احتمالات الحصول على أي رقم في المرات الأربع متساوية. "النجاح" هو الحصول على عدد زوجي في كل رمية.

3. يختبر مدير قسم الإنتاج في مصنع لأجهزة الإنارة عينة مكونة من 50 مصباحًا كهربائيًا. "النجاح" هو أن تستمر إضاءة المصباح مدة 2 000 ساعة من دون أن تطفئ. احتمال "النجاح" لكل مصباح هو 0.9

4. توجد على طاولة 10 بطاقات سوداء و 10 بطاقات حمراء. سحبنا إحدى البطاقات ثم بطاقة أخرى بشكل عشوائي. "النجاح" هو سحب بطاقة حمراء.

15. تم إجراء استطلاع للرأي شمل 20 شخصًا بالغًا في مدينة كبيرة. كان الهدف من الاستطلاع معرفة ما إذا كان سكان المدينة يؤيدون قرار منع التدخين في المطاعم أم لا. إذا كان 60% من السكان يؤيدون هذا القرار، وكان X عدد الأشخاص الذين يؤيدون القرار،

a. أوجد احتمال أن يكون 5 من الأشخاص العشرين ممن يؤيدون القرار.

b. أوجد احتمال أن لا أحد من هؤلاء الأشخاص ممن يؤيدون القرار.

c. أوجد احتمال أن شخصًا واحدًا منهم على الأقل يؤيد القرار.

d. أوجد احتمال أن شخصين منهم على الأقل يؤيدان القرار.

e. أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لنواتج هذا الاستطلاع.

16. لنفترض أن لدينا توزيعًا احتماليًا ذا حدين حيث $n = 6$ و $p = 0.3$. أكمل الجدول التالي.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(x = k)$							

17. أعد حل التمرين السابق باستعمال $n = 7$ و $p = 0.4$.

18. في برنامج مسابقات، يُسأل المتسابق 6 أسئلة. لكل سؤال 5 خيارات للإجابة. لنفترض أن المتسابق يختار إجابة كل سؤال بشكل عشوائي، وأن احتمال تخمين الإجابة الصحيحة هو 20%. ما احتمال تخمين 4 إجابات صحيحة على الأقل؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة بالمئة.

أسئلة اختبار معيارية

19. صواب أم خطأ في تجربة يرمى فيها مكعب منتظم مرقم (من 1 إلى 6)، 7 مرات. تعدّ الرمية ناجحة عند الحصول على عدد أصغر من 3، حاول خليفة حساب احتمال 5 رميات ناجحة كما هو مبين أدناه. هل ما كتبه خليفة صحيح؟ بَرِّر إجابتك.

$$P(5) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0.002$$

9. لنفترض أن لاعب كرة سلة يسجل 80% من الرميات الحرة. إذا أعطاه الحكم 6 رميات حرة في المباراة.

a. أوجد القيمة المتوقعة والتباين لعدد الرميات المسجلة.

b. أوجد احتمال أن يسجل 5 رميات منها بالضبط.

c. أوجد احتمال أن لا يسجل أكثر من رميتين.

10. يستعمل 12% تقريبًا من الناس اليد اليسرى. أوجد احتمال كل ناتج من النواتج التالية في صف يضم 15 طالبًا.

a. 3 طلاب بالضبط يستعملون اليد اليسرى.

b. طالبان على الأكثر يستعملان اليد اليسرى.

11. لنفترض أن الإشارة الضوئية عند مدخل الشارع المؤدي إلى مدرستك تكون حمراء خلال 40% من زمن تحولها من اللون الأخضر إلى اللون الأصفر فاللون الأحمر. أوجد احتمال أن تتوقف حافلة المدرسة عند هذه الإشارة

a. في 5 أيام بالضبط خلال 10 أيام.

b. في 8 أيام على الأقل خلال 10 أيام.

12. يفيد تقرير للهلال الأحمر أن فئة دم 11% من الناس هي B. من بين 12 متبرعًا بالدم، أوجد احتمال

a. أن تكون فئة دم شخص واحد فقط B.

b. أن تكون فئة دم شخصين على الأقل B.

13. **الكتابة للتعليم** نرمي مكعبًا منتظمًا مرقمًا من 1 إلى 6، وليكن المتغير العشوائي X الرقم الذي يظهر.

a. وضح لماذا التوزيع الاحتمالي للمتغير X ليس توزيعًا ذا حدين.

b. إذا رمينا هذا المكعب، عَرِّف متغيرًا عشوائيًا يكون توزيعه الاحتمالي ذا حدين.

14. لدينا التوزيع الاحتمالي ذو الحدين التالي:

$$P(X = x) = {}_5C_x (0.6)^x (0.4)^{5-x}$$

حيث $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

a. أنشئ جدولًا لهذا التوزيع الاحتمالي.

b. أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري.

استكشاف

23. الانحراف المعياري في تجربة ذات حدين لنفترض أن المتغير

العشوائي X هو عدد مرات الحصول على "الصورة" في 4 رميات للقطعة النقدية.

القيم المحتملة للمتغير هي 0، 1، 2، 3، 4

a. أنشئ توزيعًا احتماليًا للمتغير X .

b. أوجد قيمة $E(X)$ باستعمال صيغة القيمة المتوقعة:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$$

c. استعمل صيغتي التباين والانحراف المعياري

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 P(x_i)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

لإيجاد التباين والانحراف المعياري لعدد "الصورة" الظاهرة.

d. الكتابة للتعلم تأكد من أن القيم التي وجدتها هي ذاتها

القيم التي ممكن أن تجدها باستعمال الصيغ المختصرة

$$\sigma = \sqrt{npq} \text{ و } E(X) = np$$

توسيع الأفكار

24. إذا كان $X \sim B(n, p)$ ، أثبت أن

$$\text{Var}(X) = npq$$

حيث $q = 1 - p$.

20. صواب أم خطأ إذا كان احتمال إصابة السهم للهدف هو 0.4،

فإن عدد إصابات الهدف المتوقعة عند رمي السهم 100 مرة هو 60

هل هذا صحيح؟ بزر إجابتك.

21. اختيار من متعدد في تجربة، ستقوم برمي قطعة اللعب



المبينة في الشكل المجاور مرتين.

القطعة مكونة من 10 أوجه متساوية

المساحة، وعلى كل وجه من أوجهها أحد

الأرقام من 0 إلى 9، لنفترض أن فرص

استقرار القطعة على أي وجه من الأوجه لها

نفس إمكانية الحدوث، وأن الرمية الناجحة

هي عندما تستقر القطعة بحيث يكون الوجه الذي يحمل الرقم

3 في الأعلى. لتكن P الدالة المعزفة على $\{0, 1, 2\}$ حيث $P(n)$

هو احتمال n محاولة ناجحة. أي الخيارات التالية ليس صحيحًا؟

A. P هي توزيع احتمالي لفضاء العينة $\{0, 1, 2\}$

B. $P(0) = 0.81$

C. $P(1) = 0.09$

D. $P(2) = 0.01$

E. التجربة ذات حدين

22. اختيار من متعدد نرمي مكعبًا منتظمًا مرقمًا 6 مرات، وشرط

نجاح التجربة هو الحصول على عدد أكبر من 4 في كل مرة.

إذا قربنا الإجابة إلى أقرب نسبة مئوية، أي الخيارات التالية

يمثل احتمال الحصول على محاولتين ناجحتين بالضبط؟

A. 2%

B. 8%

C. 23%

D. 33%

E. 50%

8.4

التوزيع الطبيعي

ما ستتعلمه

- المتغير العشوائي المتصل والتوزيع الطبيعي
- التوزيع الطبيعي المعياري

...ولماذا

يستعمل التوزيع الطبيعي في مختلف المواقف الواقعية، كالعلوم الطبيعية والاجتماعية، لتمثيل متغيرات عشوائية ذات قيم حقيقية لا نعرف توزيعها، كالارتفاعات، وضغط الدم، وهامش الخطأ في القياسات، وقياس مستوى الذكاء، IQ، وهذه كلها متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي.

معايير الدرس

12A.10.1

12A.10.2

12A.10.3

المصطلحات

- دالة الكثافة الاحتمالية

probability density function

- التوزيع الطبيعي normal distribution

- القاعدة التجريبية empirical rule

- الدرجة المعيارية z z-score

- التوزيع الطبيعي المعياري

standard normal distribution

- معكوس التوزيع الطبيعي

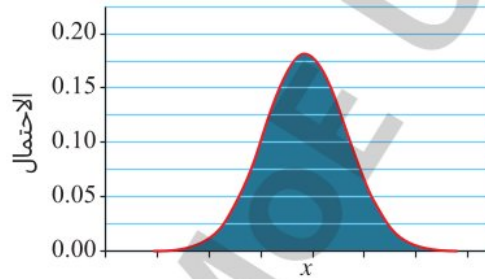
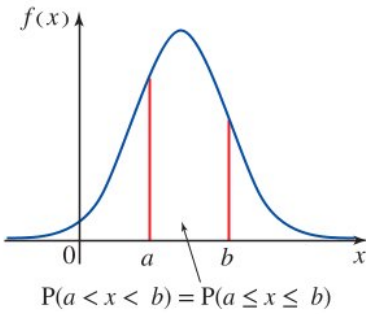
inverse normal distribution

Normal Distribution

المتغير العشوائي المتصل والتوزيع الطبيعي

لا يمكن للمتغير العشوائي المنفصل أن يصف كل التجارب الاحتمالية، لذا لا بد من دراسة المتغير العشوائي المتصل. عندما نقول عن متغير ما إنه **متغير عشوائي متصل**، كدرجة الحرارة أو طول مبنى أو وزن طفل، هذا يعني أنه يستطيع أن يأخذ جميع القيم في فترة معينة، وبالتالي لا يمكن إيجاد توزيع احتمالي لقيم هذا المتغير بالمعنى المشار إليه في الدروس السابقة، أي أننا لا نستطيع تعريف دالة P بحيث يكون احتمال $X = x$ هو $P(x)$ ، وذلك لأن المجموع $\sum_x P(x)$ لا يمكن تعريفه رياضياً إذا كان X يمكنه أن يأخذ جميع القيم في فترة معينة.

