وزارة التربيــــة والتعليـــم العالـــي
Ministry of Education and Higher Education
State of Qatar • دولـــة قطـــر

الرياضيّات

المستوى الحادي عشر - للمسارين العلمي والتكنولوجي

الفصل الدراسي الثاني

طبعة 1447 – 2025

حضرة صاحب السمو الشيخ تميم بن حمد آل ثاني

أمير دولة قطر

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَاءْ　　قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّياءْ
قَطَرٌ سَتَبْقَى حُرَّةً　　تَسْمُو بِرُوحِ الأَوْفِياءْ
سِيرُوا عَلَى نَهْجِ الأُلَى　　وَعَلَى ضِيَاءِ الأَنْبِيَاءْ
قَطَرٌ بِقَلْبِي سِيرَةٌ　　عِزٌّ وَأَمْجَادُ الإِبَاءْ
قَطَرُ الرِّجَالِ الأَوَّلِين　　حُمَاتُنَا يَوْمَ النِّدَاءْ
وَحَمَائِمٌ يَوْمَ السَّلاَمْ　　جَوَارِحٌ يَوْمَ الفِدَاءْ

قائمة بأدلّة المصادر الرقمية للمستوى الحادي عشر

للمسارين العلمي والتكنولوجي

تجدون أدناه رابطان للوصول إلى محتويات توضّح كيفية استخدام تطبيقات الآلة الحاسبة وعناصر التعلّم الإلكترونية (شروحات فيديوهات التعلّم).

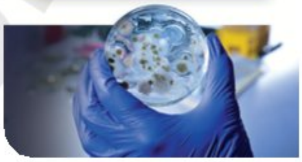
للاستفادة من الروابط، الرجاء تسجيل الدخول إلى "نظام قطر للتعليم" أوّلًا.

دليل استخدام العناصر الرقمية لمادة الرياضيات

تطبيقات الآلة الحاسبة

المحتويات

الوحدة 5



الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

الوحدة 6

الدوال الدائرية وخصائصها

الوحدة 7

المتطابقات والمعادلات المثلثية

المحتويات

الوحدة 8

الاحتمالات وطرق العد

الوحدة 9

الإحصاء

ملحق

استخدام الآلة الحاسبة

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

درست الدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية ودوال القوة ذات الأسس النسبية، وجميعها دوال جبرية، أي يمكن الحصول عليها من خلال العمليات الجبرية العادية كالجمع والطرح والضرب والقسمة، وكذلك عمليات القوى والجذور. سندرس الآن أنواعًا جديدة من الدوال هي الدوال الأسيّة والدوال اللوغاريتمية، وهي دوال تتجاوز كثيرًا تلك العمليات الجبرية، ولذلك تُسمى الدوال المتسامية (transcendental functions).

لهذه الدوال تطبيقات واسعة، تمامًا مثل الدوال الجبرية. فالدوال الأسيّة تستعمل، على سبيل المثال، للتعبير عن النمو والاضمحلال بمرور الزمن، مثل النمو السكاني غير المحدود أو اضمحلال المواد المشعة. أما الدوال اللوغاريتمية فهي أساس مقياس ريختر للزلازل وأساس قياس نسبة الأحماض في السوائل (مقياس PH).

للدوال الأسيّة واللوغاريتمية أيضًا دور أساس في الدراسات المالية، خصوصًا في قواعد حساب الفوائد المركبة ومعرفة القيم المستقبلية.

5.1 الدوال الأسيّة Exponential Functions

ما ستتعلّمه
- الدوال الأسيّة وتمثيلاتها البيانية
- النمو الأسي والاضمحلال الأسي
- الأساس الطبيعي e
- الدوال الأسيّة الطبيعية

... ولماذا
تمثل الدوال الأسيّة نماذج مناسبة للتعبير عن العديد من الحالات الواقعية، بما فيها نمو المجتمعات البشرية والحيوانية، وكذلك الاضمحلال مثل تحلّل العناصر المشعّة.

معايير الدرس
11A.6.1
11A.6.2
11A.7.1
11A.7.2

المصطلحات
- دالة أسيّة exponential function
- نمو أسي exponential growth
- اضمحلال أسي exponential decay
- أساس طبيعي natural base

الدوال الأسيّة وتمثيلاتها البيانية

تتضمن كلتا الدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ أسًّا وأساسًا، ولكن بأدوار متعاكسة:

- في الدالة $f(x) = x^2$، الأساس هو المتغير x والأس هو الثابت 2، f دالة مألوفة من دوال القوى الوحيدة الحد.
- في الدالة $g(x) = 2^x$، الأساس هو الثابت 2 والأس هو المتغير x، وتُسمى الدالة g **دالة أسيّة**.

نشير إلى أن الدالة الأسيّة معرّفة للأعداد النسبية وغير النسبية على حد سواء.

تعريف الدالة الأسيّة

ليكن a و b عددين حقيقيّين ثابتين. **الدالة الأسيّة** بدلالة x هي كل دالة يمكن كتابتها في الصورة:

$$f(x) = a \times b^x$$

حيث $a \neq 0$، b عدد موجب، و $b \neq 1$.

يُسمى الثابت a القيمة الابتدائية للدالة f (قيمة الدالة عندما $x = 0$). ويُسمى الثابت b **أساس** الدالة.

على سبيل المثال،

- الدالة $f(x) = 3^x$ هي دالة أسيّة أساسها 3 وقيمتها الابتدائية 1.
- الدالة $g(x) = 6x^{-4}$ هي دالة غير أسيّة لأن الأساس متغيّر والأس ثابت. g دالة من دوال القوى.
- الدالة $h(x) = -2(1.5)^x$ هي دالة أسيّة أساسها 1.5 وقيمتها الابتدائية -2
- الدالة $k(x) = 7 \times 2^{-x}$ يمكن أن تُكتب في الصورة:

$$k(x) = 7 \times \left(2^{-1}\right)^x = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

إذن، k دالة أسيّة قيمتها الابتدائية 7 وأساسها $\frac{1}{2}$

- الدالة $q(x) = 5 \times 6^{\pi}$ ليست دالة أسيّة لأن الأس π هو عدد ثابت، q دالة ثابتة.

مثال 1 التمثيل البياني للدوال الأسيّة وخصائصها

مثّل بيانيًا ثم حدّد الخصائص الأساسية (المجال، المدى، المقاطع x و y، خطوط التقارب، وسلوك الدالة الطرفي وفترات التزايد والتناقص) لكل من الدالتين الأسيّتين التاليتين:

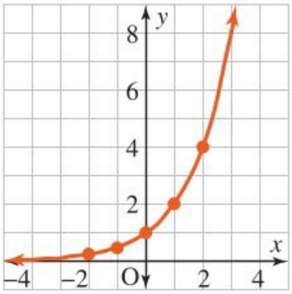
A. $f(x) = 2^x$

B. $g(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x$

الحل

A. بالنسبة للدالة f، $b = 2$، أنشئ جدول قيم للدالة f ثم مثّل النقاط في المستوى الإحداثي لترسم منحنى الدالة.

x	$f(x) = 2^x$
−2	0.25
−1	0.5
0	1
1	2
2	4

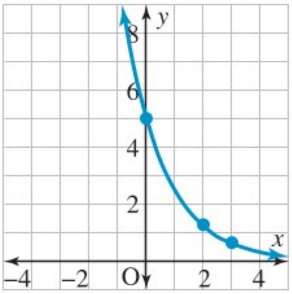


- **المجال:** جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- **المدى:** $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$
- **المقطع y:** 1
- **خط التقارب:** المحور x، أي أن منحنى الدالة لا يقطع المحور x.
- **السلوك الطرفي:** عندما $x \to -\infty$، فإن $y \to 0$.
  عندما $x \to \infty$، فإن $y \to \infty$.
- **التزايد والتناقص:** الدالة متزايدة على مجالها.

(تابع)

B. بالنسبة للدالة g، $b = \frac{1}{2}$، أنشئ جدول قيم للدالة g ثم مثّل النقاط في المستوى الإحداثي لترسم منحنى الدالة.

x	$g(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−2	20
−1	10
0	5
1	2.5
2	1.25



- **المجال:** جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- **المدى:** $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$
- **المقطع y :** 5
- **خط التقارب:** المحور x، أي أن منحنى الدالة لا يقطع المحور x.
- **السلوك الطرفي:** عندما $x \to -\infty$، فإن $y \to \infty$.
  عندما $x \to \infty$، فإن $y \to 0$.
- **التزايد والتناقص:** الدالة متناقصة على مجالها.

حاول أن تحل التمرين 1

رأينا في المثال 1 كيف نمثّل دوالًا أسيّة بيانيًا، وتعرّفنا على خصائصها الأساسية. سوف نرى في النشاط الاستكشافي التالي كيف يمكن استنتاج وتعميم هذه الخصائص لأي دالة أسيّة في الصورة $f(x) = b^x$.

نشاط استكشافي 1 التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

1. مثّل الدوال التالية بيانيًا في نافذة العرض $]-2, 2[$ في $]-1, 6[$.

a. $y_1 = 2^x$

b. $y_2 = 3^x$

c. $y_3 = 4^x$

d. $y_4 = 5^x$

- ما هي النقطة المشتركة بين التمثيلات البيانية الأربعة؟
- حلّل هذه الدوال من حيث المجال، والمدى، والاتصال، والسلوك التزايدي أو التناقصي، والتناظر، والقيم القصوى، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي.

2. مثّل كل دالة بيانيًا في نافذة العرض $]-2, 2[$ في $]-1, 6[$.

a. $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b. $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

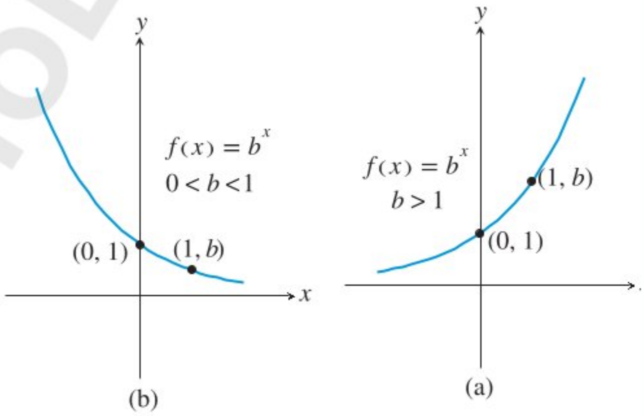
c. $y_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d. $y_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

- ما هي النقطة المشتركة بين التمثيلات البيانية الأربعة؟
- حلّل هذه الدوال من حيث المجال، والمدى، والاتصال، والسلوك التزايدي أو التناقصي، والتناظر، والقيم القصوى، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي.

نلخص فيما يلي ما تعلمناه عن الدالة الأسيّة مع قيمة ابتدائية تساوي 1

دالة أساسية **الدوال الأسيّة $f(x) = b^x$**



الشكل 5.1.1 التمثيل البياني للدالة $f(x) = b^x$
حيث (a) $b > 1$ و (b) $0 < b < 1$

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- عندما $b > 1$ (انظر الشكل 5.1.1a)، فإن
  - f دالة متزايدة
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- عندما $0 < b < 1$ (انظر الشكل 5.1.1b)، فإن
  - f دالة متناقصة
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

تمكّننا عمليات الإزاحة، والانعكاس، والتمدد، والتضيق للدوال، بالإضافة إلى معلوماتنا عن التمثيل البياني للدالة الأسيّة الرئيسة وخصائصها الأساسية، من تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا انطلاقًا من الدالة الرئيسة ومن ثم إيجاد خصائصها.

مثال 2 **تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة**

مثّل بيانيًا كل دالة مبيّنًا التحويل المستعمل انطلاقًا من الدالة الرئيسة ومقارنًا نقاط المقطعين x و y وخطوط التقارب.

A. **الدالة الرئيسة هي** $f(x) = 3^x$

$$g(x) = -3^x$$

$$h(x) = 3^x - 4$$

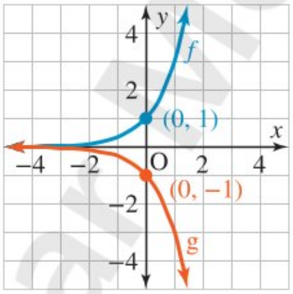
B. **الدالة الرئيسة هي** $f(x) = 2^x$

$$g(x) = 2^{x-1}$$

$$h(x) = 2^{-x}$$

الحل

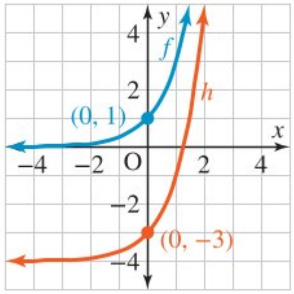
A. نحصل على التمثيل البياني للدالة $g(x) = -3^x$ بانعكاس التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$ حول المحور x.



$g(x) = -3^x = -f(x)$

يتغير المقطع y من 1 إلى -1، ويبقى المحور x هو خط التقارب الأفقي.

نحصل على التمثيل البياني للدالة $h(x) = 3^x - 4$ من خلال إزاحة رأسية لتمثيل الدالة $f(x) = 3^x$ بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.

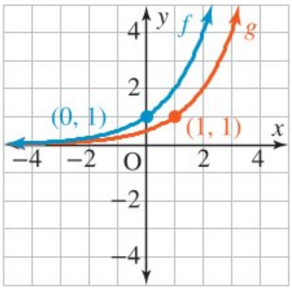


$h(x) = 3^x - 4 = f(x) - 4$

يتغير المقطع y من 1 إلى $-3 = (-4) + 1$، ويتغير خط التقارب الأفقي للدالة أيضًا ليصبح $y = -4$.

(تابع)

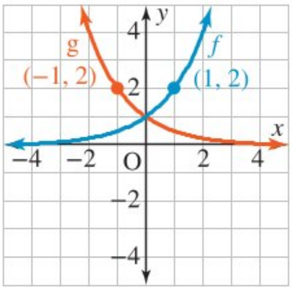
B. نحصل على التمثيل البياني للدالة $g(x) = 2^{x-1}$ من خلال إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^{x}$ وحدة واحدة إلى اليمين.



$$g(x) = 2^{x-1} = 2^{x} \times 2^{-1}$$
$$= \frac{1}{2} \times 2^{x}$$
$$= \frac{1}{2} f(x)$$

يتغير المقطع y من 1 إلى $\frac{1}{2}$، ولا يتغير خط التقارب الأفقي للدالة بل يبقى المحور x.

نحصل على التمثيل البياني للدالة $h(x) = 2^{-x}$ بانعكاس التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^{x}$ حول المحور y. بما أن $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(2^{-1}\right)^{x} = 2^{-x}$ يمكننا أيضًا اعتبار الدالة h دالة أسيّة قيمتها الابتدائية 1 وأساسها $\frac{1}{2}$



$$h(x) = 2^{-x} = \left(2^{x}\right)^{-1} = \left(f(x)\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{f(x)}$$

لا يتغير المقطع y بل يبقى 1، ولا يتغير خط التقارب الأفقي للدالة بل يبقى المحور x.

حاول أن تحل التمرين 6

النمو الأسي والاضمحلال الأسي

النمو الأسي دالة تعبّر عن كمية تتزايد بنسبة ثابتة عند مرور فترة زمنية محددة.

الاضمحلال الأسي دالة تعبّر عن كمية تتناقص بنسبة ثابتة عند مرور فترة زمنية محددة.

إذا كانت القيمة الابتدائية a ومعدل التزايد أو التناقص هو r، فإن هذه القيمة تصبح بعد مرور الوقت t كما يلي:

نموذج النمو الأسي

$$\mathbf{A}(t) = a(1 + r)^{t}$$

$$a > 0,\ b > 1,\ b = 1 + r$$

نموذج الاضمحلال الأسي

$$\mathbf{A}(t) = a(1 - r)^{t}$$

$$a > 0,\ 0 < b < 1,\ b = 1 - r$$

يُسمى b **معامل النمو الأسي** أو **معامل الاضمحلال الأسي** ويمثّل النسبة الثابتة بين قيمتين متتاليتين $A(t)$ و $A(t + 1)$.

مثال 3 تطبيق على الدوال الأسيّة

يبلغ سعر سيارة جديدة QR 96 000. يمكن استعمال الدالة $y = 96 \times (0.8)^x$ لتحديد سعر هذه السيارة (بآلاف QR) بعد مرور x من السنوات على استعمالها.

A. هل تمثّل الدالة نموًّا أم اضمحلالًا أسيًّا؟

B. ما معدل النمو أو الاضمحلال لهذه الدالة. ما معناه؟

C. ارسم الدالة بيانيًّا في مجال مناسب. ما الذي يمثّله كل من المقطع y وخط التقارب؟ متى يصبح سعر السيارة QR 20 000 تقريبًا؟

الحل

A. $y = 96 \times (0.8)^x$

$b = 0.8$

بما أن $0 < b < 1$، إذن الدالة تمثّل اضمحلالًا أسيًّا.

B. لإيجاد معدّل الاضمحلال r

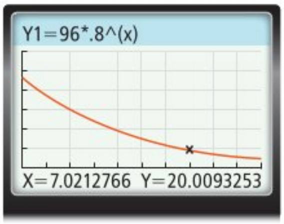
$$b = 1 - r$$

$$0.8 = 1 - r$$

$$r = 0.2$$

معدل الاضمحلال هو 0.2 أو 20%، وهذا يعني أن قيمة السيارة تتناقص بنسبة 20% سنويًّا.

C. يشير المقطع 96 إلى أن سعر السيارة عند شرائها كان QR 96 000.



يشير خط التقارب $y = 0$ إلى أن قيمة السيارة ستقارب الصفر بعد سنين عديدة.

يمر التمثيل البياني (تقريبًا) بالنقطة (7, 20)، ما يعني أن قيمة السيارة بعد 7 سنوات ستكون QR 20 000 تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 14

نصيحة دراسيّة

لكل دالة في الصورة $y = a \times b^x$، تكون الدالة متزايدة إذا كان $b > 1$، و تكون متناقصة إذا كان $0 < b < 1$.

مثال 4 استعمال نقطتين لإيجاد نموذج أسي

تعرف دانة أن أعداد الرسائل الإلكترونية التي ترسلها تزداد بشكل أسي، وقد سجلت الرسائل الإلكترونية التي أرسلتها سنويًّا ابتداءً من عام 2009،
أوجد النموذج الأسي الذي يصف البيانات.

(تابع)

الحل

اكتب النموذج الأسي في الصورة $y = a \times b^x$، حيث y عدد الرسائل الإلكترونية و x هو عدد السنوات منذ 2009، استعمل المعطيات من الشكل لإيجاد قيمة كل من a و b.

عندما تكون قيم x في البيانات متتالية، أي عدد سنوات متتالية، يكون معامل النمو b هو النسبة بين قيم y التابعة لها. إذن معامل النمو لبريد دانة الإلكتروني في سنتين متتاليتين هو $\frac{1\,400}{1\,000}$ أو 1.4
استعمل قيمة b وأحد المعطيات لإيجاد القيمة الابتدائية a.

اكتب معادلة نمو أسي	$y = a \times b^x$
عوّض $b = 1.4, x = 7, y = 1\,400$	$1\,400 = a \times (1.4)^7$
خاصية القسمة في المعادلات	$\frac{1\,400}{(1.4)^7} = a$
بسّط	$a \approx 133$

إذن، تنمذج الدالة $y = 133\ (1.4)^x$ عدد الرسائل الإلكترونية، التي أرسلتها دانة خلال x سنة بعد عام 2009.

حاول أن تحل التمرين 19

الأساس الطبيعي e

عند حساب الفوائد على الأموال المودعة، هناك فرق بين حساب الفائدة سنويًا وإضافتها إلى أصل المبلغ في آخر السنة وإضافة الفائدة المستحقة شهريًا. فبعد إضافة قيمة الفائدة في الشهر الأول، يترتب على هذه الإضافة فائدة في الشهر الثاني وهكذا. الفوائد على الفوائد تُسمى فائدة مركّبة.
صيغة الفائدة المركبة هي نموذج أسي، وتُكتب كما يلي:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

P = المبلغ الأصلي

r = نسبة الفائدة السنوية في الصورة العشرية

n = عدد فترات استحقاق الفائدة المركبة في السنة

A = جملة المبلغ

t = الزمن بالسنوات

إذا أردنا حساب جملة المبلغ بعد سنة، حيث المبلغ الأصلي QR 1 ونسبة الفائدة السنوية 100%، يمكننا استعمال المعادلة التالية:

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

يبيّن الجدول أدناه جملة المبلغ الذي نحصل عليه بحسب عدد الفترات n في السنة.

قيمة $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	**عدد الفترات** n
$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$	1
$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.59374246$	10
$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.704813829$	100
$\left(1 + \frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000} = 2.716923932$	1 000
$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 2.718145927$	10 000
$\left(1 + \frac{1}{100\,000}\right)^{100\,000} = 2.718268237$	100 000

نلاحظ أنه كلما ازداد العدد n، اقترب A من عدد ثابت هو ...2.718281828459
هذا العدد، الذي يمكن التوصّل إليه بأكثر من طريقة، يُسمى **الأساس الطبيعي** أو عدد أويلر ويُرمز له بالرمز e، وهو يعني أننا حسبنا الفائدة على عدد غير منته من الفترات في السنة، وهو ما يُسمى الفائدة المركبة المتواصلة ويتم حسابها بالصيغة.

$$A = Pe^{rt}$$

P = المبلغ الأصلي

e = الأساس الطبيعي

r = نسبة الفائدة السنوية في الصورة العشرية

A = جملة المبلغ

t = الزمن بالسنوات

مثال 5 **إيجاد الفائدة المركبة المتواصلة**

أودعت جواهر QR 12 600 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 3.2%، أوجد جملة المبلغ في الحساب بعد مرور 12 سنة. قرّب الإجابة إلى أقرب ريال.

الحل

نستعمل صيغة الفائدة المركبة المتواصلة باستعمال القيم:

$$P = 12\,600,\ r = 0.032,\ t = 12$$

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ &= 12\,600\, e^{0.032(12)} \\ &= 12\,600\, e^{0.384} \\ &\approx 18\,498.63 \end{aligned}$$

(لحساب $e^{0.384}$، نستعمل المفتاح e^x في الحاسبة)

جملة المبلغ في الحساب بعد مرور 12 سنة، مقربة إلى أقرب ريال، هي QR 18 499.

حاول أن تحل التمرين 23

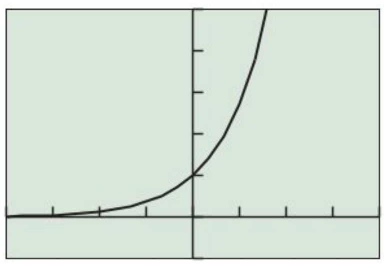
خطأ شائع

تأكّد عند احتسابك قيمة $e^{0.032(12)}$ أنك إمّا تقوم بتبسيط $0.032(12)$ بالصورة 0.384 أولًا، وإمّا تستعمل الأقواس للتأكد من أن e مرفوعة للأس الذي هو ناتج الضرب و ليس العامل الأول منه فقط.

الدوال الأسيّة الطبيعية

الدالة $f(x) = e^x$ هي الدالة الأسيّة الطبيعية وهي إحدى الدوال الأساسية.
فيما يلي أبرز خصائص التمثيل البياني لهذه الدالة.

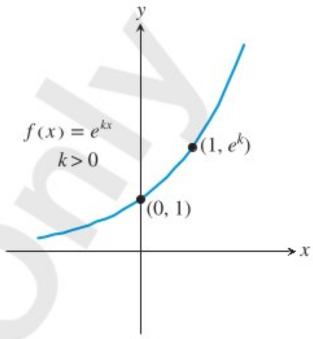
دالة أساسية **الدالة الأسيّة الطبيعية** $f(x) = e^x$



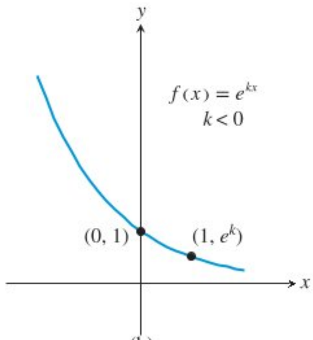
$[-4, 4]$ في $[-1, 5]$

الشكل 5.1.2

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة لكل قيم x
- لا يوجد تناظر لأنها ليست دالة فردية ولا زوجية
- ليس لها قيم قصوى محلية
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$



(a)



(b)

الشكل 5.1.3 التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^{kx}$ عندما (a) $k > 0$ و (b) $k < 0$.

الدوال الأسيّة الطبيعية

إذا كانت الدالة

$$f(x) = a \times e^{kx}$$

حيث k عدد حقيقي، فإنه:

عندما $a > 0$ و $k > 0$، تكون $f(x) = a \times e^{kx}$ دالة نمو أسي. (انظر الشكل 5.1.3a)

عندما $a > 0$ و $k < 0$، تكون $f(x) = a \times e^{kx}$ دالة اضمحلال أسي. (انظر الشكل 5.1.3b)

عندما $k = 0$، تكون $f(x) = a \times e^{kx}$ دالة ثابتة.

مثال 6 تحويلات التمثيلات البيانية للدالة الأسية الطبيعية

وضّح كيف يمكن تحويل دالة الأس الطبيعي $f(x) = e^x$ إلى كل من الدوال التالية. ارسم كل دالة بيانيًّا ثم تحقق من إجابتك باستعمال الحاسبة البيانية.

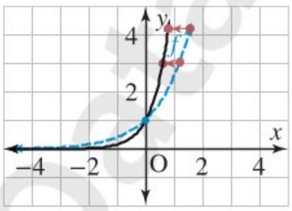
A. $g(x) = e^{2x}$

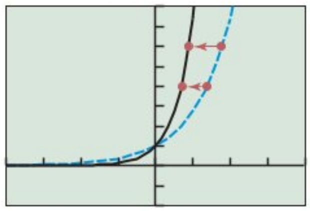
B. $h(x) = e^{-x}$

C. $k(x) = 3e^x$

الحل

A. التمثيل البياني للدالة $g(x) = e^{2x}$ هو تضّيق التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^x$ أفقيًّا بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$ (انظر الشكل)

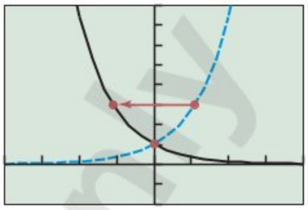




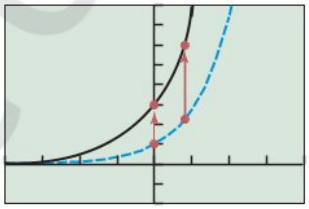
$[-4, 4]$ في $[-2, 8]$

(a)

(تابع)



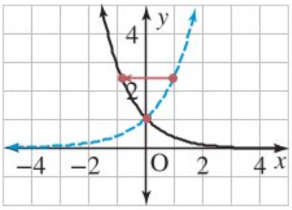
[−4, 4] في [−2, 8]
(b)



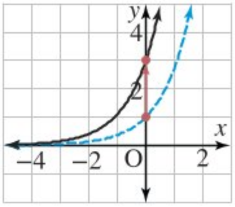
[−4, 4] في [−2, 8]
(c)

الشكل 5.1.4 التمثيل البياني للدالة
$g(x) = e^{2x}$ (a) مع $f(x) = e^{x}$
و (b) $h(x) = e^{-x}$ ، و (c) $k(x) = 3e^{x}$.

B. التمثيل البياني للدالة $h(x) = e^{-x}$ هو انعكاس التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^{x}$ حول المحور y. (انظر الشكل)



C. التمثيل البياني للدالة $k(x) = 3e^{x}$ هو تمدد التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^{x}$ رأسيًّا بمعامل مقداره 3 (انظر الشكل)



حاول أن تحل التمرين 26

مراجعة سريعة 5.1

في التمارين 1-6، حدّد ما إذا كانت الدالة دالة أسيّة. إذا كانت كذلك حدّد القيمة الابتدائية والأساس، وإذا لم تكن دالة أسيّة بيّن السبب.

1. $y = x^{5}$

2. $y = 12^{x}$

3. $y = 3.7^{x}$

4. $y = 9^{12}$

5. $y = x^{\frac{1}{x}}$

6. $y = x^{7.3}$

في التمارين 7-10، احسب قيمة الدالة بعد تعويض قيمة x المعطاة، من دون استعمال الحاسبة.

7. $f(x) = 3 \times 5^{x}, \quad x = 0$

8. $f(x) = 6 \times 3^{x}, \quad x = -2$

9. $f(x) = -2 \times 3^{x}, \quad x = \frac{1}{3}$

10. $f(x) = 8 \times 4^{x}, \quad x = -\frac{3}{2}$

الدرس 5.1 التمارين

1. مثّل الدالة $f(x) = 4 \times (0.5)^x$ بيانيًا، ثمّ حدّد الخصائص الأساسية لهذه الدالة (المجال، والمدى، والمقاطع x و y، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي وفترات التزايد والتناقص).

في التمارين 2-5، مثّل بيانيًا، ثمّ حدّد الخصائص الأساسية للدوال الأسيّة (المجال، والمدى، والمقاطع x و y، وخطوط التقارب، سلوك الدالة الطرفي، وفترات التزايد والتناقص).

2. $f(x) = 5 \times 3^x$

3. $f(x) = 7 \times 2^x$

4. $f(x) = 0.75 \left(\frac{2}{3}\right)^x$

5. $f(x) = 0.75 \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. مثّل بيانيًا كل دالة مبيّنًا التحويل المستعمل انطلاقًا من الدالة الرئيسة $f(x) = 5^x$ ومقارنًا نقاط المقطعين x و y وخطوط التقارب.

a. $g(x) = 5^{x+3}$

b. $h(x) = 5^{-x}$

7. أكتب الدالة $g(x)$ التي تمثّل الدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بعد تمدد رأسي بمعامل مقداره 6 وانعكاس عبر المحور x. مثّل الدالتين بيانيًا.

في التمارين 8-13، صف عملية تحويل التمثيل البياني للدالة f إلى التمثيل البياني للدالة g. ارسم التمثيل البياني يدويًا ثم تحقّق من التمثيلات البيانية باستعمال الحاسبة البيانية.

8. $f(x) = 2^x, g(x) = 2^{x-3}$

9. $f(x) = 3^x, g(x) = 3^{x+4}$

10. $f(x) = 4^x, g(x) = 4^{-x}$

11. $f(x) = 2^x, g(x) = 2^{5-x}$

12. $f(x) = 0.5^x, g(x) = 3 \times 0.5^x + 4$

13. $f(x) = 0.6^{3x}, g(x) = 2 \times 0.6^{3x}$

14. تم إطلاق 220 صقرًا في منطقة ما في الثاني من يناير 2016. تنمذج الدالة $f(x) = 220\ (1.05)^x$ عدد الصقور في هذه المنطقة، لمدة x سنوات بعد 2016.

a. هل تتزايد أعداد الصقور أم تتناقص؟

b. في أي سنة سيصل عدد الصقور إلى 280 صقرًا؟

في التمارين 15-18، هل تمثّل الدالة نموًّا أسيًا أم اضمحلالاً أسيًا؟

15. $y = 100 \times 2.5^x$

16. $f(x) = 10\,200 \left(\frac{3}{5}\right)^x$

17. $f(x) = 12\,000 \left(\frac{7}{10}\right)^x$

18. $f(x) = 450 \times 2^x$

19. قدّر مثمّن قيمة قطعة أرض على فترة عدة سنوات منذ سنة 1950، كانت قيمة قطعة الأرض QR 31 000 سنة 1954، و QR 35 000 سنة 1955. استعمل البيانات لتكتب نموذجًا أسيًا يصف قيمة قطعة الأرض.

في التمارين 20-22، أكتب نموذجًا أسيًا حسب النقطتين.

20. $(9, 140)$ و $(10, 250)$

21. $(6, 85)$ و $(7, 92)$

22. $(10, 43)$ و $(11, 67)$

23. تستثمر QR 125 000 في حساب يعطي فائدة سنوية، مركبة متواصلة هي 4.75%:

a. أوجد جملة المبلغ في الحساب بعد 15 سنة.

b. أوجد جملة المبلغ في الحساب بعد 30 سنة.

في التمرينين 24 و 25، أوجد جملة المبلغ، إذا عُلم المبلغ الأصلي P، نسبة الفائدة r، الزمن t، وفترة التراكم المعطاة.

24. بفائدة مركبة متواصلة،
$p = \text{QR } 1000, r = 2.8\%, t = 5$ سنوات

25. بفائدة مركبة متواصلة،
$p = \text{QR } 16\,000, r = 4\%, t = 25$ سنوات

في التمارين 26-29، صِف عملية تحويل التمثيل البياني للدالة f إلى التمثيل البياني للدالة g. ارسم التمثيل البياني يدويًا ثم تحقق من الإجابة باستعمال حاسبة التمثيل البياني.

26. $f(x) = e^{x}, g(x) = e^{-2x}$

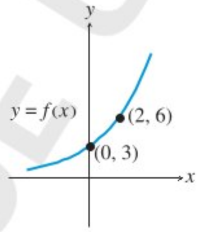
27. $f(x) = e^{x}, g(x) = -e^{-3x}$

28. $f(x) = e^{x}, g(x) = 2e^{3-3x}$

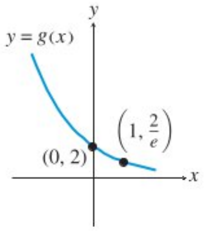
29. $f(x) = e^{x}, g(x) = 3e^{2x} - 1$

في التمرينين 30 و 31، اكتب صيغة للدالة الأسيّة التي تمثيلها البياني مبيّن في الشكل.

30. $f(x)$



31. $g(x)$



في التمرينين 32 و 33، اكتب صيغة الدالة الأسيّة التي قيمها معطاة في الجدول 5.1.2

32. $f(x)$

33. $g(x)$

الجدول 5.1.2 قيم دالتين أسيّتين

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	6	108
-1	3	36
0	$\frac{3}{2}$	12
1	$\frac{3}{4}$	4
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{3}$

34. كان عدد سكان إحدى القرى 007 4 عام 2000، ويُتوقع أن يتناقص عددهم بنسبة 0.36% سنويًا. اكتب دالة اضمحلال أسيّة واستعملها لإيجاد قيمة تقريبية لعدد سكان هذه القرية عام 2020.

35. بكتيريا تحتوي مستعمرة بكتيريا على 50 كائنًا، ثم أخذت تتضاعف 4 مرات يوميًا. اكتب دالة أسيّة، $P(t)$، تمثل تعداد البكتيريا بعد t من الأيام. ثم أوجد عدد البكتيريا في المستعمرة بعد 5 أيام.

36. بطولة كرة القدم يمكن إيجاد عدد الفرق المتأهلة إلى النهائيات y بعد مرحلة التصفيات المباشرة باستعمال الدالة الأسيّة $y = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$، حيث x عدد المباريات في كل مرحلة.

a. حدّد ما إذا كانت الدالة تمثّل نموًّا أم اضمحلالًا أسيًا.

b. ماذا يمثّل العدد 128 في الدالة؟

c. أوجد النسبة المئوية للفرق التي تُقصى من البطولة بعد كل مرحلة. وضّح كيف توصّلت إلى الإجابة.

d. مثّل الدالة بيانيًا. أوجد المجال والمدى المناسبين للدالة. وضّح إجابتك.

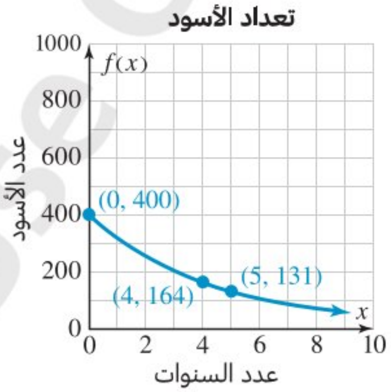
37. تم اعتماد برنامج لتخفيض عدد الأرانب في إحدى المزارع. عند بداية البرنامج كان عدد الأرانب 230، بعد عدد t من السنوات يمكن نمذجة عدد الأرانب R، بالعلاقة التالية: $R = 230e^{(-0.2t)}$. كم يصبح عدد الأرانب في المزرعة بعد 3 سنوات؟

38. تم تصميم أحد الاختبارات لدراسة نوع معيّن من البكتيريا. يمكن نمذجة عدد البكتيريا بعد مرور t من الدقائق بالدالة الأسيّة: $A(t) = Ce^{kt}$ حيث C و k عددان ثابتان.
عند بداية الاختبار كان عدد البكتيريا 000 5، ثم تزايد عدد البكتيريا ليصبح 000 17 بعد 22 دقيقة.

a. أوجد C وأوجد k مقرّبة إلى أقرب جزء من الألف.

b. أوجد عدد البكتيريا بعد بدء الاختبار بساعة واحدة.

39. الكتابة للتعلم تمثّل الدالة المبيّنة في التمثيل البياني عدد الأسود في إحدى المناطق بعد x سنة، حيث معدل الاضمحلال هو 20%، ويمكن نمذجة عدد حيوانات حمار الوحش في نفس المنطقة بعد x سنة باستعمال الدالة $f(x) = 300\,(0.95)^x$. يقول ممثل إحدى مجموعات حماية البيئة إن عدد الأسود سيصبح أقل من عدد حيوانات حمار الوحش بعد سنتين. هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.



40. في المصرف أودع سمير QR 3 500 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 2.25% في العام 2010، أوجد جملة المبلغ عام 2025، ثم أوجد قيمة الفائدة المستحقة بحلول العام 2025.

أسئلة اختبار معيارية

41. صواب أم خطأ كل الدوال الأسيّة هي دوال متزايدة عند استثناء الصفر من مجالها. برّر إجابتك.

42. صواب أم خطأ يعتقد بدر أن الدالة $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ تمثّل اضمحلالًا أسيًّا. هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.

43. اختيار من متعدد أي مما يلي دالة أسيّة؟

A. $f(x) = a^2$

B. $f(x) = x^3$

C. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

E. $f(x) = 8^x$

44. اختيار من متعدد أي النقاط مشتركة بين كل الدوال التي صيغتها $f(x) = b^x$، $(b > 0)$؟

A. $(1, 1)$

B. $(1, 0)$

C. $(0, 1)$

D. $(0, 0)$

E. $(-1, -1)$

45. اختيار من متعدد معامل النمو للدالة $f(x) = 4 \times 3^x$ هو:

A. 3

B. 4

C. 12

D. 64

E. 81

استكشاف

46. مثّل كل دالة بيانيًا وحلّلها من حيث المجال، والمدى، والتزايد أو التناقص، والقيم القصوى، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي.

a. $f(x) = x \times e^x$

b. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

47. استعمل خواص الأسس لحل كل معادلة. ادعم إجابتك بالتمثيل البياني.

a. $2^x = 4^2$

b. $3^x = 27$

c. $8^{\frac{x}{2}} = 4^{x+1}$

d. $9^x = 3^{x+1}$

توسيع الأفكار

48. النمو الأسي في علم الجينات في علم الجينات، أنت الجيل 0، ووالداك الجيل 1، وجدّاك وجدتاك هم الجيل 2، وآباء أجدادك هم الجيل 3، والأجداد الأكبر مرتين هم الجيل 4

a. أوجد عدد الأجداد الأكبر أربع مرات. ما هو رقم جيلهم؟

b. استخدم دالة أسيّة لنمذجة عدد الأجداد الأكبر n مرة.

c. استعمل النموذج الذي وجدته في الفرع (b) لتجد عدد الأجداد الأكبر 6 مرات.

d. أوجد عدد الأجداد الأكبر 25 مرة.

e. ناقش عدد السنين المطلوبة للوصول إلى الجيل 25 باعتبار أن معدل الفرق بين كل جيلين هو 30 سنة. يعتقد أن عدد سكان الأرض سنة 1250 كان 400 مليون نسمة تقريبًا.
أوجد عدد سكان الأرض سنة 1250 الذين قد يكونون من أقاربك.

5.2 اللوغاريتمات Logarithms

ما ستتعلّمه

- مفهوم اللوغاريتم
- اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي

... ولماذا

تستعمل اللوغاريتمات لتبسيط بعض العمليات الحسابية المعقدة، ويمكن ملاحظتها في العديد من الصيغ العلمية مثل مقياس ريختر ومقياس شدّة الصوت ومقياس درجة الحموضة.

معايير الدرس

11A.7.3

11A.7.6

المصطلحات

- لوغاريتم logarithm
- لوغاريتم اعتيادي common logarithm
- لوغاريتم طبيعي natural logarithm

مفهوم اللوغاريتم

تحدث الزلازل موجات اهتزازية عبر الأرض. تربط المعادلة $y = 10^x$ سعة الموجة الاهتزازية y والقوة x التي تسبّب تزلزل الأرض.
إذا أردنا معرفة قوة الزلزال عندما تكون سعة الموجة 500 5، يجب علينا حل المعادلة $10^x = 5\ 500$،
والسؤال هو: ما هو الأس الذي إذا وضعناه فوق الأساس 10 نحصل على 500 5؟

السعة، y	القوة، x
100	2
1 000	3
5 500	**?**
10 000	4

يقع العدد 500 5 في المنتصف بين العددين 000 1 و 000 10، ولكن لا يمكننا القول إن x يقع في المنتصف بين 3 و 4، أي 3.5 ببساطة، لأن $10^{3.5} \approx 3\ 162 \neq 5\ 500$
إن استعراض قيم $y = 10^x$ لعدد من القيم يبين ما يلي:

$$y = 10^x$$
$$10^3 = 1\ 000$$
$$10^4 = 10\ 000$$
$$10^{3.5} \approx 3\ 162$$
$$10^{3.7} \approx 5\ 012$$
$$10^{3.8} \approx 6\ 310$$

نستنتج أن القيمة التي نبحث عنها تزيد قليلًا عن 3.7، وتقل عن 3.8
$10^{3.74} \approx 5\ 500$، هكذا تكون القوة 3.74
إذن، نحن نبحث عن الصورة العكسية للصورة الأسيّة $x = b^y$. هذه الصورة العكسية تُسمى الصورة اللوغاريتمية. ويُرمز لها بالرمز $y = log_b\ x$ وتكون y **لوغاريتم** العدد x للأساس b.

لوغاريتم x ذو الأساس b

يعرّف لوغاريتم x ذو الأساس b كما يلي:

$log_b\ x = y$، إذا وفقط إذا كانت $b^y = x$،

حيث $b > 0$، $b \neq 1$، و $x > 0$.

عندما نكتب مثلًا $log_2\ x$، فإننا نعني الأس الذي يُرفع للأساس 2 ليكون الناتج العدد x، تمامًا كما عبّرنا بالمقدار $\sqrt{x}$ عن العدد الذي مربعه يساوي x.

مثال 1 التحويل بين الصورة الأسيّة والصورة اللوغاريتمية

A. أوجد الصورة اللوغاريتمية للمقدار $3^4 = 81$

B. أوجد الصورة الأسيّة للمقدار $log_{10}\ 1\ 000 = 3$.

الحل

A. الأساس هو 3، والأس هو 4، والنتيجة هي 81، في الصورة اللوغاريتمية،
$3^4 = 81$ تصبح $log_3\ 81 = 4$.
إذن، الصورة اللوغاريتمية للعبارة $3^4 = 81$ هي $\log_3 81 = 4$.

B. الأساس هو 10، والأس هو 3، والنتيجة هي 1 000، في الصورة الأسيّة،
$log_{10}\ 1\ 000 = 3$ تصبح $10^3 = 1\ 000$
إذن الصورة الأسيّة للعبارة $\log_{10} 1\ 000 = 3$ هي $10^3 = 1\ 000$

حاول أن تحل التمرين 1

نصيحة دراسية

هل تتذكّر كتابة عائلة الحقائق للعلاقات المترابطة مثل الجمع والطرح؟ فكّر في الصورة الأسيّة والصورة اللوغاريتمية على أنها عائلة الحقائق للأعداد الثلاثة المعطاة.

مثال 2 إيجاد قيم لوغاريتمية

أوجد قيمة كل مقدار مما يلي.

A. $log_5\ 125$

B. $log_{\frac{1}{4}}\ 16$

C. $log_3\ 0$

D. $log_2\ 2^8$

الحل

A. فكّر: $5^? = 125$، أي ما هو أس العدد 5 ليكون الناتج 125؟
بما أن $5^3 = 125$، إذن $log_5\ 125 = 3$.

B. فكّر: $\left(\frac{1}{4}\right)^? = 16$، أي ما هو أس العدد $\frac{1}{4}$ ليكون الناتج 16؟
بما أن $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$، إذن $log_{\frac{1}{4}}\ 16 = -2$.

C. فكّر: $3^? = 0$، أي ما هو أس العدد 3 ليكون الناتج 0؟
بما أنه لا وجود لقوة هنا ليكون الناتج 0، إذن $log_3\ 0$ ليست معرّفة.

D. فكّر: $2^? = 2^8$، أي ما هو أس العدد 2 ليكون الناتج 2^8؟
بما أن $2^8 = 2^8$، إذن $log_2\ 2^8 = 8$.

حاول أن تحل التمرين 10

عمم

لأي دالة أسيّة في الصورة $y = b^x$ حيث $b > 0$، تكون المخرجة عدد موجب. إذن، المدخلة للدالة اللوغاريتمية يجب أن تكون عددًا موجبًا أيضًا.

يمكن أن نعمّم العلاقات التي لاحظناها في الأمثلة السابقة على النحو الآتي.

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

لكل $b > 0$، $b \neq 1$، $x > 0$، وأي عدد حقيقي y،

- $log_b 1 = 0$ لأن $b^0 = 1$
- $log_b b = 1$ لأن $b^1 = b$
- $log_b b^y = y$ لأن $b^y = b^y$
- $b^{log_b x} = x$ لأن $log_b x = log_b x$

تعطينا هذه الخصائص طرقًا فعّالة لإيجاد قيم لوغاريتمات بسيطة وبعض العبارات الأسيّة.
لاحظ العبارات التالية:

$$log_2 8 = log_2 2^3 = 3$$
$$log_3 \sqrt{3} = log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$
$$6^{log_6 11} = 11$$

اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي

يُسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 **اللوغاريتم الاعتيادي**، ويُسمى اللوغاريتم ذو الأساس e **اللوغاريتم الطبيعي**، وهما من الأساسات الخاصة للوغاريتم. فيما يلي تعريف اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم الاعتيادي.

اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $x > 0$.

يُسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 اللوغاريتم الاعتيادي، ويُكتب $log\ x$، حيث يكون الأساس 10 مقصود ضمنيًّا.

ويُسمى اللوغاريتم ذو الأساس e اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب $ln\ x$.

العبارتان $log_{10} x$ و $log\ x$ تعنيان الشيء نفسه، كما أن $log_e x$ و $ln\ x$ تعنيان الشيء نفسه.

الخصائص الأساسية للوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $x > 0$.

- $log\ 1 = 0$، لأن $10^0 = 1$
- $log\ 10 = 1$، لأن $10^1 = 10$
- $log\ 10^y = y$، لأن $10^y = 10^y$
- $10^{log\ x} = x$، لأن $log\ x = log\ x$

- $ln\ 1 = 0$، لأن $e^0 = 1$
- $ln\ e = 1$، لأن $e^1 = e$
- $ln\ e^y = y$، لأن $e^y = e^y$
- $e^{ln\ x} = x$، لأن $ln\ x = ln\ x$

مثال 3 إيجاد قيم لمقادير لوغاريتمية وأسيّة باستعمال الخصائص

أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

A. $log \sqrt[5]{10}$

B. $log \frac{1}{1\,000}$

C. $10^{log\ 6}$

D. $ln \sqrt{e}$

E. $ln\ e^5$

F. $e^{ln\ 4}$

الحل

A. $log \sqrt[5]{10} = log\ 10^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

B. $log \frac{1}{1\,000} = log \frac{1}{10^3} = log\ 10^{-3} = -3$

C. $10^{log\ 6} = 6$

D. $ln \sqrt{e} = log_e \sqrt{e} = \frac{1}{2}$ (لأن $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$)

E. $ln\ e^5 = log_e\ e^5 = 5$

F. $e^{ln\ 4} = 4$

حاول أن تحل التمرين 21

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيم اللوغاريتم وذلك بالضغط على مفتاح ln/log متبوعًا بالعدد المطلوب إيجاد لوغاريتمه.

مثال 4 **إيجاد قيم اللوغاريتمات الاعتيادية والطبيعية باستعمال الحاسبة**

A. **استعمل الحاسبة لإيجاد القيم اللوغاريتمية الاعتيادية إذا كانت معرّفة، وتحقّق من إجابتك من خلال إيجاد العبارات الأسيّة المناسبة.**

i. log **34.5**

ii. log **0.43**

iii. $log\ (-3)$

B. **استعمل الحاسبة لإيجاد القيم اللوغاريتمية الطبيعية إذا كانت معرّفة، وتحقّق من إجابتك من خلال إيجاد العبارات الأسيّة المناسبة.**

i. ln **23.5**

ii. ln **0.48**

iii. $ln\ (-5)$

الحل

A.

i. $log\ 34.5 = 1.537\ldots$ لأن $10^{1.537\ldots} = 34.5$

ii. $log\ 0.43 = -0.366\ldots$ لأن $10^{-0.366\ldots} = 0.43$

iii. $log\ (-3)$ غير معرّف لأنه لايوجد عدد حقيقي y بحيث يكون $10^y = -3$، تعطينا الحاسبة "Math ERROR".

```
log(34.5)
          1.537819095
10^Ans
                 34.5
log(0.43)
         -.3665315444
10^Ans
                  .43
```

B.

i. $ln\ 23.5 = 3.157\ldots$ لأن $e^{3.157\ldots} = 23.5$

ii. $ln\ 0.48 = -0.733\ldots$ لأن $e^{-0.733\ldots} = 0.48$.

iii. $ln(-5)$ غير معرّف لأنه لايوجد عدد حقيقي y بحيث يكون $e^y = -5$. تعطينا الحاسبة "Math ERROR".

```
ln(23.5)
          3.157000421
e^Ans
                 23.5
ln(0.48)
         -.7339691751
e^Ans
                  .48
```

حاول أن تحل التمرينين 22 و 26

يمكن حل المعادلات الأسية أو اللوغاريتمية بالتحويل من صورة إلى أخرى وذلك بعد عزل الكميات التي تتضمن الأس أو اللوغاريتم إلى أحد طرفَي المعادلة.

مثال 5 حل معادلات باستعمال اللوغاريتمات

حل المعادلتين التاليتين. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف

A. $25 = 10^{x-1}$

B. $\ln(2x + 3) = 4$

الحل

A. اكتب المعادلة الأصلية $25 = 10^{x-1}$

حوّل إلى الصورة اللوغاريتمية $\log 25 = x - 1$

استعمل خاصية الجمع $1 + \log 25 = x$

استعمل الحاسبة لإيجاد القيمة $2.398 \approx x$

B. اكتب المعادلة الأصلية $\ln(2x + 3) = 4$

حوّل إلى الصورة الأسيّة $2x + 3 = e^4$

استعمل الحاسبة لإيجاد القيمة $2x + 3 \approx 54.598$

استعمل خاصية الجمع $2x \approx 51.598$

استعمل خاصية الضرب $x \approx 25.799$

حاول أن تحل التمرين 30

مثال 6 حل مسائل باستعمال اللوغاريتمات

تقاس الطاقة الزلزالية x بالجول (*Joules*)، وهي ترتبط بقوة الزلزال، m، من خلال المعادلة $x = 10^{1.5m+12}$.

أوجد قوة زلزال طاقته الزلزالية 4.2×10^{20} جول.

الحل

عوّض $x = 4.2 \times 10^{20}$ $4.2 \times 10^{20} = 10^{1.5m+12}$

حل المعادلة لإيجاد m

(تابع)

اكتب المعادلة في الصورة اللوغاريتمية $log\left(4.2 \times 10^{20}\right) = 1.5\,m + 12$

حل لإيجاد m $m = \frac{log\left(4.2 \times 10^{20}\right) - 12}{1.5}$

بسّط $5.75 \approx m$

إذن، قوة الزلزال هي 5.75 تقريبًا.

تحقق من الإجابة $10^{1.5(5.75)+12} \approx 4.2 \times 10^{20}$

حاول أن تحل التمرين 38

مراجعة سريعة 5.2

في التمارين 1-6، أوجد قيمة المقدار من دون استعمال الحاسبة.

1. 5^{-2}
2. 10^{-3}
3. $\frac{4^0}{5}$
4. $\frac{1^0}{2}$
5. $\frac{8^{11}}{2^{28}}$
6. $\frac{9^{13}}{27^8}$

في التمارين 7-10، أعد كتابة المقدار في صورة أساس له أس نسبي، دون استعمال الحاسبة.

7. $\sqrt{5}$
8. $\sqrt[3]{10}$
9. $\frac{1}{\sqrt{e}}$
10. $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

الدرس 5.2 التمارين

في التمارين 1-4، اكتب الصورة اللوغاريتمية للمعادلة.

1. $7^3 = 343$
2. $3^8 = 6\,561$
3. $e^{-3} \approx 0.0498$
4. $5^0 = 1$

في التمارين 5-9، اكتب الصورة الأسية للمعادلة.

5. $log_4 16 = 2$
6. $log \frac{1}{100} = -2$
7. $log_8 64 = 2$
8. $ln\, 148.41 \approx 5$
9. $log_2 \frac{1}{32} = -5$

في التمارين 10-20، أوجد قيمة العبارة اللوغاريتمية دون استخدام الآلة الحاسبة.

10. $log_3\left(\frac{1}{81}\right)$
11. $log_7(-7)$
12. $log_5 5^9$
13. $log_5\left(\frac{1}{125}\right)$
14. $\log_6(-216)$
15. $log_3\left(3^4\right)$
16. $log_2(32)$
17. $log_9(729)$
18. $log_8\left(\frac{1}{64}\right)$
19. $log_7 0$
20. $log_7 7^a$

21. أوجد قيمة كل مقدار دون استخدام الآلة الحاسبة.

a. $log\, 10^3$
b. $ln\, e^5$
c. $ln \frac{1}{e}$
d. $log \frac{1}{\sqrt{1\,000}}$
e. $log\, 10$
f. $log\, 10\,000$
g. $log\, 100\,000$
h. $log\, 10^{-4}$
i. $log \sqrt[3]{10}$
j. $ln\, e^3$
k. $ln\, e^{-4}$
l. $ln \frac{1}{\sqrt{e^7}}$
m. $ln\, 1$
n. $ln \sqrt[4]{e}$

في التمارين 22-29، استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة المقدار اللوغاريتمي في حال كان معرّفًا، وتحقق من إجابتك بإيجاد قيمة المقدار الأسي الخاص به.

22. $\log 9.43$ **23.** $\log 0.908$

24. $\log (-14)$ **25.** $\log (-5.14)$

26. $\ln 4.05$ **27.** $\ln 0.733$

28. $\ln (-0.49)$ **29.** $\ln (-3.3)$

في التمارين 30-37، حل المعادلات وقرّب الحل إلى أقرب جزء من ألف.

30. $\log (3x - 2) = 2$ **31.** $e^{x+2} = 8$

32. $\log (7x + 6) = 3$ **33.** $2.75e^{t} = 38.6$

34. $\ln (3x - 1) = 2$ **35.** $10^{t+1} = 50$

36. $1.5e^{t} = 27$ **37.** $\log(x - 3) = -1$

38. بالرجوع إلى المثال 6، أوجد قوة زلزال طاقته الزلزالية 1.8×10^{23} جول.

39. أودع عبدالله QR 1 000 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 4.75% وأودع محمود QR 1 200 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 4.25%، حساب أي منهما سينمو ليصل إلى QR 1 800 أولًا؟

في التمارين 40-45، أوجد قيمة المقدار من دون استعمال الحاسبة.

40. $7^{\log_7 3}$ **41.** $5^{\log_5 8}$

42. $10^{\log (0.5)}$ **43.** $10^{\log 14}$

44. $e^{\ln 6}$ **45.** $e^{\ln \left(\frac{1}{5}\right)}$

في التمارين 46-50، حل المعادلة من خلال تحويلها إلى الصورة الأسيّة.

46. $\log x = 2$ **47.** $\log x = 4$

48. $\log x = -1$ **49.** $\log x = -3$

50. $\ln (7x + 6) = 3$

51. إذا أُودِع مبلغ QR 250 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 4%، فما الزمن اللازم ليصبح QR 600. قرّب الإجابة إلى أقرب سنة.

52. **الزلازل** يُحتسب مقياس "ريختر" للزلازل باستعمال النموذج $R = 0.67 \log (0.37E) + 1.46$، حيث E هي الطاقة (بالكيلوواط ساعة) التي يطلقها الزلزال.

a. أوجد مقياس الزلزال الذي يطلق طاقة مقدارها 11 800 000 000 كيلوواط ساعة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

b. ما كمية الطاقة التي يجب أن يطلقها زلزال لتكون شدته 8.2 على مقياس ريختر؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح.

c. ما كمية الطاقة التي يجب أن يطلقها زلزال ليتسبب في تصدّع الجدران؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح.

أسئلة اختبار معيارية

53. **صواب أم خطأ** الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسيّة. برّر إجابتك.

54. **صواب أم خطأ** اللوغاريتم الاعتيادي هو لوغاريتم أساسه 10، برّر إجابتك.

55. **اختيار من متعدد** أي مما يلي يعدّ القيمة التقريبية للوغاريتم الاعتيادي للعدد 2

A. 0.10523

B. 0.20000

C. 0.30103

D. 0.69315

E. 3.32193

56. **اختيار من متعدد** أي من العبارات التالية خطأ؟

A. $log\ 5 = 2.5\ log\ 2$

B. $log\ 5 = 1 - log\ 2$

C. $log\ 5 > log\ 2$

D. $log\ 5 < log\ 10$

E. $log\ 5 = log\ 10 - log\ 2$

استكشاف

57. تحسب الدالة $c(t) = 42\,e^{-0.05t} + 24$ الحرارة، بالدرجة المئوية، لكوب من القهوة قُدّم إلى زبون منذ t دقائق.

a. أوجد حرارة القهوة في الكوب لحظة تقديمها إلى الزبون.

b. أوجد عدد الدقائق اللازمة لتصل درجة حرارة القهوة إلى 37 درجة مئوية. قرّب إجابتك إلى أقرب دقيقة كاملة.

58. **الكتابة للتعلم** وضّح لماذا لا ينتمي الصفر إلى مجال الدوال اللوغاريتمية $f(x) = log_3\ x$ و $g(x) = log_5\ x$.

توسيع الأفكار

59. وضّح كيفية تحويل التمثيل البياني للدالة $f(x) = ln\ x$ إلى التمثيل البياني للدالة $g(x) = log_{\frac{1}{e}}\ x$.

60. وضّح كيفية تحويل التمثيل البياني للدالة $f(x) = log\ x$ إلى التمثيل البياني للدالة $g(x) = log_{0.1}\ x$.

5.3 الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

ما ستتعلّمه
- الدوال اللوغاريتمية وعلاقاتها بالدوال الأسيّة
- دالة اللوغاريتم الطبيعي

... ولماذا
يساعد التمثيل البياني لدالة لوغاريتمية على فهم خصائصها الأساسية، وبالتالي على تطبيق هذه الخصائص.

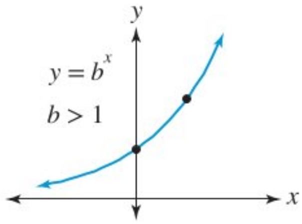
معايير الدرس
11A.7.4

11A.7.5

المصطلحات
- الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function
- دالة اللوغاريتم الطبيعي
natural logarithmic function

الدوال اللوغاريتمية وعلاقاتها بالدوال الأسيّة

يبيّن الشكل التالي التمثيل البياني للدالة $y = b^x$، حيث $b > 1$.

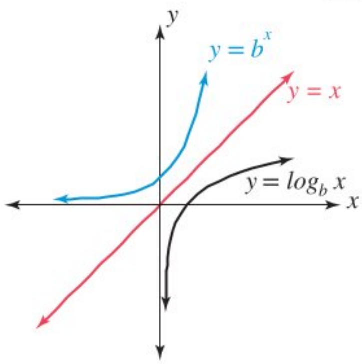


يبيّن اختبار الخط الأفقي أن الدالة الأسيّة هي دالة واحد لواحد وعليه فإن معكوس الدالة الأسيّة هي أيضًا دالة.

يبيّن الشكل التالي التمثيل البياني لمعكوس الدالة الأسيّة، الذي يتناظر مع التمثيل البياني للدالة $y = b^x$ حول المستقيم $y = x$. وتُسمى هذه الدالة، **الدالة اللوغاريتمية**.

ويُرمز لها بالرمز $y = log_b\, x$، حيث $x > 0$، $b > 1$، و $b \neq 1$.

إذن، الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسيّة، ولذلك تتبادل المدخلات والمخرجات أدوارها في الدالتين.



يبيّن الجدول 5.3.1 العلاقة بين $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = log_2\, x$.

الجدول 5.3.1 دالة أسيّة ومعكوسها

x	$f(x) = 2^x$	x	$f^{-1}(x) = log_2\, x$
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-3
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

يمكن الإفادة من هذه العلاقة لإيجاد جداول القيم والتمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية، كما ستكتشف في النشاط الاستكشافي 1

نشاط استكشافي 1 المقارنة بين الدالة الأسيّة واللوغاريتمية

1. ضع الحاسبة البيانية على الصيغة الحدودية (Parametric mode) وصيغة التمثيل البياني المتزامن (Simultaneous graphing mode).

ليكن $X1T = T$ و $Y1T = 2^T$.

وليكن $X2T = 2^T$ و $Y2T = T$.

إنشاء الجداول: ليكن $TblStart = -3$ و $\Delta Tbl = 1$. استعمل خاصية الجدول في حاسبتك البيانية للحصول على الصيغة العشرية لجزأي الجدول 5.3.1، تأكد من التحرك إلى اليمين لرؤية X2T و Y2T.

رسم التمثيل البياني: ليكن $Tmin = -6$ و $Tmax = 6$ و $Tstep = 0.5$. لتكن نافذة (x, y)، $[-6, 6]$ في $[-4, 4]$.

استعمل خاصية التمثيل البياني (Graph) للحصول على تمثيل بياني متزامن للدالتين $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = log_2 x$. استعمل خاصية "Trace" لاستكشاف العلاقات الرقمية بين التمثيلين البيانيين.

2. التمثيل البياني في صيغة الدوال (Function mode): مثّل بيانيًا $y = 2^x$ في نفس النافذة. ثم استعمل أمر "رسم المعكوس" (draw inverse) لرسم التمثيل البياني للدالة $y = log_2 x$.

مثال 1 التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية وخصائصها

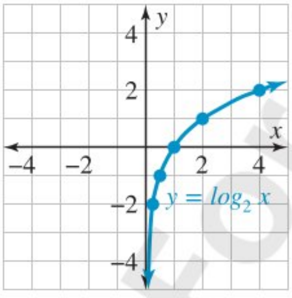
مثّل بيانيًا الدالة $y = log_2 x$.

أوجد المجال والمدى ومقطع x وخط التقارب والسلوك الطرفي وفترات التزايد و التناقص.

الحل

انشيء جدول قيم للدالة $y = log_2 x$ ثم مثّل النقاط في المستوى الإحداثي.

x	0.25	0.5	1	2	4
y	−2	−1	0	1	2

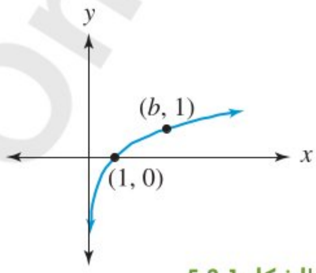


- **المجال:** $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$
- **المدى:** كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
- **المقطع x:** 1
- **خط التقارب الرأسي:** المحور y، أي أن منحنى الدالة لا يقطع المحور y.
- **السلوك الطرفي:** عندما $x \to \infty$، $y \to \infty$.
  عندما $x \to 0$، فإن $y \to -\infty$.
- **التزايد والتناقص:** الدالة متزايدة على مجالها.

حاول أن تحل التمرين 2

فيما يلي التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية وخصائصها الأساسية.

دالة أساسية **الدالة اللوغاريتمية** $f(x) = log_b\, x$ ، $b > 1$



الشكل 5.3.1

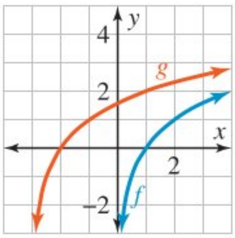
- المجال: $]0, \infty[$
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية أو فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسي: $x = 0$
- ليس لها خطوط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} log_b\, x = \infty$

سوف نرى في المثالين 2 و 3 كيفية تمثيل الدوال اللوغاريتمية باستعمال التحويلات من الدالة الرئيسة $y = log_b\, x$.

مثال 2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية باستعمال التحويلات

مثّل بيانيًا الدالة $g(x) = log_2(x + 3)$ مقارنًا خط التقارب ومقطع x لهذه الدالة مع خط التقارب ومقطع x للدالة الرئيسة $f(x) = log_2\, x$.

الحل



نحصل على التمثيل البياني للدالة $g(x) = log_2\,(x + 3)$ من خلال إزاحة التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية $f(x) = log_2\, x$ ثلاث وحدات إلى اليسار.

$$f(x) = log_2\, x$$

$$g(x) = log_2\,(x + 3) = f(x - (-3))$$

يُزاح كل من خط التقارب الرأسي و مقطع x مقدار 3 وحدات إلى اليسار.

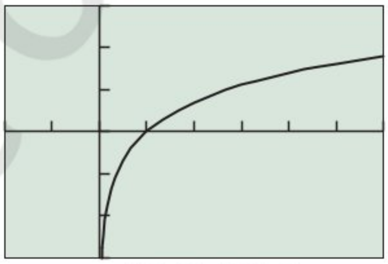
لذا يتغير المقطع x للدالة g من 1 إلى -2، ويتغير خط التقارب الرأسي للدالة g من $x = 0$ ليصبح $x = -3$.

حاول أن تحل التمرين 8

دالة اللوغاريتم الطبيعي

دالة اللوغاريتم الطبيعي $f(x) = log_e x = ln\, x$ هي واحدة من الدوال الأساسية، وهي الدالة العكسية لدالة الأس الطبيعي $f(x) = e^x$. فيما يلي أبرز خصائص التمثيل البياني لهذه الدالة.

دالة أساسية — **دالة اللوغاريتم الطبيعي $f(x) = ln\, x$**



$[-3, 3]$ في $[-2, 6]$

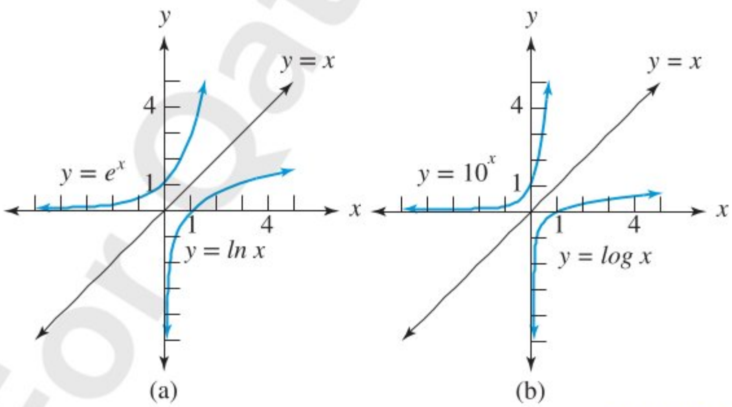
الشكل 5.3.2

- المجال: $]0, \infty[$
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسي: $x = 0$
- ليس لها خطوط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to\infty} ln\, x = \infty$

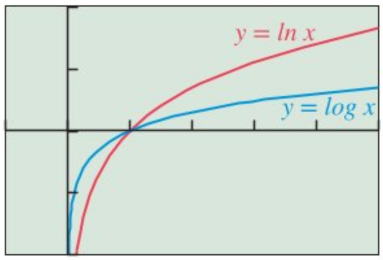
المجال والمدى للدالة $f(x) = ln\, x$ هو نفسه بالنسبة لأية دالة لوغاريتمية أخرى $g(x) = log_b x$ حيث $(b > 1)$. كذلك فإن خصائص $f(x)$ الأساسية كسلوك الدالة لجهة التزايد والتناقص، والتناظر، تصح كلها بالنسبة للدالة $g(x)$. من النادر أن نستعمل الدوال اللوغاريتمية $g(x) = log_b x$ حيث $0 < b < 1$ لأنه يمكن الاستعاضة عنها بدوال لوغاريتمية ذات أساس $b > 1$. إذن دالة اللوغاريتم الطبيعي هي دالة نموذجية للدوال اللوغاريتمية عمومًا.

لفهم دوال اللوغاريتم الطبيعي $y = ln\, x$ والاعتيادي $y = log\, x$، نستطيع أن نقارنهما بدالتيهما العكسيتين $y = e^x$ و $y = 10^x$.

يبيّن الشكل 5.3.3a كيف أن $y = ln\, x$ و $y = e^x$ تتناظران حول المحور $y = x$، وكذلك الأمر بالنسبة للشكل 5.3.3b الذي يبيّن كيفية تناظر $y = log\, x$ و $y = 10^x$ حول المحور $y = x$.



الشكل 5.3.3



$[-1, 5]$ في $[-2, 2]$

الشكل 5.3.4 التمثيلين البيانيين لدالة اللوغاريتم الطبيعي ودالة اللوغاريتم الاعتيادي.

يبيّن الشكل 5.3.4 الخصائص المشتركة بين دالة اللوغاريتم الطبيعي ودالة اللوغاريتم الاعتيادي. ومن جهة أخرى يبيّن نقاط الفرق بين هاتين الدالتين.

مثال 3 تحويل التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

اشرح كيفية تحويل التمثيل البياني للدالة $y = ln\ x$ أو الدالة $y = log\ x$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة.

A. $g(x) = ln\ (x + 2)$ **B.** $h(x) = ln\ (3 - x)$

C. $g(x) = 3\ log\ x$ **D.** $h(x) = 1 + log\ x$

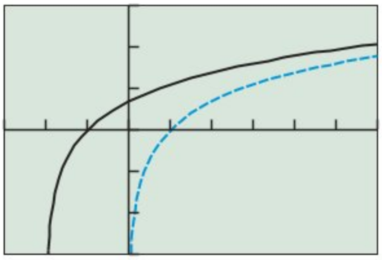
الحل

A. نحصل على التمثيل البياني للدالة $g(x) = ln\ (x + 2)$ عبر إزاحة أفقية لتمثيل الدالة $y = ln\ x$ وحدتين إلى اليسار. أنظر الشكل 5.3.5a

B. يمكن التعبير عن الدالة h في الصورة التالية: $h(x) = ln\ (3 - x) = ln\ [-(x - 3)]$.
إذن، نحصل على التمثيل البياني للدالة $h(x) = ln\ (3 - x)$ من التمثيل البياني للدالة $y = ln\ x$ بإجراء انعكاس حول المحور y متبوعًا بإزاحة أفقية مقدارها 3 وحدات إلى اليمين. انظر الشكل 5.3.5b

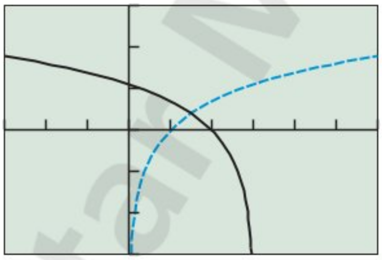
C. نحصل على التمثيل البياني $g(x) = 3\ log\ x$ بتمديد تمثيل الدالة $f(x) = log\ x$ رأسيًّا بمعامل مقداره 3، انظر الشكل 5.3.5c

D. نحصل على التمثيل البياني للدالة $h(x) = 1 + log\ x$ بإزاحة رأسية لتمثيل الدالة $f(x) = log\ x$ وحدة واحدة إلى الأعلى. انظر الشكل 5.3.5d



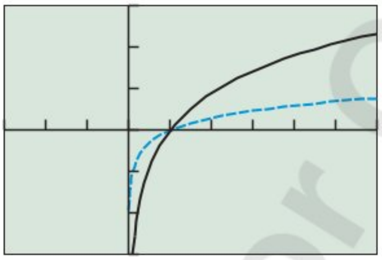
[–3, 6] في [–3, 3]

(a)



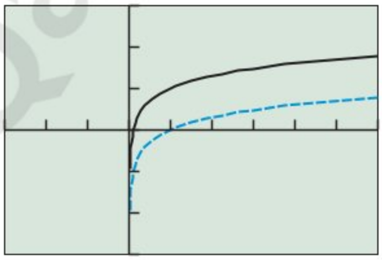
[–3, 6] في [–3, 3]

(b)



[–3, 6] في [–3, 3]

(c)



[–3, 6] في [–3, 3]

(d)

الشكل 5.3.5 تحويل $y = ln\ x$ للحصول على (a) $g(x) = ln\ (x + 2)$ و (b) $h(x) = ln\ (3 - x)$
وتحويل $y = log\ x$ للحصول على (c) $g(x) = 3\ log\ x$ و (d) $h(x) = 1 + log\ x$

حاول أن تحل التمرين 11

مثال 4 الدوال العكسية للدوال الأسيّة واللوغاريتمية

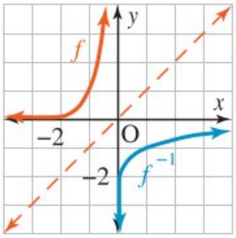
أوجد معادلة معكوس الدالة:

A. $f(x) = 10^{x+1}$

B. $g(x) = log_7\,(x + 5)$

C. $h(x) = 2ln\,(x + 1)$

الحل



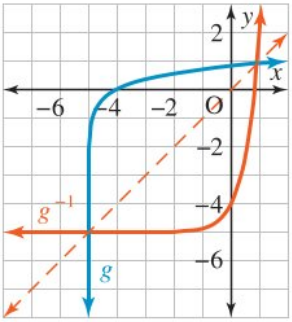
A. اكتب الدالة في الصورة $y = f(x)$ $y = 10^{x+1}$

بدّل أدوار x و y $x = 10^{y+1}$

اكتب في الصورة اللوغاريتمية $y + 1 = log\,x$

حل لإيجاد y $y = log\,x - 1$

إذن، معادلة معكوس الدالة $f(x) = 10^{x+1}$ هي $f^{-1}(x) = log\,x - 1$



B. اكتب الدالة في الصورة $y = h(x)$

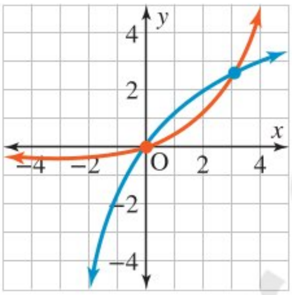
$y = log_7\,(x + 5)$

بدّل أدوار x و y $x = log_7\,(y + 5)$

اكتب في الصورة الأسيّة $y + 5 = 7^x$

حل لإيجاد y $y = 7^x - 5$

إذن، معادلة معكوس الدالة $g(x) = log_7\,(x + 5)$ هي $g^{-1}(x) = 7^x - 5$.



C. اكتب الدالة في الصورة $y = h(x)$

$y = 2\,ln\,(x + 1)$

بدّل أدوار x و y $x = 2\,ln\,(y + 1)$

اقسم على 2 $ln\,(y + 1) = \frac{x}{2}$

اكتب في الصورة الأسيّة $y + 1 = e^{\frac{x}{2}}$

حل لإيجاد y $y = e^{\frac{x}{2}} - 1$

إذن معادلة معكوس الدالة $h(x) = 2\,ln\,(x + 1)$ هي $h^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$.

حاول أن تحل التمرينين 22 و 23

مثال 5 تفسير معكوس المعادلة باستعمال اللوغاريتمات

تستعمل إحدى الشركات الدالة التالية لربط الإيرادات R (بآلاف الريالات) بكلفة الدعاية والترويج a (بآلاف الريالات)

$$R = 12\,log\,(a + 1) + 25$$

أوجد الصيغة العكسية لهذه الدالة.

أي معادلة هي الأسهل استعمالًا لإيجاد قيمة a المناسبة لقيمة R معينة؟

الحل

اكتب المعادلة في صورة $R = f(a)$ — $R = 12\,log\,(a + 1) + 25$

اطرح 25 من طرفَي المعادلة — $R - 25 = 12\,log\,(a + 1)$

اقسم طرفَي المعادلة على 12 — $\frac{R - 25}{12} = log\,(a + 1)$

أعد الكتابة بالصيغة الأسيّة — $a + 1 = 10^{\frac{R-25}{12}}$

اطرح 1 من طرفَي المعادلة — $a = 10^{\frac{R-25}{12}} - 1$

معكوس المعادلة هو $a = 10^{\frac{R-25}{12}} - 1$.

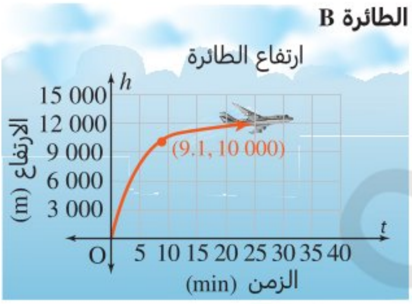
سيكون من الأسهل استعمال المعكوس لإيجاد a عندما يكون R معروفًا.

حاول أن تحل التمرين 30

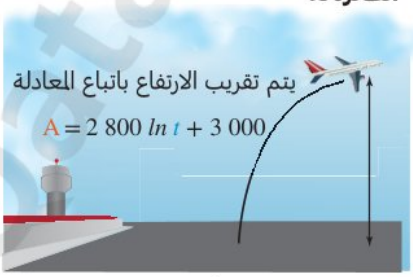
مثال 6 مقارنة بين دالتين من الدوال اللوغاريتمية

تستطيع الدالة اللوغاريتمية تقدير ارتفاع الطائرة بدلالة الزمن. أيّ الطائرتين تصل أولًا إلى ارتفاع 000 10 متر؟

الطائرة B



الطائرة A



A الارتفاع (بالأمتار)

t الزمن بعد الإقلاع (بالدقائق)

(تابع)

الحل

بالنسبة للطائرة A:

عوّض الارتفاع 10 000 = A $\quad 10\ 000 = 2\ 800\ ln\ t + 3\ 000$

احسب لإيجاد $ln\ t$ $\quad ln\ t = \frac{10\ 000 - 3\ 000}{2\ 800}$

$ln\ t = \frac{7\ 000}{2\ 800} = 2.5$

حوّل إلى الصورة الأسية لإيجاد t $\quad t = e^{2.5} \approx 12.2$

أي إنّ الطائرة A تصل إلى ارتفاع 10 000 متر بعد 12.2 دقيقة.

بالنسبة للطائرة B:

نستعمل التمثيل البياني. تصل الطائرة إلى ارتفاع 10 000 متر عند مرور زمن تقريبي تقديره 9.1 دقيقة. إذن، تصل الطائرة B إلى ارتفاع 10 000 متر قبل الطائرة A بثلاث دقائق تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 31

مراجعة سريعة 5.3

في التمارين 1-10، أوجد قيمة اللوغاريتمات والمقدار الأسي.

1. $log_3 \sqrt{3}$

2. $log_7 7$

3. $log_5 \frac{1}{25}$

4. $log_4 1$

5. $log_2 8$

6. $6^{log_6 11}$

7. $log\ 100$

8. $log \sqrt[5]{10}$

9. $log \frac{1}{1\ 000}$

10. $10^{log\ 6}$

الدرس 5.3 التمارين

في التمارين 1-5، مثّل الدالة بيانيًا، حدّد المجال والمدى. سمّ كل مقطع أو خط تقارب. صِف السلوك الطرفي.

1. $y = log_{\frac{1}{2}} x$

2. $y = log_5 x$

3. $y = log_8 x$

4. $y = log_{\frac{3}{10}} x$

5. $y = log_{0.1} x$

في التمارين 6-9، مثّل بيانيًا الدالة g، مقارنًا خط التقارب ومقطع x لهذه الدالة مع الدالة الرئيسة المعطاة.

.6 $g(x) = \frac{1}{2} log_6 x$، الدالة الرئيسة $f(x) = log_6 x$.

.7 $g(x) = log_6 (-x)$، الدالة الرئيسة $f(x) = log_6 x$.

.8 $g(x) = log_3 (x + 4)$، الدالة الرئيسة $f(x) = log_3 x$.

.9 $g(x) = 5\ log_2 x$، الدالة الرئيسة $f(x) = log_2 x$.

في التمارين 10-15، صِف كيفية تحويل التمثيل البياني للدالة $y = ln\ x$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة. ارسم التمثيل البياني ثم تحقّق من إجابتك باستعمال الحاسبة البيانية.

10. $f(x) = ln\ x + 2$

11. $f(x) = ln\ (-x) + 3$

12. $f(x) = ln\,(-x) - 2$ **13.** $f(x) = ln\,(2 - x)$

14. $f(x) = ln\,(5 - x)$ **15.** $f(x) = ln\,(x + 3)$

في التمارين 16-21، صِف كيفية تحويل التمثيل البياني للدالة $y = log\ x$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة. ارسم التمثيل البياني ثم ادعم رسمك باستعمال الحاسبة البيانية.

16. $f(x) = -1 + log\,(x)$ **17.** $f(x) = log\,(x - 3)$

18. $f(x) = -2\,log\,(-x)$ **19.** $f(x) = 2\,log\,(3 - x) - 1$

20. $f(x) = -3\,log\,(-x)$ **21.** $f(x) = -3\,log\,(1 - x) + 1$

في التمارين 22-29، أوجد معادلة معكوس الدالة.

22. $f(x) = 3^{x+2}$ **23.** $f(x) = log_7\,(x) - 2$

24. $f(x) = 5^{x-3}$ **25.** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

26. $f(x) = 6^{x+7}$ **27.** $f(x) = log_2\,(8x)$

28. $f(x) = ln\,(x + 3) - 1$ **29.** $f(x) = 4\,log_2\,(x - 3) + 2$

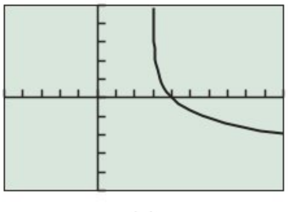
30. إن الارتفاع y، بالأمتار، لطائرة ما بعد t دقيقة من إقلاعها، يُقدّر بالدالة $y = 1\,500\ ln\,(0.015t) + 2\,400$. حلّ لإيجاد t بدلالة y. في أي الحالات يكون من السهل استعمال الدالة الجديدة بدل الأصلية؟

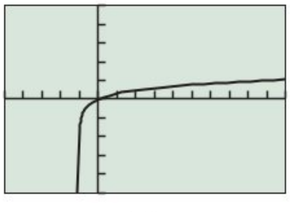
31. يُقدّر ارتفاع طائرة أثناء تحليقها بدالة لوغاريتمية: $A = a\ ln\ t + b$. حيث a و b عددان حقيقيان موجبان. ماذا يمثّل العدد b؟

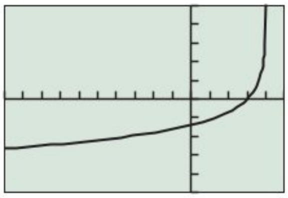
في التمارين 32-35، صِل كل دالة بتمثيلها البياني.

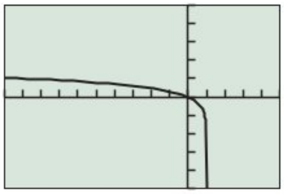
32. $f(x) = log\,(1 - x)$ **33.** $f(x) = log\,(x + 1)$

34. $f(x) = -ln\,(x - 3)$ **35.** $f(x) = -ln\,(4 - x)$


(a)


(b)


(c)


(d)

في التمارين 36-41، مثّل الدالة بيانيًا. حلّل الدالة لإيجاد المجال، والمدى، والاتصال، وفترات التزايد والتناقص، والنقاط القصوى، والتناظر، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي.

36. $f(x) = log\,(x - 2)$ **37.** $f(x) = 3\,log\,(x) - 1$

38. $f(x) = -log\,(x + 2)$ **39.** $f(x) = ln\,(x + 1)$

40. $f(x) = -ln\,(x - 1)$ **41.** $f(x) = 5\,ln\,(2 - x) - 3$

42. تنمذج المعادلة $m = 1.6^{w+2}$ عدد الأعضاء، m، المنتمين إلى مركز تدريب، بعد w أسابيع من افتتاحه، حيث $0 \le w \le 10$. أوجد معادلة معكوس الدالة واشرح ماذا يخبرك.

أسئلة اختبار معيارية

43. صواب أم خطأ كتب خالد معادلة معكوس الدالة الأسيّة $f(x) = 5^{x-6} + 2$ كما هو مبيّن أدناه. هل خالد على صواب؟ برّر إجابتك.

اكتب الدالة في الصورة $y = f(x)$	$y = 5^{x-6} + 2$
بدّل أدوار x و y	$x = 5^{y-6} + 2$
اطرح 2 من كل جانب من المعادلة	$x - 2 = 5^{y-6}$
أعد الكتابة في الصورة االلوغاريتمية	$y - 6 = log_5\,x - 2$
أضف 6 إلى جانبي المعادلة	$y = log_5\,x - 2 + 6$
بسّط	$y = log_5\,x + 4$
	$f^{-1}(x) = log_5\,x + 4$

44. صواب أم خطأ يعتقد زياد أن مجال الدالة $f(x) = log_3\,x$ هو كل الأعداد الحقيقية. هل زياد على صواب؟ برّر إجابتك.

45. اختيار من متعدد أي العبارات بالنسبة للدالة $f(x) = ln\ x$ خاطئة؟

A. متزايدة في مجالها.

B. متناظرة حول نقطة الأصل.

C. متصلة في مجالها.

D. لها خط تقارب رأسي.

46. اختيار من متعدد أي الدوال التالية هي معادلة معكوس الدالة $f(x) = 2 \times 3^x$؟

A. $f^{-1}(x) = log_3\left(\frac{x}{2}\right)$

B. $f^{-1}(x) = log_2\left(\frac{x}{3}\right)$

C. $f^{-1}(x) = 2\ log_3\ (x)$

D. $f^{-1}(x) = 3\ log_2\ (x)$

E. $f^{-1}(x) = 0.5\ log_3\ (x)$

استكشاف

47. الكتابة للتعلم تستعمل المعادلة $r = 90 - 25\ log\ (t + 1)$ لنمذجة المخزون r لتلميذ بعد أخذه مادة الفيزياء، حيث تمثّل r علامة التلميذ (كنسبة مئوية) و t عدد الأشهر منذ بدء المادة.

a. اكتب جدولًا لقيم الأزواج المرتبة التي تمثّل الدالة $r = 90 - 25\ log\ (t + 1)$، مقربًا القيم إلى أقرب جزء من عشرة. ثم ارسم التمثيل البياني للدالة في المستوى الإحداثي من خلال هذه النقاط. (يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتأكد).

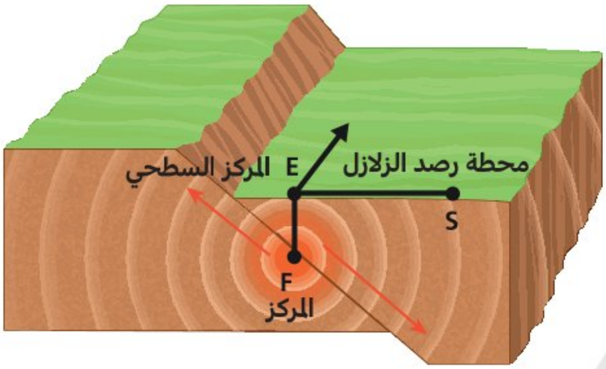
b. أوجد معادلة المعكوس. فسر معنى الدالة.

توسيع الأفكار

48. رصد الزلازل كما يشير الشكل أدناه، فإن الزلزال يحصل تحت سطح الأرض في النقطة F التي هي المركز (the focus). تُسمى النقطة E، على السطح فوق نقطة المركز، المركز السطحي (the epicenter). تسجل محطة رصد الزلازل في النقطة S موجات الطاقة الصادرة عن الزلزال.

تعطي الصيغة التالية قوة الموجة السطحية، M، للزلزال: $M = log\left(\frac{A}{T}\right) + 1.66(log D) + 3.3$.

في هذا النموذج، A هو سعة تحرك الأرض بالميكرومتر (µm)، T هي زمن الدورة بالثواني، و D هي قياس ES بالدرجات.



a. أوجد قوة الموجة السطحية لزلزال حيث $A = 700\ \mu m$، $T = 2s$، و $D = 100°$.

b. في الصيغة، $20° < D \leq 160°$ ما مقدار تأثير طول القوس ES في قوة الموجة السطحية؟ وضّح إجابتك.

5.4 خصائص اللوغاريتمات Properties of Logarithms

ما ستتعلّمه

- قواعد الضرب والقسمة والقوة للوغاريتمات
- قاعدة تغيير الأساس.

... ولماذا

يعتمد تطبيق اللوغاريتمات على الخواص التي تتصف بها، لذا عليك فهمها جيدًا.

معيار الدرس

11A.7.3

المصطلحات

- صيغة تغيير الأساس

change of base formula

قواعد الضرب والقسمة والقوة للوغاريتمات

تتميز اللوغاريتمات بخصائص جبرية جعلت منها أداة رياضية لا غنى عنها في كثير من العمليات الحسابية الرياضية، وهي لا تزال كذلك في كثير من مجالات النمذجة والتطبيق.

درسنا سابقًا العلاقة العكسية بين الدوال الأسيّة والدوال اللوغاريتمية وكيفية تطبيق الخواص اللوغاريتمية الأساسية. في هذا الدرس سنتعمق أكثر في فهم طبيعة اللوغاريتمات تمهيدًا لحل معادلات ومسائل ذات نماذج لوغاريتمية.

خصائص اللوغاريتمات

لتكن b ,R ,S أعدادًا حقيقية موجبة $(b \neq 1)$ و c هو أي عدد حقيقي.

- **قاعدة الضرب:** $log_b\,(RS) = log_b\,R + log_b\,S$
- **قاعدة القسمة:** $log_b\,\frac{R}{S} = log_b\,R - log_b\,S$
- **قاعدة القوة:** $log_b\,R^c = c\;log_b\,R$

تشكّل خصائص الأسس أساس خصائص اللوغاريتمات الثلاث. تستعمل مثلًا خاصية الضرب في الأسس لإثبات قاعدة الضرب للوغاريتمات.

خصائص الأسس

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية حيث $b > 0$:

1. $b^x \times b^y = b^{x+y}$
2. $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
3. $(b^x)^y = b^{xy}$

مثال 1 برهان قاعدة الضرب

برهن أنّ $log_b\,(RS) = log_b\,R + log_b\,S$.

الحل

ليكن $x = log_b\,R$ و $y = log_b\,S$. العبارات الأسيّة التابعة لها هي $b^x = R$ و $b^y = S$.

إذن، $RS = b^x \times b^y$

اجمع الأسس $RS = b^{x+y}$

حوّل إلى الصورة اللوغاريتمية $log_b\,(RS) = x + y$

استعمل تعريف كل من x و y $= log_b\,R + log_b\,S$

حاول أن تحل التمرين 1

log(2)
.30103
log(4)
.60206
log(8)
.90309
■

الشكل 5.4.1 نمط حسابي للوغاريتمات

نبذة تاريخية: اللوغاريتمات والحساب

قام "جون نابير"، في أوائل القرن السابع عشر، بتقديم اللوغاريتمات كطريقة لتبسيط الحسابات الطويلة والصعبة. قبل اللوغاريتمات، كان ضرب الأعداد الكبيرة يستغرق الكثير من الوقت. كان "جون بريغز" أول من ابتكر جدولًا لقيم اللوغاريتمات وذلك عام 1624، وقد حوّل استعمال جداول اللوغاريتمات عمليات الضرب الطويلة إلى عمليات جمع سريعة. يكمن مفتاح استعمال اللوغاريتمات في حل مسائل الضرب في الانتباه إلى أن لوغاريتم ناتج الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات العوامل. أي: $log_b\,(xy) = log_b\,x + log_b\,y$

نشاط استكشافي 1 حساب اللوغاريتمات

استعمل التقريبات المكونة من 5 منازل عشرية كما هو مبيّن في الشكل 5.4.1 لتدعم خواص اللوغاريتمات رقميًا.

1. الضرب $log\,(2 \times 4) = log\,2 + log\,4$
2. القسمة $log\left(\frac{8}{2}\right) = log\,8 - log\,2$
3. القوة $log\,2^3 = 3\,log\,2$

أوجد الآن قيم اللوغاريتمات الاعتيادية لأعداد صحيحة موجبة أخرى مستعملًا المعلومات المعطاة في الشكل 5.4.1، من دون استعمال الحاسبة.

4. استعمل حقيقة أن $\frac{10}{2} = 5$ لإيجاد قيمة $log\,5$.
5. استعمل حقيقة أن 16 و 32 و 64 هي قوى للعدد 2 لإيجاد قيمة كل من $log\,16$ و $log\,32$ و $log\,64$.
6. أوجد قيمة كل من $log\,25, log\,40\,, log\,50$.

اكتب كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 100 التي يمكننا معرفة قيمة لوغاريتمها الاعتيادي فقط من خلال معرفة $log\,2$ وخواص اللوغاريتمات من دون استعمال الحاسبة.

عندما نحل معادلات تتضمن لوغاريتمات، يتعين علينا غالبًا إعادة كتابة المقادير الجبرية بطريقة مختلفة تسمح بحل المعادلة، مستعملين خواص اللوغاريتمات. قد يقتضي ذلك التجميع أحيانًا والتوزيع أحيانًا أخرى. فيما يلي نماذج من ذلك.

استعمال قواعد اللوغاريتميات

تتطلب عملية إعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية في صورة مجموع لوغاريتمات أو مضاعفاتها خصائص متنوعة. انظر إلى العبارة ككل أولًا لتحديد تسلسل الخصائص التي سيتم استعمالها.

مثال 2 استعمال قاعدة لوغاريتم ناتج الضرب

افترض أن x و y عددان موجبان، استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة $log\,(8xy^4)$ في صورة مجموع اللوغاريتمات أو مضاعفات اللوغاريتمات.

الحل

قاعدة الضرب	$log\,(8xy^4) = log\,8 + log\,x + log\,y^4$
استعمل $8 = 2^3$	$= log\,2^3 + log\,x + log\,y^4$
قاعدة القوة	$= 3\,log\,2 + log\,x + 4\,log\,y$

حاول أن تحل التمرين 10

مثال 3 استعمال قاعدة لوغاريتم ناتج القسمة

افترض أن x عدد موجب، استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة $ln\left(\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}\right)$ في صورة مجموع أو فرق اللوغاريتمات أو مضاعفات اللوغاريتمات.

الحل

$$ln\left(\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}\right) = ln\,\frac{\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

قاعدة القسمة
$$= ln\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}} - ln\,x$$

قاعدة القوة
$$= \frac{1}{2}\,ln\left(x^2+5\right) - ln\,x$$

حاول أن تحل التمرين 11

مثال 4 تجميع المقادير اللوغاريتمية

افترض أن x و y عددان موجبان، اكتب $ln\,x^5 - 2\,ln\,(xy)$ في صورة لوغاريتم واحد.

الحل

قاعدة القوة
$$ln\,x^5 - 2\,ln\,(xy) = ln\,x^5 - ln\,(xy)^2$$

$$= ln\,x^5 - ln\left(x^2y^2\right)$$

قاعدة القسمة
$$= ln\,\frac{x^5}{x^2y^2}$$

$$= ln\,\frac{x^3}{y^2}$$

حاول أن تحل التمرين 21

مساعدة للحل

تذكّر أن كل واحدة من خصائص اللوغاريتمات ترتبط بعملية حسابية مختلفة عن الأخرى. الجمع يشير إلى خاصية الضرب، الطرح إلى خاصية القسمة، والضرب بثابت يشير إلى خاصية القوة.

عند تبسيط المقادير اللوغاريتمية، من السهل الإفراط في التعميم والوقوع في المفاهيم الخاطئة. يساعدك النشاط الاستكشافي 2 في التفريق بين ما هو صحيح وما هو خاطىء عن العلاقات اللوغاريتمية.