لذا سوف نعتمد إلى إجراء تغيير جوهري لإيجاد إطار لاحتمالات التجارب ذات المتغيرات العشوائية المتصلة، وذلك من خلال إيجاد احتمالات من قبيل $P(a \leq x \leq b)$ بدلاً من إيجاد احتمالات $P(x = c)$ كما في حال المتغيرات المنفصلة.



الشكل 8.4.1 يبين الشكل تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية

حيث تشكل المساحة تحت المنحنى بين القيمتين a و b قيمة احتمال المتغير في هذه الفترة.

ليكن X متغيراً عشوائياً متصلاً. **دالة الكثافة الاحتمالية**، $f(x)$ ، للمتغير العشوائي المتصل X ، هي دالة ذات الخصائص التالية:

1. $f(x) > 0$ لكل قيم x .

2. المساحة تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية f في الفترة المشتملة على قيم المتغير تساوي 1.

3. لنفرض أننا رسمنا هذه الدالة. لتكن a و b قيمتان ممكنتان للمتغير العشوائي X ، حيث $a < b$. إذن احتمال أن يقع X بين a و b ، $P(a \leq X \leq b)$ ، هو المساحة تحت منحنى الدالة f بين هاتين القيمتين.

وفق هذا التعريف، نلاحظ أن $P(X = a) = 0$.

وسبب ذلك أن المساحة فوق قيمة ما، a مثلاً، هي مستطيل عرضه 0. إذن، في حالة المتغير المتصل، بغض النظر عما إذا كانت القيمتان a و b متضمنتان داخل الفترة، تكون المساحة بين a و b هي ذاتها.

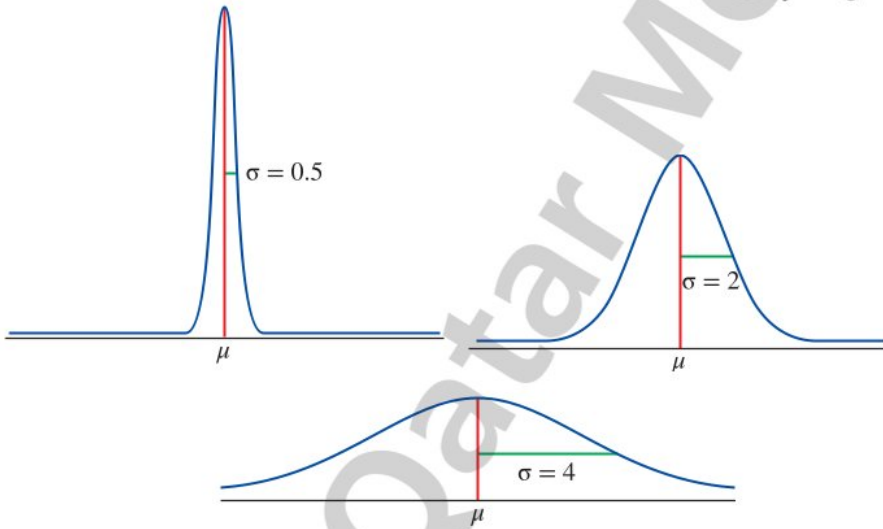
$$P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b)$$

لعل النوع الأبرز من المتغيرات المتصلة هو المتغير الطبيعي، حين تكون دالة الكثافة الاحتمالية على الشكل

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$$

حيث μ و σ عدنان ثابتان وهما القيمة المتوقعة أو المتوسط (μ)، والانحراف المعياري (σ) للمتغير العشوائي المتصل X . وذلك بعد التحقق من أن المساحة تحت منحنى هذه الدالة يساوي واحدًا صحيحًا.

هذا المنحنى يشبه الجرس، ويحدد الانحراف المعياري σ ميل المنحنى ومدى انبساطه، حيث يتغير شكله، تضيقًا أو تمددًا تبعًا لقيمة σ . كلما كانت قيمة σ أكبر، انبسط المنحنى أكثر وكانت المساحة تحت المنحنى ما بين μ وأية قيمة أصغر، أي احتمال أن يقع x بين μ وأية قيمة يصبح أقل. أن تغيير قيمة μ مع ثبات قيمة σ يعمل على إزاحة منحنى **التوزيع الطبيعي** أفقيًا من دون أن يغير شكل انتشاره.



الشكل 8.4.2 يبين الشكل تمثيل ثلاثة توزيعات طبيعية لها انحرافات معيارية متفاوتة.

التوزيع الطبيعي

يكون توزيع قيم المتغير المتصل X **توزيعًا طبيعيًا** إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$$

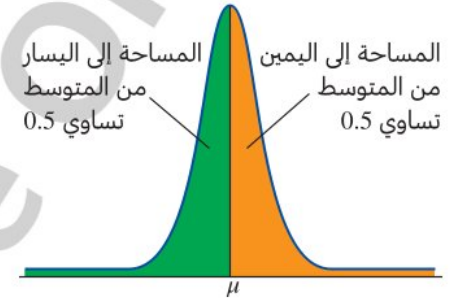
حيث μ و σ عدنان ثابتان ($\sigma > 0$).

عندما يكون توزيع المتغير العشوائي طبيعيًا نكتب $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

عندما يكون $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإن μ يمثل القيمة المتوقعة، التي تسمى أيضًا الوسط الحسابي و σ يمثل الانحراف المعياري للمتغير X بعد تعديل تعريف كل منهما ليتناسب مع المتغير المتصل.

مع أننا لن نستعمل الصيغة للتوزيع الطبيعي بطريقة مباشرة، من المفيد أن نلاحظ خصائصها، لأنها تساعد في فهم سمات التوزيع الطبيعي. لاحظ أن المعادلة تعتمد بشكل كلي على قيمتي المتوسط μ والانحراف المعياري σ .

يبين الشكل 8.4.3 تمثيل توزيع الاحتمال الطبيعي. كما نلاحظ، يعين المتوسط أو القيمة المتوقعة وسط التوزيع، حيث يتناظر التوزيع حول محور هذا المتوسط. بما أن مجمل المساحة تحت المنحنى هي 1، يمكن الاستنتاج من تناظر المنحنى أن المساحة على اليمين من المتوسط تساوي المساحة على اليسار منه وقيمتها 0.5.



الشكل 8.4.3 يبين الشكل كيف يشكل المتوسط خط الوسط في تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية حيث يتناظر التوزيع حوله.

أيًا تكن قيم μ و σ ، نلاحظ عن طريق التحقق المتكرر أن 68% من المساحة تحت المنحنى تقع بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ ، وأن 95% من هذه المساحة تقع بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ ، وأن 99.7% من هذه المساحة تقع بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ ، ويمكن التعبير عن ذلك بلغة احتمالية. نوجز هذه الخصائص تحت اسم **القاعدة التجريبية**.

القاعدة التجريبية

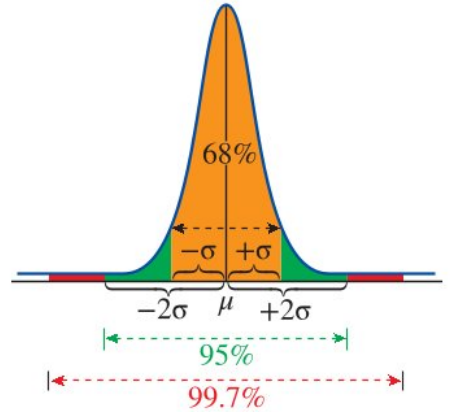
إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا، فإن

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$$

حيث μ و σ عدنان ثابتان ($\sigma > 0$).



الشكل 8.4.4 يظهر الشكل احتمالات المتغير العشوائي المتصل المبينة في القاعدة إلى اليسار.

مثال 1 إيجاد الاحتمال باستعمال القاعدة التجريبية

في بلد معين، تتبع أطوال قامات الشبان الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 19 سنة - كمتغير عشوائي متصل - توزيعًا احتماليًا طبيعيًا هو $X \sim N(181, 64)$. أعط وصفًا إجمالًا لأطوال قامات الشبان في هذا البلد باستعمال القاعدة التجريبية.

الحل

التوزيع الاحتمالي هو $X \sim N(181, 64)$.

قارن ذلك بالصيغة $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

استعمل القاعدة التجريبية

عوض قيمتي μ و σ

$$\mu = 181 \text{ و } \sigma = \sqrt{64} = 8$$

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.68$$

$$P(181 - 8 \leq x \leq 181 + 8) = 0.68$$

$$P(173 \leq x \leq 189) = 0.68$$

(تابع)

أي أنه إذا تم اختيار أحد شبان البلدة الذين تتراوح أعمارهم ما بين 18 و 19 سنة، احتمال أن يكون طول قامته ما بين 173 و 189 هو 0.68

استعمل القاعدة التجريبية

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$$

عوض قيمتي μ و σ

$$P(165 \leq x \leq 197) = 0.95$$

أي أنه إذا تم اختيار أحد شبان البلدة الذين تتراوح أعمارهم ما بين 18 و 19 سنة، احتمال أن يكون طول قامته ما بين 165 و 197 هو 0.95

استعمل القاعدة التجريبية

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$$

عوض قيمتي μ و σ

$$P(157 \leq x \leq 205) = 0.997$$

أي أنه إذا تم اختيار أحد شبان البلدة الذين تتراوح أعمارهم ما بين 18 و 19 سنة، احتمال أن يكون طول قامته ما بين 157 و 205 هو 0.997

إذن، يمكنك القول إن:

68% من هؤلاء الشبان تتراوح أطوالهم بين 173 و 189

95% من هؤلاء الشبان تتراوح أطوالهم بين 165 و 197

99.7% من هؤلاء الشبان تتراوح أطوالهم بين 157 و 205

أي أن 0.3% فقط من هؤلاء الشبان تزيد أطوالهم 205 cm أو تقل عن 157 cm

حاول أن تحل التمارين 6-1

التوزيع الطبيعي المعياري

لإيجاد القيم الاحتمالية في إطار التوزيع الطبيعي، نستعمل جدولاً يمكن الاستفادة منه إذا كان $X \sim N(0, 1)$ ، ولذلك يتعين علينا أن ننتقل دائماً من المتغير العشوائي المتصل $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى ما يُسمى **الدرجة المعيارية** z أو القيمة المعيارية للمتغير X .