نشاط استكشافي 2 تمييز العلاقات الصحيحة عن العلاقات الخطأ

في المعادلات الثماني المقترحة هنا، أربع معادلات فقط صحيحة والمعادلات الأربع الأخرى غير صحيحة (القيم المستعملة للمتغير x تنتمي إلى مجال كل دالة في طرفَي المعادلة). بالاستناد إلى خواص اللوغاريتمات يمكننا أن نميز مسبقًا ما إذا كانت المعادلة صحيحة أم لا. إذن جرّب أولًا قيمًا محددة للمتغير x. قارن التمثيلين البيانيين لطرفي المعادلة.

1. $ln\,(x+2) = ln\,x + ln\,2$

2. $log_3\,(7x) = 7\,log_3\,x$

3. $log_2\,(5x) = log_2\,5 + log_2\,x$

4. $ln\,\frac{x}{5} = ln\,x - ln\,5$

5. $\log \frac{x}{4} = \frac{\log x}{\log 4}$

6. $\log_4 x^3 = 3 \log_4 x$

7. $\log_5 x^2 = (\log_5 x)(\log_5 x)$

8. $\log |4x| = \log 4 + \log |x|$

أي أربع معادلات صحيحة وأيها خطأ؟

يبيّن المثال التالي كيف تساهم اللوغاريتمات في حل مسائل حياتيّة.

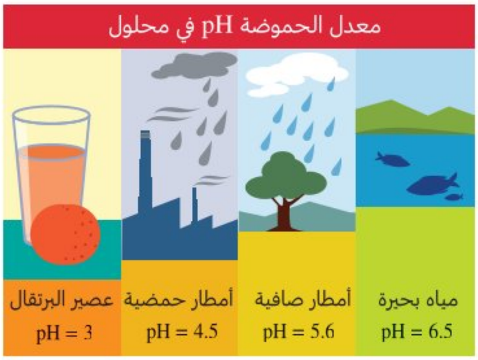
مثال 5 تطبيقات على اللوغاريتمات

يُقاس التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في محلول معيّن من خلال صيغة pH المعرّفة كما يلي:

$$\mathbf{pH} = \log \frac{1}{[H^+]}$$

حيث $[H^+]$ التركيز المولي لأيونات الهيدروجين بوحدة المول لكل ليتر (mol/L).

أوجد التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.



الحل

عوّض pH = 4.5 $\quad 4.5 = \log \frac{1}{[H^+]}$

قاعدة القسمة $\quad 4.5 = \log 1 - \log [H^+]$

أوجد قيمة $[H^+]$ $\quad -4.5 = \log [H^+]$

اكتب بالصيغة الأسيّة $\quad 10^{-4.5} = H^+$

إذن، التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية هي $10^{-4.5} \approx 0.0000316$ mol/L

حاول أن تحل التمرين 25

خطأ شائع

المقدار $\log \frac{1}{[H^+]}$ يساوي $\log 1 - \log [H^+]$ وليس $\log [1 - H^+]$.

قاعدة تغيير الأساس

عند التعامل مع مقادير لوغاريتمية أساساتها مختلفة، نحتاج أحيانًا إلى توحيد هذه الأساسات، وهذا يعني تغيير أساس اللوغاريتم من العدد a إلى عدد آخر b وهذا ممكن. كما أننا نحتاج أحيانًا إلى تغيير الأسس للإفادة من الحاسبة. على سبيل المثال، لا يمكننا إيجاد قيمة $log_4 7$ باستعمال بعض الحاسبات لعدم وجود مفتاح $\boxed{log_4}$ فيها.

لنأخذ	$y = log_4 7$
نحول إلى الصورة الأسية	$4^y = 7$
نطبق دالة ln	$ln\, 4^y = ln\, 7$
نستعمل قاعدة القوة	$y\, ln\, 4 = ln\, 7$
اقسم على $ln\, 4$	$y = \frac{ln\, 7}{ln\, 4}$

نحسب $ln\, 7$ و $ln\, 4$ باستعمال الحاسبة لنحصل على الإجابة.

$$y = log_4 7 = 1.4036\ldots$$

يمكننا تعميم هذه النتيجة بما يُسمى **صيغة تغيير الأساس** كما يلي:

صيغة تغيير الأساس للوغاريتمات

إذا كانت الأعداد a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$$

في الحاسبة عمومًا هناك مفتاحان لحساب اللوغاريتميات: $\boxed{log}$ و $\boxed{ln}$ ، يتعلقان بالأساس 10 والأساس e على الترتيب. لذلك غالبًا ما نستطيع استعمال صيغة تغيير الأساس للوغاريتمات في الصورتين التاليتين:

$$log_b x = \frac{log\, x}{log\, b} \quad \text{أو} \quad log_b x = \frac{ln\, x}{ln\, b}$$

مثال 6 إيجاد قيم لوغاريتمية بتغيير الأساس

أوجد قيم العبارات اللوغاريتمية التالية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

A. $log_3 16$

B. $log_6 10$

C. $log_{\frac{1}{2}} 2$

(تابع)

الحل

A. $log_3 16 = \frac{ln\ 16}{ln\ 3} = 2.523 \ldots \approx 2.52$

B. $log_6 10 = \frac{log\ 10}{log\ 6} = \frac{1}{log\ 6} = 1.285 \ldots \approx 1.29$

C. $log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{ln\ 2}{ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{ln\ 2}{ln\ 1 - ln\ 2} = \frac{ln\ 2}{-ln\ 2} = -1$

حاول أن تحل التمرين 27

مراجعة سريعة 5.4

حل التمارين 1-10 من دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 1-6، بسّط المقدار.

1. $\frac{x^5 y^{-2}}{x^2 y^{-4}}$

2. $\frac{u^{-3} v^7}{u^{-2} v^2}$

3. $\left(x^6 y^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$

4. $\left(x^{-8} y^{12}\right)^{\frac{3}{4}}$

5. $\frac{\left(u^2 v^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27 u^6 v^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}}$

6. $\frac{\left(x^{-2} y^3\right)^{-2}}{\left(x^3 y^{-2}\right)^{-3}}$

في التمارين 7-10، أوجد قيمة المقدار.

7. $log\ 10^2$

8. $ln\ e^3$

9. $ln\ e^{-2}$

10. $log\ 10^{-3}$

الدرس 5.4 التمارين

1. لتكن S, R, b أعدادًا حقيقية موجبة $(b \neq 1)$ و c هو عدد حقيقي. برهن أن:

$$log_b \left(\frac{R}{S}\right) = log_b R - log_b S$$

2. إذا كان R و b عددين حقيقيين موجبين $(b \neq 1)$ و c عدد حقيقي. برهن أن:

$$log_b \left(R^c\right) = c \times log_b R$$

في التمارين 3-14، افترض أن x و y عددان موجبان. استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة المقدار في صورة مجموع أو فرق اللوغاريتمات أو في صورة مضاعفات اللوغاريتمات.

3. $ln\ 8x$

4. $ln\ 9y$

5. $log\ \frac{3}{x}$

6. $log\ \frac{2}{y}$

7. $log_2 y^5$

8. $log_2 x^{-2}$

9. $log\ x^3 y^2$

10. $log\ xy^3$

11. $ln\ \frac{x^2}{y^3}$

12. $log\ 1\,000x^4$

13. $log\ \sqrt[4]{\frac{x}{y}}$

14. $ln\ \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$

في التمارين 15-24، افترض أن x و y و z أعداد موجبة، استعمل خصائص اللوغاريتم لكتابة العبارة على شكل لوغاريتم واحد.

15. $log\ x + log\ y$

16. $log\ x + log\ 5$

17. $ln\ y - ln\ 3$

18. $ln\ x - ln\ y$

19. $\frac{1}{3} log\ x$

20. $\frac{1}{5} log\ z$

21. $2\ ln\ x + 3\ ln\ y$

22. $4\ log\ y - log\ z$

23. $4\ log\ (xy) - 3\ log\ (yz)$

24. $2\ ln\ \left(x^3 y\right) + 3\ ln\ \left(yz^2\right)$

25. بالعودة إلى المثال 5، أوجد التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في 1 ليتر من عصير البرتقال.

في التمارين 26-31، استعمل صيغة تغيير الأساس والحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم.

26. $log_2 7$

27. $log_5 19$

28. $log_8 175$

29. $log_{12} 259$

30. $log_{0.5} 12$

31. $log_{0.2} 29$

32. استعمل خواص اللوغاريتمات لتوضّح أن بالإمكان كتابة $pH = log \frac{1}{[H^+]}$ في الصورة $pH = -log\ [H^+]$

في التمارين 33-36، اكتب المقدار مستعملًا اللوغاريتم الطبيعي فقط.

33. $log_3 x$

34. $log_7 x$

35. $log_2 (a + b)$

36. $log_5 (c - d)$

في التمرينين37-38، اكتب المقدار مستعملًا اللوغاريتم الاعتيادي فقط.

37. $log_2 x$

38. $log_{\frac{1}{3}} (x - y)$

39. **شدة الضوء** العلاقة بين شدة الضوء I بوحدة اللومن (lumen) والعمق x بالأقدام في بحيرة ما تُعطى بالصيغة: $log \frac{I}{12} = -0.00235x$. أوجد شدة الضوء على عمق 40 قدمًا.

أسئلة اختبار معيارية

40. **صواب أم خطأ** لوغاريتم ناتج ضرب عددين موجبين يساوي مجموع لوغاريتمَي العددين. برّر إجابتك.

41. **صواب أم خطأ** لوغاريتم عدد موجب هو عدد موجب. برّر إجابتك.

في التمرينين 42 و 43، حل من دون استعمال الحاسبة.

42. **اختيار من متعدد**

$log\ 12 =$

A. $3\ log\ 4$

B. $log\ 3 + log\ 4$

C. $4\ log\ 3$

D. $log\ 3 \times log\ 4$

E. $2\ log\ 6$

43. **اختيار من متعدد**

$ln\ x^5 =$

A. $5\ ln\ x$

B. $2\ ln\ x^3$

C. $x\ ln\ 5$

D. $3\ ln\ x^2$

E. $ln\ x^2 \times ln\ x^3$

استكشاف

44. ليكن $a = log\ 2$ و $b = log\ 3$. إذن، على سبيل المثال، $log\ 6 = a + b$ و $log\ 15 = 1 - a + b$.
اكتب كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 100، التي يمكن كتابة لوغاريتماتها الاعتيادية في صورة مقادير تتضمن a أو b أو كليهما. (تلميح: انظر نشاط استكشافي 1).

45. **قليل من التاريخ** اشرح كيف كانت العمليات الحسابية المعقدة تُحوّل إلى مسائل حسابية مبسّطة باستعمال اللوغاريتمات قبل اختراع الحاسبات الإلكترونية والحواسيب.
استعمل المثال $\sqrt[5]{4\ 581}$.

توسيع الأفكار

46. برهن صيغة تغيير الأساس للوغاريتمات.

47. برهن أن $f(x) = \frac{log\ x}{ln\ x}$ دالة ثابتة بمجال محدد عبر إيجاد القيمة الدقيقة للثابت $\frac{log\ x}{ln\ x}$ وكتابتها في صورة لوغاريتم اعتيادي.

5.5 المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية Exponential and Logarithmic Equations

ما ستتعلّمه
- حل المعادلات الأسيّة
- حل المعادلات اللوغاريتمية

... ولماذا
تتطلب الكثير من المسائل العلمية من الفيزياء الإشعاعية والكهرومغناطيسية وغيرها حل معادلات أسيّة أو لوغاريتمية.

معيار الدرس
11A.7.6

المصطلحات
- معادلة أسيّة exponential equation
- معادلة لوغاريتمية logarithmic equation

حل المعادلات الأسيّة

المعادلة الأسيّة هي المعادلة التي تحتوي على متغير في الأس. يمكننا حل بعض المعادلات الأسيّة بتحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية، وبعضها الآخر يمكن حلّها باستعمال خواص الأسس أو اللوغاريتمات. لكن أبرز خاصية تفيد في حل المعادلات هي أنّ كلا الدالتين الأسيّة واللوغاريتمية هي دالة واحد لواحد.

خاصية المساواة للمعادلات الأسيّة

في أي دالة أسيّة $f(x) = b^x$، $b \neq 1$، $b > 0$،

$b^u = b^v$ إذا وفقط إذا كان $u = v$.

مثال 1 حل معادلات أسيّة باستعمال أساس مشترك

حل المعادلة $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} = 4^{3x}$.

الحل

اكتب المعادلة الأصلية	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} = 4^{3x}$
أعد كتابة الطرفين بأساس مشترك	$\left(2^{-1}\right)^{x+7} = \left(2^2\right)^{3x}$
خاصية قوة القوة	$2^{-x-7} = 2^{6x}$
خاصية المساواة للمعادلات الأسيّة	$-x - 7 = 6x$
أضف x إلى الطرفين	$-7 = 7x$
اقسم الطرفين على 7	$-1 = x$

حاول أن تحل التمرين 1

يمكننا أيضًا الاستفادة من خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية في حل المعادلات.

خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية

في أي دالة لوغاريتمية $f(x) = log_b\, x$،

$log_b\, u = log_b\, v$ إذا وفقط إذا كان $u = v$.

على سبيل المثال، يمكننا ملاحظة أن المعادلة الأسيّة $4^x = 17$ ليس لها أساس مشترك. ويصعب حلها بالطريقة التي عرضت في المثال الأول، لكن استعمال اللوغاريتمات يساعد على إيجاد الحل:

المعادلة الأسية الأصليه هي:	$17 = 4^x$
استعمل خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية	$log\ 17 = log\ 4^x$
إذن،	$log\ 17 = x\ log\ 4$
حل لإيجاد x	$x = \frac{log\ 17}{log\ 4}$

مثال 2 حل معادلات أسيّة باستعمال اللوغاريتمات

حل المعادلة $3^{x+1} = 5^x$

الحل

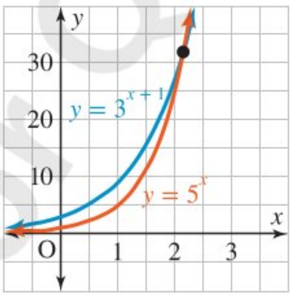
اكتب المعادلة الأصلية	$3^{x+1} = 5^x$
خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية	$log\left(3^{x+1}\right) = log\left(5^x\right)$
خاصية القوة للوغاريتمات	$(x+1)\ log\ 3 = x\ log\ 5$
استعمل خاصية التوزيع	$x\ log\ 3 + log\ 3 = x\ log\ 5$
اعزل المتغير ثم حلّل بالعامل المشترك x	$x(log\ 3 - log\ 5) = -log\ 3$
اقسم	$x = \frac{-log\ 3}{log\ 3 - log\ 5}$
أوجد القيمة	$x \approx 2.15$

تحقق من الإجابة بتعويض 2.15 في المعادلة

$3^{x+1} = 3^{2.15+1} \approx 31.8$

$5^x = 5^{2.15} \approx 31.8$

تحقّق بيانيًا نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين $y = 3^{x+1}$ و $y = 5^x$ هي تقريبًا (2.15, 31.8).



حاول أن تحل التمرين 9

مثال 3 حل معادلات أسيّة

حل المعادلة $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5$ لأقرب جزء من مئة.

الحل

حلّ جبريًا

تتضمن المقاربة الجبرية بعض الإبداع. إذا ضربنا طرفَي المعادلة الأصلية في $2e^x$، وأعدنا ترتيب الحدود، يمكننا أن نحصل على معادلة تربيعية في e^x:

اكتب المعادلة الأصلية $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5$

اضرب طرفَي المعادلة الأصلية في $2e^x$ $e^{2x} - e^0 = 10e^x$

اطرح $10e^x$ $(e^x)^2 - 10(e^x) - 1 = 0$

إذا اعتبرنا أن $w = e^x$، تصبح المعادلة $w^2 - 10w - 1 = 0$، والمعادلة التربيعية تعطينا:

$$w = e^x = \frac{10 \pm \sqrt{104}}{2} = 5 \pm \sqrt{26}$$

بما أن قيمة e^x موجبة دائمًا، لذا نرفض احتمالية أن تكون لـ e^x القيمة السالبة $5 - \sqrt{26}$

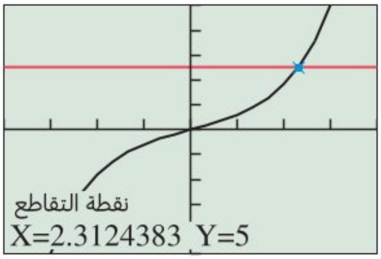
إذن، $e^x = 5 + \sqrt{26}$

حوّل إلى الصورة اللوغاريتمية $x = ln\left(5 + \sqrt{26}\right)$

قرّب القيمة باستعمال الحاسبة $x = 2.312 \ldots \approx 2.31$

تحقّق بيانيًا

يبيّن الشكل 5.5.1 أنّ التمثيلين البيانيين للدالتين $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $y = 5$ يتقاطعان عند $x \approx 2.31$.



$[-10, 10]$ في $[-4, 4]$

الشكل 5.5.1

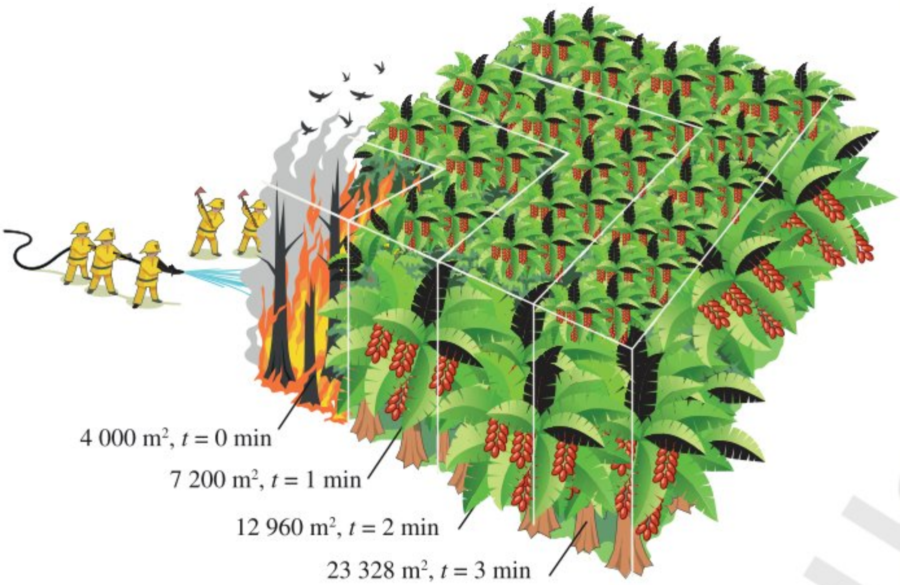
حاول أن تحل التمرين 16

في بعض الوضعيات يتطلب الامر إنشاء نموذج أسّي ومن ثم استعمال المعادلات الأسيّة وخواص الدوال الأسيّة واللوغاريتمية لحل المسألة.

مثال 4 استعمال نموذج أسي

يبيّن الشكل أدناه معدل انتشار النار في كل دقيقة في مزرعة نخيل. يستطيع فوج الإطفاء السيطرة على نيران لا تزيد مساحة انتشارها عن $160\ 000\ m^2$ من دون الاستعانة بأفواج إطفاء أخرى. أوجد الزمن، بالدقائق، اللازم لخروج النار عن السيطرة في حال لم يستعن فوج الإطفاء بأفواج إطفاء أخرى.

(تابع)



الحل

استعمل النموذج $y = ab^t$، حيث يمثّل y عدد الأمتار المربعة، a عدد الأمتار المربعة الابتدائي، b معدل انتشار النار، و t عدد الدقائق منذ اشتعال النيران.

بما أن النسبة بين أعداد الأمتار المربعة المتتالية هي:

$1.8 = \frac{7\,200}{4\,000} = \frac{12\,960}{7\,200} = \frac{23\,328}{12\,960}$، فإن نموذج النمو الأسي يستعمل $b = 1.8$.

إذن، النموذج هو $y = 4\,000(1.8)^t$

ولإيجاد الزمن t عندما يكون عدد الأمتار المربعة y يساوي 160 000

حل المعادلة:

عوّض $y = 160\,000$ وحل المعادلة لإيجاد t	$160\,000 = 4\,000(1.8)^t$
اقسم الطرفين على 4 000	$40 = (1.8)^t$
خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية	$\log 40 = \log (1.8)^t$
خاصية القوة للوغاريتم	$\log 40 = t \log 1.8$
اعزل المتغير t	$\frac{\log 40}{\log 1.8} = t$
أوجد القيمة	$6.276 \approx t$

تحقق من الإجابة بتعويض 6.276 في المقدار $4\,000(1.8)^t$

$$4\,000(1.8)^{6.276} \approx 160.011$$

إذن، لدى فوج الإطفاء أكثر من 6 دقائق بقليل للسيطرة على النيران قبل الاستعانة بأفواج إطفاء أخرى.

حاول أن تحل التمرين 19

حل المعادلات اللوغاريتمية

المعادلات اللوغاريتمية هي معادلات تحتوي على متغير داخل علامة اللوغاريتم.

عندما يتم حل المعادلات اللوغاريتمية جبريًا، من المهم أن نبقى على انتباه لمجال كل عبارة في المعادلة في جميع خطوات الحل. قد تنتج بعض الطرق الجبرية حلولًا غير مقبولة، أو أسوأ من ذلك، قد تضيّع حلًا مقبولًا، كما هو مبيّن في المثال 5

مثال 5 **حل معادلات لوغاريتمية**

حل المعادلة $log\ x^2 = 2$.

الحل

الطريقة 1

استعمل خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية

اكتب المعادلة الأصلية	$log\ x^2 = 2$
باستعمال الخاصية $y = log\ 10^y$	$log\ x^2 = log\ 10^2$
خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية	$x^2 = 10^2$
باستعمال $10^2 = 100$	$x^2 = 100$
	$x = 10$ أو $x = -10$

الطريقة 2

حوّل المعادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسيّة.

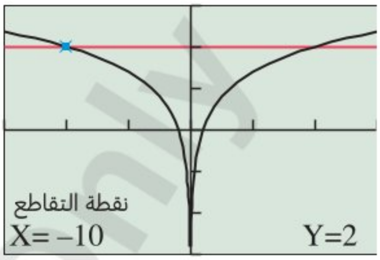
اكتب المعادلة الأصلية	$log\ x^2 = 2$
حوّل إلى الصورة الأسيّة	$x^2 = 10^2$
باستعمال $10^2 = 100$	$x^2 = 100$
	$x = 10$ أو $x = -10$

الطريقة 3 (غير صحيحة)

استعمل خاصية القوة للوغاريتمات.

اكتب المعادلة الأصلية	$log\ x^2 = 2$
خاصية القوة مطبقة بطريقة غير صحيحة	$2\ log\ x = 2$
اقسم على 2	$log\ x = 1$
حوّل إلى الصورة الأسيّة	$x = 10$

(تابع)



$[-15, 15]$ في $[-3, 3]$

الشكل 5.5.2 التمثيل البياني للدالة $f(x) = log\ x^2$ و $y = 2$.

ادعم إجابتك بيانيًا

يبيّن الشكل 5.5.2 أن التمثيلين البيانيين للدالتين $f(x) = log\ x^2$ و $y = 2$ يتقاطعان عندما $x = -10$. من تناظر التمثيلين البيانيين، نظرًا لكون f دالة زوجية، نلاحظ أن $x = 10$ أيضًا هو حل للمعادلة.

فسّر

الطريقتان 1 و 2 صحيحتان، في حين لا يمكن إيجاد الإجابة الصحيحة باستعمال الطريقة الثالثة لأن مجال $log\ x^2$ هو كل الأعداد الحقيقية غير الصفر، بينما مجال $log\ x$ هو الأعداد الحقيقية الموجبة فقط. تشمل الإجابة الصحيحة 10 و −10 لأن القيمتين تجعلان المعادلة الأصلية صحيحة.

حاول أن تحل التمرين 21

مثال 6 حل معادلات لوغاريتمية

حل المعادلتين التاليتين:

A. $ln\left(x^2 - 16\right) = ln\ (6x)$

B. $ln\ (3x - 2) + ln\ (x - 1) = 2\ ln\ x$

الحل

A. اكتب المعادلة الأصلية $ln\left(x^2 - 16\right) = ln\ (6x)$

خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية $x^2 - 16 = 6x$

اجعل المعادلة التربيعية تساوي 0 $x^2 - 6x - 16 = 0$

حلّل إلى العوامل $(x - 8)(x + 2) = 0$

إذن، $x = 8$ أو $x = -2$

تحقق من الإجابة بتعويض كل قيمة في المعادلة:

$x = -2$ $\qquad$ $x = 8$

$ln\left((-2)^2 - 16\right) \stackrel{?}{=} ln\ (6(-2))$ $\qquad$ $ln\left(8^2 - 16\right) \stackrel{?}{=} ln\ (6 \times 8)$

$ln\ (-12) = ln\ (-12)$ ✗ $\qquad$ $ln\ (48) = ln\ (48)$ ✓

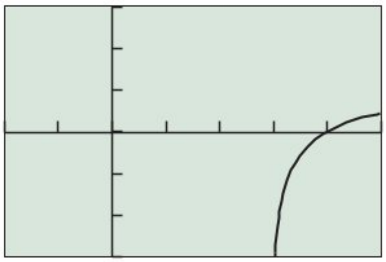
بما أن اللوغاريتمات ليست معرّفة للقيم السالبة، فإن $x = 8$ هو الحل الوحيد. الحل $x = -2$ غير مقبول.

ادعم إجابتك بيانيًا

لاستعمال طريقة المقطع x، أعد كتابة المعادلة على شكل:

$$ln\left(x^2 - 16\right) - ln\ (6x) = 0$$

ثم مثّل بيانيًا الدالة $f(x) = ln\left(x^2 - 16\right) - ln\ (6x)$، كما هو مبيّن في الشكل 5.5.3 المقطع x هو $x = 8$، الذي هو حل المعادلة.



$[-4, 10]$ في $[-3, 3]$

الشكل 5.5.3 صفر الدالة $f(x) = ln\left(x^2 - 16\right) - ln(6x)$ هو $x = 8$.

(تابع)

B. اكتب المعادلة الأصلية $ln\,(3x-2)+ln\,(x-1)=2\,ln\,x$

خاصية الضرب والقوة للوغاريتمات $ln\,[(3x-2)(x-1)]=ln\,x^2$

خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية $(3x-2)(x-1)=x^2$

فكّك للحصول على معادلة تربيعية $3x^2-5x+2=x^2$

$2x^2-5x+2=0$

حلّل إلى العوامل $2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

إذن، $x=\frac{1}{2}$ أو $x=2$

تحقق من الإجابة بتعويض كل قيمة في المعادلة:

$x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x=2$

$ln\,\left(3\left(\frac{1}{2}\right)-2\right)+ln\,\left(\frac{1}{2}-1\right)\stackrel{?}{=}2\,ln\,\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $ln\,(3(2)-2)+ln\,(2-1)\stackrel{?}{=}2\,ln\,2$

$ln\,\left(-\frac{1}{2}\right)+ln\,\left(-\frac{1}{2}\right)=2\,ln\,\left(-\frac{1}{2}\right)$ ✗ $\qquad$ $ln\,4+ln\,1=ln\,\left(2^2\right)$ ✓

لأن اللوغاريتمات ليست معرّفة للقيم السالبة، فإن $x=2$ هو الحل الوحيد. $x=\frac{1}{2}$ هو حل غير مقبول.

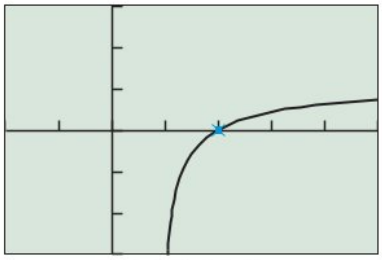
ادعم إجابتك بيانيًا

لاستعمال طريقة المقطع x، أعد كتابة المعادلة في الصورة:

$$ln\,(3x-2)+ln\,(x-1)-2\,ln\,x=0$$

ثم مثّل الدالة $f(x)=ln\,(3x-2)+ln\,(x-1)-2\,ln\,x$ بيانيًا كما هو مبيّن في الشكل 5.5.4، مقطع x هو 2، وهو حل المعادلة.

حاول أن تحل التمرين 26



$[-3, 3]$ في $[-2, 5]$

الشكل 5.5.4 صفر الدالة $f(x)=ln(3x-2)+ln(x-1)-2$ هو $x=2$.

مراجعة سريعة 5.5

حل التمارين 1-10، من دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 1-4، بيّن أن كل دالة في زوج الدوال المعطى هي الدالة العكسية للأخرى.

1. $f(x)=e^{2x}$
$g(x)=ln\,\left(x^{\frac{1}{2}}\right),\ x>0$

2. $f(x)=10^{\frac{x}{2}}$
$g(x)=log\,x^2,\ x>0$

3. $f(x)=\frac{1}{3}\,ln\,x,\ x>0$
$g(x)=e^{3x}$

4. $f(x)=3\,log\,x^2,\ x>0$
$g(x)=10^{\frac{x}{6}}$

في التمارين 5-10، إذا كان x و y عددين موجبين، استعمل خصائص اللوغاريتمات لكتابة المقدار في صورة لوغاريتم واحد.

5. $\frac{1}{2}\,log\,z$

6. $3\,ln\,x+2\,ln\,y^2$

7. $log\,y-2\,log\,z$

8. $2\,log\,(xy)-3\,log\,(z)$

9. $3\,ln\,\left(yx^3\right)+2\,ln\,y\,\left(yx^2\right)$

10. $\frac{1}{3}\,log\,x^3$

الدرس 5.5 التمارين

في التمرينين 1 و 2، حل المعادلة باستعمال أساس مشترك.

1. $25^{3x} = 125^{x+2}$

2. $0.001 = 10^{6x}$

في التمارين 3-8، أوجد حل المعادلة. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

3. $3^{2-3x} = 3^{5x-6}$

4. $7^{3x} = 49$

5. $25^{x^2} = 125^{x+3}$

6. $4^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$

7. $4^{2x+1} = 4^{3x-5}$

8. $6^{x-2} = 216$

9. أوجد حل المعادلة $2^{3x} = 7^{x+1}$

في التمارين 10-15، أوجد حل المعادلة. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

10. $2^{3x-2} = 5$

11. $4 + 5^{6-x} = 15$

12. $6^{3x+1} = 9^{x}$

13. $-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 12$

14. $3^{2x-3} = 4^{x}$

15. $4^{x+2} = 8^{x-1}$

في التمارين 16-18، حل المعادلة بطريقة من اختيارك. ادعم إجابتك بطريقة ثانية.

16. $\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = 4$

17. $2e^{2x} + 5e^{x} - 3 = 0$

18. $\frac{500}{1 + 25e^{0.3x}} = 200$

19. بالعودة إلى المثال 4، كم من الدقائق ستستغرق النار لتنتشر في 100 000 مترًا مربعًا؟

20. أودع فواز QR 1 000 في حساب مصرفي بهدف أن يصبح رصيده QR 2 500 بعد 10 سنوات. أوجد قيمة الفائدة السنوية المركبة المتواصلة التي ستمكن فواز من تحقيق هدفه.
قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

في التمارين 21-24 حل المعادلة بطريقة من اختيارك. ادعم إجابتك بطريقة أخرى:

21. $log\ x^2 = 6$

22. $ln\ x^2 = 4$

23. $log\ x^4 = 2$

24. $ln\ x^6 = 12$

في التمارين 25-30، أوجد حل المعادلة. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

25. $log_2\ (4x + 5) = log_2\ x^2$

26. $2\ ln\ (3x - 2) = ln\ (5x + 6)$

27. $log_2\ (3x - 2) = log_2\ (x - 1) + 4$

28. $log_6\ (x^2 - 2x) = log_6\ (2x - 3) + log_6\ (x + 1)$

29. $ln\ (x^2 - 4) - ln\ (x + 2) = (3\ ln\ 2)\ log_8\ (x) - ln\ (x)$

30. $log_2\ \left(7^{log_7 5x}\ e^{(ln\ 5)}\ 5^{log_5 x}\right) = 6$

في التمرينين 31-32، حل المعادلة بطريقة من اختيارك. إدعم إجابتك بطريقة أخرى.

31. $\frac{1}{2}\ ln\ (x + 3) - ln\ x = 0$

32. $log\ (x - 2) + log\ (x + 5) = 2\ log\ 3$

33. حل المعادلتين أدناه بيانيًا. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

a. $3(2)^{x+2} - 1 = 3 - x$

b. $ln\ (3x - 1) = x - 5$

34. **الكتابة للتعلم** عند حل المعادلة $78 = 10^{x+2}$، هل نستعمل اللوغاريتم الطبيعي أم الاعتيادي؟ هل من الممكن استعمال أي منهما؟ وضّح إجابتك.

35. **الكتابة للتعلم** اشرح لماذا اللوغاريتمات ضرورية لحل المعادلة $3^{x+2} = 8$، لكنها ليست ضرورية لحل المعادلة $3^{x+2} = 27^{4x}$

36. **في المزرعة** كان في مزرعة 200 أرنبًا سنة 2015، إذا علمت أن أعداد الأرانب تتزايد بنسبة 30% سنويًا، أوجد عدد الأرانب في المزرعة سنة 2031

أسئلة اختبار معيارية

37. **صواب أم خطأ** تعطي الدالة $A = 20e^{-0.40t}$ عدد ملليجرامات الدواء الموجودة في جسم الشخص بعد t من الساعات.
عوّض إبراهيم القيمة $A = 0$ لإيجاد عدد الساعات اللازمة لخروج كل الدواء من الجسم. هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.

38. **صواب أم خطأ** أوجد أحمد حل المعادلة المبيّن أدناه.
هل حلّه صحيح؟ برّر إجابتك.

$$\begin{aligned}
log\,(x+3) + log\,x &= 1\\
log\,x(x+3) &= 1\\
x(x+3) &= 10^1\\
x^2 + 3x - 10 &= 0\\
(x-2)(x+5) &= 0\\
x &= 2, -5
\end{aligned}$$

حل التمرينين التاليين من دون استعمال الحاسبة.

39. **اختيار من متعدد** حل المعادلة $2^{3x-1} = 32$ هو:

A. $x = 1$

B. $x = 2$

C. $x = 4$

D. $x = 11$

E. $x = 13$

40. **اختيار من متعدد** حل المعادلة $ln\,x = -1$ هو:

A. $x = -1$

B. $x = \frac{1}{e}$

C. $x = 1$

D. $x = e$

E. لا يوجد حل

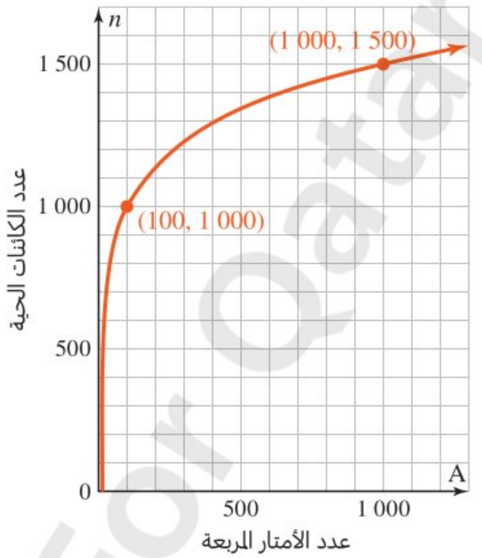
استكشاف

41. تنمذج الدالة $P = 250\,000e^{0.013t}$ عدد السكان في مدينة ما، حيث t هو عدد السنوات منذ عام 2000. في أي سنة، مقرّبة إلى أقرب سنة، سيصل عدد السكان إلى 450 000 نسمة؟

42. يستعمل عالم أحياء النموذج: $n = k\,log\,(A)$ ليحصي عدد الكائنات الحية، n، التي يمكنها أن تعيش في قطعة أرض مساحتها A. يتغير الثابت k تبعًا لنوع الفصيلة.

a. استعمل التمثيل البياني لإيجاد قيمة الثابت k للفصيلة التي يدرسها العالم.

b. أوجد مساحة قطعة الأرض بالأمتار المربعة التي يمكن أن يعيش فيها 3 000 كائن من هذه الفصيلة.



توسيع الأفكار

في التمارين 43-46، حل المعادلة أو المتباينة.

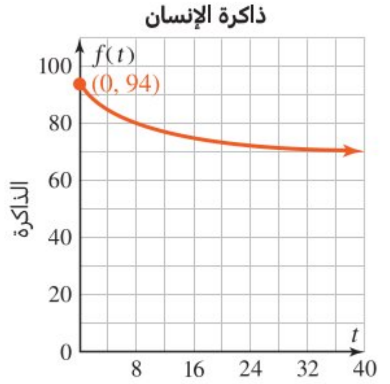
43. $e^x + x = 5$

44. $e^{2x} - 8x + 1 = 0$

45. $ln\,|x| - e^{2x} \geq 3$

46. $2\,log\,x - 4\,log\,3 > 0$

47. أجرى معلم تجربة لإيجاد العلاقة بين الزمن والذاكرة. توصّل المعلم إلى أن النموذج $f(t) = t_0 - 15\,log\,(t + 1.1)$ يعطي مقدار ما يتذكره الطالب بعد t أشهر إذا كان مقدار الذاكرة الابتدائية t_0.



a. اكتب نموذجًا يمثّل طالبًا له الذاكرة الابتدائية المعطاة.

b. بعد كم سنة تقريبًا يصبح مقدار ذاكرة التلميذ 65؟

الوحدة 5 مراجعة الوحدة

في التمارين 1-6، صِف عمليات التحويل التي تحول التمثيل البياني للدالة $g(x) = 2^x$ أو الدالة $h(x) = e^x$ إلى التمثيل البياني للدالة f. ارسم التمثيل البياني يدويًا ثم ادعم إجابتك باستعمال الحاسبة البيانية.

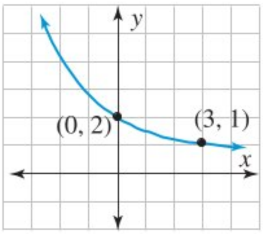
1. $f(x) = 2^{-x} + 3$
2. $f(x) = -2^{-x}$
3. $f(x) = -2^{-x} - 3$
4. $f(x) = 2^{-x+3}$
5. $f(x) = e^{2x-3}$
6. $f(x) = e^{-3x} + 5$

7. حدّد ما إذا كانت الدالة دالة نمو أسي أو دالة اضمحلال أسي، وصِف سلوكها الطرفي باستعمال النهايات.
$f(x) = 2(5^{x-3}) + 1$

في التمرينين 8 و 9، مثّل الدالة بيانيًا وحللها من حيث المجال، المدى، الاتصال، التزايد، التناقص، التناظر، النقاط القصوى، خطوط التقارب، والسلوك الطرفي.

8. $f(x) = e^{3-x} + 1$
9. $g(x) = 3(4^{x+1}) - 2$

10. اكتب صيغة الدالة الأسيّة $y = ab^x$ التي تمثيلها البياني معطى في الشكل أدناه.



في التمارين 11-12، أوجد قيمة العبارة اللوغاريتمية دون استعمال الحاسبة.

11. $log_2 128$
12. $log\ 0.001$

في التمارين 13-16، أعد كتابة المعادلة بصورة أسيّة.

13. $ln \frac{2}{3} = x$
14. $log_2 x = y$
15. $ln\, x - 2\, ln\, y = -3$
16. $log \frac{a}{b} = -3$

في التمارين 17-19، صِف كيف نحول التمثيل البياني للدالة $y = log_2 x$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة. ارسم التمثيل البياني يدويًا ثم ادعم إجابتك باستعمال الحاسبة البيانية.

17. $f(x) = log_2(x + 4)$
18. $g(x) = log_2(4 - x)$
19. $f(x) = -log_2(x + 1) + 4$

في التمارين 20-25، مثّل الدالة بيانيًا. حلّل الدالة لإيجاد المجال، والمدى، والاتصال، والتزايد والتناقص، والنقاط القصوى، والتناظر، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي.

20. $f(x) = log(x - 5)$
21. $f(x) = 2log(x) + 1$
22. $f(x) = -log(x - 2)$
23. $f(x) = -ln(x - 6)$
24. $f(x) = ln(x + 7)$
25. $f(x) = 4ln(1 - x) + 2$

في التمارين 26-30، أوجد معادلة معكوس الدالة.

26. $f(x) = 2^{x+3}$
27. $f(x) = log_5 x - 1$
28. $f(x) = 3^{x-2}$
29. $f(x) = log_3(9x)$
30. $f(x) = ln(x - 2) - 3$

في التمارين 31-39، حل المعادلة.

31. $10^x = 4$
32. $e^x = 0.25$
33. $ln\, x = 5.4$
34. $ln\,(2x + 3) - ln\,(3x + 1) = 4$
35. $3^{x-3} = 5$

36. $3\ log_2 x + 1 = 7$

37. $\frac{3^x - 3^{-x}}{2} = 5$

38. $\frac{50}{4 + e^{2x}} = 11$

39. $log\ (x+2) + log\ (x-1) = 4$

في التمرينين 40 و 41، اكتب المقدار باستعمال اللوغاريتم الطبيعي فقط.

40. $log_2\ x$

41. $log_{\frac{1}{6}}\ (6x^2)$

في التمرينين 42 و 43، اكتب المقدار باستعمال اللوغاريتم الاعتيادي فقط.

42. $log_5\ x$

43. $log_{\frac{1}{2}}\ (4x^3)$

في التمارين 44-54، أوجد قيمة العبارة اللوغاريتمية دون استعمال الحاسبة.

44. $log_5 5$

45. $log_4 1$

46. $log_4\ 64$

47. $log_3\ 81$

48. $log_7 \sqrt{49}$

49. $log_5 \frac{1}{\sqrt[6]{25}}$

50. $log\ (100)^2$

51. $log\ 10^{-9}$

52. $log \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$

53. $ln\ e^{16}$

54. $ln \frac{1}{e^5}$

في التمرينين 55 و 56، أوجد قيمة k بحيث يمر التمثيل البياني للدالة f عبر النقطة المعطاة.

55. $f(x) = 20\ e^{-kx}, (3, 50)$

56. $f(x) = 20\ e^{-kx}, (1, 30)$

57. **تعداد الأرانب** يتضاعف عدد الأرانب في غابة شهريًا. هناك في البداية 20 أرنبًا.

a. عبّر عن عدد الأرانب باستعمال دالة بدلالة الوقت t.

b. أوجد عدد الأرانب الموجودة بعد سنة، ثم بعد 5 سنوات.

c. متى سيكون هناك 000 10 أرنب؟

58. **تعداد الأسماك** يتضاعف عدد الأسماك في حوض الأسماك عند سهى يوميًا. هناك في البداية 4 أسماك.

a. عبّر عن عدد الأسماك على شكل دالة بدلالة الوقت t.

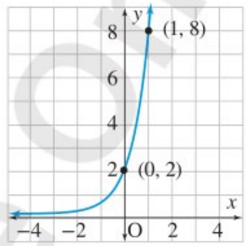
b. أوجد عدد الأسماك الموجودة بعد 4 أيام. ثم بعد أسبوع.

c. متى سيكون هناك 000 2 سمكة؟

59. أودع حمد QR 3 000 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 3.5%، و أودع بسام QR 3 400 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 3.2%، حساب أي منهما سينمو أسرع ليصل إلى QR 5 000 أولًا؟

الوحدة 5 تقويم

.1 اكتب صيغة الدالة الأسيّة $y = ab^x$ التي تمثيلها البياني معطى في الشكل أدناه.



.2 حدّد ما إذا كانت الدالة دالة نمو أسي أو دالة اضمحلال أسي، وصِف سلوكها الطرفي باستعمال النهايات.
$f(x) = e^{4-x} + 2$

.3 صِف كيف نحول التمثيل البياني للدالة $y = log_2 x$ إلى التمثيل البياني للدالة $f(x) = -log_2(x-1) + 2$.
ارسم التمثيل البياني يدويًا ثم ادعم إجابتك باستعمال الحاسبة البيانية.

في التمرينين 4 و 5، حل المعادلة.

4. $1.05^x = 3$

5. $ln(3x+4) - ln(2x+1) = 5$

.6 مثّل الدالة $f(x) = 3 \times 5^x$ بيانيًا ثم حدّد الخصائص الأساسية لهذه الدالة (المجال والمدى والمقطعين x و y وخطوط التقارب و السلوك الطرفي).

.7 أودع ناصر QR 10 500 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متواصلة نسبتها 4.1% . أوجد جملة المبلغ في الحساب بعد مرور 14 سنة. قرّب الاجابة إلى أقرب ريال.

.8 مثّل بيانيًا كل دالة مبيِّنًا التحويل المستعمل انطلاقًا من الدالة الرئيسية ومقارنًا نقاط المقطعين x و y وخطوط التقارب: الدالة الرئيسية: $f(x) = 2^x$

a. $g(x) = -2^x$

b. $h(x) = 3 - 2^x$

في التمارين 9–12 اوجد قيمة كل مقدار دون استعمال الحاسبة:

9. $log\ 10^4$ **10.** $ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

11. $log \frac{1}{\sqrt{100}}$ **12.** $ln \sqrt[3]{e}$

في التمرينين 13-14 صف كيفية تحويل التمثيل البياني للدالة $y = lnx$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة . ارسم التمثيل البياني يدويًا ثم تحقّق من إجابتك باستعمال الحاسبة البيانية.

13. $f(x) = ln(-x) + 7$

14. $f(x) = ln\ (6 - x)$

في التمارين 15–17 أوجد معادلة معكوس الدالة.

15. $f(x) = 10^{x-1}$

16. $g(x) = log_5\ (x + 7)$

17. $h(x) = 3ln\ (x - 1)$

.18 مثّل الدالة $f(x) = 3\ ln\ (x-1) + 2$ بيانيًا. حلّل الدالة لايجاد المجال والمدى والاتصال والتزايد والتناقص والنقاط القصوى والتناظر وخطوط التقارب.

في التمارين 19–22 افترض أن x و y عددان موجبان. استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة المقدار في صورة مجموع أو فرق أو في صورة مضاعفات اللوغاريتمات.

19. $ln\ (4xy^2)$ **20.** $log\ (x^4 y^2)$

21. $ln\left(\frac{x^3}{y^2}\right)$ **22.** $log \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$

في التمارين 23–25 افترض أن x و y عددان موجبان. استعمل خصائص اللوغاريتم لكتابة العبارة على شكل لوغاريتم واحد.

23. $2ln\ x - ln\ y$

24. $log\ (2x) + log\ 3$

25. $\frac{1}{4} logx$

في التمارين 26-29 أوجد حل المعادلة.

26. $3^{2-x} = 9^{5x+6}$ **27.** $2^{2x-3} = 5$

28. $2ln(x+2) = ln(x+4)$ **29.** $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 3$

الوحدة 5 المشروع

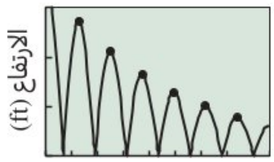
تحليل ارتداد الكرة

عند سقوط كرة على أرض مسطحة من ارتفاع ما، تبدأ بالتحرك حركة ارتدادية صعودًا وهبوطًا. في كل مرة تصل إلى أقصى ارتفاع ممكن ثم تسقط على الأرض من جديد. هذه الارتفاعات القصوى تتناقص كل مرة ترتد فيها الكرة، وتفصل بين كل ارتفاع والارتفاع الذي يسبقه مباشرة نسبة ثابتة. سنعمد في هذا المشروع إلى قياس هذه الارتفاعات القصوى المتلاحقة باستعمال جهاز خاص لقياس الحركة، وذلك لإيجاد الدالة الرياضية التي تبين الارتفاع بدلالة رقم الارتداد.

تجميع البيانات

حضّر نظام CBL™
(Calculator-data Based Laboratory)
مع كاشف للحركة، أو نظام CBR™
(Calculator Based Ranger)، لتجميع بيانات ارتدادات الكرة، باستعمال برنامج ارتداد الكرة لنظام CBL، أو تطبيق ارتداد الكرة (Ball Bounce Application) لنظام CBR، راجع كتيب الإرشاد لأنظمة CBL أو CBR لتعليمات التجهيز المحددة.