كما تقترح القاعدة التجريبية، أنه لا تختلف التوزيعات الطبيعية إذا تم القياس بوحدات قياسها σ حول محور الوسط μ . إن عملية تحويل القياس بوحدات قياسها σ تُسمى "إيجاد الدرجة المعيارية".

لإيجاد الدرجة المعيارية لقيمة ما، أوجد المسافة بينها وبين المتوسط وعبر عن هذه المسافة بدلالة σ .

تبين القاعدة التالية كيفية القيام بهذه العملية.

الدرجة المعيارية z

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً بحيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإن

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

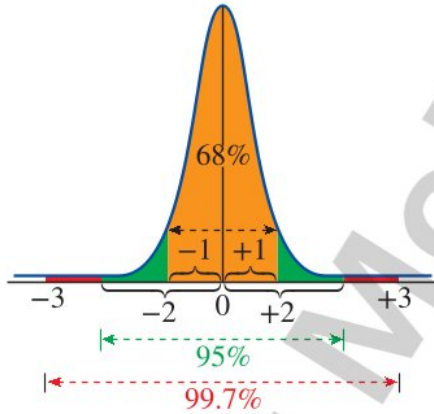
أي أن z هي **القيمة المعيارية** للمتغير العشوائي X وهي بُعد المتغير عن القيمة المتوقعة بوحد الانحراف المعياري وتسمى الدرجة المعيارية.

يخبرنا المقدار $\mu - x$ عن المسافة بين القيمة والمتوسط. قسمة المقدار $\mu - x$ على σ تخبرنا عن عدد الانحرافات المعيارية التي تساويها هذه المسافة.

استعمال الدرجة المعيارية، كما نلاحظ، هي تحويل للمنحنى الطبيعي. سنفترض أن μ قيمة موجبة. تنتج عن التحويل $\mu - x$ إزاحة للمنحنى إلى اليسار مقدارها μ . إذن يزاح الوسط إلى اليسار بمقدار μ وحدة، فيصبح الوسط الجديد عند الصفر (انظر الشكل 8.4.5).

القسمة على σ ستحول المسافات من المتوسط إلى وحدات بدلالة σ . إذن النقطة التي تبعد انحرافًا معياريًا واحدًا عن المتوسط ستكون مقدار وحدة واحدة فوق المتوسط، لذا سنرمز لها بالعدد +1

إذا نظرنا الآن إلى القاعدة التجريبية التي ناقشناها سابقًا ستصبح النقاط التي هي ضمن انحراف معياري واحد من المتوسط، ضمن مسافة قيمتها 1 في التوزيع الجديد. بدل أن تكون $\mu + \sigma$ و $\mu - \sigma$ ، ستصبح على التوالي 0 + 1 و 0 - 1، أي +1 و -1 (انظر الشكل 8.4.6).



الشكل 8.4.6 يبين الشكل تحول $\mu + \sigma$ و $\mu - \sigma$ إلى +1 و -1 عند استعمال الدرجة المعيارية.

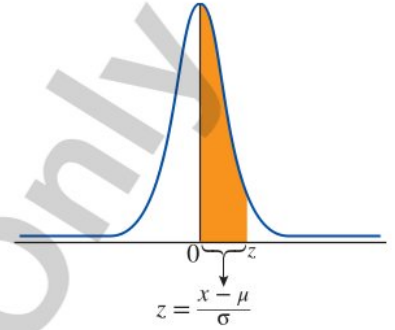
يسمى التوزيع الجديد الذي حصلنا عليه **التوزيع الطبيعي المعياري**، متوسطه 0 وانحرافه المعياري 1، وهو توزيع يساعدنا على قراءة المساحات تحت أي دالة توزيع طبيعي من خلال استعمال الدرجة المعيارية كما سنرى لاحقًا.

لذا فإن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty$$

وهذا يعني أن المتغير z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري:

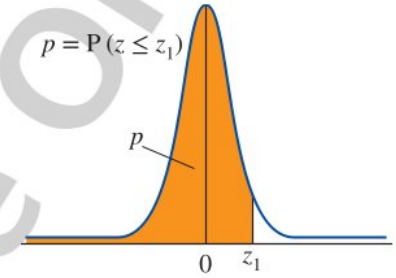
$$z \sim N(0, 1)$$



الشكل 8.4.5 يبين الشكل المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي التي تحددها قيمة الدرجة المعيارية.

في ما يلي صورة مختصرة عن الجدول الذي يمثل قيم المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري .

z	0.00	0.01	→	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040		0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438		0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832		0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
↓			→			↓		
↓			→			↓		
1.2	0.8849	0.8869		0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049		0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207		0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345		0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463		0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545



الشكل 8.4.7 $P(z \leq z_1)$ تساوي قيمة المساحة الواقعة على يسار z_1 تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

يعطي هذا الجدول قيمة المساحة الواقعة على يسار القيمة z_1 تحت المنحنى وهي $P(z \leq z_1)$

لاحظ أن الجدول لا يحتوي على القيم السالبة للمتغير z لأنه يمكن استنتاج قيم المساحات على يسارها من المساحات على يسار القيم الموجبة وذلك لأن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول $\mu = 0$.

المثال التالي يوضح كيفية إيجاد الاحتمال باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال 2 استعمال التوزيع الطبيعي المعياري

استعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة ما يلي

- A. $P(Z \leq 1.37)$
- B. $P(Z \leq 1.375)$
- C. $P(Z > 0.75)$
- D. $P(Z \leq -0.75)$
- E. $P(Z > -1.37)$
- F. $P(-0.75 \leq Z \leq 1.375)$

الحل

A. لمعرفة المساحة الواقعة على يسار $z = 1.37$ ، يجب أن ننظر إلى العدد 1.3 في العمود z ثم تنتقل يميناً إلى حيث يتقاطع الصف الذي يتضمن العدد 1.3 مع العمود 0.07 لتجد قيمة المساحة التي تبحث عنها وهي 0.9147:

$$P(z \leq 1.37) = 0.9147$$

(تابع)

B. بما أن الجدول يتضمن أعدادًا مكونة من رقمين فقط بعد الفاصلة، يتعين عليك إيجاد القيم التقريبية للأعداد الأخرى. لإيجاد $P(z \leq 1.375)$ اختر القيمة الوسطى بين العددين 1.37 و 1.38، إذن أوجد متوسط القيمتين 0.9147 و 0.9162:

$$\frac{0.9162 + 0.9147}{2} = 0.91545$$

لتكتب

$$P(z \leq 1.375) = 0.91545$$

وهي قيمة تقريبية غير دقيقة.

C. لإيجاد المساحة على يمين $z = 0.75$ استعمل خاصية أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 1:

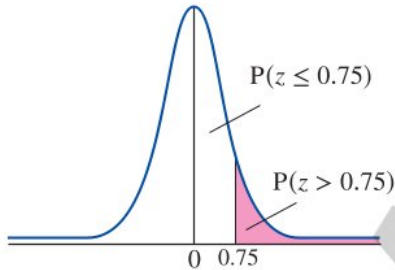
$$P(z > 0.75) = 1 - P(z \leq 0.75)$$

$$= 1 - 0.7734$$

$$= 0.2266$$

استعمل جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد

قيمة $P(z \leq 0.75)$



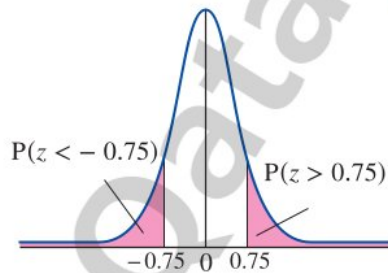
D. لإيجاد المساحة على يسار $z = -0.75$ ، استعمل خاصية التناظر في منحنى التوزيع الطبيعي فتكون هذه المساحة مساوية للمساحة على يمين 0.75

$$P(z < -0.75) = P(z > 0.75)$$

$$= 0.2266$$

باستعمال التناظر

عوض القيمة من الفرع C



E. لإيجاد المساحة على يمين $z = -1.37$ استعمل خاصية أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 1 ثم استعمل التناظر:

$$P(z > -1.37) = 1 - P(z \leq -1.37)$$

$$= 1 - P(z > 1.37)$$

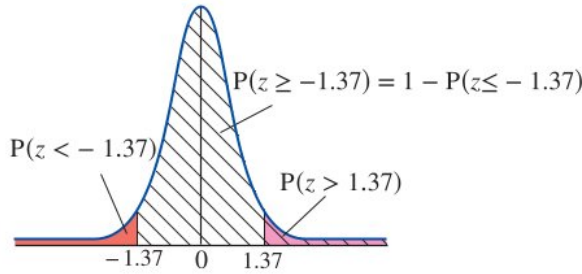
$$= P(z < 1.37)$$

$$= 0.9147$$

باستعمال التناظر

عوض قيمة $P(z < 1.37)$ من الفرع (A)

(تابع)

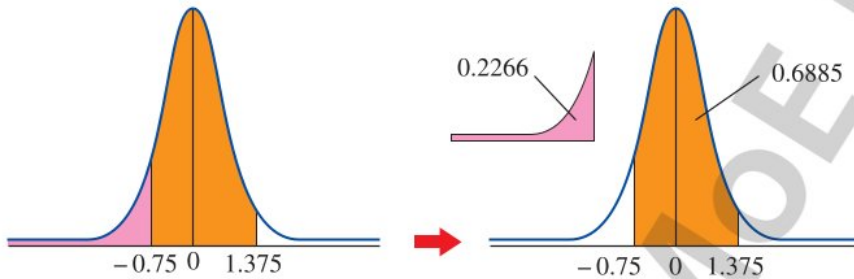


F. لإيجاد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري بين $z = -0.75$ و $z = 1.375$:

عوض القيم التي وجدناها في الفرعين B و D

$$= 0.91545 - 0.2266$$

$$= 0.6885$$



حاول أن تحل التمرين 8

بما أن التحويلات الخطية يمكنها تحويل كل الدوال الطبيعية إلى معيارية، يصبح بإمكاننا استعمالها بطريقة مفيدة في إيجاد المساحة تحت منحنى أبة دالة توزيع طبيعي. إذا عدنا للمثال 1، فإن لشاب طوله 192 سم، درجة معيارية هي

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{192 - 181}{8} = 1.375$$

أو مقدار 1.375 انحراف معياري فوق المتوسط وعليه يكون

$$P(x \leq 192) = P(z \leq 1.375) = 0.91545$$

كما رأينا في الفرع B من المثال 2

بنفس الطريقة، فإن لشاب طوله 175 سم، درجة معيارية هي

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{175 - 181}{8} = -0.75$$

أو مقدار 0.75 انحراف معياري تحت المتوسط وعليه يكون

$$P(x \leq 175) = P(z \leq -0.75) = 0.2266$$

كما رأينا في الفرع D من المثال 2

استعمال الحاسبة

يمكننا استعمال الحاسبة على الشكل التالي:

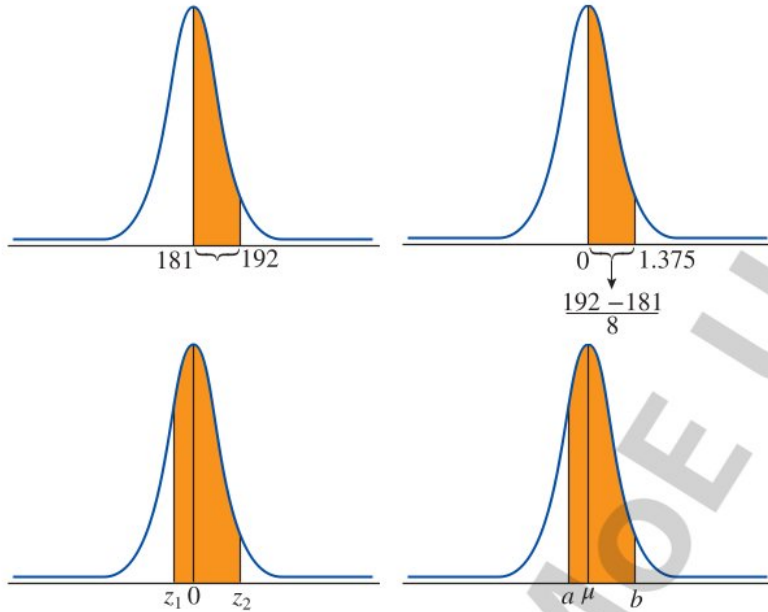
نفتح القائمة "Distribution" ونختار "normalcdf".

ثم ندخل الأعداد بالتسلسل التالي: القيمة الصغرى،

القيمة العظمى، الوسط الحسابي، الانحراف المعياري.

```
DISTR DRAW
1:normalpdf(
2:normalcdf(
3:invNorm(
4:invT(
5:tpdf(
6:tcdf(
7:↓x²pdf(
```

```
normalcdf(175,19
2,181,8)
.6888069418
```



الشكل 8.4.8 يبين طريقة حساب احتمال أن يقع متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي في الفترة من a إلى b بعد تحويله إلى التوزيع الطبيعي المعياري.

يبين المثال التالي مثلاً واقعياً على إيجاد الاحتمال في التوزيع الطبيعي.

مثال 3 إيجاد الاحتمال في التوزيع الطبيعي

تتبع أعمار الطلاب المتخرجين من كلية الهندسة في إحدى الجامعات توزيعاً احتمالياً طبيعياً بوسط حسابي $\mu = 24.5$ وانحراف معياري $\sigma = 2.5$.

A. أوجد احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائياً أقل من 26 سنة.

B. أوجد نسبة الطلاب المتخرجين الذين تزيد أعمارهم عن 23.7 سنة.

C. أوجد نسبة الطلاب المتخرجين الذين تتراوح أعمارهم بين 22 و 28 سنة.

D. ما نسبة الطلاب المتخرجين الذين تقع أعمارهم ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي؟ وضمن انحرافين معياريين؟ وضمن ثلاثة انحرافات معيارية؟

الحل

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عمر الطالب، فإن

$$X \sim N(\mu = 24.5, \sigma^2 = 6.25)$$

(تابع)

A. أن يكون عمر الطالب أقل من 26 يعني أن $X < 26$ ، لإيجاد $P(X < 26)$ احسب القيمة المعيارية للمتغير X عندما $x = 26$.

$$z = \frac{26 - 24.5}{2.5} \approx 0.6 \quad \text{عوض } \mu = 24.5 \text{ و } \sigma = 2.5$$

$$P(X < 26) = P(Z < 0.6) = 0.7257 \quad \text{باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري}$$

يمكنك الحصول على الإجابة باستعمال الجدول أو الحاسبة.

B. لإيجاد نسبة الطلاب المتخرجون التي تزيد أعمارهم عن 23.7 سنة عوض $x = 23.7$.

$$z = \frac{23.7 - 24.5}{2.5} \approx -0.32 \quad \text{عوض } \mu = 24.5 \text{ و } \sigma = 2.5$$

$$P(X > 23.7) = P(Z > -0.32) \quad \text{عوض قيمة } z$$

$$P(Z > -0.32) = P(Z < 0.32) = 0.6255 \quad \text{باستعمال التناظر والجدول}$$

C. نسبة الطلاب المتخرجين الذين تتراوح أعمارهم بين 22 و 28 سنة هي $P(22 < X < 28)$

$$P(22 < X < 28) = P\left(\frac{22 - 24.5}{2.5} < Z < \frac{28 - 24.5}{2.5}\right) \quad \text{أوجد الدرجة المعيارية}$$

$$= P(-1 < Z < 1.4)$$

$$= P(Z < 1.4) - P(Z < -1)$$

بما أن $P(Z < 1) = 1 - P(Z > 1) = 1 - P(Z < -1)$ ، استعمال الجدول لإيجاد $P(Z < 1)$ ثم عوض قيمتها.

$$= 0.9192 - 0.1587 \quad \text{باستعمال الجدول}$$

$$= 0.7606 = 76.06 \%$$

D. الإجابة عن هذا الجزء معروفة بشكل عام من خلال القاعدة التجريبية التي يمكنك التحقق من النسب فيها باستعمال الجدول أو الحاسبة.

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$$

$$= 0.8413 - 0.1587 \quad \text{باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري}$$

$$= 0.6826$$

وهي النسبة التي تحصل عليها باستعمال القاعدة التجريبية 68%

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$$

$$= 0.9772 - 0.0228 \quad \text{باستعمال التناظر والجدول}$$

$$= 0.9544$$

وهي النسبة التي تحصل عليها باستعمال القاعدة التجريبية 95%

$$P(-3 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -3)$$

$$= 0.9987 - 0.0013 \quad \text{باستعمال التناظر والجدول}$$

$$= 0.9973$$

وهي النسبة التي تحصل عليها باستعمال القاعدة التجريبية 99.7%

لحساب الاحتمال في الفرع A باستعمال الحاسبة. لاحظ أنه يمكنك اعتبار القيمة الصغرى 0، أو أي عدد آخر بعيد عن الوسط الحسابي من الجهة اليسرى بحيث تضمن الحصول على نتيجة أكثر دقة (انظر الشكل 8.4.9a).

لحساب الاحتمال في الفرع B باستعمال الحاسبة. لاحظ أنه يمكنك استعمال العدد 100 قيمة عظمى، تم اختيار هذا العدد عشوائيًا لأنه بعيد كفاية عن الوسط الحسابي من الجهة اليمنى، وذلك لضمان استيعاب أعمار جميع الطلاب كما يبين الشكل 8.4.9b

أما لإيجاد الاحتمال في الفرع C باستعمال الحاسبة فيجب أن تكون القيمة الصغرى 22 وأن تكون القيمة العظمى 28 وذلك لحساب الاحتمال بين هاتين القيمتين (انظر الشكل 8.4.9c).

```
normalcdf(0,26,24.5,2.5)
.7257469354
```

(a)

```
normalcdf(23.7,100,24.5,2.5)
.6255157701
```

(b)

```
normalcdf(22,28,24.5,2.5)
.7605880293
```

(c)

مثال 4 إيجاد الاحتمال الطبيعي

أظهرت دراسة أجريت في أحد البلدان أن أطوال الرجال في ذلك البلد تتبع توزيعًا احتماليًا طبيعيًا بوسط حسابي يساوي 69.2 in وانحراف معياري يساوي 2.8 in. أوجد قيمة احتمال أن يكون طول رجل مختير عشوائيًا.

A. بين 65 in و 70 in

B. أكثر من 6 ft

C. أقل من 5 ft 6 in

الحل

A. أوجد الدرجة المعيارية z أولاً:

$$z_1 = \frac{65 - 69.2}{2.8} \approx -1.5$$

$$z_2 = \frac{70 - 69.2}{2.8} \approx 0.29$$

باستعمال الجدول أو الآلة الحاسبة تجد

$$P(65 \leq x \leq 70) = P(-1.5 \leq z \leq 0.29) = P(z < 0.29) - P(z < -1.5)$$

$$= P(z < 0.29) - P(z > 1.5)$$

$$= P(z < 0.29) - 1 + P(z < 1.5)$$

$$= 0.6141 - 1 + 0.9332$$

$$\approx 0.547$$

z	0.00	0.01	→	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040		0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438		0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832		0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
1.2	0.8849	0.8869		0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.5	0.9332	0.9345		0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

(تابع)

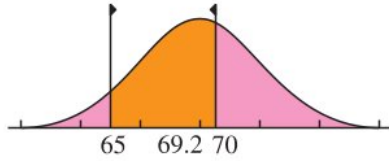
الشكل 8.4.9 يمكننا أيضًا إيجاد قيم الاحتمالات باستعمال الحاسبة البيانية دون الحاجة لإيجاد القيمة المعيارية، وذلك باختيار "normalcdf"، ثم بإدخال القيم بالترتيب.

```
normalcdf(-1.5, 0.29)
.5473
```

الشكل 8.4.10 يمكن حساب الاحتمال

$P(-1.5 \leq z \leq 0.29)$ باستعمال

الحاسبة للتوزيع الطبيعي باستعمال خاصية "normalcdf".