ضع الكرة تحت الجهاز بمقدار قدمين على الأقل، واتركها تسقط بشكل رأسي من أجل أن تبدأ بحركة صعود وهبوط ارتداديين تحت الجهاز. يقوم هذا الجهاز بقياس ارتفاع الكرة عن سطح الأرض في كل لحظة، وذلك من خلال رسم بياني يعطي الارتفاع بدلالة الزمن.



[0, 4.25] في [0, 3]

يبين الجدول التالي قيمة أقصى ارتفاع للكرة في كل ارتداد.

رقم الارتداد	الارتفاع الأقصى
0	2.7188
1	2.1426
2	1.6565
3	1.2640
4	0.98309
5	0.77783

1. إن كنت تجيد استعمال CBL أو CBR لإنشاء جدول بيانات، فإن رسمًا بيانيًا للارتفاع بدلالة الزمن سوف يظهر على شاشة آلتك الحاسبة أو على شاشة حاسوبك. ارسم النقاط التي تمثل الارتفاعات القصوى المتتالية للكرة. أما إذا كنت لا تستعمل CBL أو CBR، أدخل البيانات الواردة في الجدول.

2. أوجد نسبة الارتفاع الأقصى الأول من الارتفاع الذي سقطت منه الكرة أول مرة. أوجد نسبة الارتفاع الأقصى الثاني بالنسبة للارتفاع الأقصى الأول، وهكذا. هل لاحظت أن النسبة ثابتة؟

3. إذا كان الارتفاع الأصلي الذي سقطت منه الكرة هو H والنسبة الثابتة بين كل ارتفاع والذي يسبقه مباشرة هي P، فسّر لماذا تكون الدالة $y = \mathrm{H}\mathrm{P}^{x}$ هي التي تنمذج هذه البيانات، x هو رقم الارتداد.

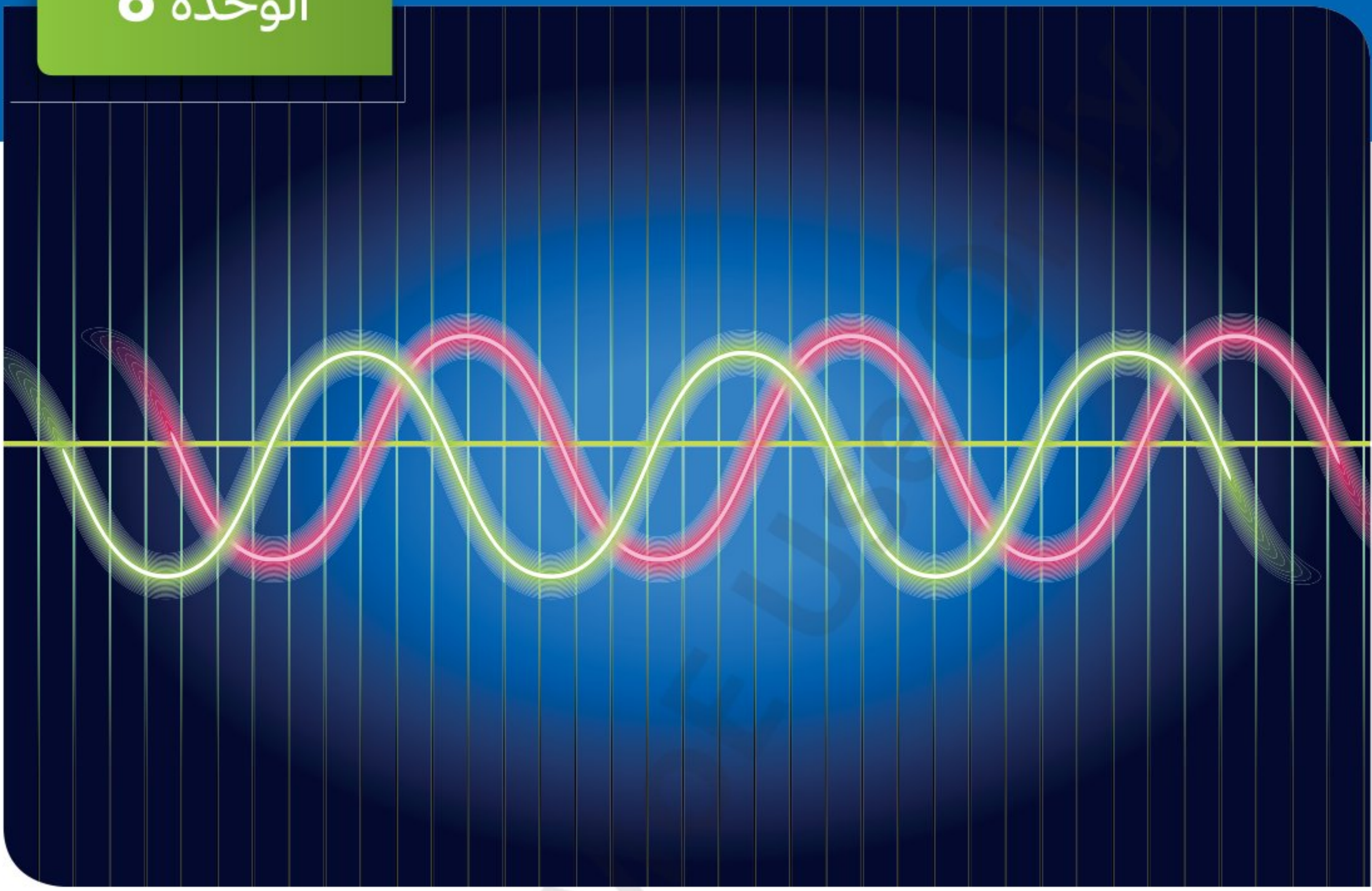
4. أدخل هذه المعادلة في آلتك الحاسبة. استعمل من قيم H و P التي حصلت عليها لتحديد ما إذا كانت الدالة مطابقة لبيانات الجدول أم لا.

5. كيف ستتغير البيانات والدالة إذا تغيرت الكرة؟

6. ما العامل الذي يغير قيمة H وما العامل الذي يغير قيمة P؟

7. اكتب معادلة الدالة مستعملًا الأساس e عوضًا عن P. كيف سيكون شكل التمثيل البياني للنقاط التي تمثل الارتفاعات القصوى للكرة؟ هل يمكن أن تعبر هذه الدالة عن الموقف في الواقع؟

الوحدة 6



الدوال الدائرية وخصائصها

تعود الدوال الدائرية في جذورها إلى حسابات المثلث القائم الزاوية الذي كان الأداة الأكثر اعتمادًا لدى علماء الحضارات القديمة. قبل أن يبدأو بالانتقال من الأشكال المستقيمة والمستوية إلى الأشكال الدائرية والكروية، فقد دخل حساب المثلثات في وقت مبكر في صلب فهم الظواهر الدائرية.

على الرغم من أن دراسة الحركة الدائرية جاءت عقب دراسة الحركة المتناغمة والحركة الموجيّة، إلا أن حساب المثلثات أصبح أمرًا لا غنى عنه في فهم كل شيء، من التيار الكهربائي إلى مجمل عالم الاتصالات الحديثة.

كما أن تطور التحليل الرياضي أدى إلى جعل الدوال الدائرية أكثر أهمية من أي وقت مضى، فقد تبيّن أن بالإمكان التعبير عن أي حركة دورية بدقة عالية من خلال دمج وتركيب عدد من الدوال الدائرية.

6.1 النسب المثلثية للزوايا Trigonometric Ratios of Angles

ما ستتعلّمه
- النسب المثلثية لأي زاوية
- الزاوية المرجعية والمثلث المرجعي

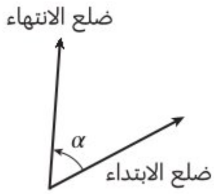
... ولماذا
إن تخطي النسب المثلثية نطاق حساب المثلثات سوف يفتح المجال أمام أنواع جديدة من التطبيقات.

معيار الدرس
11A.8.1

المصطلحات
- زاوية موجبة positive angle
- زاوية سالبة negative angle
- ضلع الابتداء initial side
- ضلع الانتهاء terminal side
- وضع قياسي standard position
- زوايا متطارفة coterminal angles
- زاوية مرجعية reference angle
- مثلث مرجعي reference triangle

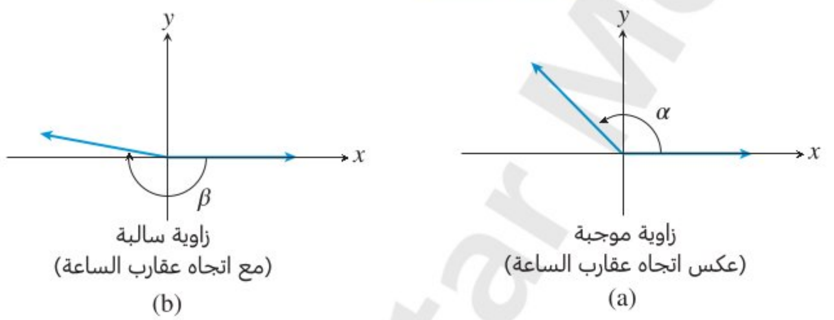
النسب المثلثية لأي زاوية

الزاوية في الهندسة يحددها شعاعان لهما نفس نقطة البداية. ولكن يمكن لحساب المثلثات أن يعطي تعريفًا أكثر مرونة للنسب المثلثية إذا نظرنا إلى الزاوية باعتبارها شعاعًا يدور حول نقطة الرأس انطلاقًا من الوضع الابتدائي. عندما يكون هذا الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة نحصل على **زاوية موجبة**، وعندما يكون مع اتجاه عقارب الساعة نحصل على **زاوية سالبة**.
يبيّن الشكل 6.1.1 زاوية قياسها α، حيث α عدد موجب.



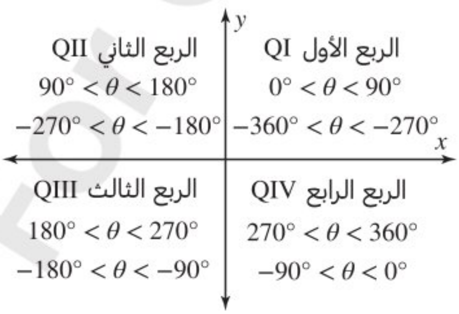
الشكل 6.1.1

نستطيع رسم الزاوية في المستوى الإحداثي الديكارتي برسم الشعاع الذي تبدأ عنده الزاوية، على الجزء الموجب من المحور x، ويُسمى **ضلع الابتداء** للزاوية، ونجعل نقطة الأصل رأس الزاوية والتي يدور حولها الشعاع الثاني للزاوية قبل أن يصل إلى وضعه النهائي، ويُسمى **ضلع الانتهاء** للزاوية، وهذا الوضع يُسمى **الوضع القياسي** للزاوية. (انظر الشكل 6.1.2).

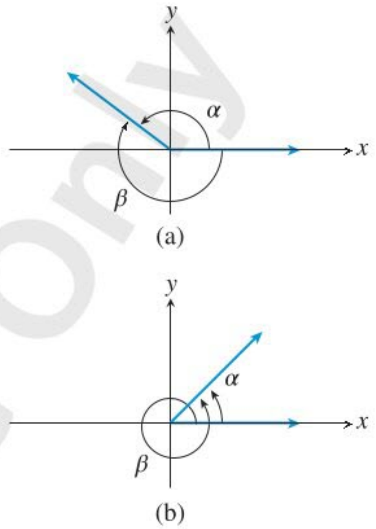


الشكل 6.1.2 زاويتان في الوضع القياسي. في (a) الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة ينتج زاوية قياسها عدد موجب α. في (b) الدوران باتجاه عقارب الساعة ينتج زاوية قياسها عدد سالب β.

عند رسم الزاوية في الوضع القياسي يقع ضلع الانتهاء للزاوية في أحد أرباع المستوى الإحداثي أو يتطابق مع أحد محاوره.



الشكل 6.1.3 الأرباع الأربعة للمستوي الإحداثي الديكارتي. نعتمد الأرقام الرومانية لتسمية الأرباع.



الشكل 6.1.4 زوايا متطارفة. في (a) إحدى الزاويتين المتطارفتين موجبة والأخرى سالبة، وفي (b) كلتا الزاويتين المتطارفتين موجبتان.

في هذا النظام الجديد لتعريف وقياس الزوايا، يمكن أن يكون قياس الزاوية أكبر من $360°$ وذلك عند دوران ضلع انتهائها أكثر من دورة كاملة عكس اتجاه عقارب الساعة، ويمكن أن يكون قياسها أقل من $-360°$ وذلك عند دوران ضلع انتهائها أكثر من دورة مع اتجاه عقارب الساعة وبناءً عليه يمكن أن يكون لعدة زوايا نفس ضلع الابتداء ونفس ضلع الانتهاء وتكون قياسات الزوايا مختلفة، وتُسمى هذه الزوايا زوايا مشتركة النهاية أو **زوايا متطارفة** (انظر الشكل 6.1.4). مثلًا الزوايا $450°, 90°, -270$ هي كلها زوايا متطارفة، وكذلك الزوايا $3\pi, \pi, -99\pi$ بالراديان.
في الواقع، تكون زاويتان متطارفتين عندما يكون الفرق بينهما من مضاعفات $360°$ أو 2π راديان (rad).

مثال 1 إيجاد الزوايا المتطارفة

أوجد وارسم زاوية موجبة وزاوية سالبة متطارفتين مع الزاوية المعطاة.

A. $30°$

B. $-150°$

C. $\frac{2\pi}{3}$ rad

الحل

يوجد عدد لانهائي من الحلول، وفيما يلي حلّان لكل زاوية.

A. اجمع $360°$: $30° + 360° = 390°$

اطرح $360°$: $30° - 360° = -330°$

يبيّن الشكل 6.1.5 الزاويتين اللتين تتطارف كل منهما مع الزاوية التي قياسها $30°$ درجة.

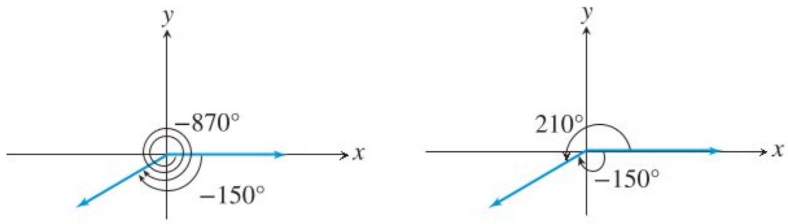
الشكل 6.1.5 تطارف زاويتين مع الزاوية $30°$

B. اجمع $360°$: $-150° + 360° = 210°$

اطرح $2(360°)$: $-150° - 720° = -870°$

(تابع)

يبين الشكل 6.1.6 تطارف زاويتين مع الزاوية $-150°$

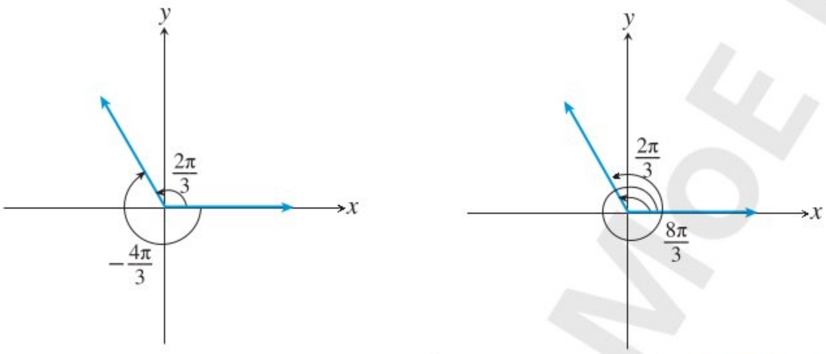


الشكل 6.1.6 تطارف زاويتين مع الزاوية $-150°$

C. اجمع 2π: $\quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

اطرح 2π: $\quad \frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

يبين الشكل 6.1.7 تطارف زاويتين مع الزاوية $\frac{2\pi}{3}$



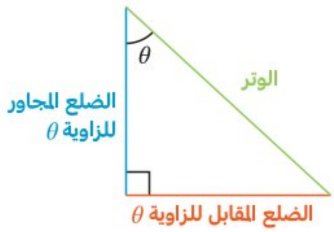
الشكل 6.1.7 تطارف زاويتين مع الزاوية $\frac{2\pi}{3}$

حاول أن تحل التمرين 1

تذكير

تذكّر أنه يمكنك التحويل من الراديان إلى الدرجات أو من الدرجات إلى الراديان باستعمال الصيغة: $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$ حيث α قياس الزاوية بالدرجات β قياس الزاوية بالراديان.

لقد تعلّمت سابقًا أن نسب أضلاع أي مثلث قائم الزاوية تبقى نفسها لأي زاوية معطاة. وتعرّفت على 6 نسب مثلثية أساسية كما يلي:



الظل	جيب التمام	الجيب
$\tan\theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	$\cos\theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$	$\sin\theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$
ظل تمام	**القاطع**	**قاطع تمام**
$\cot\theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$	$\sec\theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	$\csc\theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل}}$

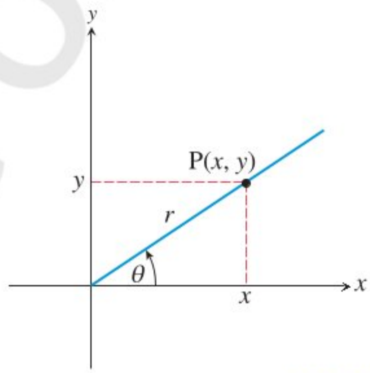
يمكن تعميم النسب المثلثية الست للحصول على نسب مثلثية يمكن أن تُطبَّق على أية زاوية في الوضع القياسي للزاوية. غير أنه من المفيد أن نرى كيف ترتبط هذه النسب بالإحداثيات (x, y) في المستوى الإحداثي.

سوف نبدأ من الربع الأول للمستوى حيث الزوايا كلها حادة. تابع النشاط الاستكشافي التالي.

نشاط استكشافي 1 إحداثيات الربع الأول باستعمال النسب المثلثية

لتكن $\mathrm{P}(x, y)$ أي نقطة في الربع الأول (QI)، ولنفترض أن r هي المسافة من P إلى نقطة الأصل (انظر الشكل 6.1.8).

1. استعمل تعريف نسبة الجيب للزاوية الحادة لإثبات أن $\sin\theta = \frac{y}{r}$.
2. أوجد $\cos\theta$ بدلالة x و r.
3. أوجد $\tan\theta$ بدلالة x و y.
4. أوجد النسب المثلثية الثلاثة المتبقية بدلالة x, y, r.



الشكل 6.1.8 تحدد النقطة $\mathrm{P}(x, y)$ في الربع الأول (QI) الزاوية الحادة θ. العدد r هو المسافة من P إلى نقطة الأصل (نشاط استكشافي 1).

إذا أكملت النشاط الاستكشافي 1 بنجاح، فمن المفترض أنك توصلت للتعريف العام التالي:

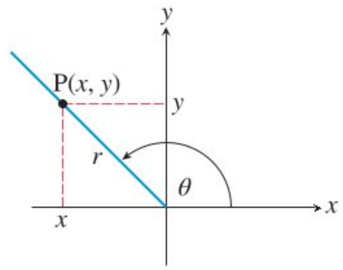
تعريف النسب المثلثية لأي زاوية

لتكن θ أي زاوية في الوضع القياسي ولتكن $\mathrm{P}(x, y)$ أي نقطة على ضلع الانتهاء للزاوية (عدا نقطة الأصل). لتكن r المسافة بين $\mathrm{P}(x, y)$ ونقطة الأصل، أي $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (انظر الشكل 6.1.9). إذن،

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$



الشكل 6.1.9 تعريف النسب المثلثية الستة للزاوية θ.

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية لزاوية محددة بنقطة في الربع الأول (QI)

لنفترض أن θ زاوية حادة في الوضع القياسي، والنقطة $(5, 3)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية. أوجد النسب المثلثية الست للزاوية θ.

الحل

أوجد المسافة من نقطة الأصل الى النقطة $(5, 3)$.

تذكير

قانون المسافة بين نقطتين

يمكننا إيجاد المسافة d بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) من خلال القاعدة:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(تابع)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

عوّض $x = 5$ و $y = 3$

$$r = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

إذن،

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{5} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

حاول أن تحل التمرين 3

تذكير

إنطاق المقام هو عملية إزالة الجذر من مقام الكسر. إذا كان المقام على صورة $\sqrt{a}$ نضرب البسط والمقام في $\sqrt{a}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

نحن هنا أمام طريقة سليمة لتعميم تعريف النسب المثلثية على أي زاوية. استعمل نفس التعريف بدلالة x, y, r سواء كانت x و y قيمتين موجبتين أو سالبتين.

مثال 3 إيجاد النسب المثلثية لزاوية محددة بنقطة خارج الربع الأول (QI)

لنفترض أن θ زاوية حادة في الوضع القياسي وعلى ضلع الانتهاء تقع النقطة $(-5, 3)$. أوجد النسب المثلثية الست للزاوية θ.

الحل

أوجد المسافة من نقطة الاصل الى النقطة $(-5, 3)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

عوّض $x = -5$ و $y = 3$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34}$$

إذن،

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

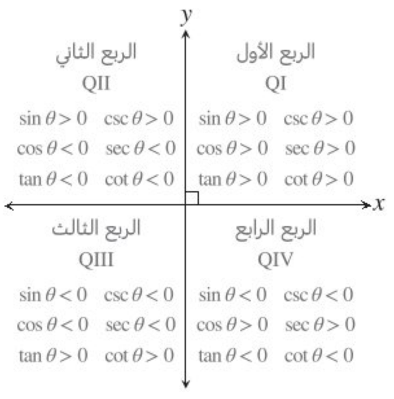
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{\sqrt{34}} = \frac{-5\sqrt{34}}{34} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{-5} = -\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{3}$$

حاول أن تحل التمرين 11

إشارة الدوال المثلثية

إذا كانت θ زاوية في الوضع القياسي، فإن إشارة نسبها المثلثية في كل ربع من المستوى الإحداثي هي:

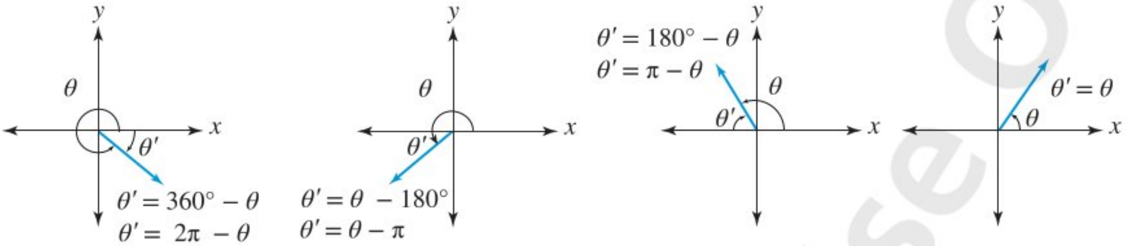


لاحظ في المثال 3 أنّ θ هي أي زاوية في الوضع القياسي ويكون لها ضلع انتهاء تقع عليه النقطة $(-5, 3)$. يوجد عدد لانهائي من الزوايا المتطارفة التي يمكنها أن تلعب دور الزاوية θ، بعضها سالب وبعضها الآخر موجب، غير أن قيم النسب المثلثية الست هي نفسها لكل هذه الزوايا.

الزاوية المرجعية والمثلث المرجعي

الزاوية المرجعية لزاوية معيّنة في وضعها القياسي هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع الانتهاء للزاوية والمحور x.

الشكل التالي يوضح الزاوية المرجعية θ' وطريقة حسابها للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي ويقع ضلع انتهائها في أحد الأرباع الأربعة حيث $0° < \theta < 360°$.



الشكل 6.1.10 الزاوية المرجعية في أرباع المستوى الإحداثي الأربعة.

نلاحظ أن θ' هي زاوية مرجعية للزاوية θ ولأي زاوية أخرى متطارفة معها.

خطأ شائع

تأكد دائمًا أنك تستعمل المحور x عند تحديد الزاوية المرجعية وليس المحور y.

نصيحة دراسية

لاحظ أن مجموع قياس الزاوية الموجبة والقيمة المطلقة لقياس الزاوية السالبة يساوي $360°$، يعود ذلك إلى أن دمج القيمتين معًا يعطي دورة كاملة حول الدائرة.

مثال 4 إيجاد الزوايا المرجعية

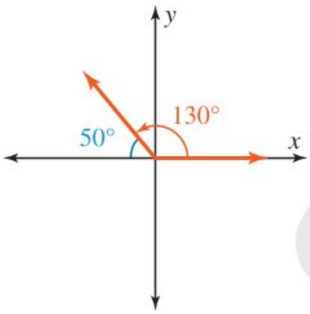
A. أوجد الزاوية المرجعية لزاوية قياسها $130°$

B. أوجد الزاوية المرجعية لزاوية قياسها $210°$

C. إذا كان قياس الزاوية المرجعية لزاوية هو $45°$، ولها ضلع انتهاء يقع في الربع الرابع (QIV).

أوجد قيمة سالبة وقيمة موجبة للزاوية.

الحل

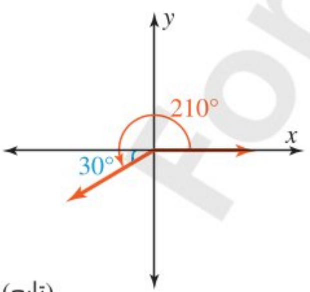


A. لإيجاد الزاوية المرجعية، علينا أولًا أن نرسم الزاوية مع الانتباه إلى الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء.

ضلع الانتهاء لزاوية $130°$ في وضعها القياسي يقع في الربع الثاني (QII).

الزاوية المرجعية هي: $180° - 130° = 50°$.

عندما تكون الزاوية المعطاة أكبر من $90°$ وأصغر من $180°$، تكون زاوية متكاملة مع زاويتها المرجعية.

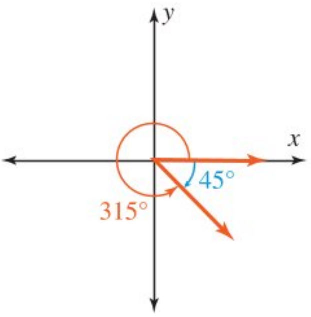


B. نرسم أولًا الزاوية لنجد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء. ضلع الانتهاء لزاوية $210°$ في وضعها القياسي يقع في الربع الثالث (QIII). قياس الزاوية المرجعية هو أصغر بمقدار $180°$ من قياس الزاوية المعطاة:

$210° - 180° = 30°$

(تابع)

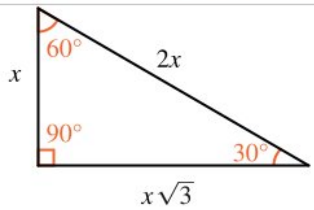
C. نرسم أولًا الزاوية في الربع الرابع (QIV)،
$45°$ أسفل المحور x.
قياس الزاوية الموجبة: $360° - 45° = 315°$
قياس الزاوية السالبة: $-45°$



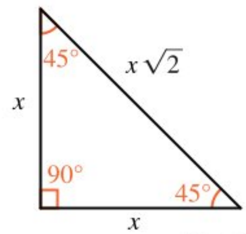
حاول أن تحل التمرين 13

في المثالين 2 و 3، كانت النقطة هي المعطى بدلًا عن الزاوية. إذن، تمكننا النقطة من معرفة قيم النسب المثلثية من دون الاضطرار إلى إيجاد الزاوية أولًا. أما إذا كان المعطى هو الزاوية في وضعها القياسي، وأردنا أن نجد قيم النسب المثلثية، فعلينا أن نحدد النقطة على ضلع الانتهاء، ونوصلها بالمحور x بقطعة مستقيمة متعامدة عليه فتكوّن مثلثًا يُسمى **المثلث المرجعي** ونكمل الحل كما سنرى في المثال التالي.

المثلثات القائمة الخاصة



المثلث $30°-60°-90°$



المثلث $45°-45°-90°$

الشكل 6.1.11

مثال 5 إيجاد قيم النسب المثلثية لزاوية معلومة

أوجد النسب المثلثية الست للزاوية $315°$

الحل

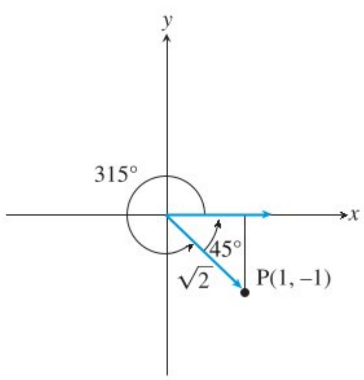
نرسم أولًا زاوية قياسها $315°$ في الوضع القياسي. يقع ضلع انتهاء الزاوية في الربع الرابع، إذن قياس زاويتها المرجعيه يساوي $360° - 315° = 45°$، حدّد النقطة P على ضلع الانتهاء وصِلها بالمحور x برسم قطعة مستقيمة متعامدة. لاحظ أن المثلث المرجعي الذي تكوّن هو المثلث $45°-45°-90°$ وإذا اخترنا الضلعين الأفقي والرأسي في المثلث المرجعي بطريقة عشوائية وليكن طول كل منهما 1، فإن النقطة P يكون لها الإحداثيان $(1, -1)$ (انظر الشكل 6.1.12).

$$x = 1,\ y = -1,\ \ r = \sqrt{\left(1^2 + (-1)^2\right)} = \sqrt{2}$$

يمكننا الآن استعمال تعريفات النسب المثلثية:

$$\sin 315° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 315° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$
$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 315° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$
$$\tan 315° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cot 315° = \frac{1}{-1} = -1$$

حاول أن تحل التمرين 18



الشكل 6.1.12 الزاوية بقياس $315°$ في الوضع القياسي تحدد مثلثًا مرجعيًا هو المثلث $45°-45°-90°$

ما يستحق الملاحظة هو أن المثلث المرجعي في المثال السابق كان $45°-45°-90°$، وهو ما مكّننا من تعيين نقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية $315°$، وبالتالي إيجاد قيم النسب المثلثية. يمكننا أيضًا إيجاد النقطة P إذا كان المثلث المرجعي $30°-60°-90°$

إيجاد النسب المثلثية لأية زاوية

1. ارسم الزاوية θ بالوضع القياسي، واحرص على وضع ضلع الانتهاء في الربع الصحيح.

2. بدون ذكر المقياس على أي من المحورين، حدّد نقطة P (غير نقطة الأصل) على ضلع الانتهاء للزاوية θ.

3. ارسم،من النقطة P، قطعة مستقيمة متعامدة مع المحور x، بحيث تحدد المثلث المرجعي. إذا كان هذا المثلث أحد المثلثات التي تعرف نسبها، حدّد الأضلاع بناءً على ذلك. وإذا لم يكن كذلك، فستحتاج إلى استعمال الحاسبة.

4. استعمل أضلاع المثلث لتحديد إحداثيات النقطة P، بحيث تجعلها موجبة أو سالبة وفقًا للإشارات على المحورين x و y، في هذا الربع على وجه التحديد.

5. استعمل إحداثيي النقطة P والتعريفات لتحديد النسب المثلثية الست.

مثال 6 إيجاد المزيد من قيم النسب المثلثية

أوجد القيم التالية دون استعمال الحاسبة.

A. $\sin(-210)^\circ$

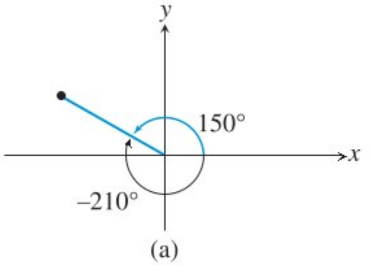
B. $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

C. $\sec\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$

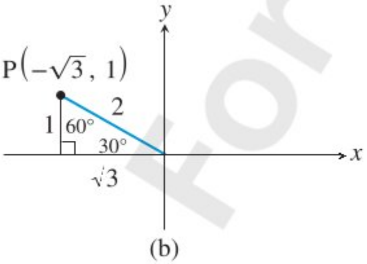
الحل

A. نرسم زاوية قياسها $-210°$ في الوضع القياسي. يقع ضلع انتهاء الزاوية في الربع الثاني وهي متطارفة مع الزاوية $-210 + 360 = 150°$ وقياس زاويتها المرجعية يساوي $\theta' = 180 - 150 = 30°$، إذن هذه الزاوية تحدد مثلثًا مرجعيًا هو $30°-60°-90°$ في الربع الثاني (انظر الشكل أدناه). نحدد الأضلاع بناءً على ذلك، ثم نستعمل أطوال الأضلاع لتحديد النقطة $P(-\sqrt{3}, 1)$ (لاحظ أن قيمة الإحداثي x سالبة في الربع الثاني).
طول الوتر $2 = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = r$.

إذن، $\sin(-210)^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$.



(a)

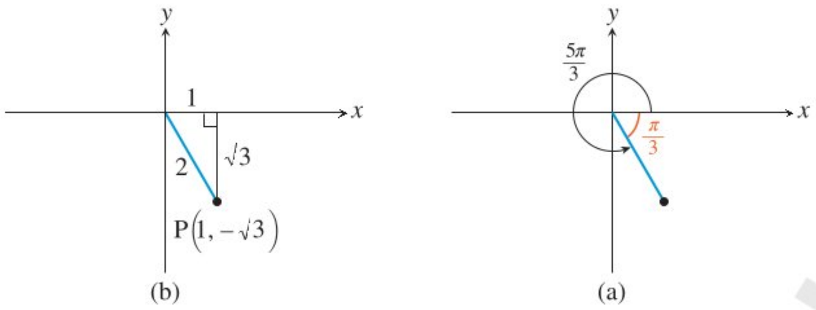


(b)

(تابع)

B. نرسم زاوية قياسها $\frac{5\pi}{3}$ راديان في الوضع القياسي. يقع ضلع انتهاء الزاوية في الربع الرابع وقياس زاويتها المرجعية يساوي $\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - 2\pi$ إذن، هذه الزاوية تحدد مثلثًا مرجعيًا هو $30°-60°-90°$ في الربع الرابع (انظر الشكل أدناه). نحدد الأضلاع بناءً على ذلك، ثم نستعمل أطوال الأضلاع لتحديد النقطة $P(1, -\sqrt{3})$ (لاحظ أن قيمة الإحداثي y سالبة في الربع الرابع).

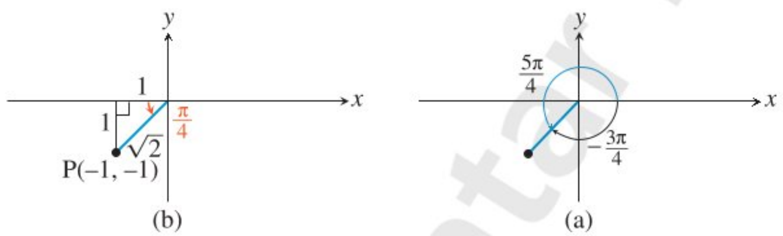
إذن، $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$.



C. نرسم زاوية قياسها $\frac{-3\pi}{4}$ راديان في الوضع القياسي. يقع ضلع انتهاء الزاوية في الربع الثالث وهي متطارفة مع الزاوية $\frac{5\pi}{4} = 2\pi + \frac{-3\pi}{4}$ وقياس زاويتها المرجعية يساوي $\frac{\pi}{4} = \pi - \frac{5\pi}{4} = \theta'$، إذن هذه الزاوية تحدد مثلثًا مرجعيًا هو $45°-45°-90°$ في الربع الثالث (انظر الشكل أدناه). نحدد الأضلاع بناءً على ذلك، ثم نستعمل أطوال الأضلاع لتحديد النقطة $P(-1, -1)$ (لاحظ أن قيمتَي كلا الإحداثيين سالبتان في الربع الثالث).

طول الوتر $r = \sqrt{\left((-1)^2 + (-1)^2\right)} = \sqrt{2}$.

إذن، $\sec\frac{-3\pi}{4} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$.



حاول أن تحل التمرين 20

بإمكاننا أن نستعمل نسبة مثلثية واحدة للحصول على النسب الخمس الباقية. لا نحتاج لمعرفة قيمة الزاوية، يكفي أن نحدد ضلع الانتهاء في الربع المناسب لإيجاد المثلث المرجعي كما هو مبيّن في المثال التالي.

مثال 7 **إيجاد النسب المثلثية لزاوية من خلال معرفة واحدة منها**

أوجد $\cos\theta$ و $\tan\theta$ باستعمال المعلومات المعطاة لبناء مثلث مرجعي.

A. $\sin\theta = \frac{3}{7}$ و $\tan\theta < 0$

B. $\sec\theta = 3$ و $\sin\theta > 0$

C. $\cot\theta = \frac{13}{12}$ و $\sec\theta < 0$

الحل

A. بما أن $\sin\theta$ موجبة، فضلع الانتهاء إما أن يكون في الربع الأول أو في الربع الثاني.
وبما أن $\tan\theta$ سالبة يعني أن ضلع الانتهاء يقع في الربع الثاني.
نرسم مثلثًا مرجعيًا في الربع الثاني حيث $r = 7$ و $y = 3$ (انظر الشكل 6.1.13)، ثم نستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة x

$$x = -1\sqrt{7^2 - 3^2} = -\sqrt{40} = -2\sqrt{10}$$

(لاحظ أن قيمة x سالبة في الربع الثاني)
ثم نستعمل التعريفات للحصول على

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{20} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2\sqrt{10}}{7}$$

B. بما أن $\sec\theta$ موجبة، فضلع الانتهاء إما أن يكون في الربع الأول أو في الربع الرابع.
وبما أن $\sin\theta$ موجبة، فإن ضلع الانتهاء يقع في الربع الأول.
نرسم مثلثًا مرجعيًا في الربع الأول بالقيمتين $r = 3$ و $x = 1$ (انظر الشكل 6.1.14)، ثم نستعمل نظرية فيثاغورس لايجاد قيمة y

$$y = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(لاحظ أن قيمة y موجبة في الربع الأول)
ثم نستعمل التعريفات للحصول على

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1}{3}$$

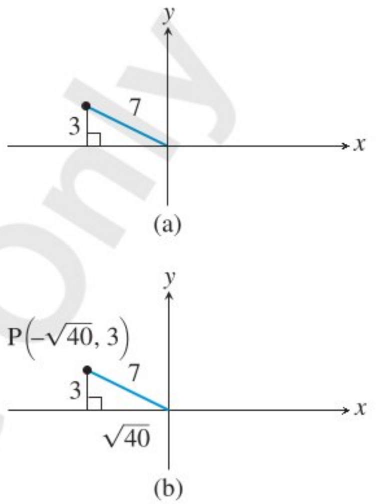
(يمكننا أيضًا إيجاد قيمة $\cos\theta$ مباشرة وهي النظير الضربي لقيمة $\sec\theta$).

C. بما أن $\cot\theta$ موجبة فضلع الانتهاء إما أن يكون في الربع الأول أو في الربع الثالث. وبما أن $\sec\theta$ سالبة، فإن ضلع الانتهاء يقع في الربع الثالث. نرسم مثلثًا مرجعيًا في الربع الثالث بالقيمتين $x = -13$ و $y = -12$، ثم نستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة r

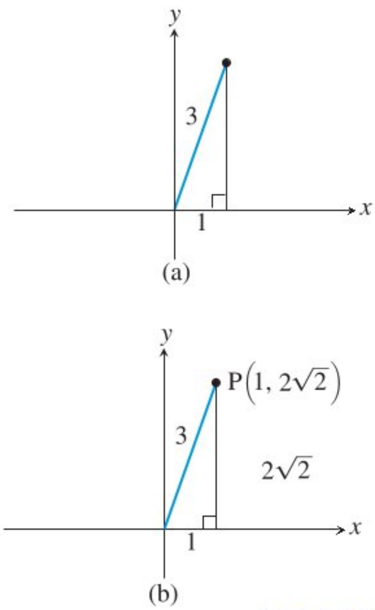
$$r = \sqrt{(13)^2 + (12)^2} = \sqrt{313}$$

$$\tan\theta = \frac{-12}{-13} = \frac{12}{13} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{-13}{\sqrt{313}} = \frac{-13\sqrt{313}}{313}$$

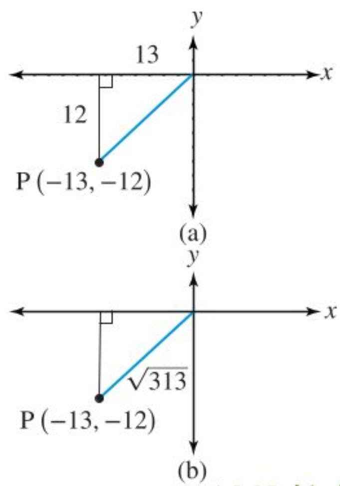
حاول أن تحل التمرين 24



الشكل 6.1.13



الشكل 6.1.14



الشكل 6.1.15

مراجعة سريعة 6.1

حل التمارين 1-10، من دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 1-4، أوجد قيمة الزاوية θ بالدرجات.

1. $\theta = -\frac{\pi}{6}$

2. $\theta = -\frac{5\pi}{6}$

3. $\theta = \frac{25\pi}{4}$

4. $\theta = \frac{16\pi}{3}$

في التمارين 5-8، استعمل مثلثات خاصة لإيجاد القيمة.

5. $\tan\frac{\pi}{6}$

6. $\cot\frac{\pi}{4}$

7. $\csc\frac{\pi}{4}$

8. $\sec\frac{\pi}{3}$

في التمرينين 9 و 10، استعمل مثلثًا قائم الزاوية لإيجاد النسب المثلثية الخمس الأخرى للزاوية الحادة θ.

9. $\sin\theta = \frac{5}{13}$

10. $\cos\theta = \frac{15}{17}$

الدرس 6.1 التمارين

في التمرينين 1 و 2، حدّد الزاوية الوحيدة التي ليست متطارفة مع الزوايا الأخرى المعطاة.

1. $150°,\ 510°,\ -210°,\ 450°,\ 870°$

2. $\frac{5\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, \frac{365\pi}{3}$

في التمارين 3-8، تقع النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية θ.
أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرّفة، اكتب "غير معرّفة".

3. $P(3, 4)$

4. $P(-4, -6)$

5. $P(0, 5)$

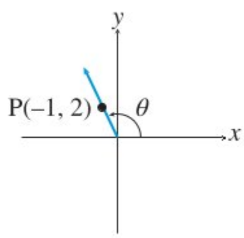
6. $P(-3, 0)$

7. $P(5, -2)$

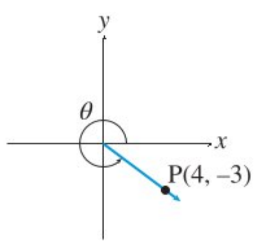
8. $P(22, -22)$

في التمارين 9-12، أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

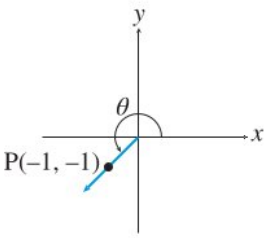
9.



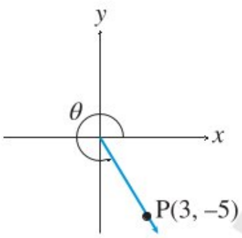
10.



11.



12.



13. في كل مما يلي، أوجد زاوية موجبة وزاوية سالبة تكون لهما الزاوية المرجعية المعطاة.

a. °10 في الربع الثالث.

b. °15 في الربع الأول.

في التمارين 14-17، أوجد قيمة الزاوية في الوضع القياسي التي لها الزاوية المرجعية المعطاة.

14. °15 في الربع الثاني.

15. °75 في الربع الرابع.

16. °8 في الربع الثالث.

17. °56 في الربع الأول.

في التمرينين 18-19، أوجد النسب المثلثية الست لكل من الزوايا التالية من دون استعمال الحاسبة.

18. $240°$

19. $495°$

في التمارين 20-23، أوجد القيمة من دون استعمال الحاسبة، عبر استعمال النسب في مثلث مرجعي.

20. $\cos 120°$

21. $\tan 300°$

22. $\sec \frac{\pi}{3}$

23. $\csc \frac{3\pi}{4}$

24. أوجد $\sin \theta$ و $\tan \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$ و $\cot \theta > 0$.

25. أوجد $\cos \theta$ و $\cot \theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ و $\tan \theta < 0$.

26. أوجد $\tan \theta$ و $\sec \theta$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{2}{5}$ و $\cos \theta > 0$.

27. أوجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$ إذا كان $\cot \theta = \frac{3}{7}$ و $\sec \theta < 0$.

في التمارين 28-31، أوجد القيمة من دون استعمال الحاسبة.

28. $\sin \frac{13\pi}{6}$

29. $\cos \frac{7\pi}{3}$

30. $\tan \left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

31. $\cot \frac{13\pi}{4}$

في التمارين 32-35، حدّد الإشارة (− أو +) للقيم:
(a) $\sin t$, (b) $\cos t$, (c) $\tan t$ لقيم t في الفترة المعطاة.

32. $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

33. $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

34. $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

35. $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

في التمارين 36-39، حدّد الإشارة (+ أو −) للقيم المعطاة من دون استعمال الحاسبة.

36. $\cos 143°$

37. $\tan 192°$

38. $\cos \frac{7\pi}{8}$

39. $\tan \frac{4\pi}{5}$

في التمارين 40-42، اختر النقطة التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ.

40. $\theta = 45°$

a. $(2, 2)$

b. $(1, \sqrt{3})$

c. $(\sqrt{3}, 1)$

41. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

a. $(-1, 1)$

b. $(-1, \sqrt{3})$

c. $(-\sqrt{3}, 1)$

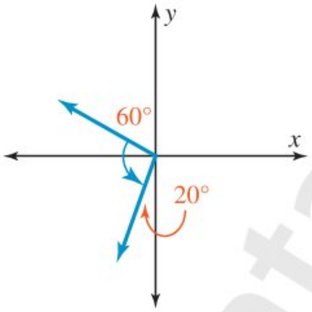
42. $\theta = -60°$

a. $(-1, -1)$

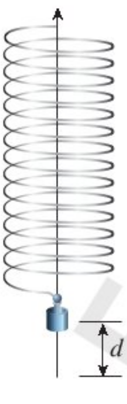
b. $(1, -\sqrt{3})$

c. $(-\sqrt{3}, 1)$

43. إذا رسمنا الزاوية المعطاة في الوضع القياسي، في أي ربع يقع ضلع الانتهاء؟



44. **حركة توافقية مخمدة** نضع وزنًا معلقًا من نابض فيبدأ بالتحرك. تُنمذَج الاستطالة d من نقطة التوازن بالمعادلة
$d = 0.4e^{-0.2t} \cos (4t)$، حيث d الاستطالة (بالإنش) و t الزمن بالثواني.
أوجد الاستطالة لكل زمن معطى.
استعمل وحدة الراديان.



a. عند $t = 0$

b. عند $t = 3$

أسئلة اختبار معيارية

45. صواب أم خطأ إذا كانت θ زاوية في مثلث حيث $\cos\theta < 0$، تكون θ زاوية منفرجة. برّر إجابتك.

46. صواب أم خطأ إذا كانت θ زاوية في الوضع القياسي محددة بالنقطة $(8, -6)$، يكون $\sin\theta = -0.6$.
برّر إجابتك.

في التمرينين التاليين، حل دون استعمال الحاسبة.

47. اختيار من متعدد إذا كان $\cos\theta = \frac{-5}{13}$ و $\tan\theta > 0$، $\sin\theta$ تساوي:

A. $-\frac{12}{13}$
B. $-\frac{5}{12}$
C. $\frac{5}{13}$
D. $\frac{5}{12}$
E. $\frac{12}{13}$

48. اختيار من متعدد أي من قياسات الزوايا التالية لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية في الوضع القياسي قياسها $530°$؟

A. $370°$
B. $170°$
C. $10°$
D. $-10°$
E. $-170°$

استكشاف

49. بندول متأرجح يعرض متحف العلوم والصناعة بندول "فوكو" طوله 976 cm يتأرجح ذهابًا وإيابًا مرة كل 6 ثواني تقريبًا. تُنمذَج الزاوية θ (بالراديان) بين الحبل وخط رأسي وهمي بالمعادلة

$$\theta = 0.25 \cos t$$

أوجد قياس الزاوية θ عندما $t = 0$ و $t = 2.5$.