إذن قيمة احتمال أن يكون طول رجل اختير عشوائيًا بين 65 in و 70 in هي 0.547

B. بما أن $x = 6 \text{ ft} = 72 \text{ in}$ ، أوجد الدرجة المعيارية z أولاً:

$$z = \frac{72 - 69.2}{2.8} \approx 1$$

باستعمال الحاسبة البيانية (انظر الشكل 8.4.11) أو باستعمال الجدول تجد

$$P(x > 72) = P(z > 1) = 0.159$$

إذن قيمة احتمال أن يكون طول رجل اختير عشوائيًا أكثر من 6 ft هي 0.159

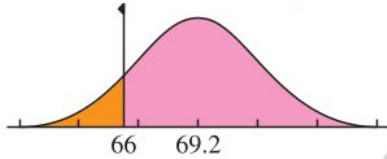
C. بما أن $x = 5 \text{ ft } 6 \text{ in} = 66 \text{ in}$ ، أوجد الدرجة المعيارية z أولاً:

$$z = \frac{66 - 69.2}{2.8} \approx -1.14$$

عوض $\mu = 62.2$ و $\sigma = 2.8$

$$P(x < 66) = P(z < -1.14) = 0.127$$

باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري

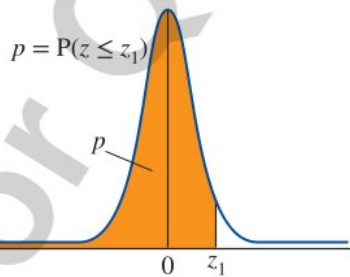


إذن قيمة احتمال أن يكون طول رجل اختير عشوائيًا أقل من 5 ft 6 in هي 0.127

حاول أن تحل التمرين 18

كان بإمكاننا في المثال السابق أن نطرح السؤال بصيغة معكوسة، كأن نسال، مثلاً، عن العمر الأكبر من أعمار 95% من الطلاب المتخرجين. هذا النوع من الأسئلة ينتمي إلى ما نسقيه **معكوس التوزيع الطبيعي**، وذلك لأنه مطلوب قيمة الدرجة المعيارية z التي تجعل المساحة إلى يسارها تحت المنحنى تساوي قيمة معطاة p .

ما قيمة الدرجة z إذا كانت $P(z \leq z_1) = p$ ، حيث p قيمة معطاة.



الشكل 8.4.12 يبين الشكل القيمة z_1 حيث تكون المساحة تحت

المنحنى إلى يسار z_1 هي p .

للتذكير

للتحويل من وحدة القدم (ft) إلى وحدة إنش (in) نقوم بضرب القيمة في 12:

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$$

normalcdf (1, 99)
.1586552596

الشكل 8.4.11 يمكن إيجاد $P(z > 1)$

باستعمال الحاسبة البيانية وذلك من

خلال الخاصية "normalcdf".

يمكننا هنا أيضًا استعمال جدول معكوس التوزيع الطبيعي المعياري في ما يلي نسخة موجزة منه لإيضاح طريقة استعماله.

p	0.00	→	0.03
0.50	0.000		0.075
0.60	0.253		0.332
↓			
0.90	1.282		1.476

البحث مثلًا عن القيمة z بحيث يكون $P(z \leq z) = 0.93$ هو كما في الجدول الطبيعي المعياري البحث عن العدد الذي يقع عند التقاء الخط الذي يضم القيمة 0.90 والعمود 0.03، العدد هو 1.476، إذن

$$P(z < 1.476) = 0.93$$

إذا كان لدينا المتغير $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، وأردنا أن نعرف قيمة X بحيث يكون $P(x \leq x_1) = p$ ، ليس علينا سوى إيجاد قيمة z بحيث يكون $P(z \leq z_1) = p$ ونستنتج منها قيمة X باستعمال

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$$

إذن

$$x_1 = z_1 \sigma + \mu$$

```
invNorm(.5)
0
invNorm(.915)
1.37220381
invNorm(.75)
.6744897495
```

الشكل 8.4.12 يمكننا أيضًا استعمال الحاسبة لإيجاد قيمة z من خلال الخاصية "invNorm"

مثال 5 إيجاد مئين طبيعي

كما في المثال 4، تتبع أطوال الرجال في أحد البلدان توزيعًا احتماليًا طبيعيًا بوسط حسابي يساوي 69.2 in وانحراف معياري يساوي 2.8 in

- A. أوجد الطول الذي تقل عنه أطوال 20% فقط من الرجال في هذا البلد.
B. أوجد الطول الذي تزيد عنه أطوال 1% فقط من الرجال في هذا البلد.

الحل

A. يمكنك استعمال جدول معكوس التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة الدرجة المعيارية z بحيث يكون

$$P(z \leq z_1) = 0.2$$

$$P(z \geq -z_1) = 0.2$$

$$1 - P(z < -z_1) = 0.2$$

$$P(z < -z_1) = 0.8$$

أوجد قيمة الدرجة المعيارية من خلال البحث عن قيمة 0.8 في الجدول، إذن

$$-z_1 = 0.842$$

$$z_1 = -0.842$$

لإيجاد الطول x_1 المناظر لهذه القيمة اكتب

$$x_1 = (-0.842)(2.8) + 69.2 = 66.8 \text{ in}$$

إذن، 20% من الرجال في هذا البلد لا تزيد أطوالهم عن 6.8 in و 5 ft

(تابع)

B. قيمة الدرجة المعيارية z_1 التي تحقق المعادلة $P(z \geq z_1) = 0.01$ هي نفس قيمة الدرجة المعيارية z التي تحقق المعادلة $P(z \leq z_1) = 0.99$. باستعمال جدول معكوس التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية هذه الوحدة تجد أن $z_1 = 2.326$. الطول المناظر لهذه القيمة هو

$$x_1 = (2.326)(2.8) + 69.2 \approx 75.7 \text{ in}$$

إذن، 1% من الرجال في هذا البلد لا تقل أطوالهم عن 6 ft و 3.7 in. يمكنك أيضًا إيجاد قيمة الدرجة المعيارية z باستعمال الحاسبة.

حاول أن تحل التمرين 19

مراجعة سريعة 8.4

في التمرينين 5 و 6، استعمل تناظر الدالة $f(x) = e^{-x^2}$ بالنسبة للمحور y للإجابة عن الأسئلة.

5. إذا كانت $\int_0^2 e^{-x^2} dx = 0.4$ ، أوجد $\int_{-2}^0 e^{-x^2} dx$.

6. إذا كانت $\int_0^2 e^{-x^2} dx = 0.6$ ، أوجد $\int_{-2}^0 e^{-x^2} dx$.

في التمارين 1-4، أوجد قيمة $z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$ حسب القيم المعطاة في كل حالة.

1. $x = 62, \mu = 58.6, \sigma = 2.6$

2. $x = 14, \mu = 15.4, \sigma = 0.9$

3. $x = 167, \mu = 167.9, \sigma = 1.6$

4. $x = 99, \mu = 98.1, \sigma = 0.6$

الدرس 8.4 التمارين

8. أوجد كل احتمال طبيعي باستعمال الجداول.

- a. $P(z < 0.75)$
- b. $P(z > 1.5)$
- c. $P(-1.8 < z < -0.5)$

9. أوجد كل احتمال طبيعي باستعمال الجداول.

- a. $P(z > -1.2)$
- b. $P(z < -0.6)$
- c. $P(-2 < z < 1.25)$

في التمارين 1-6، يشكل عمر البطارية في حاسبتك نموذجًا طبيعيًا بمتوسط عمر يساوي 50 ساعة وانحراف معياري يساوي 7.5 ساعة. أوجد احتمال أن تخدم بطارية جديدة تضعها في حاسبتك المدة الزمنية باستعمال القاعدة التجريبية.

- 1. 50 ساعة على الأقل.
- 2. بين 50 و 72.5 ساعة.
- 3. أقل من 42.5 ساعة.
- 4. بين 42.5 و 57.5 ساعة.
- 5. أكثر من 65 ساعة.
- 6. 47.5 ساعة.

7. في بلد معين، تتبع أطوال قامات الشابات ما بين عمر 20 و 22 سنة - كمتغير عشوائي متصل - توزيعًا احتماليًا طبيعيًا هو $X \sim N(164, 49)$. أعط وصفًا إجماليًا لأطوال قامات الشابات باستعمال القاعدة التجريبية.

في التمارين 10-13، أوجد الاحتمالات.

10. $P(|z| < 1.2)$

11. $P(|z| < 1.4)$

12. $P(x < 3.7)$ ، حيث $X \sim N(3, 3)$

13. $P(x > -3.7)$ ، حيث $X \sim N(3, 3)$

14. أنتجت شركة لصناعة السيارات سيارة جديدة يبلغ متوسط

استهلاكها من الوقود داخل المدينة $11.4 \text{ L}/100 \text{ km}$

تشير الاختبارات إلى أن الانحراف المعياري لهذا النموذج هو 1.26 على افتراض أن التوزيع طبيعي. تم اختيار مركبة عشوائيًا.

a. أوجد احتمال أن يكون مصروف المركبة أقل من

$8.4 \text{ L}/100 \text{ km}$

b. أوجد احتمال أن يكون استهلاك السيارة من الوقود بين

$8.4 \text{ L}/100 \text{ km}$ و $14.4 \text{ L}/100 \text{ km}$

15. تتبع نتائج الطلاب في أحد الاختبارات توزيعًا طبيعيًا بوسط

حسابي يساوي 550 وانحراف معياري يساوي 100

a. أوجد احتمال أن تكون نتيجة طالب اختبار عشوائيًا أقل

من 400

b. أوجد احتمال أن تكون نتيجة أحد الطلاب بين 450 و 650

16. تتبع أطوال الطلاب الذين أعمارهم 13 سنة في إحدى المدارس

توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي يساوي 151 cm وانحراف

معيار يساوي 8 cm ، أوجد احتمال أن يكون طول طالب

اختير عشوائيًا

a. أقل من 166 cm

b. لا يبعد أكثر من 6 cm عن الوسط الحسابي.

17. يتبع الزمن الذي يستغرقه وصول كمال إلى المدرسة يوميًا توزيعًا

طبيعيًا بوسط حسابي يساوي 12 min وانحراف معياري يساوي

2 min ، عدد الأيام الدراسية في مدرسة كمال هو 180 يومًا.

قدّر عدد الأيام التي يستغرق فيها وصول كمال إلى المدرسة مدة

a. أطول من 17 دقيقة.

b. أقل من 10 دقائق.

c. بين 9 و 13 دقيقة.

18. أظهرت دراسة أجريت في أحد البلدان أن أطوال النساء في ذلك

البلد تتبع توزيعًا احتماليًا طبيعيًا بوسط حسابي يساوي

63.8 in وانحراف معياري يساوي 2.8 in ، أوجد قيمة احتمال أن

يكون طول امرأة اختيرت عشوائيًا

a. أكثر من $5 \text{ ft } 10 \text{ in}$

b. أقل من $5 \text{ ft } 6 \text{ in}$

c. بين $(5 \text{ أقدام و } 6 \text{ in})$ و $(5 \text{ أقدام و } 10 \text{ in})$

19. تتبع أطوال النساء في أحد البلدان توزيعًا احتماليًا طبيعيًا بوسط

حسابي يساوي 63.8 in وانحراف معياري يساوي 2.8 in

a. أوجد الطول الذي تقل عنه أطوال 5% فقط من النساء في

هذا البلد.

b. أوجد الطول الذي تزيد عنه أطوال 1% فقط من النساء في

هذا البلد.

20. استعمل الجدول لإيجاد الدرجات المعيارية التي تحد كل منطقة

في توزيع طبيعي.

a. 3% العليا.

b. ال 60% الدنيا.

c. ال 80% التي في الوسط.

21. استعمل الجدول لإيجاد الدرجات المعيارية التي تحد كل منطقة

في توزيع طبيعي.

a. 15% الدنيا.

b. ال 8% العليا.

c. ال 90% التي في الوسط.

22. تتم نمذجة نتائج SAT باستعمال منحنى طبيعي بمتوسط 500

وانحراف معياري 100 . أوجد احتمال أن تكون نتائج طالب تم

اختياره عشوائيًا على الشكل التالي.

a. 650 على الأقل.

b. ليس أكثر من 420 .

c. أوجد العلامة التي هي أصغر من 2% من نتائج SAT.

أسئلة اختبار معيارية

29. صواب أم خطأ في أي مجموعة بيانات تكون 16% تقريباً من القيم بعيدة عن الوسط الحسابي بأكثر من انحراف معياري واحد. بّرر إجابتك.

30. صواب أم خطأ إذا كان لدينا المتغير $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، وأردنا أن نعرف قيمة x_1 التي تحقق المعادلة $P(x \leq x_1) = \rho$ ، يكفي أن نجد قيمة z_1 التي تحقق المعادلة $P(z > z_1) = \rho$ ونستنتج منها قيمة x_1 المناظرة لقيمة z_1 . بّرر إجابتك.

31. اختيار من متعدد تقول رانية أننا إذا أردنا أن نعرف المساحة الواقعة إلى يسار الدرجة $z = 1.56$ ، علينا أولاً أن ننظر إلى العدد 1.5 في العمود Z ثم ننقل يميناً إلى حيث يتقاطع الصف الذي ينتمي إليه هذا العدد مع العمود 0.06، العدد المكتوب في خانة التقاطع هو العدد الذي يمثل المساحة التي نبحث عنها. أي الخيارات التالية يمثل المساحة التي نبحث عنها؟

- A. 0.9131
- B. 0.9279
- C. 0.9292
- D. 0.9418
- E. 0.9406

32. اختيار من متعدد في نموذج طبيعي، ما هي تقريباً النسبة المتوقعة من المشاهدات التي تقع ضمن انحراف معياري مقداره نصف من المتوسط؟

- A. 31%
- B. 34%
- C. 38%
- D. 62%
- E. 69%

23. يدوم نوع من بطاريات AAA ما معدله 13 ساعة، بانحراف معياري هو 1.2، يمكن وصف فترة دوامها بنموذج طبيعي.

a. أي نسبة من هذه البطاريات يجب أن تدوم 10 ساعات على الأقل؟

b. أوجد احتمال أن تدوم بطارية بين 14 و 15 ساعة.

c. ترغب الشركة أن تضمن دوام هذه البطاريات مدة معينة من الوقت. أوجد الدوام المؤكد الذي يمكن أن تحققه 96% على الأقل من البطاريات.

24. يدوم نوع معين من الإطارات ما معدله 37 200 ميل، بانحراف معياري هو 2 650 ميل. لنفرض أنه يمكن وصف فترة دوامها بنموذج طبيعي.

a. أي نسبة من هذه الإطارات تبلى قبل الوصول إلى 40 000 ميل؟

b. أوجد احتمال أن يبلى إطار بين 32 000 و 35 000 ميل.

c. ترغب الشركة أن تضمن دوام هذه الإطارات لعدد معين من الأميال. أوجد عدد الأميال المؤكد الذي على الأقل يمكن أن تحققه 90% من الإطارات قبل أن تبلى.

25. الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي X هو 16، إذا كان احتمال أن تكون قيمة X أصغر من 16.56 هو 64%، أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع.

26. التباين في قيم المتغير العشوائي X هو 9، إذا كان احتمال أن تكون قيمة X أكبر من 36.5 هو 2.9%، أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع.

27. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ حيث $P(x > 19.6) = 0.16$ و $P(x < 17.6) = 0.012$ أوجد μ و σ .

28. للمتغير العشوائي X توزيع طبيعي، واحتمال أن تكون قيمة X أكبر من 14.6 هو 93.5%، و $P(x > 29.6) = 2.2\%$ أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

استكشاف

توسيع الأفكار

35. إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، تكون

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

هي دالة الكثافة الاحتمالية أثبت أن

a. $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.job-jo.com

33. يقول مدير شركة لتصنيع إطارات السيارات أن بالإمكان تمثيل عمر خدمة الإطارات الشتوية التي تصنعها الشركة بنموذج يمثل توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي 52 000 km وانحراف معياري يساوي 4 000 km

- a. إذا اشترت مجموعة من الإطارات من إنتاج هذه الشركة. هل من المنطقي أن تعتقد أنها ستخدم أكثر من 64 000 km؟
b. أوجد نسبة الإطارات التي تتوقع أن تخدم أقل من 48 000 km
c. أوجد نسبة الإطارات التي تتوقع أن تخدم بين 48 000 km و 56 000 km

d. **الكتابة للتعلم** فسر معنى المدى الزبيني لعمر هذه الإطارات، وأوجد قيمته.

e. تريد الشركة أن تضمن حداً أدنى من العمر لهذه الإطارات. أي أنها ستعوض القيمة للزبائن الذين تخدم إطاراتهم مسافة أقل من مسافة محددة. ما قيمة الحد الأدنى التي لا تجعل الشركة مضطرة إلى التعويض على أكثر من 2% من زبائنهم؟

34. يصنف مالك مزرعة دواجن البيض بحسب الحجم لبيعه.

تُعرف القياسات الحديثة للبيض كما يلي:

البيض الكبير جداً وزنه g 73 أو أكثر، والبيض الكبير وزنه بين g 63 و g 73، والبيض المتوسط وزنه بين g 53 و g 63، والبيض الصغير وزنه أقل من g 53، وعادة لا يرغب الزبائن في هذا النوع الصغير من البيض.

a. تضع الدجاجات البالغة (عمرها أكبر من سنة) بيضاً متوسط حجمه g 67، وأوزان 98% من البيض الذي تضعه هذه الدجاجات وزنه أعلى من الحد الأدنى للوزن المطلوب. إذا كان بالإمكان نمذجة إنتاج المزرعة من البيض بتوزيع طبيعي، أوجد الانحراف المعياري.

b. تضع الدجاجات الصغيرة بيضاً متوسط حجمه g 51، وأوزان 28% فقط من البيض الذي تضعه هذه الدجاجات أعلى من الحد الأدنى للوزن المطلوب. أوجد الانحراف المعياري.

c. لاحظ مالك المزرعة أن 7% من البيض في مزرعته "منخفض الوزن" و 12% من البيض كبير جداً. قدر الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأوزان البيض في هذه المزرعة.

الوحدة 8 مراجعة الوحدة

7. تعطي الدالة التالية التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

$$P(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & x = 2, 3, 4, 5 \\ \frac{k}{2} & x = 6 \\ 0 & \text{للقيم الأخرى} \end{cases}$$

حيث k عدد ثابت. أوجد قيمة k .

8. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	$4k$	0.11	0.05	0.44

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $E(X)$.

c. أوجد $E(2X - 1)$.

d. أوجد $\text{Var}(X)$.

e. أوجد $\text{Var}(2X + 1)$.

9. نرمي 5 مرات مكعبًا منتظمًا مرقمًا من 1 إلى 6، ونفترض أن احتمالات الحصول على أي رقم من الأرقام الستة في أي رمية متساوية. "النجاح" في كل رمية هو الحصول على رقم فردي. حدد ما إذا كانت هذه التجربة تجربة ذات حدين أم لا. إذا كانت كذلك، أوجد احتمال النجاح وفسره.