توسيع الأفكار

50. التقريب وتحليل الأخطاء استعمل الحاسبة البيانية لإكمال الجدول لتبيّن أن $\sin\theta \approx \theta$ (بالراديان) عندما تكون $|\theta|$ صغيرة. يستعمل الفيزيائيون غالبًا التقريب $\sin\theta \approx \theta$ لقيم θ الصغيرة. لأي قيم θ تكون قيمة الخطأ في تقريب $\sin\theta$ إلى θ أقل من 1% من $\sin\theta$؟ بمعنى آخر، أوجد حل المتباينة

$$|\sin\theta - \theta| < 0.01\,|\sin\theta|$$

(مساعدة: وسّع الجدول ليضم عمودًا لقيم $\frac{|\sin\theta - \theta|}{|\sin\theta|}$.)

θ	$\sin\theta$	$\sin\theta - \theta$
-0.3		
-0.2		
-0.1		
0		
0.1		
0.2		
0.3		

6.2 دائرة الوحدة Unit Circle

ما ستتعلّمه
- تعريف دائرة الوحدة
- إيجاد النسب المثلثية باستعمال دائرة الوحدة
- الصفة الدورية للنسب المثلثية

... ولماذا
تمثل دائرة الوحدة صلة مهمة بين النسب المثلثية والأعداد الحقيقية.

معايير الدرس
11A.8.1

11A.8.2

المصطلحات
- دائرة الوحدة unit circle
- دورة period
- زاوية ربعية quadrantal angle

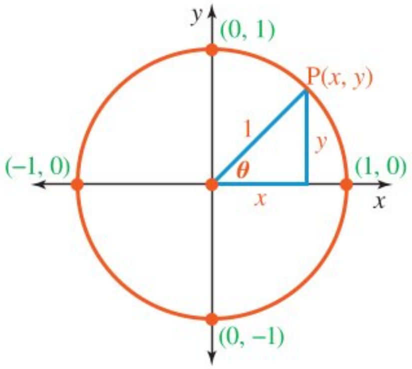
تعريف دائرة الوحدة

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة واحدة وبالتالي فإن معادلتها هي $x^2 + y^2 = 1$

لأي مثلث قائم الزاوية بحيث يكون وتره هو نصف قطر دائرة الوحدة ويساوي طوله 1 من المثلث نجد أن:

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$



إيجاد النسب المثلثية باستعمال دائرة الوحدة

أي زاوية في الوضع القياسي يتقاطع ضلع انتهائها مع دائرة الوحدة في نقطة $P(x, y)$ وباستعمال إحداثيي النقطة (x, y) بمكننا ايجاد النسب المثلثية لهذه الزاوية.

تعريف النسب المثلثية للزاويا في دائرة الوحدة

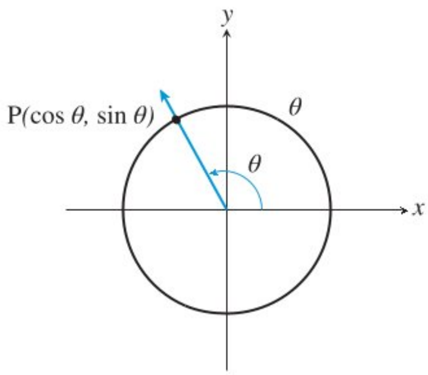
لتكن النقطة $P(x, y)$ نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية θ مع دائرة الوحدة. إذن،

$$\sin\theta = y \qquad \csc\theta = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\cos\theta = x \qquad \sec\theta = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

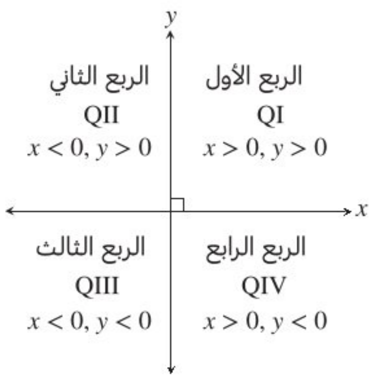
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

إذن، يمر ضلع انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسي بالنقطة $(\cos\theta, \sin\theta)$ الواقعة على دائرة الوحدة (انظر الشكل 6.2.1).



الشكل 6.2.1 يتقاطع ضلع انتهاء الزاوية θ دائمًا مع دائرة الوحدة في النقطة $(\cos\theta, \sin\theta)$

على الرغم من أنه لا يزال من المفيد رسم مثلثات مرجعية داخل دائرة الوحدة لمعرفة النسب بطريقة هندسية، إلا أن هذه التعريفات الأخيرة لا تذكر المثلثات على الإطلاق.
الزاوية θ تحدد النقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة، كما إن الإحداثيين x و y للنقطة تحدد النسب المثلثية الست للزاوية θ.

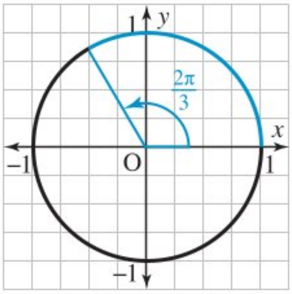


مثال 1 **استعمال دائرة الوحدة لإيجاد $\cos\theta$ و $\sin\theta$**

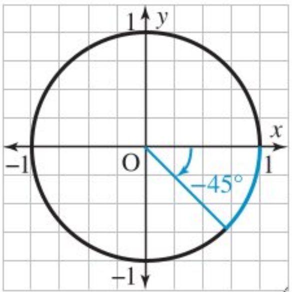
A. أوجد كلًّا من $\cos\frac{2\pi}{3}$ و $\sin\frac{2\pi}{3}$.

B. أوجد كلًّا من $\cos(-45°)$ و $\sin(-45°)$.

الحل



A. بما أن $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$، إذن، تقع الزاوية في الربع الثاني وزاويتها المرجعية $\theta' = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.
إذن، إحداثيا نقطة النهاية للزاوية المرجعية هما $\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وعندما نوجد قيم الجيب وجيب التمام للزاوية المرجعية يبقى علينا إيجاد إشارات القيم فقط.
وبما أن ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{2\pi}{3}$ – يقع في الربع الثاني يكون إحداثيا نقطة النهاية $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
إذن، $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ و $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



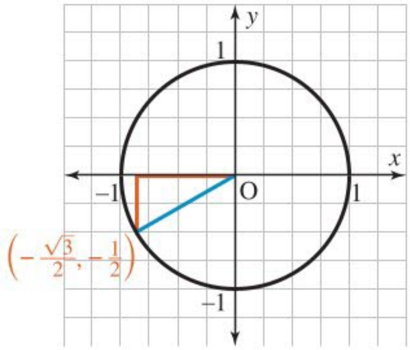
B. بما أن $-90° < -45° < 0°$، إذن، تقع الزاوية في الربع الرابع وزاويتها المرجعية $45°$،
إذن، إحداثيا نقطة النهاية للزاوية المرجعية هما $(\cos 45°, \sin 45°)$ أو $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وعندما نوجد قيم الجيب وجيب التمام للزاوية المرجعية يبقى علينا إيجاد إشارات القيم فقط.
وبما أن ضلع الانتهاء للزاوية 45– يقع في الربع الرابع يكون إحداثيا نقطة النهاية $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
إذن $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

حاول أن تحل التمرين 1

مثال 2 إيجاد قيم الظلال باستعمال دائرة الوحدة

أوجد $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

الحل



الزاوية المتطارفة مع $-\frac{5\pi}{6}$
هي $\theta = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$
وتقع θ في الربع الثالث وزاويتها المرجعية هي
$\theta' = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$ إذن، إحداثيا نقطة النهاية
للزاوية المرجعية هما
$\left(\cos\frac{\pi}{6} \text{ ، } \sin\frac{\pi}{6}\right)$ أو $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ وبما أن
ضلع الانتهاء للزاوية $-\frac{5\pi}{6}$ يقع في الربع الثالث
ومع إيجاد إشارات قيم الجيب وجيب التمام
في هذا الربع يكون إحداثيا نقطة النهاية $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

نستعمل تعريف الظل $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

إذن، ظل الزاوية $-\frac{5\pi}{6}$ هو $\frac{\sqrt{3}}{3}$

نصيحة دراسية

لا تنس إنطاق المقام عند حساب النسب المثلثية للزاويا الخاصة.

حاول أن تحل التمرين 7

مثال 3 إيجاد قيم مقلوب النسب المثلثية باستعمال دائرة الوحدة

أوجد $\sec\theta, \csc\theta, \cot\theta$ للزاوية $\theta = 135°$

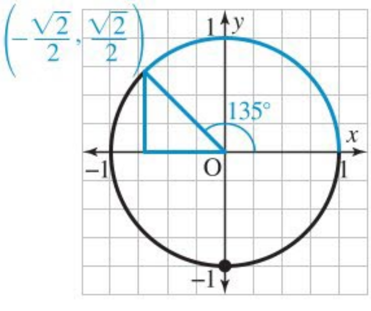
الحل

يقع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها $135°$ في الربع الثاني وزاويتها المرجعية
هي $\theta' = 180° - 135° = 45°$
إذن، إحداثيا نقطة النهاية للزاوية المرجعية هما $(\cos 45°, \sin 45°)$ أو $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
بالانتباه إلى إشارة نقطة ما في الربع الثاني نستنتج أن إحداثيا النقطة حيث يلتقي ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة هما $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
نستعمل مقلوبات النسب المثلثية.

$$\sec\theta = \frac{1}{x} \qquad \sec 135° = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

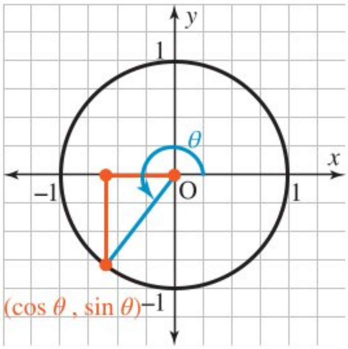
$$\csc\theta = \frac{1}{y} \qquad \csc 135° = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \qquad \cot 135° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$



حاول أن تحل التمرين 11

لنرسم الزاوية θ مع مثلثها المرجعي في دائرة الوحدة كما هو مبيّن في الشكل أدناه.



إحداثيًا النقطة حيث يلتقي ضلع الانتهاء للزاوية مع الدائرة هما $(\cos\theta, \sin\theta)$. إذن ضلعا المثلث المرجعي أحدهما بطول $|\cos\theta|$ والآخر بطول $|\sin\theta|$. طول الوتر يساوي 1
بالتعويض في معادلة دائرة الوحدة، $x^2 + y^2 = 1$ نحصل على واحدة من أهم المتطابقات المثلثية:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

وهي صيغة صحيحة لكل قيم θ وتُسمى متطابقة فيثاغورس.

مثال 4 استعمال متطابقة فيثاغورس

أوجد $\sin\theta$ إذا كانت $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ والزاوية θ تقع في الربع الثالث.

الحل

بما أن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، يمكننا أن نحل لإيجاد $\sin\theta$.

اكتب متطابقة فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
عوّض $\cos\theta = -\frac{3}{5}$	$\sin^2\theta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$
أوجد قيمة $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$	$\sin^2\theta + \frac{9}{25} = 1$
اطرح $\frac{9}{25}$ من لطرفَي المعادلة	$\sin^2\theta = \frac{16}{25}$
خذ الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة	$\sin\theta = \pm\frac{4}{5}$

بما أن الزاوية في الربع الثالث، فإن إشارة $\sin\theta$، سالبة.
إذن، $\sin\theta = -\frac{4}{5}$.

حاول أن تحل التمرين 17

نصيحة دراسية

يمكن أن تكون إشارة كل من الإحداثيين $\cos\theta$ و $\sin\theta$ موجبة أو سالبة ولكن طول الضلع في مثلث يكون دائمًا موجب.

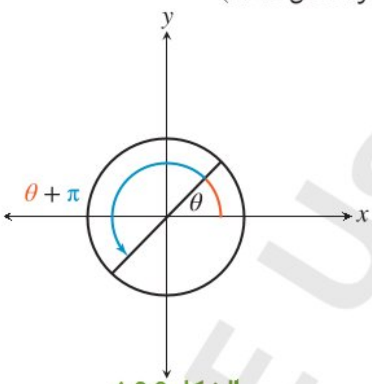
خطأ شائع

كن حريصًا على التمييز بين $\sin\theta^2$ و $\sin^2\theta$.
فإن $\sin^2\theta = \sin\theta \times \sin\theta$
بينما $\sin\theta^2 = \sin(\theta \times \theta)$

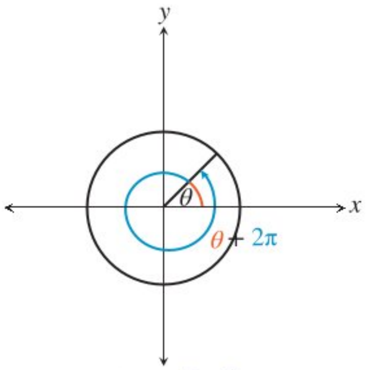
الصفة الدورية للنسب المثلثية

يمكن للزوايا أن تلتف حول دائرة الوحدة مشكّلة زوايا مختلفة بينما لها نفس النسب المثلثية. للحصول على نفس قيم الجيب وجيب التمام يجب أن تلتف الزاوية **دورة** كاملة قياسها $360°$ (أو 2π) أو إحدى مضاعفاتها حول دائرة الوحدة.

أما في حالة الظل فيكفي أن تلتف الزاوية نصف دورة قياسها $180°$ أو π (انظر الشكل 6.2.2) أو إحدى مضاعفاتها حول دائرة الوحدة للحصول على زاوية لها نفس قيمة الظل. (انظر الشكل 6.2.3)



الشكل 6.2.2



الشكل 6.2.3

كما يوضح الجدول التالي:

زوايا قياسها معرّف بالراديان	زوايا قياسها معرّف بالدرجات
$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$	$\cos(\theta + 360°k) = \cos\theta$
$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$	$\sin(\theta + 360°k) = \sin\theta$
$\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$	$\tan(\theta + 180°k) = \tan\theta$

حيث k هو عدد صحيح.

مثال 5 **استعمال الصفة الدورية**

أوجد قيمة الأعداد التالية دون استعمال الحاسبة.

A. $\cos(288.45\pi) - \cos(280.45\pi)$

B. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - 99\,999\pi\right)$

الحل

A. $\cos(288.45\pi) - \cos(280.45\pi) = \cos(280.45\pi + 8\pi) - \cos(280.45\pi) = 0$

لاحظ أن 280.45π و $(280.45\pi + 8\pi)$ يلتفان إلى النقطة نفسها على دائرة الوحدة، وبالتالي لهما نفس جيب التمام.

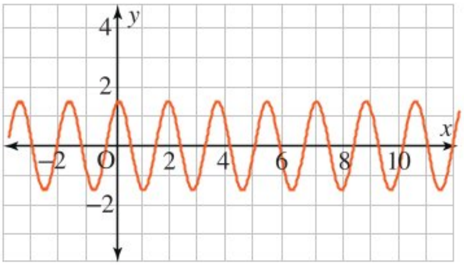
B. بما أن دورة الظل تساوي π بدلًا من 2π، فإن $99\,999\pi$ هو مضاعف كبير لدورة دالة الظل.

ولذلك،

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - 99\,999\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

حاول أن تحل التمرين 21

تُسمى الزاوية في الوضع القياسي التي يقع ضلع انتهائها على أحد المحورين x أو y، **زاوية ربعية**. وبما أن الزوايا الربعية لا تنتج مثلثات مرجعية على الإطلاق، فإنه من السهل اختيار النقطة P على أحد المحورين بحيث تتقاطع مع دائرة الوحدة (انظر الشكل 6.2.4)، لتساعدنا في إيجاد النسب المثلثية للزاوية.



الشكل 6.2.4

مثال 6 إيجاد قيم النسب المثلثية لزوايا ربعية

استعمل دائرة الوحدة لإيجاد القيم التالية إذا كانت معرّفة، إذا لم تكن كذلك، اكتب "غير معرّفة".

A. $\sin(-270°)$

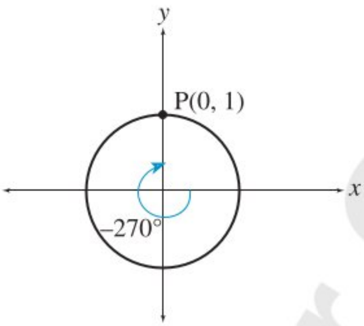
B. $\tan 3\pi$

C. $\sec \frac{11\pi}{2}$

D. $\sin\left(\frac{57\,801\pi}{2}\right)$

الحل

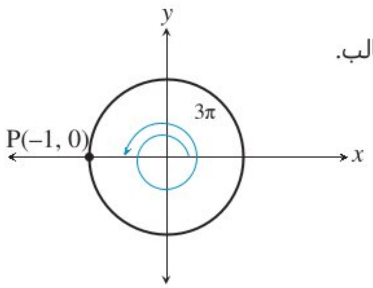
A. لا تنتج الزاوية $-270°$ مثلثًا مرجعيًا كونها زاوية ربعية. إلا أن ضلع الانتهاء للزاوية يقع على المحور y الموجب.
وهكذا نحصل على النقطة $P(0, 1)$ التي هي نقطة التقاء دائرة الوحدة مع المحور y أي مع ضلع الانتهاء للزاوية.
وكما ورد في تعريف دائرة الوحدة، تكون فعلًا:



$$P(0, 1) = P(\cos(-270°), \sin(-270°))$$

إذن، $\sin(-270°) = 1$.

(تابع)



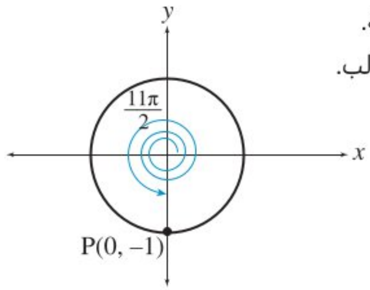
B. لا تنتج الزاوية 3π مثلثًا مرجعيًا كونها زاوية ربعية.
إلا أن ضلع الانتهاء للزاوية يقع على المحور x السالب.
وهكذا نحصل على النقطة $P(-1, 0)$ التي هي
نقطة التقاء دائرة الوحدة مع المحور x
أي مع ضلع الانتهاء للزاوية.
يكون لدينا فعلًا:

$$P(-1, 0) = P(\cos 3\pi, \sin 3\pi)$$

نكتب العلاقة المثلثية ونعوّض القيمة:

$$\tan 3\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

إذن، $\tan 3\pi = 0$.



C. لا تنتج الزاوية $\frac{11\pi}{2}$ مثلثًا مرجعيًا كونها زاوية ربعية.
إلا أن ضلع الانتهاء للزاوية يقع على المحور y السالب.
وهكذا نحصل على النقطة $P(0, -1)$ التي هي
نقطة التقاء دائرة الوحدة مع المحور y
أي مع ضلع الانتهاء للزاوية.
يكون لدينا فعلًا:

$$P(0, -1) = P\left(\cos \frac{11\pi}{2}, \sin \frac{11\pi}{2}\right)$$

نكتب العلاقة المثلثية ونعوّض القيمة:

$$\sec \frac{11\pi}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$ غير معرّفة

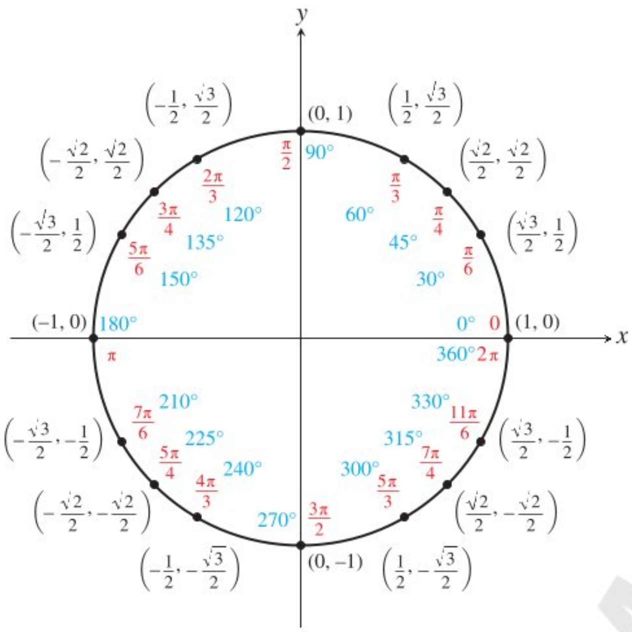
إذن، $\sec \frac{11\pi}{2}$ غير معرّفة.

D.
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{57\,801\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{57\,800\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 28\,900\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

لاحظ أن $28\,900\pi$ مضاعف كبير للعدد 2π
إذن، $\frac{\pi}{2}$ و $\left(\frac{\pi}{2} + 28\,900\pi\right)$ لهما نقطة الانتهاء نفسها على دائرة الوحدة، وهي $(0, 1)$.

حاول أن تحل التمرين 25

يمكننا، باستعمال المثلث المرجعي والزاوية الربعية، أن نوجد النسب المثلثية لكل مضاعفات $45°$ و $30°$ أو ($\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ راديان). سوف نحصل على 16 نقطة على دائرة الوحدة للتعبير عن هذه الزوايا كما هو مبيّن في الشكل أدناه. ادرس هذا الشكل بعناية حتى تتأكد من قدرتك على إيجاد إحداثيَّي أي نقطة من هذه النقاط الستة عشر، دون أن تضطر لحفظها غيبًا لاستعمالها في حل المسائل.



النسب المثلثية الأساسية للزوايا المميزة						
الزاوية	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$
$\theta = 0°$	0	1	0	غير معرّفة	غير معرّفة	1
$\theta = 30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\theta = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\theta = 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\theta = 90°$	1	0	غير معرّفة	0	1	غير معرّفة
$\theta = 180°$	0	-1	0	غير معرّفة	غير معرّفة	-1
$\theta = 270°$	-1	0	غير معرّفة	0	-1	غير معرّفة

مراجعة سريعة 6.2

في التمارين 1-3، أوجد قيمة كل من الجيب وجيب التمام لكل زاوية.

1. $\frac{5\pi}{4}$
2. $\frac{-5\pi}{4}$
3. $120°$

4. أوجد قيمة $\sin\theta$ إذا كانت $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ والزاوية θ تقع في الربع الثاني.

5. أوجد قيمة $\cos\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ والزاوية θ تقع في الربع الثالث.

في التمارين 6-8، أوجد قيمة الظل لكل زاوية.

6. $\frac{\pi}{6}$
7. $-45°$
8. $\frac{7\pi}{3}$

9. أوجد $\sec\theta, \csc\theta, \cot\theta$ للزاوية $\theta = 150°$.

الدرس 6.2 التمارين

في التمارين 1-6، أوجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$ من دون استعمال الحاسبة.

1. $\theta = \frac{4\pi}{3}$
2. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
3. $\theta = \frac{5\pi}{6}$
4. $\theta = 225°$
5. $\theta = 270°$
6. $\theta = \frac{29\pi}{4}$

في التمارين 7-10، أوجد $\tan\theta$ من دون استعمال الحاسبة.

7. $\theta = \frac{-3\pi}{2}$
8. $\theta = 675°$
9. $\theta = \frac{7\pi}{3}$
10. $\theta = 405°$

في التمارين 11-16، أوجد $\csc\theta$ و $\sec\theta$ و $\cot\theta$ من دون استعمال الحاسبة.

11. $\theta = 210°$
12. $\theta = \frac{-10\pi}{4}$
13. $\theta = -315°$
14. $\theta = \frac{13\pi}{4}$
15. $\theta = 750°$
16. $\theta = \frac{-2\pi}{3}$

17. أوجد قيمة $\sin\theta$ إذا كانت $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ والزاوية θ تقع في الربع الأول.

18. أوجد قيمة $\cos\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -0.8$ والزاوية θ تقع في الربع الرابع.

19. أوجد قيمة $\sin \theta$ إذا كانت $\cos \theta = \frac{8}{17}$ والزاوية θ تقع في الربع الرابع.

20. أوجد قيمة $\cos \theta$ إذا كانت $\sin \theta = -\frac{24}{25}$ والزاوية θ تقع في الربع الثالث.

في التمارين 21-24، أوجد القيمة باستعمال الصفة الدورية للنسب المثلثية.

21. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 49\ 000\pi\right)$

22. $\tan(1\ 234\ 567\pi) - \tan(7\ 654\ 321\pi)$

23. $\cos\left(\frac{5\ 555\ 555\pi}{2}\right)$

24. $\tan\left(\frac{3\pi - 70\ 000\pi}{2}\right)$

في التمارين 25-30، أوجد: (a) $\sin \theta$، (b) $\cos \theta$، (c) $\tan \theta$،
لكل الزوايا الربعية المعطاة، من دون استعمال الحاسبة.
إذا لم تكن القيمة معرّفة، اكتب "غير معرّفة".

25. $\theta = -450°$

26. $\theta = -270°$

27. $\theta = 7\pi$

28. $\theta = \frac{11\pi}{2}$

29. $\theta = \frac{-7\pi}{2}$

30. $\theta = -4\pi$

31. **عمل جماعي** استعمل الحاسبة لإيجاد قيم المقادير في التمارين 21-24، هل تعطي حاسبتك إجابات صحيحة؟ الكثير من الحاسبات تخطىء في كل الإجابات. أعطِ شرحًا مختصرًا يبرّر الخطأ الحاصل.

32. **الكتابة للتعلم** أعطِ حجة مقنعة تفيد بأن دورة $\sin(t)$ هي 2π، بمعنى آخر، وضّح أنه لا يوجد عدد حقيقي موجب p أصغر من 2π حيث $\sin(t + p) = \sin(t)$ لكل الأعداد الحقيقية t.

33. **قريب لدرجة الإزعاج** تحلق طائرة F-15 على ارتفاع 000 8 قدم وتمر مباشرة فوق مجموعة من المتسلقين على جبل ارتفاعه 400 7 قدم. إذا كانت θ هي زاوية ارتفاع نظر المتسلقين إلى الطائرة، أوجد المسافة d بين الفريق والطائرة حسب الزاوية المعطاة.

a. $\theta = 45°$

b. $\theta = 90°$

c. $\theta = 140°$

أسئلة اختبار معيارية

34. **صواب أم خطأ** يقول جابر إنّ $\sin \frac{5\pi}{2} = -1$. هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.

35. **صواب أم خطأ** أوجد تلميذ قيمة قاطع الزاوية $\theta = 135°$ حسب ما هو مبيّن أدناه. هل حله صحيح؟ برّر إجابتك.

> إحداثيًا نقطة النهاية على دائرة الوحدة هما
>
> $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
>
> $\sec 135° = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

36. **اختيار من متعدد** أي القيم التالية تساوي $\tan\left(\frac{4\pi}{6}\right)$؟

A. $-\sqrt{3}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{-1}{2}$

E. $\frac{2}{3}$

37. **اختيار من متعدد** مدى الدالة $f(t) = (\sin t)^2 + (\cos t)^2$ هو:

A. $\{1\}$

B. $[-1, 1]$

C. $[0, 1]$

D. $[0, 2]$

E. $[0, \infty[$

استكشاف

في التمارين 38-41، أوجد قيمة العدد الحقيقي الوحيد θ بين 0 و 2π الذي يحقق الشرطين المطلوبين.

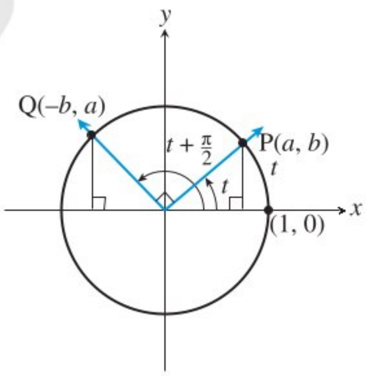
.38 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ و $\tan\theta < 0$

.39 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta < 0$

.40 $\tan\theta = -1$ و $\sin\theta < 0$

.41 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan\theta > 0$

في التمارين 42-45، ارجع إلى دائرة الوحدة المبيّنة في الشكل أدناه. تقع النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية t وتقع النقطة Q على ضلع الانتهاء للزاوية $t + \frac{\pi}{2}$.



.42 **استعمال الهندسة في حساب المثلثات** ارسم من كل من النقطتين P و Q مستقيمًا متعامدًا مع المحور x لتشكل مثلثين قائمي الزاوية. اشرح العلاقة بين المثلثين.

.43 **استعمال الهندسة في حساب المثلثات** إذا كان إحداثيًا النقطة P هما (a, b)، اشرح لماذا يكون إحداثيًا النقطة Q هما $(-b, a)$.

.44 اشرح لماذا $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$.

.45 اشرح لماذا $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$.

توسيع الأفكار

.46 **برهنة نظرية** إذا كانت t أي عدد حقيقي، برهن أن $1 + (\tan t)^2 = (\sec t)^2$

كثيرات حدود "تايلر" يسمح قياس الراديان للدوال المثلثية بأن يتم تقريب قيمها باستعمال الدوال كثيرات الحدود. على سبيل المثال، يتم تقريب قيم الجيب وجيب التمام، في التمرينين 47 و 48، باستعمال كثيرات حدود "تايلر"، المسماة على اسم عالم الرياضيات البريطاني "بروك تايلر". اكمل كل جدول بحيث تظهر كثيرات حدود تايلر في العامود الثالث. صف الأنماط التي تلاحظها في الجدول.

.47

θ	$\sin\theta$	$\theta - \frac{\theta^3}{6}$	$\sin\theta - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)$
−0.3	−0.295...		
−0.2	−0.198...		
−0.1	−0.099...		
0	0		
0.1	0.099...		
0.2	0.198...		
0.3	0.295...		

.48

θ	$\cos\theta$	$1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$	$\cos\theta - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}\right)$
−0.3	0.955...		
−0.2	0.980...		
−0.1	0.995...		
0	1		
0.1	0.995...		
0.2	0.980...		
0.3	0.955...		

6.3 التمثيل البياني للدوال الدائرية Graphs of Circular Functions

ما ستتعلّمه

- التمثيل البياني لدالة الجيب $y = \sin x$
- التمثيل البياني لدالة جيب التمام $y = \cos x$
- التمثيل البياني لدالة الظل: $y = \tan x$

... ولماذا

تكتسب دوال الجيب وجيب التمام أهمية خاصة حين تُستعمل للتعبير عن النماذج المشتملة على صفات وخصائص دورية.

معايير الدرس

11A.8.1

11A.8.2

11A.8.3

المصطلحات

• دوال دائرية	circular functions
• دوال دورية	periodic functions
• دورة	period
• خط الوسط	midline
• سعة	amplitude
• تردد	frequency

التمثيل البياني لدالة الجيب $y = \sin x$

رأينا فيما سبق كيف أن للنسب المثلثية جذورًا في هندسة المثلثات والدوائر، تعطيها أهميتها الرياضية وتجعلها حاضرة في تطبيقات كثيرة في مجالات عدة.

لقد كانت دائرة الوحدة مفتاح تعريف النسب المثلثية لكل الزوايا، ويُطلق على النسب المثلثية بعد تطبيقها على الأعداد الحقيقية اسم **الدوال الدائرية** ويمكن إدراجها ضمن لائحة الدوال الأساسية.

سوف ندرس هنا بصيغة أكثر دقة الخصائص الجبرية والبيانية والعددية للدوال الدائرية.

نشاط استكشافي 1 التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$

ضع حاسبة التمثيل البياني على وضعية الراديان (Radian mode)، والتمثيل البياني "المتزامن" (Simultaneous graphing mode)، والوضعية الحدودية (Parametric mode).

ضع $\text{Tmin} = 0, \text{Tmax} = 6.3, \text{Tstep} = \frac{\pi}{24}$.

ضع نافذة (x, y) على $[-1.2, 6.3]$ في $[-2.5, 2.5]$.

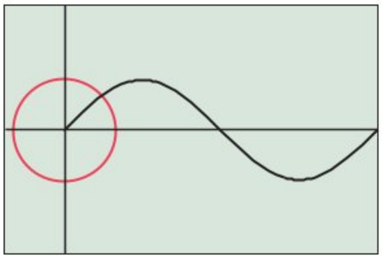
ضع $X_{1T} = \cos(T)$ و $Y_{1T} = \sin(T)$. سيعطي هذا التمثيل البياني لدائرة الوحدة.

ضع $X_{2T} = T$ و $Y_{2T} = \sin(T)$. سيعطي هذا التمثيل البياني $\sin(T)$.

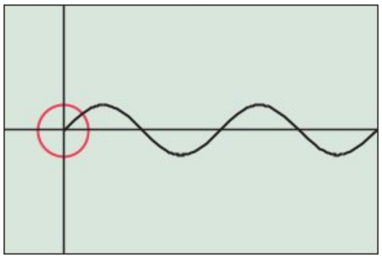
ابدأ الآن التمثيل البياني وشاهد النقطة تسير عكس اتجاه عقارب الساعة حول دائرة الوحدة حيث تسير t من 0 إلى 2π في اتجاه موجب. في الوقت نفسه سترى الإحداثي y للنقطة الذي يتم تمثيله بيانيًا في صورة دالة عند t على طول المحور الأفقي t. يمكنك إزالة الرسم ومشاهدة التمثيل البياني للإجابة عن الأسئلة التالية.

1. أين تقع النقطة على دائرة الوحدة عندما تكون الموجة في أعلى نقطة لها؟
2. أين تقع النقطة على دائرة الوحدة عندما تكون الموجة في أدنى نقطة لها؟
3. لماذا يعبر التمثيلان البيانيان المحور x في نفس الوقت؟
4. ضاعف قيمة Tmax وغيّر النافذة إلى $[-2.4, 12.6]$ في $[-5, 5]$. إذا كانت الحاسبة البيانية يمكن أن تغيّر "النسق" (Style) لإظهار النقطة المتحركة، اختر هذا النسق لتمثيل دائرة الوحدة بيانيًا. شغّل التمثيل البياني وشاهد كيف أن منحنى الجيب يتتبع الإحداثي y للنقطة أثناء حركتها حول دائرة الوحدة.
5. اشرح، استنادًا على ما شاهدته، لماذا دورة دالة الجيب تساوي 2π
6. تحدٍّ: هل يمكنك تعديل إعدادات الحاسبة البيانية لإظهار كيف تتتبع دالة جيب التمام الإحداثي x أثناء تحرك النقطة حول دائرة الوحدة؟

على الرغم من أن الصورة الساكنة لا تحقق محاكاة مرنة، إلا أن الشكل أدناه يظهر الشاشات النهائية للرسمين البيانيين في الاستكشاف 1.

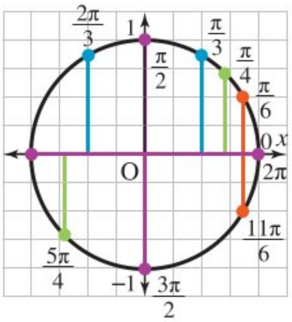


[−1.2, 6.3] في [−2.5, 2.5]
(a)



[22.4, 12.6] في [25, 5]
(b)

ولتوضيح أبرز خصائص التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$، سوف نتناول بالتفصيل جدول القيم (بالراديان) للدالة وتمثيلها البياني.



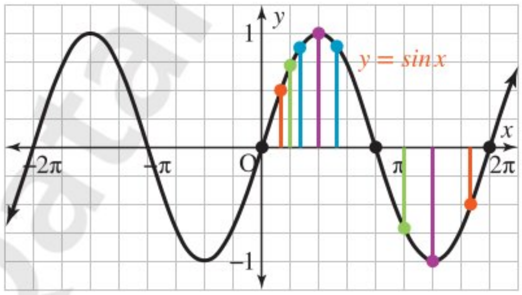
تذكّر أن تعريف $\sin \theta$ هو الإحداثي y للنقطة P على دائرة الوحدة التي تحددها الزاوية θ في وضعها القياسي.

إرشاد

لاحظ أن تكرار القيم في الدائرة يحدث عند الزوايا المتطارفة.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{4}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

وعند تمثيل هذه النقاط في المستوى الإحداثي نحصل على التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$.



نلاحظ أن قيم y تبدأ بالتكرار بعد أن تتجاوز x قيمة 2π ويكون لدينا $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ لأي قيمة x. عندما تعطي الدالة نفس القيم على فترات منتظمة فإنها تُسمى **دالة دورية**.

إذا كانت f دالة دوريّة فإن $f(x) = f(x + p)$ حيث p عدد حقيقي. أصغر قيمة موجبة ممكنة لـ p تُسمى **دورة** الدالة.

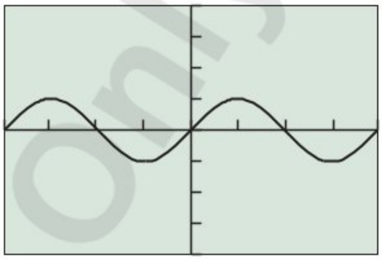
خط الوسط هو الخط الأفقي الذي يقع على منتصف البعد بين أقصى نقطة وأدنى نقطة للتمثيل البياني. إذن، معادلة خط الوسط للدالة $y = \sin x$ هي $y = 0$.

السعة هي المسافة من خط الوسط إلى أدنى أو أعلى قيمة للتمثيل البياني.

إذن السعة للدالة $y = \sin x$ هي 1

دالة أساسية

دالة الجيب $f(x) = \sin x$



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-4, 4]$

الشكل 6.3.1

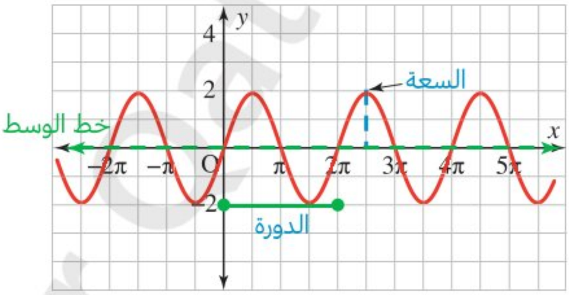
- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول نقطة الأصل، دالة فردية
- لها قيمة عظمى هي 1
- لها قيمة صغرى هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- الدورة: 2π
- السعة: 1
- السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin x$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ غير موجودتين.
(تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين -1 و 1 ولا تقترب من أي نهاية).

مثال 1 التمثيل البياني للدوال الدوريّة وخصائصها

مثّل بيانيًّا الدالة $f(x) = 2 \sin x$ ثم حدّد المجال والمدى والقيم القصوى للتمثيل البياني، معيّنًا الدورة وخط الوسط والسعة.

الحل

التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2 \sin x$ هو تمدد رأسي للدالة الأساسية $y = \sin x$ بمعامل مقداره 2



تقع القيم العظمى والصغرى، 2 و -2، عند $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ و $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ على التوالي، لكل الأعداد الصحيحة k.

المجال هو $]-\infty, \infty[$ وهناك عدد لامنتهٍ من الأصفار، ينشأ عند كل مضاعف صحيح للعدد π، المدى هو $[-2, 2]$ والدورة للدالة هي 2π
معادلة خط الوسط للدالة هي $y = 0$، والسعة تساوي 2

حاول أن تحل التمرين 2

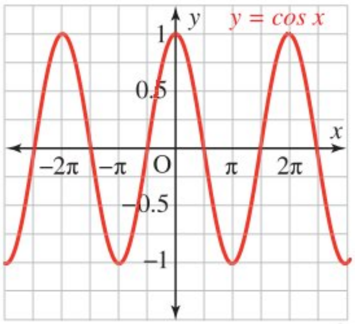
التمثيل البياني لدالة جيب التمام $y = \cos x$

يمكن الحصول على التمثيل البياني لدالة جيب التمام $y = \cos x$ بنفس الطريقة التي حصلنا فيها على التمثيل البياني لدالة الجيب، تذكّر أن $\cos \theta$ هو الإحداثي x للنقطة P على دائرة الوحدة التي تحددها الزاوية θ في وضعها القياسي.

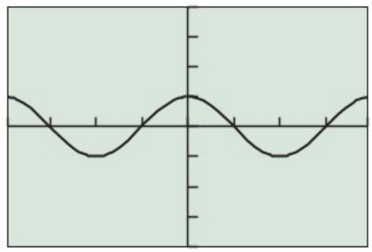
نبدأ بإنشاء جدول قيم للدالة $y = \cos x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{4}$
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

وعند تمثيل هذه النقاط في المستوى الإحداثي نحصل على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$.



دالة أساسية **دالة جيب التمام $f(x) = \cos x$**



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-4, 4]$

الشكل 6.3.2

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها.
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول المحور y، دالة زوجية
- لها قيمة عظمى هي 1
- لها قيمة صغرى هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ و $\lim_{x \to \infty} \cos x$ غير موجودتين.
  (تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين 1 و -1 ولا تقترب من أي نهاية).

مثال 2 تحديد السعة والدورة

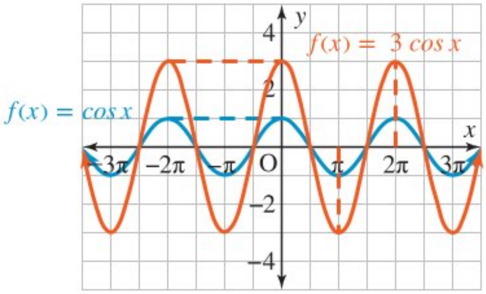
A. **أوجد السعة والدورة للدالة $f(x) = 3\cos x$.**

B. **أوجد السعة والدورة للدالة $f(x) = -\sin 2x$.**

الحل

A. مثّل بيانيًا كلًّا من $f(x) = 3\cos x$ والدالة الرئيسة $f(x) = \cos x$.

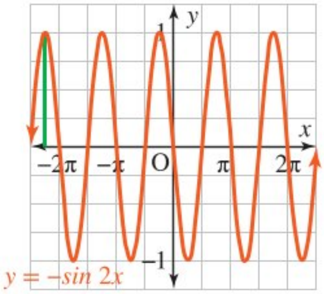
التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3\cos x$ هو تمدد رأسي للدالة الأساسية $y = \cos x$ بمعامل مقداره 3



- معادلة خط الوسط هي $y = 0$،
- القيمة العظمى تساوي 3،
- القيمة الصغرى تساوي −3
- سعة الدالة $f(x) = 3\cos x$ تساوي 3
- الدورة تساوي 2π

B. التمثيل البياني للدالة $y = -\sin 2x$ هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الرئيسة حول المحور x. يتبعه تضيّق أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

لا يغير أي من هذين التحويلين السعة، وبالتالي



- سعة الدالة $y = -\sin 2x$ هي 1
- تتضيّق الدورة بمعامل $\frac{1}{2}$، وبما أن $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$، تكون دورة $y = -\sin 2x$ هي π.

إذن للدالة سعة هي 1 وتتكرر قيم الدالة كل فترة طولها π.

حاول أن تحل التمرين 14

نصيحة دراسية

عند البحث عن سعة دالة الجيب ودالة جيب التمام أوجد المسافة من خط الوسط إلى إحدى القيمتين العظمى أو الصغرى للتمثيل البياني.

نصيحة دراسية

بما أن دورة الدالة $y = \sin x$ هي 2π، إذن سيؤدي ضرب x في 2 إلى تكرار الدالة لنفسها مرتين في نفس فترة الدورة الواحدة للدالة $y = \sin x$، إذن دورة الدالة $y = \sin 2x$ هي نصف دورة الدالة $y = \sin x$.

إحدى الخصائص الأخرى للدالة الدورية هي **التردد** الذي هو مقلوب الدورة. لكل من الدالتين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ دورة هي 2π وتردد هو $\frac{1}{2\pi}$، تكرر الدالة نفسها مرة واحدة من 0 إلى 2π

يمكن ايجاد خصائص الدوال الدورية على الصورة $y = a\sin(bx)$ و $y = a\cos(bx)$ من خلال القوانين التالية:

خصائص الدوال الدورية

لكل دالة معرّفة على الشكل $y = a\sin(bx)$ أو $y = a\cos(bx)$

- السعة $= |a|$
- الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$
- التردد $= \frac{|b|}{2\pi}$

مثال 3 خصائص التمثيل البياني للدوال $y = a \sin bx$

أوجد الدورة والسعة والتردد للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 5\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

الحل

الخطوة 1 حدّد قيم a و b

$$y = 5\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

مما يعني أن $a = 5$ و $b = \frac{1}{2}$.

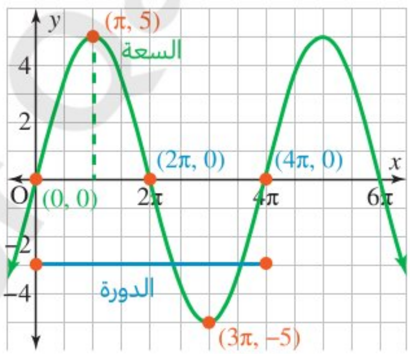
الخطوة 2 استعمل القوانين

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

السعة: $|a| = 5$

التردد: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}$

تحقّق بيانيًا: التمثيل البياني للدالة $f(x) = 5\sin\frac{1}{2}x$ يحقّق الخصائص.



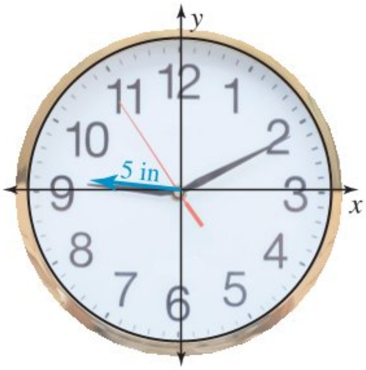
حاول أن تحل التمرين 16

خطأ شائع

استعمل النقاط الرئيسية لتحديد ما إذا كان شكل الرسم البياني مختلف بسبب التغيير في نافذة العرض أو التغيير في فترة الدالة.

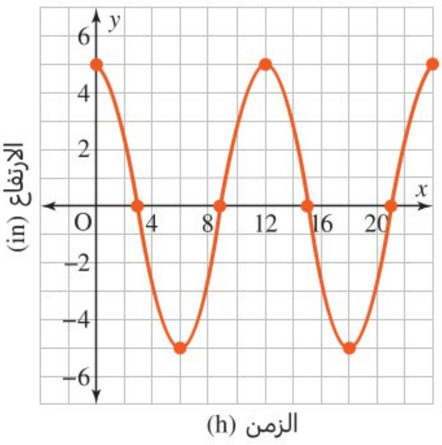
مثال 4 رسم تمثيل بياني ووضع معادلة من الوصف

يمتلك معلّم الرياضيات ساعة مركزها نقطة الأصل لنظام إحداثي. يبلغ طول عقرب الساعات 5 in، مثّل بيانيًّا العلاقة بين x، بوحدة الساعات، و y، بالإنش، المسافة بين المحور الأفقي وطرف عقرب الساعات. افترض أن منتصف الليل يمثل الساعة 0، مثّل بيانيًّا العلاقة للوقت بين منتصف الليل والساعة 11:59 p.m.، واكتب معادلة تصف العلاقة التي مثّلتها بيانيًّا.



الحل

لكتابة المعادلة علينا أن نحدّد كلًّا من السعة والدورة من التمثيل البياني الموضّح لحركة عقرب الساعات. أنشئ مخططًا لتمثيل حركة عقرب الساعات:



فكّر في المحور الأفقي باعتباره خط الوسط.

يبدأ عقرب الساعات عند 5 in فوق المحور الأفقي عند منتصف الليل.

بعد 3 ساعات، يصل عقرب الساعات إلى المحور الأفقي.

عند الساعة 6:00 a.m.، يصل عقرب الساعات إلى 5 in أسفل المحور الأفقي.

عند الساعة 9:00 a.m.، يرجع عقرب الساعات إلى المحور الأفقي.

في الظهيرة، بعد 12 ساعة، تبدأ الدورة مرة أخرى.