10. نرمي 5 مرات مكعبًا منتظمًا مرقمًا من 1 إلى 6، أوجد قيمة احتمال:

a. أن نحصل على العدد 5 مرة واحدة.

b. أن نحصل على العدد 5 مرتين بالضبط.

c. أن نحصل على العدد 5 مرتين على الأقل.

11. نرمي قطعة نقد 6 مرات. أوجد قيمة احتمال:

a. أن نحصل على "الصورة" مرة واحدة بالضبط.

b. أن نحصل على "الصورة" 5 مرات بالضبط.

c. أن نحصل على "الصورة" 4 مرات على الأقل.

في التمارين 1-3، أوجد قيم المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي في التجارب العشوائية التالية.

1. عدد مرات الحصول على صورة عند رمي 3 قطع نقدية.

2. عدد مرات الحصول على عدد أقل من 3 عند رمي مكعب منتظم مرقم من 1 إلى 6 أربع مرات.

3. عدد مرات الحصول على كرة خضراء عند سحب كرة 3 مرات مع الإرجاع من صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء وكرتين زرقاوين.

4. تم سحب بطاقة بشكل عشوائي من صندوق فيه 14 بطاقة: 4 صفراء (Y) و 6 حمراء (R) و 1 خضراء (G) و 3 زرقاء (B). اكتب توزيعًا احتماليًا للتجربة في فضاء العينة $\{Y, R, G, B\}$.

5. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y كما يلي:

y	0	1	2	3	4	5
$P(y)$	0.1	0.3		0.1	0.05	0.05

a. أوجد قيمة $P(2)$.

b. أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للمتغير العشوائي Y .

c. أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للمتغير العشوائي Z ، حيث $Z = Y + 1$.

6. للمتغير العشوائي X خمس قيم ممكنة هي: 2، 3، 5، 8، 10، يبين الجدول التالي توزيعه الاحتمالي.

x	2	3	5	8	10
$P(x)$	0.14	0.11		0.26	0.23

a. أوجد $P(5)$.

b. أوجد احتمال أن تكون قيمة X هي 2 أو 10.

c. أوجد $P(X \leq 8)$.

d. أوجد $E(X)$.

e. أوجد $\text{Var}(X)$.

f. أوجد $E(Y)$ و $\text{Var}(Y)$ إذا كان $Y = 0.5X - 4$.

12. ليكن التوزيع الاحتمالي ذو الحدين

$$P(X = x) = {}_4C_x (0.7)^x (0.3)^{4-x}$$

حيث $x = 0, 1, 2, 3, 4$

a. أنشئ جدولاً لهذا التوزيع الاحتمالي.

b. أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري.

c. أوجد الاحتمالات الفعلية للمتغير X بحيث يقع في كل

من الفترتين $\mu \pm \sigma$ و $\mu \pm 2\sigma$ ثم قارن هذه الاحتمالات

باستعمال القاعدة التجريبية.

في التمارين 13-15، أوجد الدرجة المعيارية لقيمة كل من

الوسط الحسابي، μ ، والانحراف المعياري، σ ، وقيمة المتغير X

المعطاة في كل حالة.

13. $\mu = 0, \sigma = 2, x = 3$

14. $\mu = 1, \sigma = 0.15, x = 0.7$

15. $\mu = 100, \sigma = 15, x = 70$

في التمارين 16-19، أوجد قيمة الاحتمال للدرجة المعيارية z .

16. $P(z \leq 2.15)$

17. $P(z \geq 1.25)$

18. $P(z \leq -0.48)$

19. $P(z \geq -1.39)$

20. تتبع أسعار طابعة من صنف معين توزيعاً طبيعياً وسطه

الحسابي يساوي QR 215 مع انحراف معياري يساوي

QR 35. أجب عن الأسئلة التالية:

a. أوجد نسبة الطابعات التي سعرها أقل من QR 145.

b. أوجد نسبة الطابعات التي سعرها أكثر من QR 250.

c. أوجد نسبة الطابعات التي أسعارها بين QR 110

و QR 320.

21. أوجد القيمة z بحيث يكون $P(Z \leq z) = 0.925$.

22. أوجد القيمة z بحيث يكون $P(Z \leq z) = 0.215$.

23. يتبع طول الطالبات في إحدى المدارس توزيعاً احتمالياً

طبيعياً بوسط حسابي هو 60.3 in وانحراف معياري هو 2.1 in

a. أوجد الطول الذي يقل عنه فقط طول 15% من الطالبات

في هذه المدرسة.

b. أوجد الطول الذي يزيد عنه فقط طول 5% من الطالبات

في هذه المدرسة.

24. الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي الطبيعي X يساوي

14، إذا كان احتمال أن تكون قيمة X أصغر من 14.56 هو

79%، أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع.

25. للمتغير العشوائي الطبيعي X تباين هو 4، إذا كان احتمال

أن تكون قيمة X أكبر من 40.5 هو 3.1%، أوجد الوسط

الحسابي لهذا التوزيع.

1. يبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لقيم المتغير العشوائي Y .

y	0	1	2	3
$P(Y)$	k	0.11	0.05	0.22

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $E(Y)$.

c. أوجد $E(Y - 1)$.

d. أوجد $\text{Var}(2Y - 1)$.

2. للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P(X = x) = \frac{k}{4}x, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

a. أوجد قيمة k .

b. أوجد $E(X)$.

c. أوجد $\text{Var}(X)$.

d. أوجد $E(2X + 4)$.

e. أوجد $\text{Var}(3X + 1)$.

3. نرمي 3 مرات مكعبًا منتظمًا مرقمًا من 1 إلى 6، ونفترض أن احتمالات الحصول على أي رقم من الأرقام الستة في أي رمية متساوية. "النجاح" في كل رمية هو الحصول على رقم زوجي. حدد ما إذا كانت هذه التجربة تجربة ذات حدين أم لا. إذا كانت كذلك، أوجد احتمال النجاح وفُسره.

4. نرمي 3 مرات مكعبًا منتظمًا مرقمًا من 1 إلى 6، أوجد قيمة احتمال:

a. أن نحصل على الرقم 3 مرة واحدة.

b. أن نحصل على الرقم 3 مرتين بالضبط.

c. أن نحصل على الرقم 3 مرتين على الأقل.

5. نرمي قطعة نقد 8 مرات. أوجد قيمة احتمال:

a. أن نحصل على "الصورة" مرة واحدة بالضبط.

b. أن نحصل على "الصورة" 7 مرات بالضبط.

c. أن نحصل على "الصورة" 6 مرات على الأقل.

6. أوجد الدرجة المعيارية لقيمة كل من الوسط الحسابي μ ، والانحراف المعياري σ ، وقيمة المتغير X المعطاة:

$$\mu = 2.7, \sigma = 0.5, x = 3$$

في التمرينين 7 و 8، أوجد قيمة احتمال الدرجة المعيارية z

7. $P(z \leq 0.62)$

8. $P(z \leq -2.26)$

9. تتبع أسعار الحواسيب في متجر توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي يساوي QR 525 مع انحراف معياري يساوي QR 26. أجب عن الأسئلة التالية.

a. أوجد نسبة الحواسيب التي سعرها أقل من QR 450.

b. أوجد نسبة الحواسيب التي سعرها أكثر من QR 600.

c. أوجد نسبة الحواسيب التي سعرها بين QR 420 و QR 725.

10. أوجد القيمة z بحيث يكون $P(Z \leq z) = 0.71$.

11. تتبع درجات الطلاب في إحدى المدارس توزيعًا احتماليًا طبيعيًا بوسط حسابي هو 75 وانحراف معياري هو 10

a. أوجد الدرجة التي تقل عنها فقط درجات 10% من الطلاب في هذه المدرسة.

b. أوجد الدرجة التي تزيد عنها فقط درجات 5% من الطلاب في هذه المدرسة.

12. للمتغير العشوائي الطبيعي X تباين يساوي 16، إذا كان احتمال أن تكون قيمة X أكبر من 20 هو 3%، أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع.

الوحدة 8 المشروع

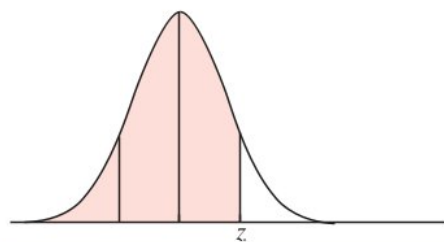
هامش الخطأ

عندما يحاول منظمو الدراسات المسحية توقع نتيجة انتخابات معينة، فإنهم يحسبون دائماً ما يسمى "هامش الخطأ" على شكل نسبة مئوية. ما لا يقولونه هو إن هامش الخطأ هذا مبني على نموذج طبيعي يتبع توزيعاً طبيعياً وإنهم على ثقة بنسبة 95% فقط بأن الدراسة المسحية تتوقع نتيجة الانتخابات بشكل صحيح.

لنفترض أن دراسة مسحية شملت عينة عشوائية من 625 ناخباً مسجلاً، وأن 325 منهم قالوا إنهم سيصوتون للمرشح A.

- ما نسبة الأصوات التي سينالها هذا المرشح حسب هذه الدراسة المسحية؟
- إذا استعملنا هذه النسبة المئوية كتقدير لاحتمال أن يصوّت أحد المشاركين في الدراسة للمرشح A، أوجد الانحراف المعياري لعدد المؤيدين للمرشح A في عينة بهذا الحجم.
- تحقق مما إذا كان النموذج الطبيعي هو المناسب في هذه الحالة.
- ما هو هامش الخطأ، في صورة نسبة مئوية، الذي يجعل القائمون على الدراسة واثقين بنسبة 95% في توقعهم؟
- وَصِّح لماذا قد يرى القائمون على الدراسة المسحية أن نتائج المرشحين في هذه الانتخابات ستكون متقاربة.

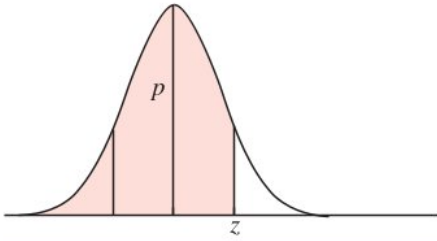
For Qatar MOE



جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب قيم المساحات من اليسار (7)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول معكوس التوزيع الطبيعي المعياري



p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.000	0.025	0.050	0.075	0.100	0.126	0.151	0.176	0.202	0.228
0.60	0.253	0.279	0.305	0.332	0.358	0.385	0.412	0.440	0.468	0.496
0.70	0.524	0.553	0.583	0.613	0.643	0.674	0.706	0.739	0.772	0.806
0.80	0.842	0.878	0.915	0.954	0.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
0.90	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555					

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.95	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.96	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.97	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.98	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.99	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

المصطلحات

ENGLISH

direction
variance
binomial experiment
total change
definite integral
integration by parts
integration by substitution
tabular integration
indefinite integration
standard representation
probability distribution
normal distribution
standard normal distribution
binomial distribution
 n^{th} root of z
 n^{th} root of unity
lower limit of integral
upper limit of integral
 z -score
argument
component form
polar form
trigonometric form
vector product
scalar product
three-dimensional space
empirical rule
expected value

العربية

اتجاه المتجه
التباين
التجربة ذات الحدين
التغير الكلي
التكامل المحدود
التكامل بالأجزاء
التكامل بالتعويض
التكامل بالجدول
التكامل غير المحدود
التمثيل القياسي
التوزيع الاحتمالي
التوزيع الطبيعي
التوزيع الطبيعي المعياري
التوزيع ذو الحدين
الجذر النوني للعدد z
الجذر النوني للوحدة
الحد الأدنى للتكامل
الحد الأعلى للتكامل
الدرجة المعيارية z
السعة
الصورة التركيبية
الصورة القطبية
الصورة المثلثية
الضرب الاتجاهي
الضرب القياسي
الفضاء الثلاثي الأبعاد
القاعدة التجريبية
القيمة المتوقعة

المصطلحات

ENGLISH

zero vector
 random variable
 continuous random variable
 discrete random variable
 additive identity
 multiplicative Identity
 imaginary axis
 real axis
 complex plane
 additive inverse
 multiplicative inverse
 imaginary unit
 ordered triple
 direction cosines
 solid of revolution
 particular solution
 general solution
 probability density function
 antiderivative
 integrand
 direction angle
 direction angles
 initial conditions
 head to tail method
 imaginary number
 complex number
 directed line segment
 partial fractions

العربية

المتجه الصفري
 المتغير العشوائي
 المتغير العشوائي المتصل
 المتغير العشوائي المنفصل
 المحايد الجمعي
 المحايد الضربي
 المحور التخيلي
 المحور الحقيقي
 المستوى المركب
 النظير الجمعي
 النظير الضربي
 الوحدة التخيلية
 ثلاثي مرتب
 جيوب التمام للاتجاه
 حجم دوراني
 حل خاص
 حل عام
 دالة الكثافة الاحتمالية
 دالة أصلية
 دالة مكاملة
 زاوية الاتجاه
 زوايا الاتجاه
 شرط ابتدائي
 طريقة الرأس للذيل
 عدد تخيلي
 عدد مركب
 قطعة مستقيمة متجهة
 كسور جزئية

المصطلحات

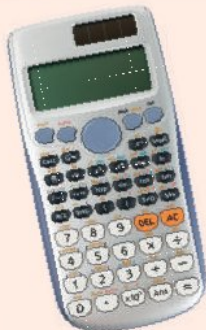
ENGLISH

scalar quantity
position vector
two-dimensional vector
complex conjugate
components of vector
differential equations
separable differential equations
antidifferentiation
inverse normal distribution
magnitude
modulus of a complex number

العربية

كمية قياسية
متجه الموضع
متجه ثنائي البعد
مرافق عدد مركب
مركبتا المتجه
معادلات تفاضلية
معادلات تفاضلية قابلة للفصل
معكوس الاشتقاق
معكوس التوزيع الطبيعي
مقدار المتجه
مقياس العدد المركب

المصطلحات



ملاحظة: تسلسل الضغط على الأزرار يكون دائمًا من اليسار إلى اليمين.

مقدمة

عند تشغيل الآلة الحاسبة، وقبل البدء بأي عملية حسابية نقوم بمسح الذاكرة:



أولاً: استخدام الآلة الحاسبة غير البيانية

I. معامل الارتباط r و معادلة خط الانحدار $y = Bx + A$ التي تربط بين المتغيرين x و y .

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تكوين جدول	MODE SETUP, BASE 3, COMPLEX 2	
ملء الجدول بقيم x المعطاة	القيمة الأولى x ثم [=] ، القيمة الثانية ثم [=] ، ... ، القيمة الأخيرة ثم [=]	
الانتقال إلى العمود الذي يتضمن قيم y		
ملء الجدول بقيم y المعطاة	القيمة الأولى y ثم [=] ، القيمة الثانية ثم [=] ، ... ، القيمة الأخيرة ثم [=]	
مسح الشاشة	AC	
إيجاد قيمة r	SHIFT, 1, 5, 3, [=]	
إيجاد قيمة B	SHIFT, 1, 5, 2, [=]	
إيجاد قيمة A	SHIFT, 1, 5, 1, [=]	

المصطلحات

II. الإحصاء بمتغير واحد.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تكوين جدول	الحالة الأولى: قيم بيانات عينة	
	الحالة الثانية: جدول تكراري	
ملء الجدول بقيم x المعطاة	الحالة الأولى: قيم بيانات عينة	
	الحالة الثانية: جدول تكراري	
مسح الشاشة		
لإيجاد عدد البيانات المدخلة n		
لإيجاد قيمة الوسط الحسابي $\bar{x}$		
لإيجاد قيمة الانحراف المعياري σ_x		
لإيجاد قيمة الانحراف المعياري s_x		
لإيجاد القيمة الصغرى		
لإيجاد القيمة العظمى		

المصطلحات

III. طرق العد.

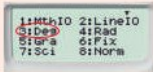
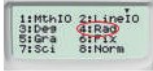
الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد مضروب عدد	  	
إيجاد عدد التباديل ${}_nP_r$	    	
إيجاد عدد التوافيق ${}_nC_r$	    	

IV. الاحتمال الطبيعي.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
الوصول إلى وضعية التوزيع الطبيعي	   	
إيجاد قيمة الاحتمال $P(z < a)$	      	
إيجاد قيمة الاحتمال $P(z > a)$	      	

إيجاد قيمة الاحتمال $P(a \leq z \leq b)$ نوجد قيمة الفرق $P(z \leq b) - P(z \leq a)$

V. الأعداد المركبة والعمليات عليها.

الخطوات	الأزرار المستعملة		شكل الشاشة
الوصول إلى وضعية CMPLX	 		
اختيار المقياس	للقياس بالـ <i>degree</i>	  	
	للقياس بالـ <i>radian</i>	  	

المصطلحات

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد قيمة $(a + ib)^n$		
لحل معادلة تربيعية $az^2 + bz + c = 0$	 = (يظهر الحل الأول) = (يظهر الحل الثاني)	
إيجاد المقياس r والسعة θ للعدد المركب $a + ib$		
إيجاد مرافق العدد المركب $a + ib$		

VI. الأوامر المباشرة.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد قيم لوغاريتمية	إيجاد قيمة $\log a$: إيجاد قيمة $\ln a$: إيجاد قيمة $\log_a b$:	
إيجاد قيم أسية e^a		
إيجاد نسب مثلثية لزوايا معطاة بالدرجات	اختيار المقياس: إيجاد قيمة $\cos x^\circ$: إيجاد قيمة $\sin x^\circ$: إيجاد قيمة $\tan x^\circ$:	

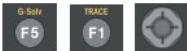
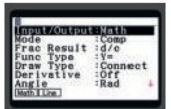
المصطلحات

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد الزوايا المرجعية (لإيجاد قياس الزاوية x بالراديان حيث $\cos x = a$)		
إيجاد التكامل المحدود		

ثانيًا: استخدام الآلة الحاسبة البيانية

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تمثيل دالة بيانيًا	صيغة الدالة ملاحظة: نستعمل $x \div T$ لاختيار المتغير x وللحصول على $\sqrt{\quad}$ نضغط x^2 ، SHIFT	
لرسم التمثيل البياني لدالة ثانية	صيغة الدالة الثانية	
لإلغاء معادلة ومحو التمثيل البياني	نختار الدالة المطلوبة	

المصطلحات

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
دراسة المزايا الأساسية لدالة	إيجاد أصفار الدالة: 	
	إيجاد القيمة العظمى للدالة: 	
	إيجاد القيمة الصغرى للدالة: 	
	للحصول على المقطع y: 	
	للحصول على إحداثيات تقاطع منحنيين: 	
	(ننتقل بالسهم لإيجاد باقي الإحداثيات عند وجود أكثر من نقطة) ملاحظة: عند ظهور <i>not found</i> يعني أن القيمة المطلوبة غير موجودة.	
الصيغة الحدودية	تفعيل وضعية Rad أو Deg: 	
	لتفعيل وضعية الصيغة الحدودية:  الصيغ الحدودية	
	(نستعمل  لإدخال المتغير T) ملاحظة: للتحكم بقياسات الرسم البياني والمتغير T نضغط على  إذا كانت الشاشة على الرسم أو  ثم  إذا كانت الشاشة على لائحة المعادلات وندخل القيم التي تناسب مع المثال المعطى.	

Photographs

1 Background Majeczka/Shutterstock; **48 Top** Sean Pavone/Shutterstock;
116 Bottom Right Carlos E. Santa Maria/Shutterstock; **205 Background** marekuliasz/Shutterstock
G4 Top Left Amankris/Shutterstock

For Qatar MOE Use Only

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته



جميع الحقوق محفوظة

وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي

لدولة قطر

تم رفع الملف من قبله



مندیانت صقر الجنوب التعليمية

المنهاج القطري

كل ما تحتاجه في مكان واحد



WWW.JNOB-QA.COM