تبدأ الدالة عند $(0, 5)$ لمنتصف الليل، ثم تعبر $(3, 0)$ عند الساعة 3 a.m. و $(6, -5)$ عند الساعة 6 a.m.، يعود عقرب الساعات إلى $(9, 0)$ وفي الظهيرة يكون عند $(12, 5)$ قبل تكرار الدورة مرة أخرى لتنتهي عند $(24, 5)$ في منتصف ليل اليوم التالي.

يتضمن التمثيل البياني المقطع y عند القيمة العظمى، ومن ثم فالمعادلة هي $y = a \cos bx$.

تقع القيمة الصغرى والقيمة العظمى عند 5− و 5 على التوالي، إذن، خط الوسط هو $y = 0$ والسعة هي $a = 5$.

تتكرر القيمة الصغرى بعد 12 ساعة، وبالتالي فالدورة تساوي 12

بما أن $12 = \frac{2\pi}{b}$، إذن $b = \frac{\pi}{6}$.

إذن، المعادلة التي تصف العلاقة هي $y = 5 \cos \left(\frac{\pi}{6} x\right)$.

حاول أن تحل التمرين 22

إرشاد

معادلة خط الوسط هي

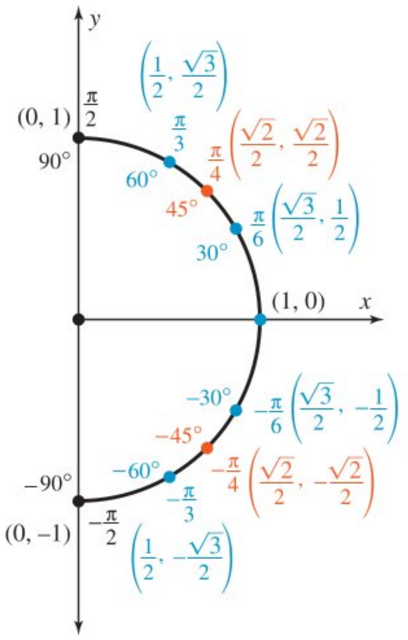
$y = \frac{\text{القيمة العظمى + القيمة الصغرى}}{2}$

إرشاد

$\text{السعة} = \frac{\text{القيمة العظمى − القيمة الصغرى}}{2}$

التمثيل البياني لدالة الظل $y = \tan x$

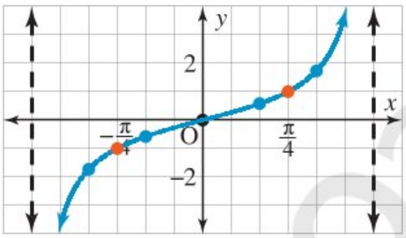
عندما نستعيد ما مر سابقًا من النقاط المميزة على دائرة الوحدة، فإن بإمكاننا أن نضع جدول قيم مفصل للدالة $y = \tan x$ حيث $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرّف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف

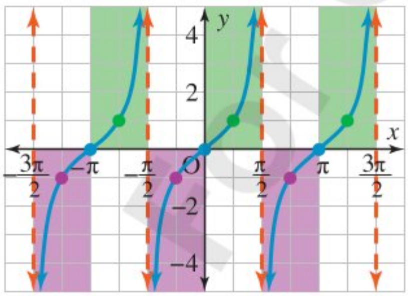
نلاحظ أن مدى الدالة $y = \tan x$ على المجال $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ هو كل الأعداد الحقيقية، وأن الدالة $y = \tan x$ غير معرّفة عند حدود هذه الفترة، أي عند القيمتين $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$، وهما القيمتان اللتان تجعلان $\cos x = 0$، وبالتالي تصبح $\tan x$ غير معرّفة لأن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

سيكون للدالة $y = \tan x$ خطا تقارب رأسيان عند القيمتين $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.



يمكننا الآن بالاعتماد على ما سبق أن نحدد المجال والمدى للدالة $y = \tan x$.

- المجال: $x \in \mathbb{R}$ حيث $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ و n عدد صحيح
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- الدورة: π



مساعدة دراسية

خصائص دالة الظل تتكرر لكل فترة طولها π وحدة. إذا تمكنت من فهم الرسم البياني على الفترة $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، إذن أنت قادر على فهم الرسم البياني في أي فترة أخرى.

الدالة موجبة في كل فترة $]0 + n\pi\,,\, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ لكل عدد صحيح n. إنه الجزء الملون باللون الأخضر في التمثيل البياني.

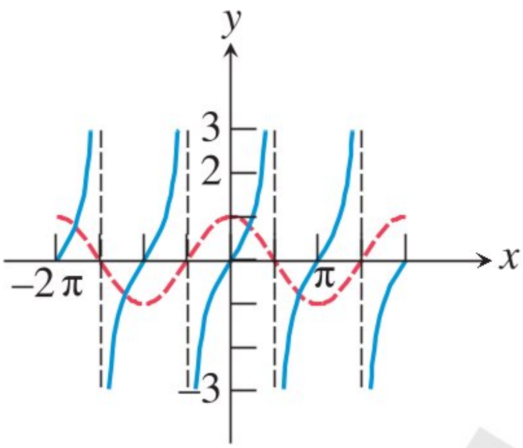
الدالة سالبة في كل فترة $]-\frac{\pi}{2} + n\pi\,,\, n\pi[$ لكل عدد صحيح n. إنه الجزء الملون باللون الأرجواني في التمثيل البياني.

الدالة هي دالة متزايدة دائمًا.

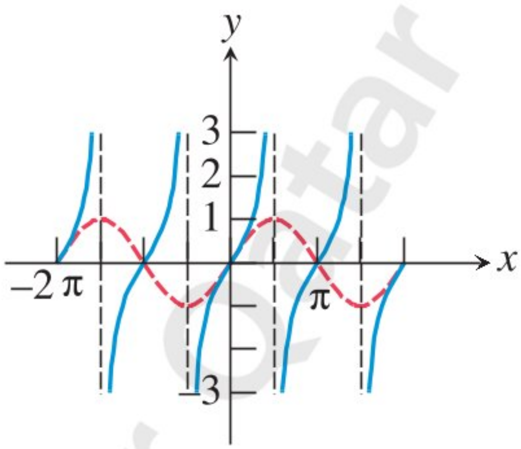
$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

أصفار الدالة هي القيم x عندما $\sin x = 0$

للدالة خطوط تقارب رأسية $x = a$ عندما $\cos x = 0$

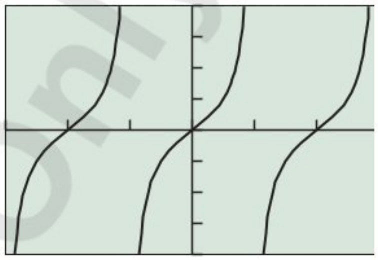


الشكل 6.3.3 خطوط التقارب الرأسية للدالة $y = \tan x$ تقع عند أصفار الدالة $y = \cos x$



الشكل 6.3.4 أصفار الدالة $y = \tan x$ تقع عند أصفار الدالة $y = \sin x$

دالة أساسية — دالة الظل $f(x) = \tan x$



$[-4, 4]$ في $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

الشكل 6.3.5

- المجال: كل الأعداد الحقيقية ما عدا المضاعفات الفردية للعدد $\frac{\pi}{2}$
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- متصلة في مجالها
- متزايدة في كل فترة في مجالها
- متناظرة عبر نقطة الأصل، دالة فردية
- ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية
- ليس لها خط تقارب أفقي
- خط تقارب رأسي: $x = k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ لكل الأعداد الصحيحة الفردية k
- السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x\to-\infty} \tan x$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \tan x$ غير موجودتين.
(تتراوح قيم الدالة بشكل متواصل بين $-\infty$ و ∞ ولا تقترب من أي نهاية).

مثال 5 التمثيل البياني للدوال $y = a \tan bx$

استعمل التحويلات لرسم التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2 \tan 4x$.

الحل

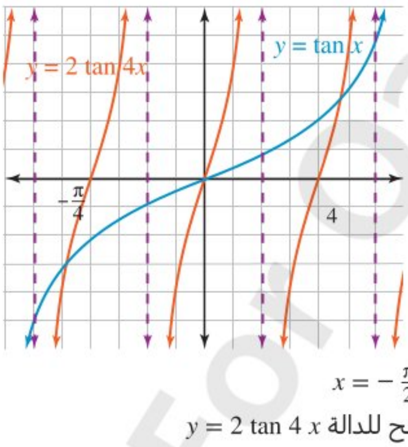
لرسم التمثيل البياني باستعمال التحويلات، ندرس أولًا كيف يغير المعاملان 2 و 4 التمثيل البياني للدالة الرئيسة.

$$y = 2 \tan 4x$$

يمدد المعامل $a = 2$ لدالة الظل التمثيل البياني للدالة رأسيًا.

يضيّق المعامل $b = 4$ للمتغيّر x التمثيل البياني للدالة الرئيسة أفقيًا، فكلما كبر هذا العامل، كلما صغرت الدورة.

التمدد الرأسي يجعل التمثيل البياني للدالة $y = 2 \tan 4x$ يرتفع بشكل حاد أكثر من التمثيل البياني للدالة $y = \tan x$.



التضيّق الأفقي يغيّر الدورة للدالة كالتالي:
الدورة في التمثيل البياني للدالة $y = \tan x$ هي π.
الدورة في التمثيل البياني للدالة $y = 2 \tan 4x$ هي $\frac{\pi}{4}$

للدالة $y = \tan x$ على الدورة $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ خطّا تقارب رأسيّان:

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

يغيّر التضيّق الأفقي بمقدار $\frac{1}{4}$ خطّي التقارب فيصبح للدالة $y = 2 \tan 4x$ على الدورة $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$ خطّا تقارب رأسيّان:

$$x = -\frac{\pi}{8} \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{8}$$

حاول أن تحل التمرين 23

خطأ شائع

بما أن سعة الدالة $y = 2 \cos x$ هي 2، من الخطأ القول إن سعة الدالة $y = 2 \tan 4x$ هي أيضًا 2 ليس لدالة الظل قيم عظمى أو صغرى لذلك ليس لدالة الظل من سعة.

مراجعة سريعة 6.3

حل التمارين 1-10 دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 1-4، حدّد دورة الدالة.

1. $y = \cos 2x$ **2.** $y = \sin 3x$

3. $y = \sin \frac{1}{3}x$ **4.** $y = \cos \frac{1}{2}x$

في التمارين 5-8، أوجد أصفار الدالة وخطوط تقاربها الرأسية.

5. $y = \frac{x-3}{x+4}$ **6.** $y = \frac{x+5}{x-1}$

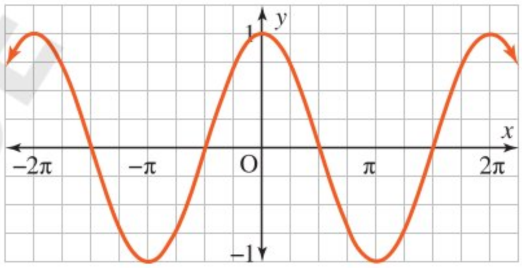
7. $y = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$ **8.** $y = \frac{x+2}{x(x-3)}$

في التمرينين 9 و 10، حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية، أو فردية، أو ليست أيًّا منهما.

9. $y = x^2 + 4$ **10.** $y = \frac{1}{x}$

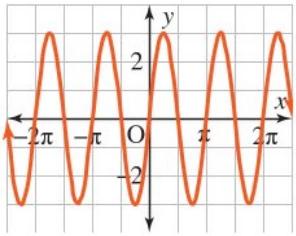
الدرس 6.3 التمارين

1. أوجد دورة الدالة $y = \cos x$. أوجد الخصائص الأخرى للدالة.

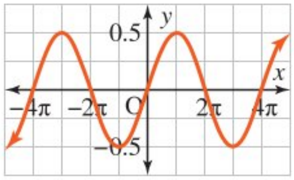


في التمرينين 2 و 3، حدّد المجال والمدى والقيم القصوى لكل دالة، مبيّنًا الدورة والسعة.

2.



3.



في التمارين 4-15، أوجد الدورة وسعة للدالة.

4. $y = 2 \sin x$ **5.** $y = \frac{2}{3} \sin x$

6. $y = -4 \sin x$ **7.** $y = -\frac{7}{4} \sin x$

8. $y = 0.73 \sin x$ **9.** $y = -2.34 \sin x$

10. $y = \cos 3x$ **11.** $y = \cos \frac{1}{5}x$

12. $y = \cos (-7x)$ **13.** $y = \cos (-0.4x)$

14. $y = 3 \cos 2x$ **15.** $y = \frac{1}{4} \cos \frac{2}{3}x$

16. مثّل بيانيًّا الدالة $y = \frac{3}{2} \cos 3\pi x$. أوجد تردد الدالة.

17. استعمل التكنولوجيا لتمثّل $y = 5 \sin \frac{1}{4}x$ بيانيًّا. أوجد تردد الدالة.

في التمارين 18-21، مثّل دورة واحدة للدالة بيانيًّا. استعمل معلوماتك عن التحويلات (دون استعمال الحاسبة) ولا تنسَ أن تحدد المقياس على المحورين.

18. $y = 2 \sin x$ **19.** $y = 2.5 \sin x$

20. $y = 3 \cos x$ **21.** $y = -2 \cos x$

22. بالعودة إلى المثال 4، ارسم تمثيلًا بيانيًّا لطرف عقرب الدقائق على فترة 3 ساعات، t دقائق بعد الظهر، إذا كان طول عقرب الدقائق 8 in. أوجد الدورة.

23. مثّل الدالة $y = \frac{1}{2} \tan 3x$ بيانيًّا، ثم قارن بين التمثيل البياني للدالة والتمثيل البياني للدالة الرئيسة.

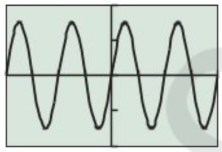
في التمارين 24-27، مثّل ثلاث دورات للدالة بيانيًّا. استعمل معلوماتك عن التحويلات (دون استعمال الحاسبة) ولا تنسَ أن تحدد المقياس على المحورين.

24. $y = 5 \sin 2x$ **25.** $y = 20 \sin 4x$

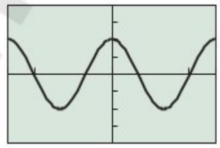
26. $y = 3 \cos \frac{1}{2}x$ **27.** $y = 0.5 \cos 3x$

في التمارين 28-31، أوجد الدورة والسعة لكل دالة. حدّد نافذة العرض التي تبيّن كل تمثيل بياني. استعمل معلوماتك عن التحويلات (دون استعمال الحاسبة).

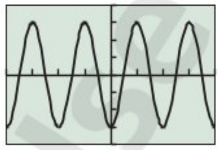
28. $y = 1.5 \sin 2x$



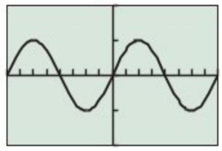
29. $y = 2 \cos 3x$



30. $y = -3 \cos 2x$



31. $y = 5 \sin \frac{1}{2}x$



في التمارين 32-35، أوجد القيم العظمى والصغرى والأصفار لكل دالة في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$. استعمل معلوماتك عن التحويلات (دون استعمال الحاسبة).

32. $y = 2 \sin x$

33. $y = 3 \cos \frac{1}{2}x$

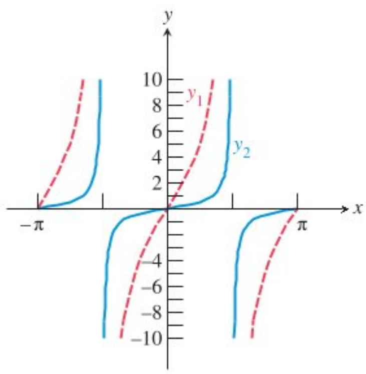
34. $y = \cos 2x$

35. $y = \frac{1}{2} \sin x$

36. مثّل الدالة $y = \frac{1}{2} \tan x$ بيانيًا في الفترة $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$، ثم قارن بين التمثيل البياني للدالة والتمثيل البياني للدالة الرئيسة.

37. أوجد دورة الدالة $y = \tan 3x$.

38. يبيّن الشكل أدناه التمثيل البياني للدالتين $\frac{1}{2} \tan x$ و $5 \tan x$ حدّد التمثيل البياني لكل دالة. استعمل معلوماتك عن التحويلات (دون استعمال الحاسبة).



في التمرينين 39 و 40، صِف التمثيل البياني للدالة بالمقارنة مع الدالة الرئيسة. حدّد خطوط التقارب الرأسية، ومثّل الدالة بيانيًا لدورتين.

39. $y = \tan 2x$

40. $y = 3 \tan \frac{1}{2}x$

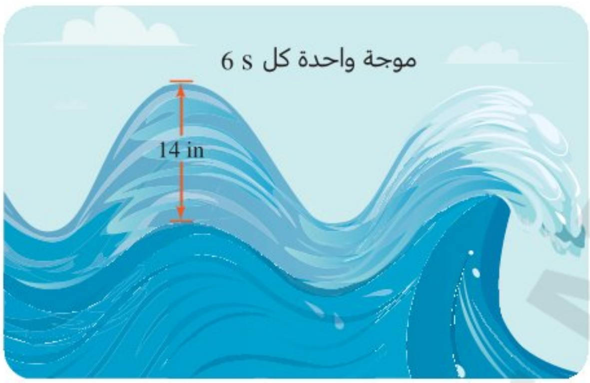
في التمارين 41-43، صِف التحويلات المطلوبة للحصول على التمثيل البياني للدالة من التمثيل البياني لدالة مثلثية رئيسة.

41. $y = 3 \tan x$

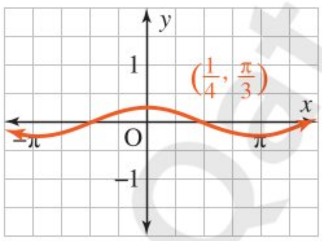
42. $y = -\tan x$

43. $y = 2 \tan x$

44. **في المحيط** يتحرك جُسيم في المحيط مع الموجة. تُنمذج حركة الجُسيم بدالة جيب التمام. إذا كانت تظهر موجة ترتفع 14 in كل 6 ثوانٍ، اكتب دالة تنمذج ارتفاع الجسيم، y، بالإنش مع تحرّكها في x ثواني. أوجد دورة الدالة.



45. قارن بين دورة الدالة $f(x) = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{3}x$ ودورة الدالة في التمثيل البياني أدناه.

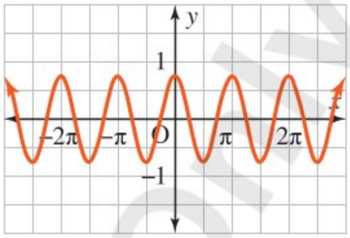


أسئلة اختبار معيارية

46. **صواب أم خطأ** للتمثيل البياني للدالة $y = \sin 2x$ نصف دورة التمثيل البياني للدالة $y = \sin 4x$. هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

47. **صواب أم خطأ** الدالة $y = \tan x$ متزايدة في الفترة $]-\infty, \infty[$. هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

48. اختيار من متعدد ما هي معادلة التمثيل البياني أدناه؟



A. $y = \frac{3}{4}\cos 2x$ **B.** $y = \frac{3}{4}\sin 2x$

C. $y = \frac{3}{2}\cos x$ **D.** $y = \frac{3}{2}\sin x$

49. اختر المناسب أوجد الخصائص الأساسية للدالة $y = 8\cos\frac{\pi}{6}x$. اكتب القيمة المناسبة من الصندوق أمام الخاصية المناسبة لها.

السعة =

الدورة =

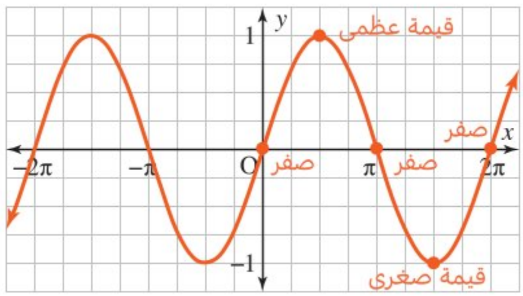
التردد =

خط الوسط =

3	8	12
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{\pi}{3}$
$x = 0$		$y = 0$

استكشاف

50. يمكن استعمال "نمط النقاط الخمس" لتمثيل دوال الجيب وجيب التمام بيانيًا. "نمط النقاط الخمس" لدالة الجيب عندما $a > 0$ هي: صفر-قيمة عظمى-صفر-قيمة صغرى-صفر، كما هو مبيّن في التمثيل البياني أدناه. أوجد "نمط النقاط الخمس" لدالة الجيب عندما $a < 0$.



51. عمل جماعي استعمل أعدادًا صحيحة لقيم a و b بين 1 و 9 ضمنًا لتنظر إلى التمثيلات البيانية للدوال في الصورة: $y = \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)$ لمختلف قيم a و b. (باستطاعة فريق أن ينظر إلى أكثر من تمثيل بياني في الوقت ذاته).

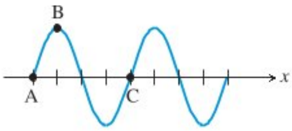
a. تنتج بعض قيم a و b التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$. أوجد قاعدة عامة لهذه القيم من a و b.

b. تنتج بعض قيم a و b التمثيل البياني للدالة $y = \cos 2x$. أوجد قاعدة عامة لهذه القيم من a و b.

c. هل يمكنك توقع قيم a و b التي تنتج تمثيلًا بيانيًا للدالة $y = \cos kx$، حيث k عدد صحيح عشوائي؟

توسيع الأفكار

52. تمر الدالة $y = 3\cos 2x$ بالنقطة $A\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ كما في الشكل أدناه. تمر الدالة أيضًا بالنقطتين B و C. أوجد إحداثيات B و C.



53. يبحث جابر في تأثير إشارات الحدين a و b في إنشاء التحويلات لدالة الجيب.

a. مثّل الدالتين $y = \sin 2x$ و $y = -\sin 2x$ بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

b. ما هي العلاقة بين التمثيلين البيانيين الذين رسمتهما في الجزء (a)؟

c. مثّل الدالتين $y = \sin 2x$ و $y = \sin(-2x)$ بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

d. ما هي العلاقة بين التمثيلين البيانيين الذين رسمتهما في الجزء (c)؟

e. كيف يتأثر التمثيل البياني للدالة $y = a\sin bx$ عندما نستبدل a أو b بنظيره الجمعي؟ وضّح إجابتك.

6.4 إزاحة الدوال الدائرية Translations of Circular Functions

ما ستتعلّمه

- الإزاحة الأفقية للدالتين $y = \sin x$ و $y = \cos x$
- النمذجة باستعمال الدوال الدائرية

... ولماذا

لدراسة بعض النماذج الواقعية نضطر إلى استعمال تحويلات على الدوال الدائرية الأساسية مستفيدين من خصائص هذه الدوال.

معايير الدرس

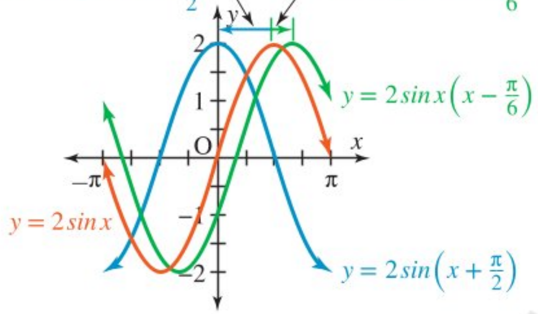
11A.8.3

المصطلحات

- إزاحة الطور phase shift

الإزاحة الأفقية للدالتين $y = \sin x$ و $y = \cos x$

عندما تتغير قيمة h في الدالة $y = a \sin (x - h)$، يتغير التمثيل البياني، كما هو معلوم، في إزاحة أفقية إلى اليمين أو إلى اليسار. تغيير h لا يغير في السعة ولا في الدورة كما هو مبيّن في الشكل أدناه.



تُسمى الإزاحة الأفقية للدالة الدورية **إزاحة الطور**.

يمكننا، باستعمال خصائص الدوال الدائرية، أن نحصل على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ من خلال إزاحة أفقية للدالة $y = \sin x$ والعكس صحيح.

مثال 1 الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ بإزاحة الدالة $y = \sin x$ والعكس

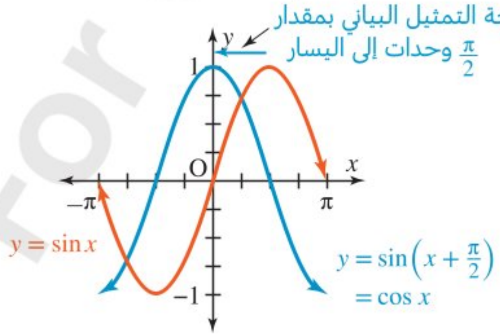
A. اكتب الدالة $y = \cos x$ على شكل إزاحة للدالة $y = \sin x$.

B. اكتب الدالة $y = \sin x$ على شكل إزاحة للدالة $y = \cos x$.

الحل

A. الدالة $y = \sin x$ تتضمن القيمة العظمى عند $x = \frac{\pi}{2}$، والدالة $y = \cos x$ تتضمن القيمة العظمى عند $x = 0$. بالتالي، يجب إزاحة منحنى الجيب مقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدات إلى اليسار للحصول على منحنى جيب التمام:

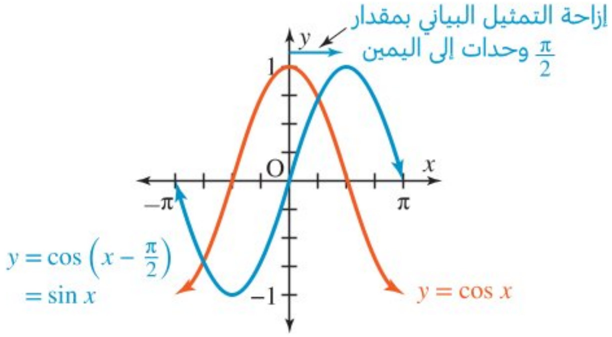
$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



(تابع)

B. نستنتج من حل الجزء (a) أنه يجب إزاحة منحنى جيب التمام مقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدات إلى اليمين للحصول على منحنى الجيب:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$



يمكنك دعم إجابتك باستعمال الحاسبة البيانية لإثبات صحة هذه البيانات. بالتالي، يوجد العديد من الإزاحات الأخرى التي تنجح أيضًا.

إضافة أي مضاعف صحيح للقيمة 2π إلى إزاحة الطور ينتج عنها نفس التمثيل البياني.

حاول أن تحل التمرين 1

خصائص الدوال الدورية

بشكل عام، للتمثيل البياني للدوال $y = a\sin(b(x-h)) + k$ و $y = a\cos(b(x-h)) + k$، ($a \neq 0$ و $b \neq 0$) الخصائص التالية:

- السعة = $|a|$
- الدورة = $\frac{2\pi}{|b|}$
- التردد = $\frac{|b|}{2\pi}$

عند المقارنة بالتمثيل البياني للدالتين $y = a\sin(bx)$ و $y = a\cos(bx)$ يمكن إضافة

الخصائص التالية:

إزاحة رأسية تساوي k وإزاحة الطور تساوي h.

وبذلك يمكننا أن نحدد أي تحويل أفقي للدالة $y = \sin x$ إذا كنا نعرف السعة والدورة.

مثال 2 التمثيل البياني لتحويل الدالة $y = \sin x$

ارسم التمثيل البياني للدالة $y = 2\sin\frac{x}{2} + 3$ باستعمال التحويلات الهندسية.

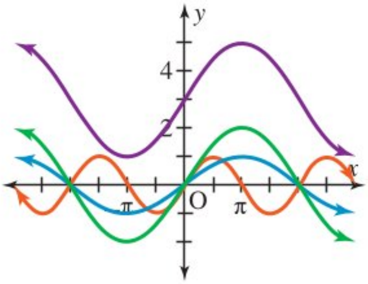
الحل

دورة الدالة $y = \sin x$ هي 2π

دورة الدالة $y = \sin\frac{x}{2}$ هي 4π

دورة الدالة $y = 2\sin\frac{x}{2}$ هي 4π، وسعتها 2

دورة الدالة $y = 2\sin\frac{x}{2} + 3$ هي 4π، سعتها 2، والإزاحة الرأسية 3 وحدات إلى الأعلى.



حاول أن تحل التمرين 5

إرشاد

تأكد من فهمك لتأثير كل متغير في الدالة $y = a\sin(b(x-h)) + k$ على خصائصها.

$|a|$: السعة

$\frac{2\pi}{|b|}$: الدورة

h: إزاحة الطور

k: الإزاحة الرأسية

مثال 3 خصائص تحويل الدوال $y = \cos x$ و $y = \sin x$

A. أوجد الخصائص الأساسية للتمثيل البياني للدالة $y = 4\cos 3x + 1$.

B. أوجد الخصائص الأساسية للتمثيل البياني للدالة $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$.

الحل

A. $y = 4\cos 3x + 1$

بالمقارنة مع الصيغة العامة للدالة $y = a\cos(b(x-h)) + k$ نجد أن:

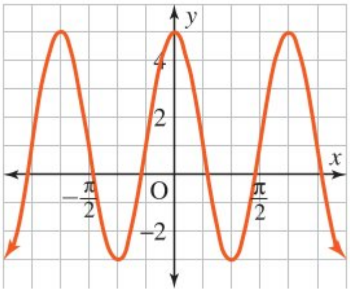
- السعة: هي القيمة المطلقة لمعامل دالة جيب التمام: $|4| = 4$
- الدورة: نقسم 2π على القيمة المطلقة لمعامل x. إذن، دورة الدالة هي $\frac{2\pi}{3}$
- الإزاحة الرأسية: بما أن $k = 1$ إذن، مقدار الإزاحة الرأسية هو 1 وحدة إلى الأعلى.
- إزاحة الطور: بما أن $h = 0$ فإن التمثيل البياني لم يزح أفقيًا.
- القيم العظمى والصغرى:
  لهذه الدالة قيمة عظمى تساوي $5 = (4) + 1$ وقيمة صغرى تساوي $-3 = (-4) + 1$

(تابع)

الخصائص و التمثيل باستعمال الحاسبة

لماذا من المهم إيجاد الخصائص الأساسية للدالة حتى لو كنت تريد رسم منحنى الدالة باستعمال الحاسبة البيانية؟

يمكن أن يساعد رسم التمثيل البياني على فهم هذه العوامل.

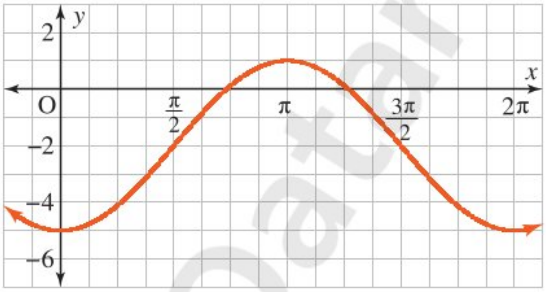


B. $y = -3 \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

بما أن معامل دالة الجيب عدد سالب، يكون هذا التمثيل البياني انعكاس حول المحور x للدالة الرئيسة.

بالمقارنة مع الصيغة العامة للدالة $y = a \cos (b(x - h)) + k$ نجد أن:

- السعة: هي القيمة المطلقة لمعامل دالة جيب التمام: $|3| = 3$
- الدورة: نقسم 2π على القيمة المطلقة لمعامل x. إذن، دورة الدالة هي $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$
- الإزاحة الرأسية: بما أن $k = -2$ إذن، مقدار الإزاحة الرأسية هو وحدتان إلى الأسفل.
- إزاحة الطور: بما أن $h = -\frac{\pi}{2}$ فإن التمثيل البياني أُزيح مقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدات إلى اليسار.
- القيم العظمى والصغرى:
  لهذه الدالة قيمة عظمى تساوي $-2 + (3) = 1$ وقيمة صغرى تساوي $-2 + (-3) = -5$



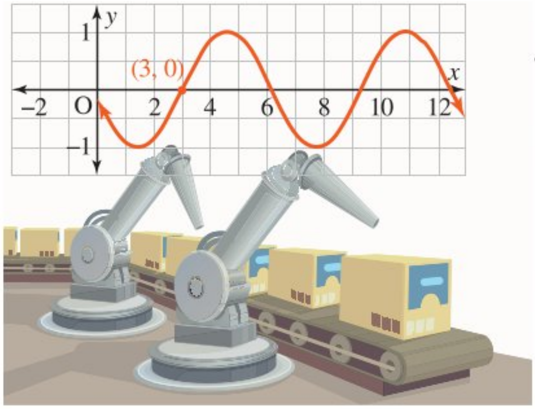
حاول أن تحل التمرين 10

النمذجة باستعمال الدوال الدائرية

بعد التعرف على الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية لإزاحات الدوال الدائرية، صار بالإمكان نمذجة مسائل واقعية باستعمال هذه الدوال، وتفسير معاملاتها حسب الحالة.

مثال 4 اكتب معادلة للإزاحة

تطبع آلة شعار شركة على كل منتج يمر على شريط التجميع. ينمذج التمثيل البياني ارتفاع الطابع من محور الآلة، y، عند الزمن x من الثواني منذ تشغيل الآلة. أوجد المعادلة التي تنمذج هذه الحركة. فسّر المقطع y للتمثيل البياني من خلال السياق.



الحل

لدالة الجيب صورة عامة هي: $y = a \sin (b(x - h)) + d$.

السعة هنا هي 1، وبالتالي $|a| = 1$.

الدورة هي 2π، وبما أن الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$ وبالتالي $|b| = 1$ أيضًا.

لا يوجد إزاحة رأسية، وخط الوسط هو المحور x، تمامًا مثل خط الوسط للدالة $y = \sin x$. إذن، $d = 0$.

يتضمن هذا التمثيل البياني النقطة $(3, 0)$ التي تقابلها النقطة $(0, 0)$ على التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$.

يوجد إزاحة أفقية بمقدار 3، إذن $h = 3$.

وبالتالي فالمعادلة التي تنمذج هذا التمثيل البياني هي $y = \sin (x - 3)$.

عند $x = 0$، وعند تشغيل الآلة، تقترب الآلة من خط الوسط لدورتها، وتتحرك إلى الأسفل.

حاول أن تحل التمرين 14

النمذجة باستعمال الجيب وجيب التمام

لأن الجيب وجيب التمام عبارة عن إزاحات طور بعضهما لبعض ببساطة، يمكنك صياغة معادلة باستعمال أي من الدالتين.

إرشاد

يمكن أن نجد حلولًا أخرى على اعتبار أن القيمة المطلقة لـ a هي 1، عندها يمكن أن تكون $a = 1$ أو $a = -1$.
وكذلك يمكن لقيمة b أن تساوي 1 أو -1
إذن، يمكن للدالة أن تكون $y = -\sin (-(x - 3))$.

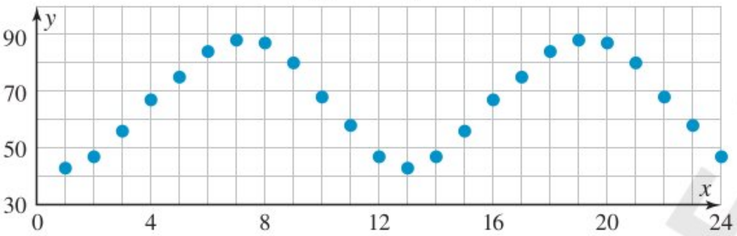
مثال 5 النمذجة باستعمال الدوال الدائرية

يوضح الجدول أدناه متوسط درجات الحرارة حسب الشهر في إحدى المدن. كيف يمكن نمذجة درجات الحرارة هذه باستعمال تمثيل بياني لدالة مثلثية؟ ما وجه المقارنة بين قيمة خط الوسط في الدالة والوسط الحسابي لدرجات الحرارة الإثنتي عشرة؟

الشهر	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
درجات الحرارة (°F)	43	47	56	67	75	84	88	87	80	68	58	47

الحل

متوسط درجات الحرارة (°F)



يمكن نمذجة درجات الحرارة بدالة صورتها $y = a \sin (b(x - h)) + d$.

أوجد الوسط الحسابي لدرجتَي الحرارة العظمى والصغرى لاستنتاج خط الوسط (الإزاحة الرأسية).

$$d = \frac{88 + 43}{2} = 65.5$$

بالتالي، فالإزاحة الرأسية $d = 65.5$.

أوجد السعة

$$\text{السعة} = \frac{\text{القيمة العظمى} - \text{القيمة الصغرى}}{2} = \frac{88 - 43}{2} = 22.5$$

إذن، $|a| = 22.5$.

الدورة هي 12 شهرًا، لذا $|b| = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

حدّد مقدار إزاحة الطور عبر البحث عن النقطة التي يقطع عندها التمثيل البياني خط الوسط. في الدالة الرئيسة، يقع صفر على نقطة الأصل بالضبط.

قدّر إزاحة الطور: $c \approx 4$.

إذن، معادلة الدالة $y = 22.5 \sin \left(\frac{\pi}{6} (x - 4)\right) + 65.5$

الوسط الحسابي لدرجات الحرارة الإثنتي عشرة هو 66.7°F، وهو عدد قريب من خط الوسط والذي معادلته $y = 65.5°F$

حاول أن تحل التمرين 16

مراجعة سريعة 6.4

حل التمارين التالية دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 1-3، حدّد إشارة الدالة في كل ربع.

1. $\sin x$ **2.** $\cos x$

3. $\tan x$

في التمارين 4-6، أوجد القيمة بالراديان لكل زاوية.

4. $135°$ **5.** $-150°$

6. $450°$

حل التمارين التالية دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 7-10، أوجد التحويل الذي يحول التمثيل البياني للدالة y_1 إلى التمثيل البياني للدالة y_2.

7. $y_1 = \sqrt{x}, y_2 = 3\sqrt{x}$

8. $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$

9. $y_1 = \ln x, y_2 = 0.5 \ln x$

10. $y_1 = x^3, y_2 = x^3 - 2$

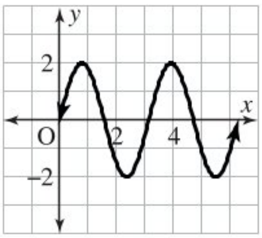
الدرس 6.4 التمارين

1. اكتب الدالة $y = -\sin x$ كإزاحة طور للدالة $y = \sin x$.

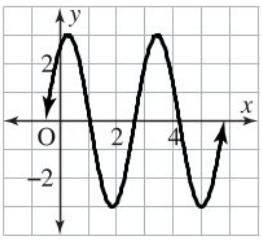
2. اكتب الدالة $y = -\cos x$ كإزاحة طور للدالة $y = \sin x$.

في التمرينين 3 و 4، أوجد قيم a, b, h, k بحيث يصبح التمثيل البياني للدالة في الصورة $y = a \sin (b(x + h)) + k$ هو المبيّن في الشكل.

3.



4.



في التمارين 5-9، ارسم التمثيل البياني للدالة.

5. $y = \frac{2}{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

6. $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

7. $y = 2 \sin \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

8. $y = \frac{1}{3} \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

9. $y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

في التمارين 10-13، حدّد السعة والدورة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية والقيمتين الصغرى والعظمى لكل دالة.

10. $y = \frac{1}{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 4$

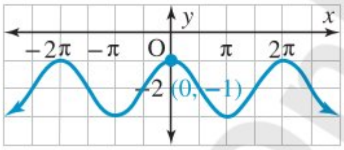
11. $y = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

12. $y = \frac{2}{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$

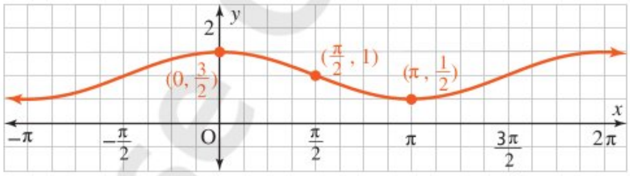
13. $y = \frac{1}{2} \cos \left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$

في التمرينين 14 و 15، اكتب معادلة تنمذج الدالة التي يمثلها التمثيل البياني.

14.



15.



16. يوضح الجدول المجاور متوسط درجات الحرارة الشهري في إحدى المدن. كيف يمكن نمذجة درجات الحرارة هذه باستعمال تمثيل بياني لدالة مثلثية؟ ما وجه المقارنة بين قيمة خط الوسط في الدالة والوسط الحسابي لدرجات الحرارة الإثنتي عشرة؟

الشهر	درجات الحرارة (°F)
يناير	40
فبراير	44
مارس	53
ابريل	64
مايو	74
يونيو	83
يوليو	87
أغسطس	85
سبتمبر	78
أكتوبر	67
نوفمبر	56
ديسمبر	45

في التمارين 17-20، اختر الدالتين اللتين لهما نفس التمثيل البياني.

17. **a.** $y = \cos x$

b. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

18. **a.** $y = \sin x$

b. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c. $y = \cos x$

19. **a.** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b. $y = -\cos(x - \pi)$

c. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

20. **a.** $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

b. $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

c. $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

في التمارين 21-28، حدّد سعة ودورة التمثيل البياني للدالة الدائرية، وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية (بالنسبة إلى الدالة الأساسية).

21. $y = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

22. $y = -3.5\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

23. $y = 5\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 0.5$

24. $y = 3\cos(x + 3) - 2$

25. $y = 2\cos(2\pi x) + 1$

26. $y = 4\cos(3\pi x) - 2$

27. $y = \frac{7}{3}\sin\left(x + \frac{5}{2}\right) - 1$

28. $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x-3}{4}\right) + 1$

في التمارين 29-34، صِف التحويلات اللازمة للحصول على التمثيل البياني للدالة من التمثيل البياني لدالة دائرية أساسية.

29. $y = 0.5\sin 3x$

30. $y = 1.5\cos 4x$

31. $y = -\frac{2}{3}\cos\frac{1}{3}x$

32. $y = \frac{3}{4}\sin\frac{1}{5}x$

33. $y = 3\cos\frac{2\pi}{3}x$

34. $y = -2\sin\frac{\pi}{4}x$

في التمارين 35-38، صِف التحويلات التي تحول التمثيل البياني للدالة y_1 إلى التمثيل البياني للدالة y_2.

35. $y_1 = \cos 2x,\ y_2 = \frac{5}{3}\cos 2x$

36. $y_1 = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\ y_2 = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

37. $y_1 = 2 \cos \pi x, y_2 = 2 \cos 2\pi x$

38. $y_1 = 3 \sin \frac{2\pi}{3}x, y_2 = 2 \sin \frac{\pi}{3}x$

39. **أطوار القمر** يبيّن الجدول أدناه أطوار القمر الثمانية. كيف يمكننا نمذجة أطوار القمر باستعمال تمثيل بياني لدالة دائرية؟ ما وجه المقارنة بين قيمة خط الوسط في الدالة والوسط الحسابي لأطوار القمر الإثني عشر؟

طور القمر	النسبة المضيئة	الأسبوع
	50%	1
	0%	2
	48%	3
	100%	4
	67%	5
	5%	6
	34%	7
	95%	8

40. **نسبة الأمطار** يبيّن الجدول أدناه معدل كمية هطول الأمطار، بالإنش، في كل شهر لإحدى المدن.

الشهر	هطول الأمطار (in)
يناير	6.46
فبراير	5.83
مارس	4.84
ابريل	2.52
مايو	1.81
يونيو	0.79
يوليو	0.29
أغسطس	0.16
سبتمبر	0.59
أكتوبر	2.28
نوفمبر	5.39
ديسمبر	7.87

a. كيف يمكننا نمذجة كميات الأمطار باستعمال تمثيل بياني لدالة دائرية؟

b. ما وجه المقارنة بين قيمة خط الوسط في الدالة والوسط الحسابي للكميات الإثنتي عشر للأمطار؟

c. مثّل الدالة بيانيًا.

41. **ضغط الدم** تنمذج الدالة $P = 120 + 30 \sin 2\pi t$ ضغط الدم (بالميلليمتر من الزئبق) لشخص ضغط دمه يساوي $\frac{150}{90}$ ، حيث t الزمن بالثواني.

a. أوجد دورة هذه الدالة.

b. أوجد عدد دقات القلب في الدقيقة الواحدة.

c. مثّل الدالة بيانيًا لتنمذج فترة زمنية مقدارها 10 ثوانٍ.

أسئلة اختبار معيارية

42. صواب أم خطأ قال علي إنّ للدالة $y = \frac{1}{2}\cos\left[3\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 3$ إزاحة طور مقدارها $\frac{\pi}{4}$ وحدة إلى اليمين وإزاحة رأسية مقدارها 3 وحدات إلى الأسفل. هل هو على صواب؟ برِّر إجابتك.

43. صواب أم خطأ أراد حامد أن يجد إزاحة الطور للدالة المبيّنة في الشكل أدناه. هل عمله صحيح؟ برِّر إجابتك.

$$y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

مقدار إزاحة الطور يساوي $\frac{\pi}{2}$ وحدات إلى اليسار

44. اختيار من متعدد أي المعلومات التالية عن الدالة $y = \frac{3}{4}\cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) - 5$ صحيحة؟

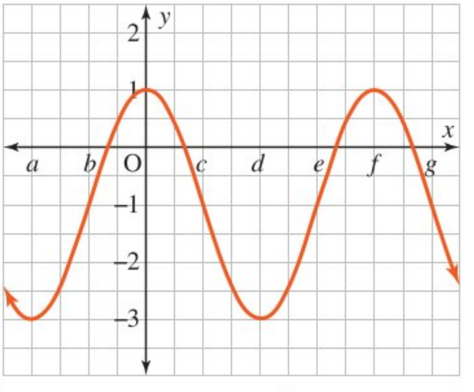
A. السعة هي $\frac{3}{4}$

B. الدورة هي 3

C. إزاحة الطور مقدارها $\frac{\pi}{6}$ وحدات إلى اليمين.

D. الإزاحة الرأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأعلى.

45. اختيار من متعدد مثّل حمد الدالة $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ بيانيًا ولكنه نسي أن يحدد قيم النقاط على المحور x. اختر مما يلي قيمة d الصحيحة على المحور x:



A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** π

C. $\frac{3\pi}{2}$ **D.** 2π

استكشاف

46. أوجد علاقة بين أصفار الدالة $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ وأصفار الدالة الرئيسة.

47. في الكهرباء "التيار المتناوب" هو دفق شحنة يغير اتجاهه بصورة دورية. يُستعمل التيار المتناوب في إيصال القدرة. تعطي الدالة $V(t) = E\cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$ الفولتية، بوحدة الفولت، حيث t الزمن بالثواني.

a. يريد ناصر أن يوجد الفولتية عندما E يساوي 40 فولت و w يساوي 188 راديان في الثانية. اكتب دالة تمثّل هذه الحالة.

b. أعد كتابة الدالة بحيث يكون معامل t هو 1

c. أوجد سعة الدالة.

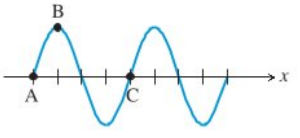
d. أوجد دورة الدالة.

e. أوجد إزاحة الطور للدالة.

f. مثّل الدالة بيانيًا.

توسيع الأفكار

في التمرينين 52 و 53، تمر الدالة بالنقطة A كما في الشكل أدناه. أوجد إحداثيات النقطتين B و C اللتين تمر الدالة بهما أيضًا.



48. $A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), y = 4.5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

49. $A\left(\frac{\pi}{12}, 0\right), y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

الوحدة 6 مراجعة الوحدة

في التمارين 1-5، تقع النقطة على الضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي. أعط القيمة الموجبة الصغرى للزاوية بالدرجات وبالراديان، ثم أوجد النسب المثلثية الست للزاوية θ.

1. $(\sqrt{3}, 1)$ **2.** $(-1, 1)$

3. $(-3, -3)$ **4.** $(6, -12)$

5. $(2, 4)$

في التمارين 6-15، أوجد القيمة الدقيقة للمقدار دون استعمال الحاسبة.

6. $\sin(30°)$ **7.** $\cot(750°)$

8. $\tan(-135°)$ **9.** $\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

10. $\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **11.** $\tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)$

12. $\csc(270°)$ **13.** $\sec(180°)$

14. $\cot(-90°)$ **15.** $\tan(360°)$

في التمارين 16-19، أوجد القيمة الدقيقة للنسب المثلثية الست للزاوية. استعمل المثلثات المرجعية لا الحاسبة.

16. $\frac{-\pi}{2}$ **17.** $\frac{19\pi}{4}$

18. $-135°$ **19.** $420°$

في التمارين 20-23، x زاوية في الوضع القياسي حيث $0 \le x \le 2\pi$، أوجد الربع الذي تقع فيه x.

20. $\sin x < 0, \tan x > 0$ **21.** $\cot x < 0, \cos x > 0$

22. $\tan x < 0, \sin x > 0$ **23.** $\tan x > 0, \cos x > 0$

في التمارين 24-26 أوجد القيمة باستعمال الصفة الدورية للنسب المثلثية.

24. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 38\,000\pi\right)$

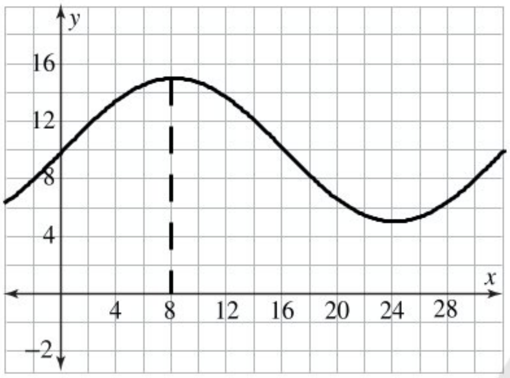
25. $\sin\left(\frac{3\,333\,333\pi}{2}\right)$

26. $\tan(2\,344\,651\pi) - \tan(3\,444\,554\,\pi)$

27. أوجد قيمة $\cos\theta$ إذا كانت $\sin\theta = \frac{4}{5}$ والزاوية θ تقع في الربع الثاني.

28. أوجد قيمة $\tan\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ والزاوية θ تقع في الربع الرابع.

29. اكتب دالة دائرية $y = f(x)$ متزايدة من $y = 10$ عند $x = 0$ إلى قيمة عظمى هي $y = 15$ عند $x = 8$.
انظر الشكل أدناه.



30. اكتب دالة دائرية $y = f(x)$ إذا كانت السعة لهذه الدالة تساوي 8 والدورة $\frac{\pi}{4}$ ويمر تمثيلها البياني بالنقطة $(3, 0)$.

31. ارسم، باستعمال التحويلات الهندسية، التمثيل البياني للدالة $y = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 1$.

32. أوجد الخصائص الأساسية للتمثيل البياني للدالة $y = 3\cos(4x) - 1$.

في التمارين 33-39، استعمل التحويلات لوصف كيفية تحويل التمثيل البياني للدالة من التمثيل البياني لدالة مثلثية أساسية. مثّل دورتين بيانيًا.

33. $y = \sin(x + \pi)$

34. $y = 3 + 2\cos x$

35. $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 4$

36. $y = \tan 2x$

37. $y = -2\tan 3x$

38. $y = -2 \cos \frac{x}{2}$

39. $y = \sin \pi x$

في التمارين 40-44، حدّد السعة، والدورة، إزاحة الطور، والمجال، والمدى للمنحنى.

40. $f(x) = 2 \sin 3x$

41. $g(x) = 3 \cos 4x$

42. $g(x) = -2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

43. $g(x) = 4 \cos (2x - 1)$

44. $g(x) = -2 \cos (3x + 1)$

45. **حركة البندول** تنمذج الدالة $\theta = 0.3 \cos t$ حركة بندول حيث θ (بالراديان) الزاوية بين الحبل وخط رأسي وهمي، و t الزمن بالثواني.

a. ما هي قيمة أكبر قياس ممكن للزاوية θ؟ برّر إجابتك.

b. أوجد θ عندما $t = 0$ وعندما $t = 4$.

46. **في المحيط** يتحرك جُسيم في المحيط مع الموجة. تُنمذج حركة الجُسيم بدالة جيب التمام. إذا حدثت موجة طولها 4 m كل 7 ثوانٍ، اكتب دالة تنمذج ارتفاع الجسيم، y، بالأمتار مع تحرّكها في x ثواني. أوجد دورة الدالة.

الوحدة 6 تقويم

1. تقع النقطة $(-1, \sqrt{3})$ على ضلع الانتهاء لزاوية في الوضع القياسي. أعطِ القيمة الموجبة الأصغر للزاوية بالدرجات وبالراديان.

2. أوجد القيمة الدقيقة للمقدار $\sec\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ من دون استعمال الحاسبة.

في التمرينين 3 و 4 أوجد القيمة باستعمال الصفة الدورية للنسب المثلثية.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 24\ 000\pi\right)$.

4. $\tan(34\ 541\pi) + \tan(7\ 667\ 329\ \pi)$.

5. أوجد قيمة $\cos\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ والزاوية θ تقع في الربع الرابع.

6. اكتب دالة دائرية $y = f(x)$ إذا كانت السعة لهذه الدالة تساوي 4 والدورة $\frac{\pi}{2}$ ويمر تمثيلها البياني بالنقطة $(1, 0)$.

7. تقع النقطة $(-5, -3)$ على ضلع الانتهاء للزاوية θ. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

8. استعمل التحويلات لوصف كيفية تحول التمثيل البياني للدالة $y = -2 - 3\sin(x - \pi)$ من التمثيل البياني لدالة مثلثية أساسية. مثّل دورتين بيانيًا.

9. حدّد السعة، والدورة، وطور الإزاحة، والمجال، والمدى للدالة $f(x) = 2\cos(-x - \pi)$.

10. **تخزين القش** يستعمل مزارع حزامًا ناقلًا لنقل حزم القش إلى مستودع لتخزينه. تنمذج الدالة $h(t) = 12\sin\theta$ ارتفاع الحزام، بالأمتار، بدلالة زاوية ارتفاع θ.

a. ما أقصى ارتفاع يصل اليه الحزام؟

b. أوجد الارتفاع إذا كانت $\theta = 27°$.

c. ما قياس الزاوية التي تجعل ارتفاع الحزام 6 أمتار؟

الوحدة 6 المشروع

دالة طول النهار

تساعدنا الدوال الدائرية في نمذجة كثير من المواقف الحياتية والظواهر العلمية. يُمكن نمذجة طول النهار وتغيّره بحسب أيام السنة باستعمال دوال دائرية.

تنمذج الدالة $D(t) = 12 + 2.4 \sin(0.017(2t - 60))$ طول النهار في إحدى المدن، بالساعات، بدلالة اليوم t، من اليوم الأول في السنة.

1. مثّل الدالة D باستعمال حاسبة بيانيّة. عدّل في إعدادات الحاسبة بحيث يظهر في نافذة العرض منحنى الدالة على فترة تمثّل الشهر الأول في السنة.
2. لماذا يشبه التمثيل البياني في الجزء 1 خطًّا مستقيمًا؟
3. إذا قرّبنا الجزء من المنحنى في الجزء 1 إلى خط مستقيم، أوجد ميل هذا المستقيم. ماذا تمثّل قيمة الميل؟
4. أوجد طول النهار يوم 4 أبريل بحسب الدالة D.
5. هل يمكنك أن تشرح ما قد تمثّله الأعداد: 60, 12, 2.4, 0.017, 2 في معادلة الدالة D؟
6. ابحث عن بيانات طول النهار في مدينتك بحسب أيام السنة، ثم حاول أن تجد الدالة التي قد تنمذج طول النهار في مدينتك بحسب اليوم.

الوحدة 7

المتطابقات والمعادلات المثلثية

لعبت المتطابقات المثلثية، بالإضافة إلى كونها أنماطًا منسّقة حيكت ببراهين رياضية متقنة، دورًا مهمًا في تطور المفاهيم الرياضية عمومًا، ولا سيما في مجال التحليل الرياضي.
ولعل الدور الأبرز والأكثر أهمية الذي لعبته المتطابقات المثلثية في هذا المجال يكمن في حساب التكامل والتفاضل، خصوصًا أن تلك المتطابقات مكّنت من تبسيط القوى من خلال ربط القوى $\sin^n x$ و $\cos^n x$ بالصيغة المثلثية البسيطة $\cos kx$، $\sin kx$، الأمر الذي مكّن التحليل الرياضي من الوقوف على أسس جامعة بعد الربط بين الدوال الأسيّة والدوال الدائرية، وجعل استعمال المتطابقات المثلثية في إيجاد مساحات منحنية غير دائرية، كمساحة سطح "جاوس Gauss"، ممكنًا.

7.1 المتطابقات المثلثية Trigonometric Identities

ما ستتعلّمه
- المتطابقات المثلثية الأساسية
- متطابقات فيثاغورس
- متطابقات الزاويتين المتتامتين
- متطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية
- تبسيط المقادير المثلثية
- إثبات صحة المتطابقات

... ولماذا
للدوال الدائرية متطابقات مهمة تقودنا براهينها إلى معرفة متقنة لتركيبة البرهان الرياضي.

معيار الدرس
11A.8.7

المصطلحات
- متطابقة مثلثية trigonometric identity

المتطابقات المثلثية الأساسية

يحمل رمز المساواة "=" العديد من المعاني في الرياضيات:

1. في العبارة "$2 = 1 + 1$" يعني المساواة بين أعداد حقيقية. إنها عبارة صحيحة.

2. في العبارة "$2(x-3) = 2x - 6$" يعني التكافؤ بين عبارتين. إنها عبارة صحيحة.

3. في "$x^2 + 3 = 7$" نجد عبارة مفتوحة، يمكن أن تكون خاطئة ويمكن أن تكون صحيحة وذلك لقيم x التي تمثّل حلول المعادلة.

4. في "$\frac{(x^2-1)}{(x+1)} = x - 1$" يمثّل متطابقة، وهي شبيهة بالعبارة 2 أي إنها عبارة صحيحة مع الأخذ بعين الاعتبار أن قيم x تنتمي لمجال كلا العبارتين على طرفَي المساواة.

بعض العبارات مثل $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ هي **متطابقات مثلثية** لأنها صحيحة لجميع قيم المتغيّر θ بحيث تكون كلا العبارتين على طرفَي المساواة معرّفتين.

تنتج بعض المتطابقات المثلثية من تعريفات النسب المثلثية الأساسية الست مباشرة. هذه المتطابقات الأساسية هي متطابقات المقلوب ومتطابقات ناتج القسمة.

المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات المقلوب

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

متطابقات ناتج القسمة

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

نشاط استكشافي 1 توضيح حول مجال المتطابقة

1. $\theta = 0$ تقع تحديدًا في مجال ثلاث من المتطابقات الأساسية. أوجد هذه المتطابقات.

2. بالنسبة لمتطابقتين تحديدًا من المتطابقات الأساسية، طرف واحد من المعادلة معرّف عند $\theta = 0$، بينما الطرف الآخر غير معرّف. أوجد هاتين المتطابقتين.

3. بالنسبة لثلاث متطابقات تحديدًا من المتطابقات الأساسية، كلا طرفي المعادلة غير معرّفين عند $\theta = 0$. أوجد هذه المتطابقات.

متطابقات فيثاغورس

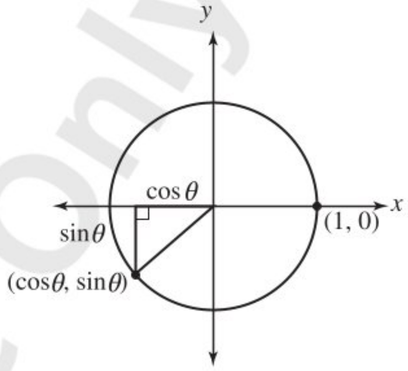
رأينا فيما سبق أن نظرية فيثاغورس تمكّننا من برهنة المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$، حيث θ أي عدد حقيقي.

إذا قسمنا طرفَي المعادلة على $\cos^2\theta$ نحصل على:

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

بينما إذا قسمنا طرفَي المعادلة على $\sin^2\theta$ نحصل على:

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\cot^2\theta + 1 = csc^2\theta$$



الشكل 7.1.1 استعمال نظرية فيثاغورس

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

هذه المعادلات الثلاث تُسمى متطابقات فيثاغورس، ويمكننا إعادة صياغتها على النحو التالي:

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

مثال 1 استعمال متطابقات فيثاغورس

أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$ إذا كان $\tan\theta = 5$ و $\cos\theta > 0$.

الحل

يمكننا حل هذه المسألة باستعمال المثلث المرجعي، لكننا سنبيّن هنا طريقة بديلة باستعمال المتطابقات فقط.
نلاحظ أولًا أن:

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$
$$= 1 + 5^2 = 26$$

إذن، $\sec\theta = \pm\sqrt{26}$.

بما أن $\sec\theta = \pm\sqrt{26}$، فإن $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{26}} = \frac{\pm\sqrt{26}}{26}$.

لكن $\cos\theta > 0$، ومنه $\cos\theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$.

(تابع)

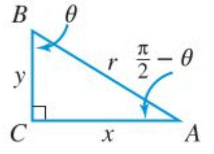
أخيرًا، لإيجاد $\sin\theta$

$$\tan\theta = 5$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 5$$
$$\sin\theta = 5\cos\theta$$
$$= 5\left(\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

إذن، $\cos\theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$ و $\sin\theta = \frac{5\sqrt{26}}{26}$

حاول أن تحل التمرين 1

متطابقات الزاويتين المتتامتين



الشكل 7.1.2 الزاويتان A و B زاويتان متتامتان في المثلث القائم الزاوية ABC.

إذا كانت C زاوية قائمة في المثلث ΔABC، فإن الزاويتين A و B زاويتان متتامتان أي أن $m\angle A + m\angle B = \frac{\pi}{2}$ (انظر الشكل 7.1.2). إذا استعملنا النسب المثلثية الأساسية لتحديد النسب المثلثية الست للزاويتين A و B، نحصل على ما يلي:

الزاوية A:

$\sin A = \frac{y}{r}$ $\quad \tan A = \frac{y}{x}$ $\quad \sec A = \frac{r}{x}$

$\cos A = \frac{x}{r}$ $\quad \cot A = \frac{x}{y}$ $\quad \csc A = \frac{r}{y}$

الزاوية B:

$\sin B = \frac{x}{r}$ $\quad \tan B = \frac{x}{y}$ $\quad \sec B = \frac{r}{y}$

$\cos B = \frac{y}{r}$ $\quad \cot B = \frac{y}{x}$ $\quad \csc B = \frac{r}{x}$

هل يمكنك ملاحظة ما حصلنا عليه؟ في كل حالة من الحالات أعلاه، قيمة النسب المثلثية للزاوية A تساوي قيمة النسبة المثلثية المتتامة لها للزاوية B، وهذا ما يحدث دائمًا بالنسبة لأي زاويتين متتامتين.

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \csc\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$$

مع أننا أثبتنا صحة هذه المتطابقات في حالة الزاوية الحادة فقط، غير أنه بإمكاننا التحقق من صحتها بالنسبة لكل الأعداد الحقيقية.

متطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية

رأينا فيما سبق أن كل دالة من الدوال الدائرية الأساسية هي إما فردية وإما زوجية، ويمكن ترجمة ذلك في مزيد من المتطابقات الأساسية.

متطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية

$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x \quad \tan(-x) = -\tan x$

$\csc(-x) = -\csc x \quad \sec(-x) = \sec x \quad \cot(-x) = -\cot x$

مثال 2 استعمال متطابقات الزاويتين المتتامتين

إذا كان $\cos\theta = 0.34$، أوجد $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

الحل

الطريقة الأمثل لحل هذه المسألة هي باستعمال المتطابقات.

دالة الجيب فردية

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

استعمل متطابقة الزاويتين المتتامتين

$$= -\cos\theta$$
$$= -0.34$$

حاول أن تحل التمرين 7

تبسيط المقادير المثلثية

كثيرًا ما تحتوي الصيغ الرياضية على مقادير مثلثية، الأمر الذي يجعلها تبدو معقدة، ولكن يمكننا غالبًا استعمال المتطابقات وبعضًا من التقنيات الجبرية (مثل التحليل إلى العوامل أو تجميع الكسور أو توحيد المقامات)، لتبسيط هذه المقادير قبل التعامل معها. في بعض الحالات يكون هذا التبسيط فعالًا إلى درجة كبيرة.

مثال 3 التبسيط باستعمال التحليل إلى العوامل والمتطابقات

بسّط المقدار $\sin^3 x + \sin x \cos^2 x$

الحل

حُل جبريًا

أخرج $\sin x$ عاملًا مشتركًا

$$\sin^3 x + \sin x \cos^2 x = \sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

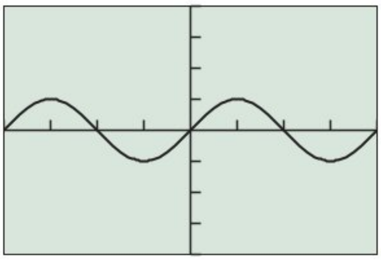
استعمل المتطابقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= (\sin x)(1)$$
$$= \sin x$$

تأكد بيانيًا

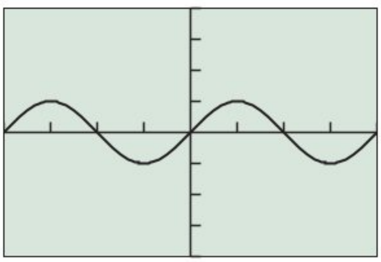
يمكننا ملاحظة أن التمثيل البياني للدالة $y = \sin^3 x + \sin x \cos^2 x$ (انظر الشكل 7.1.3a) هو نفس التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$ (انظر الشكل 7.1.3b).

حاول أن تحل التمرين 15



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-4, 4]$

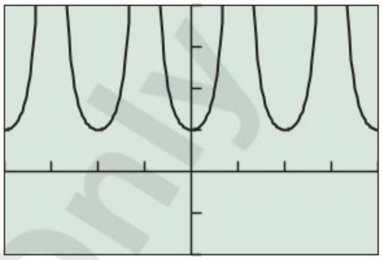
(a)



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-4, 4]$

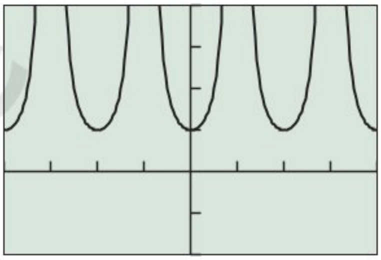
(b)

الشكل 7.1.3 الدعم البياني للمتطابقة $\sin^3 x + \sin x \cos^2 x = \sin x$



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-2, 4]$

(a)



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-2, 4]$

(b)

الشكل 7.1.4 الدعم البياني للمتطابقة $\frac{(\sec x+1)(\sec x-1)}{\sin^2 x} = \sec^2 x$

مثال 4 التبسيط باستعمال التوزيع والمتطابقات

بسّط المقدار $\frac{(\sec x+1)(\sec x-1)}{\sin^2 x}$.

الحل

حُل جبريًا

استعمل المتطابقة $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\frac{(\sec x+1)(\sec x-1)}{\sin^2 x} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sin^2 x}$$

استعمل المتطابقة $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$$= \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x}$$

استعمل المتطابقة $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin^2 x}$$

بسّط

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

تأكد بيانيًا

يبدو التمثيلان البيانيان للدالتين $y = \frac{(\sec x+1)(\sec x-1)}{\sin^2 x}$ و $y = \sec^2 x$ متماثلين، كما هو متوقع (انظر الشكل 7.1.4).

حاول أن تحل التمرين 19

مثال 5 التبسيط من خلال توحيد المقامات واستعمال المتطابقات

بسّط المقدار $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

الحل

وحّد المقامات

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)(\cos x)}$$

استعمل التوزيع

$$= \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1-\sin x)(\cos x)}$$

استعمل المتطابقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(\cos x)}$$

بسّط

$$= \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec x$$

حاول أن تحل التمرين 25

إثبات صحة المتطابقات

تختلف طريقة إثبات صحة المتطابقات عن طريقة حل المعادلات اختلافًا كبيرًا، ويتركز هذا الاختلاف على وجه الخصوص في الخطوة الأولى.

الخطوة الأولى لحل معادلة هي كتابة كل المعادلة والانطلاق منها لإيجاد المجهول أو ما شابه، في حين الخطوة الأولى لإثبات متطابقة هي كتابة أحد طرفيها والانطلاق منه للتوصل إلى الطرف الآخر، لأننا إذا بدأنا بكتابة طرفي المتطابقة نكون قد كتبنا الهدف من دون المرور بالإثبات، وهذا ما لا نريده.

نورد أدناه الطريقة العامة لإثبات صحة متطابقة.

الطريقة العامة لإثبات صحة متطابقة

1. يبدأ الإثبات بمقدار يمثّل أحد طرفَي المتطابقة.
2. ينتهي الإثبات بالمقدار في الطرف الآخر للمتطابقة.
3. يسير الإثبات منتقلًا من مقدار إلى آخر، كل واحد منها يكافىء سابقه.

من خلال العمل على مجموعة من الأمثلة، سنحاول تقديم ما هو مناسب لإثبات صحة المتطابقات كما نوضح بعض الأدوات الجبرية التي يمكن استعمالها.

مثال 6 إثبات صحة متطابقة

أثبت صحة المتطابقة $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

الحل

نبدأ بتحديد الطرف الذي نبدأ منه الإثبات. يستحسن غالبًا البدء من الطرف الأكثر تعقيدًا، لأن الانتقال من المعقد إلى البسيط أسهل. المقدار الذي إلى اليسار أكثر تعقيدًا إلى حد ما لأنه يتضمن حدين.

استعمل المتطابقات الأساسية

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

وحّد المقامات

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \times \sin x}$$

استعمل المتطابقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \frac{1}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$= \sec x \csc x$$

إذن، $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

حاول أن تحل التمرين 29

يمكن أيضًا استعمال العديد من الأدوات الجبرية لإثبات صحة المتطابقة:

إثبات صحة متطابقة

1. ابدأ من الطرف الأكثر تعقيدًا للمتطابقة، واعمل على الوصول إلى الطرف الآخر ذي المقدار الأبسط.
2. استعمل التوزيع أو التحليل إلى العوامل إذا لزم الأمر.
3. استعمل المتطابقات الأساسية أو متطابقات فيثاغورس إن أمكن.
4. إن لم تفرض أي خطوة نفسها أثناء الإثبات، حوّل المقدار بكامله إلى مقدار مكوّن من الجيب وجيب التمام فقط.
5. ادمج الكسور بعد إيجاد المقام الموحد لها.

يمكننا الإفادة من المتطابقات الجبرية مثل $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ في إثبات المتطابقات المثلثية، وذلك من خلال تطبيق متطابقة فيثاغورس بطريقة مناسبة. وينبغي أن يُبنى اختيارنا دائمًا على ما يقرب من الهدف النهائي المتمثل في مقدار الطرف الآخر للمتطابقة.

مثال 7 استعمال متطابقة الفرق بين مربعين

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos t}{1-\sin t}=\frac{1+\sin t}{\cos t}$.

الحل

نبدأ من الطرف الأيسر

اضرب بالمقدار $\frac{1+\sin t}{1+\sin t}$

$$\frac{\cos t}{1-\sin t}=\frac{\cos t}{1-\sin t}\times\frac{1+\sin t}{1+\sin t}$$

استعمل متطابقة الفرق بين مربعين

$$=\frac{(\cos t)(1+\sin t)}{1-\sin^2 t}$$

عوّض $1-\sin^2 t=\cos^2 t$

$$=\frac{(\cos t)(1+\sin t)}{\cos^2 t}$$

بسّط

$$=\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

حاول أن تحل التمرين 36

إرشاد

يمكن إثبات صحة المتطابقة بالبدء من الطرف الأيمن:

$$\frac{1+\sin t}{\cos t}=\frac{1+\sin t}{\cos t}\times\frac{1-\sin t}{1-\sin t}$$

$$=\frac{1-\sin^2 t}{\cos t\,(1-\sin t)}$$

$$=\frac{\cos^2 t}{\cos\,(1-\sin t)}$$

$$=\frac{\cos t}{1-\sin t}$$

لاحظ أنه تم إبقاء العبارة $\cos t\ (1 + \sin t)$ على هذه الصورة بهدف التخلص من العامل $\cos t$ للحصول على البسط المطلوب. حاول أن تركز دائمًا في خطواتك لإثبات صحة متطابقة ما على العبارة المطلوب الوصول إليها.

في بعض المتطابقات المعقدة، قد لا يكون الالتزام بالطريقة العامة التي ذكرناها سابقًا هو الطريق الأمثل، وقد نكون مضطرين للعمل على طرفَي المتطابقة، وتحويلهما إلى مقدار وسطي مشترك.

مثال 8 إثبات صحة متطابقة بالعمل على طرفَيها

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot^2 u}{1 + \csc u} = (\cot u)(\sec u - \tan u)$.

الحل

الجانب الأيسر يبدو كأنه بحاجة إلى عمل أكثر، لذا نبدأ من الطرف الأيسر.

استعمل المتطابقة $\csc^2 u = 1 + \cot^2 u$

$$\frac{\cot^2 u}{1 + \csc u} = \frac{\csc^2 u - 1}{1 + \csc u}$$

حلّل إلى العوامل

$$= \frac{(\csc u + 1)(\csc u - 1)}{\csc u + 1}$$

$$= \csc u - 1$$

ليس واضحًا في هذه المرحلة كيف يمكننا الانتقال من هذا المقدار إلى المقدار الذي في الطرف الأيمن للمتطابقة، لكننا نعلم أن الطرف الأيمن يجب تبسيطه للوصول إلى الشكل $\csc u - 1$، لذا نحاول تبسيط الطرف الأيمن.

متطابقات أساسية

$$(\cot u)(\sec u - \tan u) = \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)\left(\frac{1}{\cos u} - \frac{\sin u}{\cos u}\right)$$

وزّع وبسّط

$$= \frac{1}{\sin u} - 1$$

$$= \csc u - 1$$

إذن، تم إثبات صحة المتطابقة لأن كلا طرفَي المساواة يساويان نفس المقدار $\csc u - 1$.

حاول أن تحل التمرين 39

إرشاد

نستطيع إعادة بناء إثبات صحة المتطابقة بالمرور من خلال $\csc u - 1$ كخطوة وسطية.

$$\frac{\cot^2 u}{1 + \csc u} = \frac{\csc^2 u - 1}{1 + \csc u}$$

$$= \frac{(\csc u + 1)(\csc u - 1)}{\csc u + 1}$$

خطوة وسطية

$$= \csc u - 1$$

$$= \frac{1}{\sin u} - 1$$

$$= \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)\left(\frac{1}{\cos u} - \frac{\sin u}{\cos u}\right)$$

$$= (\cot u)(\sec u - \tan u)$$

مراجعة سريعة 7.1

حل التمارين التالية من دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 1-4، حلّل المقدار إلى ناتج ضرب عوامل خطية.

1. $a^2 - 2ab + b^2$ **2.** $4u^2 + 4u + 1$

3. $2x^2 - 3xy - 2y^2$ **4.** $2v^2 - 5v - 3$

في التمارين 5-8، بسّط المقدار.

5. $\frac{1}{x} - \frac{2}{y}$ **6.** $\frac{a}{x} - \frac{b}{y}$

7. $\dfrac{x + y}{\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y}\right)}$ **8.** $\frac{x}{x - y} - \frac{y}{x + y}$

الدرس 7.1 التمارين

في التمارين 1-4، حل التمارين من دون استعمال الحاسبة. استعمل متطابقات فيثاغورس عوضًا عن المثلثات المرجعية.

1. أوجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{3}{4}$ و $\sin\theta > 0$.

2. أوجد $\sec\theta$ و $\csc\theta$ إذا كان $\tan\theta = 3$ و $\cos\theta > 0$.

3. أوجد $\tan\theta$ و $\cot\theta$ إذا كان $\sec\theta = 4$ و $\sin\theta < 0$.

4. أوجد $\sin\theta$ و $\tan\theta$ إذا كان $\cos\theta = 0.8$ و $\tan\theta < 0$.

في التمارين 5-8، أوجد قيمة المقدار باستعمال المتطابقات.

5. إذا كان $\sin\theta = 0.45$، أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

6. إذا كان $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -5.32$، أوجد $\cot\theta$.

7. إذا كان $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0.73$، أوجد $\cos(-\theta)$.

8. إذا كان $\cot(-\theta) = 7.89$، أوجد $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

في التمارين 9-16، بسّط المقدار باستعمال المتطابقات الأساسية أو متطابقات فيثاغورس.

9. $\tan x \cos x$ **10.** $\cot x \tan x$

11. $\sec y \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ **12.** $\cot u \sin u$

13. $\frac{1 + \tan^2 x}{\csc^2 x}$ **14.** $\frac{1 - \cos^2\theta}{\sin\theta}$

15. $\cos x - \cos^3 x$ **16.** $\frac{\sin^2 u + \tan^2 u + \cos^2 u}{\sec u}$

في التمارين 17-20، بسّط المقدار للحصول على عدد ثابت أو على دالة دائرية أساسية. ادعم إجابتك بيانيًّا.

17. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\csc x}{\csc^2 x}$

18. $\dfrac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$

19. $\left(\sec^2 x + \csc^2 x\right) - \left(\tan^2 x + \cot^2 x\right)$

20. $\dfrac{\sec^2 u - \tan^2 u}{\cos^2 v + \sin^2 v}$

في التمارين 21-26، وحّد المقامات، وبسّط للحصول على مضاعف قوى دوال دائرية أساسية.

21. $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}$ **22.** $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x}$

23. $\frac{\sin x}{\cot^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ **24.** $\frac{1}{\sec x - 1} - \frac{1}{\sec x + 1}$

25. $\frac{\sec x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$ **26.** $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

في التمارين 27-34، أثبت صحة المتطابقة.

27. $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

28. $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

29. $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

30. $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$

31. $\dfrac{(1 - \cos u)(1 + \cos u)}{\cos^2 u} = \tan^2 u$

32. $\tan x + \sec x = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

33. $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = -\tan x \sin x$

34. $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x}$

في التمارين 35-42، أثبت صحة المتطابقة.

35. $\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$

36. $\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$

37. $\frac{\sin t}{1 + \cos t} + \frac{1 + \cos t}{\sin t} = 2 \csc t$

38. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 + 2 \sin x \cos x}$

39. $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$

40. $\frac{\sin t}{1 - \cos t} + \frac{1 + \cos t}{\sin t} = \frac{2(1 + \cos t)}{\sin t}$

41. $\sin^2 x \cos^3 x = \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right)(\cos x)$

42. $\sin^5 x \cos^2 x = \left(\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x\right)(\sin x)$

في التمارين 43-48، اربط المقدار بمقدار مساوٍ له من القائمة.
ثم أثبت صحة اختيارك (عملية الربط ليست واحد لواحد).

a. $\sec^2 x \csc^2 x$ **b.** $\sec x + \tan x$ **c.** $2 \sec^2 x$
d. $\tan x \sin x$ **e.** $\sin x \cos x$

43. $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$

44. $(1 + \sec x)(1 - \cos x)$

45. $\sec^2 x + \csc^2 x$

46. $\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x}$

47. $\frac{1}{\tan x + \cot x}$

48. $\frac{1}{\sec x - \tan x}$

أسئلة اختبار معيارية

49. **صواب أم خطأ** إذا كان $\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 34$، فإن $\csc x = 34$.
هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

50. **صواب أم خطأ** المجال المعرف للمتطابقة
$\sin\theta = \tan\theta \cos\theta$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية. هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

51. **اختيار من متعدد** أي المقادير التالية ليس مساويًا للقيمة $\sin x$ كمتطابقة؟

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

B. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

C. $\sqrt{1 - \cos^2 x}$

D. $\tan x \sec x$

E. $-\sin(-x)$

52. **اختيار من متعدد** أربعة بالتحديد من الدوال الدائرية الأساسية هي:

A. فردية

B. زوجية

C. دورية

D. متصلة

استكشاف

53. اكتب كل من الدوال الدائرية الست بدلالة $\sin x$ كليًا.

54. اكتب كل من الدوال الدائرية الست بدلالة $\cos x$ كليًا.

55. **الكتابة للتعلم** مثّل الدالتين $y = \sin^2 x$ و $y = -\cos^2 x$ بيانيًا.
صِف العلاقة الواضحة بين هذين التمثيلين البيانيين وتحقق منها باستعمال متطابقة مثلثية.

56. **نشاط جماعي** قسّم الصف إلى ست مجموعات بحيث تكون كل مجموعة مسؤولة عن إحدى الدوال الدائرية الست. أنشىء مع مجموعتك قائمة بخمسة مقادير مختلفة يمكن تبسيطها لتساوي الدالة التي كُلّفتَ بها. عند الانتهاء، بدّل قائمتك مع المجموعة التي لديها الدالة المتممة لدالتك، لتتأكدوا معًا من صحة عملكم.

توسيع الأفكار

57. برهن أن $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$.

58. استعمل متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية لتبرهن أن $\sin(\pi - x) = \sin x$.
(تلميح: $\sin(\pi - x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$).

59. استعمل متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية لتبرهن أن $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
(تلميح: $\cos(\pi - x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$).

60. استعمل المتطابقة $\sin(\pi - x) = \sin x$، لتبرهن أنه في مثلث ABC يكون $\sin(A - B) = \sin C$. استعمل المتطابقتين $\sin(\pi - x) = \sin x$ و $\cos(\pi - x) = -\cos x$ لإيجاد متطابقة تبسّط المقدار $\tan(\pi - x)$.

7.2 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما Trigonometric Identities for the Sum and Difference of Angles

ما ستتعلّمه

- متطابقة جيب التمام للفرق والمجموع
- متطابقة الجيب للفرق والمجموع
- متطابقة الظل للفرق والمجموع

... ولماذا

توفر هذه المتطابقات أمثلة مفيدة في فهم الفرق بين الحساب الجبري للدوال والحساب الجبري للأعداد الحقيقية.

معيار الدرس

11A.8.6

متطابقة جيب التمام للفرق والمجموع

لدينا جميعًا ميل إلى الاعتقاد بأن أية دالة تحقق ما يلي:

$$f(u+v)=f(u)+f(v)$$

في الواقع، دوال قليلة تحقق هذه المتطابقة.

من الأمثلة البسيطة على الدوال التي نعرفها جيدًا، لا يمكن مثلًا أن نكتب:

$$(u+v)^2=u^2+v^2$$

$$\sqrt{u+v}=\sqrt{u}+\sqrt{v}$$

إذن، قبل إيجاد صيغ المجموع والفرق لدوال الجيب وجيب التمام، سنقدم بعض الإيضاحات من خلال النشاط الاستكشافي التالي.

نشاط استكشافي 1 تجنب الوقوع في القواعد غير الصحيحة.

1. لتكن $u=\pi$ و $v=\frac{\pi}{2}$.
أوجد $\sin(u+v)$. أوجد $\sin(u)+\sin(v)$
هل $\sin(u+v)=\sin(u)+\sin(v)$؟

2. لتكن $u=0$ و $v=2\pi$.
أوجد $\cos(u+v)$. أوجد $\cos(u)+\cos(v)$.
هل $\cos(u+v)=\cos(u)+\cos(v)$؟

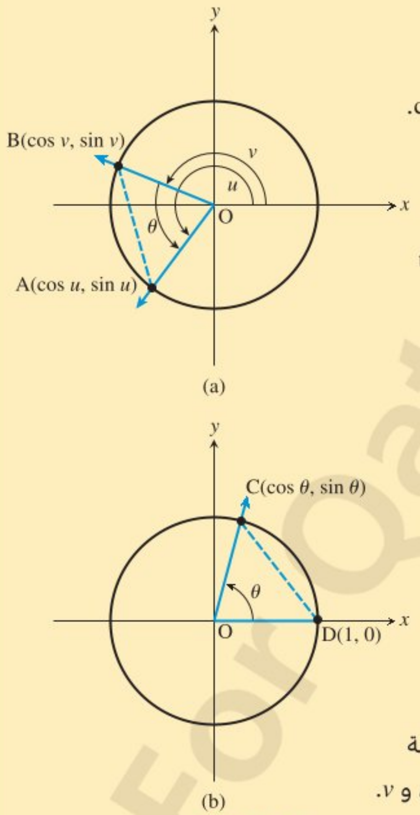
3. أوجد قيمًا لكل من u و v
لتؤكد أن: $\tan(u+v)\neq\tan(u)+\tan(v)$

4. فيما يلي استعمل الشكل المجاور 7.2.1.a

a. احسب المسافة AB بدلالة
$\sin u, \cos u, \sin v, \cos v$.
يدور المثلث ABO حول النقطة O لتستقر الزاوية θ في الوضع القياسي. (انظر الشكل 7.2.1.b). أوجد المسافة CD بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

b. قارن بين AB و CD.

c. استنتج جيب التمام للفرق $(u-v)$ بدلالة الجيب وجيب التمام لكل من الزاويتين u و v.



الشكل 7.2.1

يمكننا أن نبيّن بسهولة أن:

$\sin(u-v) \neq \sin(u) - \sin(v)$ و $\cos(u-v) \neq \cos(u) - \cos(v)$

كما يمكن أن نتوقع قواعد ومتطابقات توجد $\cos(u+v)$ بدلالة $\sin(u)$، $\cos(u)$، $\sin(v)$، $\cos(v)$، وتوجد كذلك $\sin(u \pm v)$ و $\tan(u \pm v)$.

إنها بالتأكيد ليس ما يُخيّل إلينا للوهلة الأولى كما تبيّن لنا من النشاط الاستكشافي.

سنتمكن في السؤال (4) من الاستكشاف من إثبات قاعدة جيب التمام للفرق بين زاويتين على النحو التالي:

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

للحصول على قاعدة جيب التمام للمجموع، يكفي أن نلاحظ:

$$\cos(u+v) = \cos(u-(-v))$$

$= \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v)$ متطابقة جيب التمام للفرق

$= \cos u \cos v - \sin u \sin v$ عوّض $\cos(-v) = \cos v$ و $\sin(-v) = -\sin v$

إذن، يمكننا كتابة الخلاصة التالية:

متطابقات جيب التمام للفرق والمجموع

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

مثال 1 استعمال متطابقة جيب التمام للفرق بين زاويتين

أوجد القيمة الدقيقة للمقدار $\cos 15°$ من دون استعمال الحاسبة.

الحل

يكمن مفتاح الحل في كتابة $\cos 15°$ في الصورة $\cos(45° - 30°)$، ثم يمكننا استعمال ما نعرفه عن الزوايا الخاصة.

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$$

$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$ متطابقة جيب التمام للفرق

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

حاول أن تحل التمرين 3

إرشاد

يمكن أيضًا كتابة $\cos 15°$ في الصورة $\cos(60° - 45°)$ والحصول على نفس الإجابة:

$$\cos(60° - 45°) = \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

متطابقة الجيب للفرق والمجموع

يمكننا استعمال متطابقات الزاويتين المتتامتين للحصول على صيغة متطابقة الجيب للفرق والمجموع:

$\sin(u+v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u+v)\right)$ متطابقة الزاويتين المتتامتين

$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\sin v$ متطابقة جيب التمام للفرق

$= \sin u \cos v + \cos u \sin v$ متطابقة الزاويتين المتتامتين

للحصول على جيب الفرق نستعمل المتطابقات $\cos(-v) = \cos v$ و $\sin(-v) = -\sin v$.

$\sin(u-v) = \sin(u + (-v))$

$= \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v)$ متطابقة الجيب للمجموع

$= \sin u \cos v - \cos u \sin v$ متطابقة الدوال الفردية والدوال الزوجية

يمكننا تلخيص صيغتَي جيب المجموع وجيب الفرق كما يلي:

متطابقات الجيب للفرق والمجموع

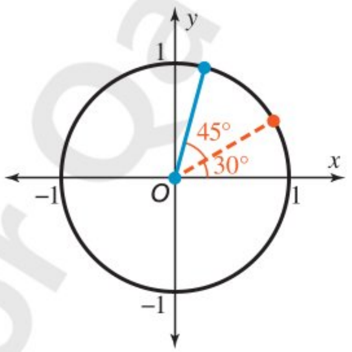
$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

مثال 2 **استعمال متطابقة الجيب للمجموع لإيجاد قيمة جيب زاوية معيّنة**

أوجد القيمة الدقيقة للمقدار $\sin 75°$.

الحل



مع أن $75°$ ليست زاوية خاصة، يمكن كتابتها على شكل مجموع زاويتين خاصتين.

(تابع)

$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(30° + 45°)\\ &= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

إذن، $\sin 75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

للتحقق، أوجد قيمة $\sin 75°$ باستعمال الحاسبة، وقارن بين تقريب القيمة على الحاسبة وبين قيمة $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. كلا المقدارين يساوي 0.9659 تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 1

مثال 3 استعمال متطابقات الجيب وجيب التمام للفرق والمجموع

اكتب المقادير التالية في صورة الجيب أو جيب التمام لزاوية.

A. $\sin 22° \cos 13° + \cos 22° \sin 13°$

B. $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$

C. $\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x$

الحل

يكمن مفتاح الحل في معرفة المتطابقات التي يجب أن نستعملها.

A. $\sin 22° \cos 13° + \cos 22° \sin 13°$

$= \sin (22° + 13°)$ استعمل متطابقة الجيب للمجموع

$= \sin 35°$

B. $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$

$= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ استعمل متطابقة جيب التمام للفرق

$= \cos \frac{\pi}{12}$

C. $\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x$

$= -(\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x)$ استعمل النظير الجمعي لمتطابقة جيب التمام للمجموع

$= -\cos (x + 2x)$ طبّق متطابقة جيب التمام للمجموع

$= -\cos 3x$

حاول أن تحل التمرينين 12 و 19

يمكن استعمال متطابقات الجيب وجيب التمام لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما لتبسيط مجموع زاوية مع احدى الزوايا الربعية أو الفرق بينهما، لذلك يمكن استعمالها في تأكيد متطابقات الزاويتين المتتامتين كما في المثال التالي:

مثال 4 **تأكيد متطابقات الزاويتين المتتامتين**

أثبت صحة المتطابقتين:

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

الحل

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$ متطابقة جيب التمام للمجموع

$= 0 \times \cos x + 1 \times \sin x$

$= \sin x$

B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$ متطابقة الجيب للفرق

$= 1\times \cos x - 0 \times \sin x$

$= \cos x$

حاول أن تحل التمرين 23

متطابقة الظل للفرق والمجموع

يمكننا استنتاج صيغة دالة الظل مباشرة من صيغتي الجيب وجيب التمام المرتبطتين على النحو التالي:

$$\tan(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v}$$

للحصول على الصيغة بدلالة $\tan u$ و $\tan v$ نكتب:

$$\tan(u+v) = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v}$$

$$= \frac{\cos u \cos v\left(\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v}\right)}{\cos u \cos v\left(1 - \frac{\sin u \sin v}{\cos u \cos v}\right)}$$

$$= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

بالطريقة نفسها يمكننا الحصول على الصيغة $\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$.

متطابقتي الظل للفرق والمجموع

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

مثال 5 **استعمال متطابقتَي الظل للفرق والمجموع**

A. **أثبت صحة المتطابقة** $\cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$.

B. **أثبت صحة المتطابقة** $\tan\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cot\theta$.

الحل

A. استعمل المتطابقة $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$$\cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

استعمل متطابقة الظل للمجموع

$$= \frac{1}{\frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\theta \times \tan\frac{\pi}{4}}}$$

عوّض $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$= \frac{1}{\frac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta}}$$

$$= \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

B. لا يمكننا استعمال المتطابقة المشتملة على الظل فقط كما في الفرع A لأن $\tan\frac{3\pi}{2}$ غير معرّف، لذا نحوّل إلى الجيب وجيب التمام.

استعمل المتطابقة $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\tan\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

استعمل متطابقتي الفرق

$$= \frac{\sin\theta\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\theta\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\theta\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\theta\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

بسّط

$$= \frac{\sin\theta \times 0 - \cos\theta \times (-1)}{\cos\theta \times 0 + \sin\theta \times (-1)}$$

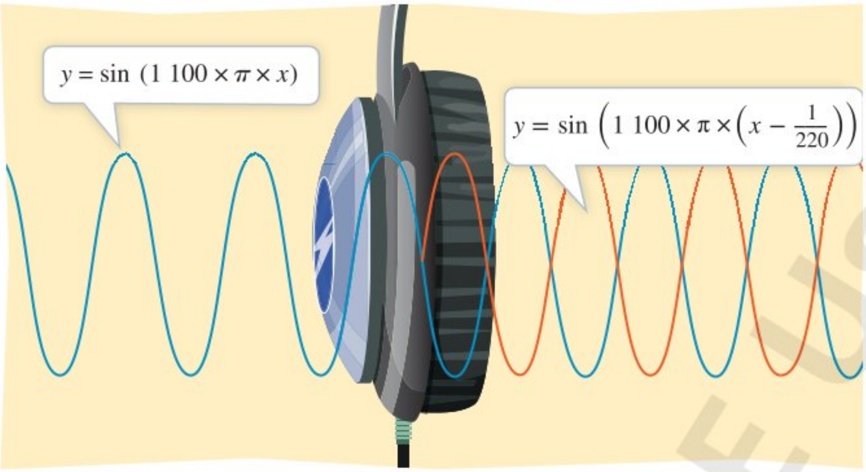
$$= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$= -\cot\theta$$

حاول أن تحل التمرين 25

مثال 6 **النمذجة باستعمال متطابقات المجموع والفرق**

تصدر سماعات الأذن المخفضة للضجيج موجات صوتية تلغي بشكل فعال الضجيج من حولك. هل الموجة الصوتية الصادرة عن السماعات والتي تنمذَج بالدالة $y = \sin\left(1\,100\pi\left(x - \frac{1}{220}\right)\right)$ تلغي ضجيجًا تنمذج موجته الصوتية الدالة $y = \sin(1\,100\pi x)$ ؟



الحل

اجمع الموجتين الصوتيتين لدمج الضجيجين.

لكي يلغي الضجيجان أحدهما الآخر يجب أن يكون مجموع الموجتين صفرًا.

$$\sin(1\,100\pi x) + \sin\left(1\,100\pi\left(x - \frac{1}{220}\right)\right)$$

$$= \sin(1\,100\pi x) + \sin(1\,100\pi x - 5\pi)$$ بسّط

استعمل متطابقة الجيب للفرق

$$= \sin(1\,100\pi x) + \sin(1\,100\pi x)(\cos(5\pi)) - \cos(1\,100\pi x)(\sin(5\pi))$$

عوّض $\cos 5\pi = -1$ و $\sin 5\pi = 0$

$$= \sin(1\,100\pi x) + \sin(1\,100\pi x)(-1) - \cos(1\,100\pi x)(0)$$

$$= \sin(1\,100\,\pi x) - \sin(1\,100\,\pi x)$$ بسّط

$$= 0$$

بما أن مجموع الموجتين الصوتيتين هو 0 لكل قيم x، إذن تلغي الموجتان الصوتيتان إحداهما الأخرى.

حاول أن تحل التمرين 33

مراجعة سريعة 7.2

في التمارين 1-6، عبّر عن الزاوية في صورة مجموع أو فرق زاويتين خاصتين (مضاعفات 30°، 45°، $\frac{\pi}{6}$، و $\frac{\pi}{4}$). قد تكون هناك أكثر من إجابة.

1. $15°$
2. $75°$
3. $165°$
4. $\frac{\pi}{12}$
5. $\frac{5\pi}{12}$
6. $\frac{7\pi}{12}$

حل التمارين التالية من دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 7-10، حدّد ما إذا كانت المتطابقة $f(x+y) = f(x) + f(y)$ تصلح للدالة f.

7. $f(x) = \ln x$
8. $f(x) = e^x$
9. $f(x) = 32x$
10. $f(x) = x + 10$

الدرس 7.2 التمارين

حل التمارين 1-27 من دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 1-9، أوجد القيمة الدقيقة باستعمال متطابقة مجموع أو فرق.

1. $\sin 15°$
2. $\tan 15°$
3. $\cos 75°$
4. $\cos \frac{\pi}{12}$
5. $\sin \frac{7\pi}{12}$
6. $\tan \frac{5\pi}{12}$
7. $\tan \frac{11\pi}{12}$
8. $\cos \frac{7\pi}{12}$
9. $\sin \frac{-\pi}{12}$

في التمارين 10-21، اكتب المقدار في صورة جيب أو جيب التمام، أو ظل لزاوية.

10. $\sin 42° \cos 17° - \cos 42° \sin 17°$

11. $\cos 94° \cos 18° + \sin 94° \sin 18°$

12. $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5}$

13. $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3}$

14. $\frac{\tan 19° + \tan 47°}{1 - \tan 19° \tan 47°}$

15. $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

16. $\cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x$

17. $\cos x \cos \frac{\pi}{7} - \sin x \sin \frac{\pi}{7}$

18. $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

19. $\cos 7y \cos 3y - \sin 7y \sin 3y$

20. $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

21. $\frac{\tan 3\alpha - \tan 2\beta}{1 + \tan 3\alpha \tan 2\beta}$

في التمارين 22-28، أثبت صحة الصيغ التالية باستعمال متطابقات الفرق والمجموع.

22. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
23. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = \cos u$
24. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$
25. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$
26. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$
27. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$
28. $\frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

في التمارين 29-31، أوجد القيمة الدقيقة لكل مقدار من دون استعمال الحاسبة. ثم أوجد قيمة الدالة باستعمال الحاسبة، مقارنًا تقريب الإجابة بإجابتك الأولى.

29. $\tan 105°$

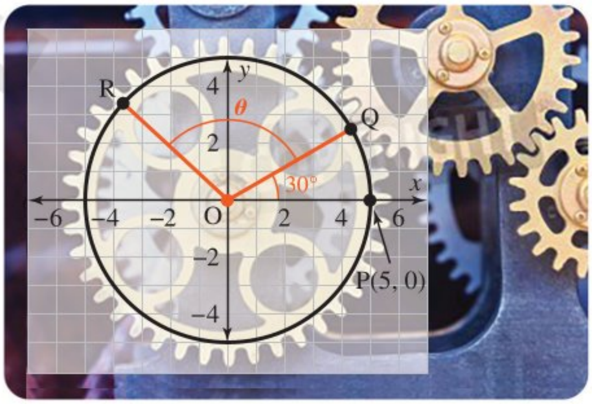
30. $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)$

31. $\cos 225°$

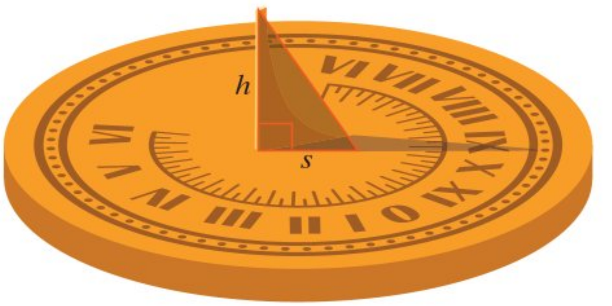
32. بالعودة إلى المثال 6، هل يلغي ضجيج تنمذج موجته الصوتية الدالة $y = \sin\left(660\pi\left(x - \frac{1}{220}\right)\right)$ ضجيجًا تنمذج موجته الصوتية الدالة $y = \sin\,(660\pi x)$؟ وضّح إجابتك.

33. تتم نمذجة الموجة الصوتية لآلة موسيقية بالدالة $y = \sin\,(1\,320\,\pi x)$. أما الموجة الصوتية لآلة موسيقية أخرى فتمّت نمذجتها بالدالة التالية $y = \sin\left[1\,320\,\pi\left(x + \frac{1}{220}\right)\right]$.
ما هي أبسط صيغة لمعادلة تنمذج الموجه الصوتية عند عزف الآلتين معًا؟

34. يظهر الرسم أدناه قرصًا مسننًا طول نصف قطره 5 cm، وتمثّل النقطة Q دوران النقطة P(5, 0) بزاوية مقدارها 30° عكس اتجاه دوران عقارب الساعة كما تمثّل النقطة R دورانًا إضافيًا بزاوية مقدارها θ من الدرجات. إحداثيا النقطة R هما
$(5\cos(\theta + 30°)\,,\,5\sin(\theta + 30°))$
عبّر عن إحداثيّي النقطة R بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$.



35. ليكن s طول ظل عصا مثبّتة على مركز ساعة شمسية و h طول هذه العصا. عندما تكوّن الشمس زاوية مقدارها θ مع الأفق فإن s يمكن نمذجتها بالدالة $s = \frac{h\sin(90° - \theta)}{\sin\theta}$.
برهن أن هذه المعادلة تكافىء المعادلة $s = h\cot\theta$.
(تلميح: حوّل الدرجات إلى راديان واستعمل متطابقة الزوايا المتتامة.)



أسئلة اختبار معيارية

36. **صواب أم خطأ** إذا كانت B و A زاويتين متكاملتين (مجموعهما 180°)، فإن $\cos A + \cos B = 0$. هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

37. **صواب أم خطأ** إذا كان $\cos A + \cos B = 0$، فإن B و A زاويتين متكاملتين. هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

38. **اختيار من متعدد** إذا كان $\cos A \cos B = \sin A \sin B$، فإن $\cos\,(A + B)$ يساوي:

A. 0

B. 1

C. $\cos A + \cos B$

D. $\cos B + \cos A$

E. $\cos A + \cos B = \sin A + \sin B$

39. **اختيار من متعدد** دالة لها الخاصية $f(1 + 2) = \frac{f(1) + f(2)}{1 - f(1)f(2)}$ هي:

A. $f(x) = \sin x$

B. $f(x) = \tan x$

C. $f(x) = \sec x$

D. $f(x) = e^x$

E. $f(x) = -1$

استكشاف

40. أثبت صحة المتطابقة $\tan\,(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

41. **الكتابة للتعلم** وضّح لماذا لا يمكننا استعمال المتطابقة الواردة في السؤال السابق في إثبات صحة صيغة التبسيط $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$. ثم أثبت صحة صيغة التبسيط.

42. **متطابقة لحساب التكامل والتفاضل** أثبت صحة المتطابقة التالية، التي تُستعمل في حساب التكامل والتفاضل لبرهنة قاعدة تفاضل مهمة.

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\,\frac{\sin h}{h}$$

43. متطابقة لحساب التكامل والتفاضل أثبت صحة المتطابقة التالية، التي تُستعمل في حساب التكامل والتفاضل لبرهنة قاعدة تفاضل مهمة.

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\cos x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\sin x\,\frac{\sin h}{h}$$

44. نشاط جماعي عيّن 24 نقطة على دائرة الوحدة بحيث تكون المسافات بين النقاط متساوية، ابتداءً من النقطة $(1, 0)$. باستعمال ما تعرفه عن الزوايا الخاصة ومتطابقات المجموع والفرق، اعمل مع مجموعتك على إيجاد الإحداثيات الدقيقة للنقاط الـ 24 كلها.

توسيع الأفكار

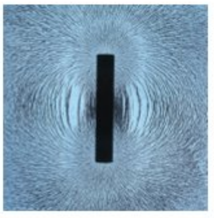
في التمارين 45-47، افترض أن A, B, C هي ثلاث زوايا في المثلث ABC. (لاحظ أن $A + B + C = \pi$). أثبت صحة المتطابقات التالية:

45. $\sin(A + B) = \sin C$

46. $\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$

47. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

48. الحقول المغناطيسية يمكن في بعض الأحيان نمذجة حقل مغناطيسي B في صورة مجموع حقل ساقط وحقل منعكس كما يلي:



$$B = B_{in} + B_{ref}$$

حيث $B_{in} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$

$B_{ref} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{c}\right)$

برهن أن $B = 2\frac{E_0}{c}\cos\omega t\cos\frac{\omega x}{c}$

7.3 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها Multiple-Angle Trigonometric Identities

ما ستتعلّمه

- متطابقات ضعف الزاوية
- متطابقات تبسيط القوى
- متطابقات نصف الزاوية

... ولماذا

يمكن استنتاج متطابقات ضعف الزاوية من متطابقات المجموع بسهولة، وتنشأ عن ذلك علاقات بين قوى الدوال المثلثية وقيمة الزاوية، وهذا له أهمية جبرية كبيرة.

معيار الدرس

11A.8.7

متطابقات ضعف الزاوية

تنتج متطابقات ضعف الزاوية عن متطابقات المجموع عندما نجعل تكون $u = v$.

متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos 2u = \begin{cases} \cos^2 u - \sin^2 u \\ 2\cos^2 u - 1 \\ 1 - 2\sin^2 u \end{cases}$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

مثال 1 إثبات صحة متطابقة لضعف الزاوية

أثبت صحة المتطابقة $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$.

الحل

$\sin 2u = \sin (u + u)$

$= \sin u \cos u + \cos u \sin u$ استعمل متطابقة جيب المجموع ($u = v$)

$= 2 \sin u \cos u$

حاول أن تحل التمرين 3

مثال 2 استعمال متطابقات ضعف الزاوية

أثبت صحة المتطابقة $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$.

الحل

$\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ تحليل الفرق بين مربعين

$= 1 \times (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ متطابقة فيثاغورس

$= \cos 2\theta$ متطابقة ضعف الزاوية

حاول أن تحل التمرين 7

متطابقات تبسيط القوى

من الاستعمالات المباشرة لاثنتين من متطابقات $\cos 2u$ إيجاد متطابقات تساعدنا على تبسيط القوى. لنأخذ مثلًا الدالة $y = \sin^2 u$، إنها دالة يصعب استعمالها في الكثير من الاستدلالات الرياضية لولا وجود صيغ أبسط لها، أو بشكل أدق لولا وجود صيغ لا تتضمن قوى.

متطابقات تبسيط القوى

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

مثال 3 تبسيط القوى

أعد كتابة $\cos^4 x$ بدلالة دوال دائرية لا تتضمن قوى أكبر من 1

الحل

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$$ متطابقة تبسيط القوى

$$= \left(\frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)$$ متطابقة تبسيط القوى

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

حاول أن تحل التمرين 13

متطابقات نصف الزاوية

يمكننا استعمال متطابقات تبسيط القوى لزيادة عدد الزوايا "الخاصة" التي لدينا، وهي الزوايا التي يمكننا إيجاد نسبها المثلثية من دون استعمال الحاسبة. لا نقصد بذلك أن هذه الطريقة عملية أكثر من استعمال الحاسبة لحساب النسب المثلثية لهذه الزوايا، لكننا نريد أن نفهم أكثر كيف يمكن أن يكون لدالة واحدة أوجه متعددة.

نشاط استكشافي 1 **إيجاد جيب نصف الزاوية**

تذكر صيغة تبسيط القوى $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$.

1. استعمل صيغة تبسيط القوى لتوضح أن $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

2. حل لإيجاد $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. هل تأخذ قيمة الجذر الموجبة أم السالبة؟ لماذا؟

3. استعمل صيغة تبسيط القوى لتوضح أن $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

4. حل لإيجاد $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$. هل تأخذ قيمة الجذر الموجبة أم السالبة؟ لماذا؟

متطابقات نصف الزاوية

$$\sin \frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}$$

مثال 4 **إيجاد نسب مثلثية باستعمال متطابقات نصف الزاوية**

أوجد القيم الدقيقة لكل مما يلي باستعمال متطابقات نصف الزاوية.

A. $\cos 15°$

B. $\sin 15°$

C. $\tan \frac{\pi}{8}$

الحل

A. أوجد أولًا الزاوية الخاصة التي تشكّل $15°$ نصفها

$$\cos 15° = \cos \frac{30°}{2}$$

خذ القيمة الموجبة لأن الزاوية تقع في الربع الأول

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

(تابع)

B. أوجد أولًا الزاوية الخاصة التي تشكّل °15 نصفها

$$\sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2}$$

خذ القيمة الموجبة لأن الزاوية تقع في الربع الأول

$$= \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

C. أوجد أولًا الزاوية الخاصة التي تشكّل $\frac{\pi}{8}$ نصفها

$$\tan \frac{\pi}{8} = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

خذ القيمة الموجبة لأن الزاوية تقع في الربع الأول

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

حاول أن تحل التمرين 20

مراجعة سريعة 7.3

في التمارين 1-5 أوجد القيمة الدقيقة باستعمال متطابقة المجموع أو الفرق.

1. $\cos 15^\circ$

2. $\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

3. $\cot 75^\circ$

4. $\csc 15^\circ$

5. $\sec \frac{5\pi}{12}$

في التمارين 6-11 اكتب المقدار في صورة جيب أو جيب التمام أو ظل لزاوية.

6. $\cos 46^\circ \cos 25^\circ + \sin 46^\circ \sin 25^\circ$

7. $\cos 18^\circ \cos 33^\circ + \sin 18^\circ \sin 33^\circ$

8. $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{7}$

9. $\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{4}$

10. $\dfrac{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 15^\circ \tan 25^\circ}$

11. $\dfrac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}}$

الدرس 7.3 التمارين

في التمارين 1-4، استعمل متطابقة المجموع أو الفرق المناسبة لإثبات صحة متطابقة ضعف الزاوية.

1. $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$

2. $\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

3. $\cos 2u = 1 - 2 \sin^2 u$

4. $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$

في التمارين 5-12، أثبت صحة المتطابقة.

5. $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

6. $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$

7. $2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$

8. $2 \cot 2x = \cot x - \tan x$

9. $\sin 3x = (\sin x)\left(4 \cos^2 x - 1\right)$

10. $\sin 3x = (\sin x)\left(3 - 4 \sin^2 x\right)$

11. $\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$

12. $\sin 4x = (4 \sin x \cos x)\left(2 \cos^2 x - 1\right)$

في التمارين 13-16، استعمل متطابقات تبسيط القوى لإثبات صحة المتطابقة.

13. $\sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$

14. $\cos^3 x = \left(\frac{1}{2} \cos x\right)(1 + \cos 2x)$

15. $\sin^3 2x = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)(1 - \cos 4x)$

16. $\sin^5 x = \left(\frac{1}{8} \sin x\right)(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$

في التمارين 17-21، استعمل متطابقات نصف الزاوية لإيجاد القيمة الدقيقة للمقدار.

17. $\tan 195°$

18. $\cos 75°$

19. $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

20. $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

21. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

في التمارين 22-25، اكتب المقدار بدلالة $\cos \theta$ و $\sin \theta$ فقط.

22. $\sin 2\theta + \cos \theta$

23. $\sin 2\theta + \cos 2\theta$

24. $\sin 2\theta + \cos 3\theta$

25. $\sin 3\theta + \cos 2\theta$

26. أثبت صحة متطابقتَي تبسيط القوى أدناه:

a. $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$

b. $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$

27. أثبت صحة متطابقتَي ظل نصف الزاوية أدناه:

a. $\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\sin u}$

b. $\tan \frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$

28. **a.** استعمل المتطابقتين الواردتين في التمرين 26 لإثبات صحة متطابقة تبسيط القوى التالية:

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

b. **الكتابة للتعلم** وضّح لماذا المتطابقة المذكورة في الجزء (a) لا تؤدي إلى $\tan u = \sqrt{\frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}}$.

أسئلة اختبار معيارية

29. صواب أم خطأ ناتج ضرب دالتين دورة كل منهما 2π هو دالة دورتها أيضًا 2π. برّر إجابتك.

30. صواب أم خطأ
$\cos^8 x - \sin^8 x = (\cos 2x)(\cos^4 x + \sin^4 x)$. برّر إجابتك.

31. اختيار من متعدد إذا كانت $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$، فإن $f(2x)$ تساوي:

A. $2f(x)$

B. $f(2)f(x)$

C. $f(x)g(x)$

D. $2f(x)g(x)$

E. $f(2)g(x) + g(2)f(x)$

32. اختيار من متعدد $\sin 22.5°$ يساوي:

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

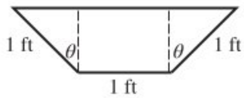
C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

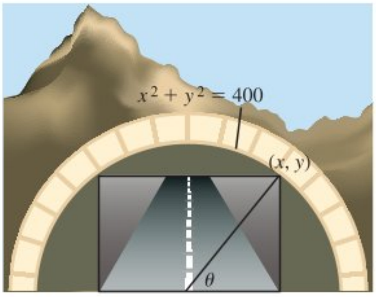
E. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

استكشاف

33. نشاط جماعي تكبير الحجم إلى أقصى حد يبيّن الشكل أدناه طرفَي حوض ماء، طوله 10 أقدام، على شكل شبه منحرف متساوي الجانبين. أوجد قيمة θ التي تعطي أقصى حد للحجم. أوجد أقصى حد لحجم الحوض.



34. نشاط جماعي مسألة نفق حُفر نفق مستطيل الشكل في جبل لإنشاء طريق. تقع الرؤوس العليا للمستطيل على الدائرة $x^2 + y^2 = 400$، كما هو مبيّن في الشكل.



a. برهن أن مساحة المقطع العرضي للنفق تساوي $400 \sin 2\theta$

b. أوجد أبعاد طرف النفق المستطيل الشكل التي تعطي أكبر قيمة لمساحة المقطع العرضي للنفق.

توسيع الأفكار

في التمارين 35-39، أثبت صحة متطابقة ضعف الزاوية من دون استعمال الحاسبة.

35. $\csc 2u = \frac{1}{2}\csc u \sec u$

36. $\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2 \cot u}$

37. $\sec 2u = \frac{\csc^2 u}{\csc^2 u - 2}$

38. $\sec 2u = \frac{\sec^2 u}{2 - \sec^2 u}$

39. $\sec 2u = \frac{\sec^2 u \csc^2 u}{\csc^2 u - \sec^2 u}$

40. الكتابة للتعلم اشرح لماذا $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = |\sin x|$ متطابقة، بينما $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sin x$ ليست كذلك.

7.4 المعادلات المثلثية Trigonometric Equations

ما ستتعلّمه

- المعادلات المثلثية البسيطة
- حل معادلات مثلثية باستعمال المتطابقات

... ولماذا

يمكن تمثيل بعض المواقف الحياتية بمعادلات تتضمن دوال دائرية، لذا ينبغي معرفة خصائص هذه المعادلات وطرق حلها.

معيار الدرس

11A.8.5

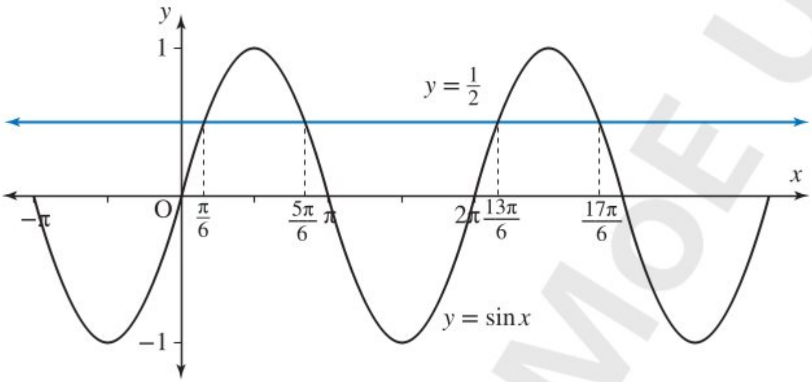
المصطلحات

- معادلات مثلثية trigonometric equations

المعادلات المثلثية البسيطة

تعرفنا في الدرس 7.1 على المتطابقات المثلثية وهي عبارات صحيحة لجميع قيم المتغير. في هذا الدرس سنتعرف على طرائق حل معادلات تتضمن دوال الجيب وجيب التمام والظل وتُسمى **بالمعادلات المثلثية** ومنها على سبيل المثال: $\sin x = \frac{1}{2}$ و $5\cos x = 3$ وهي عبارات صحيحة لبعض قيم المتغير في المجال.

عند السؤال عن الزاوية x التي تحقق $\sin x = \frac{1}{2}$، قد نحصل على إجابات متعددة. فقد تكون الإجابة $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$ أو $x = \frac{13\pi}{6}$ أو $x = \frac{17\pi}{6}$ وكلها إجابات صحيحة، لأن دالة الجيب، في الواقع، هي دالة دورية، كما يظهر في الشكل التالي وهذا يعني أن كل قيمة في مدى الدالة هي قيمة تتكرّر على مجالها.



عندما تكون قيمة النسبة المثلثية معطاة فإن الحصول على الزوايا يتطلب استعمال معكوس تلك النسب المثلثية لإيجاد الزاوية المرجعية، ثم تحديد جميع الزوايا التي لها نفس قيمة الدالة المثلثية المعطاة على المجال المحدد.

إن حل أي معادلة مثلثية بسيطة يتضمن أربع خطوات.

الخطوة 1 عزل النسب المثلثية في أحد طرفي المعادلة.

الخطوة 2 إيجاد الزوايا المرجعية باستعمال معكوس النسب المثلثية أو استعمال الحاسبة إن لم تكن من الزوايا الخاصة.

الخطوة 3 تحديد الربع (أو الأرباع) الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية وإيجاد قيمتها.

الخطوة 4 تحديد جميع الزوايا المتطارفة مع الزوايا في الأرباع ضمن المجال المحدد.

مثال 1 الحل العام لمعادلات مثلثية بسيطة

A. حل المعادلة $\cos x = 0.57$ حيث x بالدرجات.

B. حل المعادلة $\tan x = -0.35$ حيث x بالراديان.

الحل

A. الخطوة 1 نلاحظ أن $\cos x$ معزولة في أحد طرفَي المعادلة.

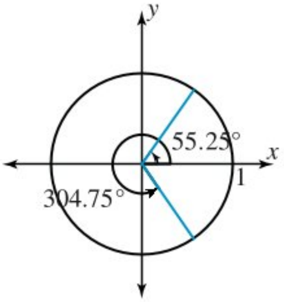
الخطوة 2 اكتب دالة معكوس جيب التمام $x = \cos^{-1}(0.57)$

ثم استعمل الحاسبة لإيجاد الزاوية المرجعية x'.

$x' = \cos^{-1}(0.57) = 55.25°$

الخطوة 3 حدّد الأرباع التي تنتمي إليها الزاوية x

بما أن جيب التمام موجب فإن ضلع انتهاء هذه الزاوية يقع في الربع الأول أو يقع في الربع الرابع.



في الربع الاول	في الربع الرابع
$x = x'$	$x = 360° - x'$
$x = 55.25°$	$x = 360° - 55.25°$
	$x = 304.75°$

الخطوة 4 حدّد جميع الزوايا المتطارفة

الزاوية $55.25°$ متطارفة مع $55.25° + (360°)k$ حيث k هو عدد صحيح.

الزاوية 304.75 متطارفة مع $304.75 + (360°)k$ حيث k هو عدد صحيح.

إذن، الحل العام للمعادلة هو $55.25° + (360°)k$ أو $304.75° + (360°)k$ حيث k هو عدد صحيح.

B. الخطوة 1 نلاحظ أن $\tan x$ معزولة في أحد طرفَي المعادلة.

الخطوة 2 استعمل الحاسبة لإيجاد الزاوية المرجعية x'

$x' = \tan^{-1}|-0.35| = 0.34 \text{ rad}$

الخطوة 3 حدّد الربع (أو الأرباع) الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية

(تابع)

تنبيه

إن القيم الناتجة للزوايا هي قيم تقريبية.

إرشاد

لحساب قياس الزاوية المرجعية يتم إيجاد معكوس النسبة المثلثية للقيمة المطلقة لقيمة النسبة المثلثية للزاوية لأن الزاوية المرجعية زاوية حادة.

بما أن ظل الزاوية سالب فإن ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الثاني أو في الربع الرابع.

في الربع الثاني $x = \pi - 0.34$ وفي الربع الرابع $x = 2\pi - 0.34$

≈ 2.8 rad $\qquad \approx 5.94$ rad

الخطوة 4 حدّد جميع الزوايا المتطارفة

الزاوية 2.8 متطارفة مع $2.8 + 2k\pi$

الزاوية 5.94 متطارفة مع $5.94 + 2k\pi$

إذن الحل العام للمعادلة هو $2.8 + 2k\pi$ أو $5.94 + 2k\pi$ حيث k هو عدد صحيح.

حاول أن تحل التمرين 1

إن عدد حلول المعادلات المثلثية سيكون محدودًا عند تحديد المجال.

مثال 2 حل معادلة مثلثية على مجال محدد

أوجد حل المعادلة المثلثية $6 \sin \theta = 3 \sin \theta + 2$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

الحل

الخطوة 1 اعزل $\sin \theta$

اكتب المعادلة الأصلية	$6 \sin \theta = 3 \sin \theta + 2$
اطرح $3 \sin \theta$ من طرفَي المعادلة	$3 \sin \theta = 2$
اعزل دالة الجيب	$\sin \theta = \frac{2}{3}$

الخطوة 2 استعمال الحاسبة لإيجاد الزاوية المرجعية θ'.

$$\theta' = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\theta' = 0.73 \text{ rad}$$

الخطوة 3 حدّد الأرباع التي تنتمي اليها الزاوية θ وقياسها.

بما أن جيب الزاوية موجب فإن ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الاول أو في الربع الثاني.

في الربع الأول

$\theta = \theta'$

$= 0.73$ rad

في الربع الثاني

$\theta = \pi - \theta'$

$= \pi - 0.73 = 2.41$ rad

الخطوة 4 تحديد جميع الزوايا المتطارفة في المجال.

الحل العام للمعادلة هو $\theta = 0.73 + (2\pi)k$ أو $\theta = 2.41 \text{ rad} + (2\pi)k$ حيث k عدد صحيح.

(تابع)

لإيجاد الحل في المجال $[0, 2\pi[$ نعوّض $k = 0$:

$$\theta = 2.41 \text{ rad} \text{ أو } \theta = 0.73 \text{ rad}$$

إذن، حلا المعادلة في المجال $[0\ ,\ 2\pi[$ هما $\theta = 0.73$ rad أو $\theta = 2.41$ rad.

حاول أن تحل التمرين 7

قد تستعمل ما تعلمته سابقًا من التقنيات الجبرية لحل معادلات مثلثية أكثر تعقيدًا كما في المثال التالي.

مثال 3 حل معادلة مثلثية باستعمال التحليل إلى العوامل

أوجد كل حلول المعادلة المثلثية $2\sin^2 x + \sin x = 1$

الحل

الخطوة 1 اعزل $\sin x$، لاحظ أن المعادلة هي معادلة تربيعية في $\sin x$.

ليكن $y = \sin x$. يمكن حل المعادلة $2y^2 + y = 1$ باستعمال التحليل إلى العوامل.

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

$$2y - 1 = 0 \text{ أو } y + 1 = 0$$

$$y = \tfrac{1}{2} \text{ أو } y = -1$$

إذن، في المعادلة الأصلية $\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = -1$. نجد حل كل معادلة على حدة،

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

الخطوة 2 استعمل الحاسبة لإيجاد الزاوية المرجعية x'.

$$x' = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

الخطوة 3 حدّد الأرباع التي تنتمي إليها الزاوية x وقياسها.

بما أن $\sin x > 0$ فإن الزاوية تنتمي للربع الأول أو الربع الثاني.

في الربع الأول:

$$x = x' = 30°$$

في الربع الثاني:

$$x = 180 - x'$$

$$x = 180° - 30° = 150°$$

$$\sin x = -1$$

إذن، الزاوية x هي زاوية ربعية.

من دائرة الوحدة نجد أن $x = 270°$

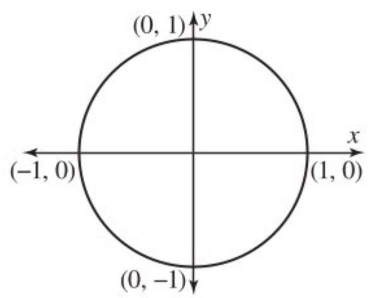
(تابع)

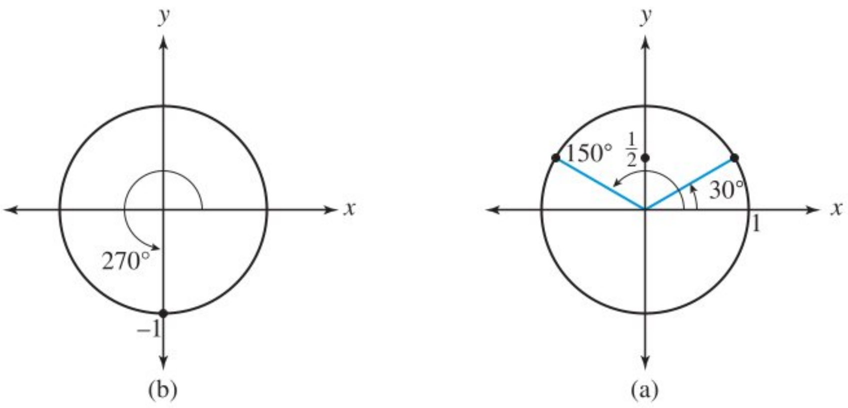
تذكير

إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي الصفر فيجب أن يكون أحدهما على الأقل يساوي الصفر.

إرشاد

إذا كانت $\sin x$ أو $\cos x$ تساوي 1 أو 0 أو −1 فإن الزاوية x تكون زاوية ربعية.





الشكل 7.4.2 (a) الحلّان للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 360°[$ هما $30°$ و $150°$ (b) الحل للمعادلة $\sin x = -1$ في الفترة $[0, 360°[$ هو $270°$

الخطوة 4 تحديد الزوايا المتطارفة

لنحصل على كل الحلول، نضيف ببساطة مضاعفات أعداد صحيحة للدورة $360°$، للدالة الأصلية $\sin x$:

$$x = 30° + 360°k \quad \text{أو} \quad x = 150° + 360°k \quad \text{أو} \quad x = 270° + 360°k$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

حاول أن تحل التمرين 19

حل معادلات مثلثية باستعمال المتطابقات

قد نجد في بعض المعادلات المثلثية نسبًا مثلثية لضعف الزاوية أو نصفها. في هذه الحالة لا تكفي تقنيات الجبر لحل المعادلة بل نحن بحاجة إلى استعمال المتطابقات المثلثية لتحويلها إلى معادلة مثلثية بسيطة.

مثال 4 حل معادلة مثلثية باستعمال متطابقة ضعف الزاوية

أوجد حل المعادلة المثلثية $\sin 2x = \cos x$ في الفترة $[0, 2\pi[$.

الحل

الخطوة 1 أوجد قيمة كل من $\sin x$ و $\cos x$.

$$\sin 2x = \cos x$$

$$2 \sin x \cos x = \cos x$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x\,(2 \sin x - 1) = 0$$

$2 \sin x - 1 = 0$ أو $\cos x = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = 0$

نجد حل كل معادلة على حدة،

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

الخطوة 2 استعمل الحاسبة لإيجاد الزاوية المرجعية x'.

$$x' = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

الخطوة 2 حدّد الأرباع التي تنتمي إليها الزاوية x وقياسها.

بما أن $\sin x > 0$ فإن x تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

في الربع الأول:

$$x = \frac{\pi}{6}$$

في الربع الثاني:

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos x = 0$$

إذن، الزاوية x زاوية ربعية.

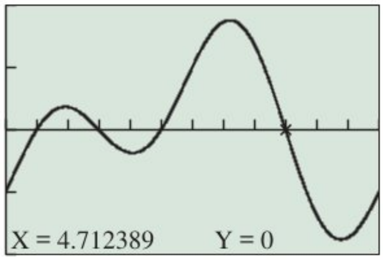
باستعمال دائرة الوحدة نجد أن $x = \frac{\pi}{2}$

أو $x = \frac{3\pi}{2}$

إذن، حلول المعادلة $\sin 2x = \cos x$ في المجال $[0, 2\pi[$ هي $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.

يمكننا دعم هذه النتيجة بيانيًا من خلال التحقق من مقاطع x الأربعة للدالة $y = \sin 2x - \cos x$ في الفترة $[0, 2\pi[$ (انظر الشكل 7.4.3).

حاول أن تحل التمرين 25



$[0, 2\pi]$ في $[-2, 2]$

الشكل 7.4.3 الدالة $y = \sin 2x - \cos x$ حيث $0 \le x \le 2\pi$

المقياس للمحور x يبيّن فترات طول كل منها $\frac{\pi}{6}$. يؤكد المنحنى الحل الذي تم إيجاده جبريًا في المثال 4، يمكن استعمال خاصية "TRACE" في الحاسبة البيانية مع $x = \frac{3\pi}{2}$ لتبيّن الحل $\frac{3\pi}{2}$

مثال 5 حل معادلات مثلثية باستعمال متطابقات نصف الزاوية

حل المعادلة $\sin^2 x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ في الفترة $[0, 2\pi[$

الحل

جبريًا

$$\sin^2 x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

استعمل متطابقة جيب نصف الزاوية $\sin^2 x = 2\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)$

استعمل $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $\quad 1 - \cos^2 x = 1 - \cos x$

اطرح $1 - \cos x$ من طرفي المعادلة $\quad \cos x - \cos^2 x = 0$

اخرج العامل المشترك $\cos x$ $\quad \cos x(1 - \cos x) = 0$

$\cos x = 0$ أو $\cos x = 1$

نحل كل معادلة على حدة:

$\cos x = 1$

$x = \cos^{-1}(1) = 0$

إذن، $x = 0$

$\cos x = 0$

$x = \cos^{-1}(0)$

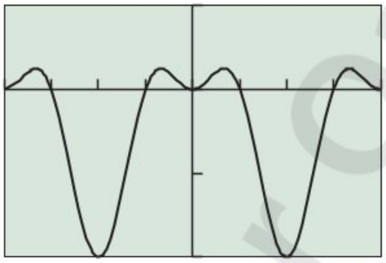
$x = \frac{\pi}{2}$

هذه المعادلة لها حلّ آخر على الفترة $[0, 2\pi[$ هو $x = \frac{3\pi}{2}$

إذن، حلول المعادلة $\sin^2 x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ في الفترة $[0, 2\pi[$ هي
$x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$

تحقّق بيانيًا

يمكن التحقّق بيانيًا من مقاطع x الثلاثة للدالة $y = \sin^2 x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ في الفترة $[0, 2\pi[$ (انظر الشكل 7.4.4)



الشكل 7.4.4 $[-2\pi, 2\pi]$ في $[-2, 1]$

حاول أن تحل التمرين 31

مثال 6 **استعمال نموذج مثلثي**

تمت في إحدى المناطق الباردة نمذجة المعدّل الشهري لدرجات الحرارة بالدالة $T = 4\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 14$ حيث T هي درجة الحرارة و x هي الشهر باعتبار بداية يناير هو الشهر رقم 1، في أي شهر من السنة يكون معدّل درجات الحرارة يساوي 15°C؟

الحل

نبدأ أولًا بتحديد دورة الدالة T.

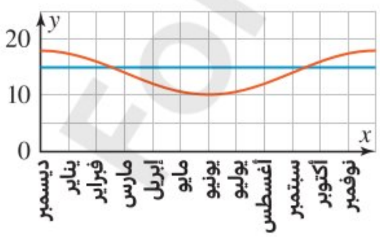
الدورة $= \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ (وهي تمثّل عدد أشهر السنة).

الآن نحل المعادلة لإيجاد قيمة T عندما يساوي معدّل درجات الحرارة 15°C

اكتب المعادلة الأصلية	$T = 4\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 14$
عوّض $T = 15$	$15 = 4\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 14$
اطرح 14 من طرفَي المعادلة	$1 = 4\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$
اعزل دالة جيب التمام	$\frac{1}{4} = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$
استعمل معكوس دالة جيب التمام	$\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi x}{6}$
اعزل x عبر ضرب طرفَي المعادلة في $\frac{6}{\pi}$	$\frac{6\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi} = x$
استعمل الحاسبة لإيجاد x	$x \approx 2.5$

أحد حلول هذه المعادلة هو 2.5 ولكن الدالة دورية لذا تصل إلى القيمة 15 عند نقطة أخرى.
يكون الحل الآخر ضمن الدورة هو $x = 12 - 2.5 = 9.5$.
أي أن معدل درجات الحرارة يساوي 15°C في منتصف شهر فبراير ومنتصف شهر سبتمبر.

تحقّق بيانيًا



حاول أن تحل التمرين 37

تذكر

عندما تكون الدلة في الصورة $f(x) = \cos(bx)$
فإن دورتها تساوي $\frac{2\pi}{|b|}$

مراجعة سريعة 7.4

في التمارين 1-6، استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يلي: أعطِ الإجابات بالدرجات وبالراديان.

1. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. $\tan^{-1}(-1)$

6. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

في التمارين 7-10، استعمل متطابقات نصف الزاوية لإيجاد القيمة الدقيقة للمقدار.

7. $\sin 75°$

8. $\cos \frac{5\pi}{12}$

9. $\sin \frac{\pi}{12}$

10. $\cos 22.5°$

الدرس 7.4 التمارين

في التمارين 1-6، أوجد كل قيم الزوايا التي لها النسبة المثلثية المعطاة. أعطِ الإجابات بالدرجات مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

1. $\sin x = 0.95$

2. $\cos x = 0.54$

3. $\sin x = 0.64$

4. $\cos x = -0.6293$

5. $\sin x = -0.39$

6. $\tan x = -0.6293$

في التمارين 7-11، أوجد قيمة θ لكل معادلة في الفترة $[0, 2\pi[$.

7. $0.25 \cos \theta + 1 = 1.5 \cos \theta$

8. $3 \tan \theta - 4 = \tan \theta$

9. $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$

10. $2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0$

11. $2 \cos^2 \theta - 1 = 0$

في التمارين 12-17، أوجد الحل العام للمعادلة.

12. $\tan x - 1 = 0$

13. $\tan x + 1 = 0$

14. $(\cos x)(1 - \sin x) = 0$

15. $(\sin x)(1 + \cos x) = 0$

16. $(2 \sin x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$

17. $(\sin x + 1)\left(2 \cos x - \sqrt{2}\right) = 0$

18. أوجد الحل العام للمعادلة $2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$
(تلميح: حلّل ثلاثية الحدود إلى عواملها)

في التمارين 19-24، أوجد كل حلول المعادلة من دون استعمال الحاسبة.

19. $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

20. $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$

21. $\sin^2 \theta - 2 \sin \theta = 0$

22. $3 \sin t = 2 \cos^2 t$

23. $\cos(\sin x) = 1$

24. $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$

في التمارين 25-28، حل جبريًا لإيجاد قيم دقيقة في الفترة $[0, 2\pi[$. استعمل الحاسبة البيانية لدعم إجابتك الجبرية فقط.

25. $\cos 2x + \cos x = 0$

26. $\cos 2x + \sin x = 0$

27. $\sin 2x + \sin 4x = 0$

28. $\cos 2x + \cos 4x = 0$

في التمرينين 29 و 30، استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد كل الحلول الدقيقة في الفترة $[0, 2\pi[$ (تلميح: كل الحلول هي مضاعفات نسبية للقيمة π).

29. $\sin 2x - \cos 3x = 0$

30. $\sin 3x + \cos 2x = 0$

في التمارين 31-36، استعمل متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل الحلول في الفترة $[0, 2\pi[$. ثم أوجد الحل العام.

31. $\cos^2 x = \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)$

32. $\sin^2 x = \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)$

33. $\tan \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

34. $\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \cos x - 1$

35. $\sin x + \cos x = 0$

36. $\sin x - \cos x = 0$

37. المعدل الشهري لدرجات الحرارة القصوى في احدى المدن تمت نمذجته بالدالة التالية $T = 30 \sin \left(\frac{\pi}{6} x - 1.8\right) + 61$
حيث يمثّل T المعدل الشهري لدرجات الحرارة بالفهرنهايت،
ويمثّل x الشهر حيث أن بداية شهر يناير يقابل $x = 1$.
استعمل هذه الدالة لإيجاد الشهر الذي يكون فيه معدل درجات الحرارة القصوى $54°$

38. في سباق للسيارات السريعة تنافس سيارة محركها ذو ضجيج عالٍ. صوت محرك هذه السيارة V ، مقيسًا بال dB، يمكن تعريفه بالعلاقة $V = -12 \sin \left(\frac{2\pi}{15} t\right) + 70$. حيث t هو الزمن بالدقائق منذ مرور السيارة بموقع المراقب. متى سيكون صوت محرك السيارة يساوي 65 dB؟

أسئلة اختبار معيارية

39. صواب أم خطأ أوجد خالد قيمة الزوايا، بالراديان، التي جيبها يساوي 1 على الشكل التالي.

$$\sin x = 1$$
$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.

40. صواب أم خطأ حل حامد المعادلة المثلثية عند قيمة θ، على الشكل التالي.

$$2 \sin \theta + 3 = 4$$
$$2 \sin \theta = 1$$
$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ أو } \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.

حل التمرينين 41 و 42 دون استعمال الحاسبة.

41. **اختيار من متعدد** عدد حلول المعادلة $\sin 2x = \cos x$، في الفترة $[0, 2\pi[$ هو:

A. صفر

B. واحد

C. اثنان

D. ثلاثة

E. أربعة

42. **اختيار من متعدد** عدد حلول المعادلة $3\cos^2 x + \cos x = 2$، في الفترة $[0, 2\pi[$ هو:

A. صفر

B. واحد

C. اثنان

D. ثلاثة

E. أربعة

استكشاف

43. **حركة البندول** رُفع بندول من وضعية السكون ثم أُفلت. تنمذج المعادلة $h = 2\cos(\pi t) + 6$ الارتفاع h، بالإنش، كدالة للزمن في t ثانية.

a. حل المعادلة لإيجاد t.

b. أوجد t عندما يكون البندول على ارتفاع 5 إنش للمرة الأولى. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من المئة من الثانية.

44. يمكن نمذجة حركة المد والجزر على أحد الشواطئ بالمعادلة $h = 4.5 \cos \frac{3\pi}{17} t$، حيث h ارتفاع الموج، بالأقدام، فوق متوسط مستوى سطح الماء، و t عدد الساعات بعد منتصف الليل. أوجد الوقت الذي يكون فيه الموج على ارتفاع $2\frac{1}{2}$ قدم فوق متوسط مستوى سطح البحر.

توسيع الأفكار

45. **في برج المراقبة** طلب العاملون في برج المراقبة في أحد المطارات من قبطان طائرة المحافظة على نمط طيران مستقر فوق المطار ريثما يسمح لها بالهبوط. تمثّل الدالة $d(x) = 70 \sin (0.60x) + 120$ المسافة الأفقية d، بالأميال، التي تفصل الطائرة عن المطار عند الوقت x، بالدقائق.

a. أوجد المسافة التي تفصل الطائرة عن المطار عندما تبدأ الطائرة بالطيران المستقر، $x = 0$.

b. بعد 15 دقيقة من بدء الطائرة بالطيران المستقر، أوجد x، عندما تكون الطائرة على بعد 187 ميل من المطار بالضبط.

الوحدة 7 مراجعة الوحدة

في التمرينين 1 و 2 حل من دون استعمال الحاسبة.

1. أوجد $\sin\theta$ و $\tan\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{5}{13}$ و $\sin\theta > 0$.

2. أوجد $\csc\theta$ و $\sec\theta$ إذا كان $\tan\theta = -4$ و $\sin\theta < 0$.

في التمارين 3-8، اكتب العبارة في صورة جيب، أو جيب التمام، أو ظل لزاوية.

3. $2\sin 100^\circ \cos 100^\circ$

4. $\frac{2\tan 40^\circ}{1-\tan^2 40^\circ}$

5. $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

6. $\cos 66^\circ \cos 35^\circ - \sin 66^\circ \sin 35^\circ$

7. $\sin 73^\circ \cos 21^\circ - \cos 73^\circ \sin 21$

8. $\frac{\tan 54^\circ + \tan 20^\circ}{1-\tan 54^\circ \times \tan 20^\circ}$

في التمرينين 9 و 10، بسّط العبارة إلى حد واحد.

9. $\sin(55^\circ + x) - \cos(35^\circ - x)$

10. $\sec 50^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \csc 50^\circ$

في التمارين 11-13، أوجد القيمة الدقيقة باستعمال المتطابقة المناسبة.

11. $\tan 105^\circ$

12. $\sin 22.5^\circ$

13. $\cos 210^\circ$

في التمارين 14-26، أثبت صحة المتطابقة.

14. $\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$

15. $2\sin\theta\cos^3\theta + 2\sin^3\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

16. $\csc x - \cos x \cot x = \sin x$

17. $\frac{\tan\theta + \sin\theta}{2\tan\theta} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

18. $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} + \frac{1+\cot\theta}{1-\cot\theta} = 0$

19. $\cos^2 2x - \cos^2 x = \sin^2 x - \sin^2 2x$

20. $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\sec t}{2\sec t}$

21. $\frac{\cos x}{1-\tan x} + \frac{\sin x}{1-\cot x} = \cos x + \sin x$

22. $(1+\tan^2\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1$

23. $\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \frac{1-\cos y}{|\sin y|}$

24. $\sqrt{\frac{1-\sin y}{1+\sin y}} = \frac{|\cos y|}{1+\sin y}$

25. $\tan\left(u + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\tan u - 1}{1+\tan u}$

26. $(1+\cot y - \csc y)(1+\tan y + \sec y) = 2$

في التمرينين 27 و 28، استعمل حاسبة بيانية لتتحقّق ممّا إذا كانت المعادلة تمثّل متطابقة صحيحة. أكد صحة افتراضك.

27. $\sec x - \sin x \tan x = \cos x$

28. $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\tan^2\alpha + 1) = \tan^2\alpha - 1$

29. اكتب $(\cos^2 2x - \sin 2x)$ بدلالة $\sin x$ و $\cos x$ فقط.

في التمارين 30-34، أوجد الحل العام للمعادلة من دون استعمال الحاسبة. أعطِ إجابات دقيقة.

30. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

31. $\tan x = -1$

32. $2\sin x = \sqrt{2}$

33. $\tan x = 1$

34. $\sin 2x = 0.5$

في التمارين 35-39، أوجد كل الحلول في الفترة $[0, 2\pi[$
من دون استعمال الحاسبة. أعطِ إجابات دقيقة.

35. $2 \cos x = 1$

36. $\sin 2x = \sin x$

37. $\sin^2 2x = 2 \cos^2 x$

38. $\sin x (\cos x - 1) = 0$

39. $\cos 2x + 5 \cos x = 2$

40. المعدل اليومي لدرجات الحرارة في إحدى المدن تمت نمذجته بالدالة $T = 15 \cos \left(\frac{2\pi}{365} x\right) + 21.5$
حيث يمثّل T المعدل اليومي لدرجات الحرارة (°C)
ويمثّل x اليوم من السنة بعد الأول من يناير.
استعمل هذه الدالة لإيجاد اليوم من السنة الذي يكون فيه معدل درجات الحرارة مساويًا لـ 24°C

41. القوة اللازمة لدفع جسم ما في وضع السكون عبر زاوية معينة يمكن نمذجتها بواسطة الصيغة التالية: $F = Mg \tan \theta$ ، حيث F هي قوة الدفع، M هي كتلة الجسم، g هو التسارع بسبب الجاذبية و θ هي الزاوية التي دفع منها الجسم.
اكتب معادلة مكافئة لهذا الصيغة بدلالة $\sin \theta$ و $\sec \theta$

الوحدة 7 تقويم

1. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$ إذا كان $\tan\theta = 3$ و $\cos\theta < 0$ من دون استعمال الحاسبة.

في التمارين 2-5، بسّط المقدار باستعمال المتطابقة المناسبة.

2. $\cot x \times \sin x$.

3. $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$

4. $\sin x - \sin^3 x$

5. $\dfrac{1+\cot x}{1+\tan x}$

في التمرينين 6 و 7 أثبت صحة المتطابقة.

6. $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$

7. $\csc 4u = \frac{1}{2}\csc 2u \sec 2u$

في التمارين 8-10، أوجد القيمة الدقيقة باستعمال المتطابقة المناسبة.

8. $\tan 75°$

9. $\sin 15°$

10. $\cos 22.5°$

في التمارين 11-13 أوجد حلول المعادلة من دون استعمال الحاسبة.

11. $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

12. $\tan^2\theta - 3 = 0$

13. $\cos^2\theta - 2\cos\theta = 0$

14. أوجد حل المعادلة ($2\cos 2x = 1$) من دون استعمال الحاسبة. أعطِ إجابة دقيقة.

15. أوجد كل الحلول للمعادلة ($\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$) في الفترة $[0, 2\pi[$ من دون استعمال الحاسبة.
أعطِ إجابات دقيقة.

16. المعدل النصف شهري لدرجات الحرارة في إحدى المدن تمت نمذجته بالدالة $T = 7.5\sin\left(\frac{\pi}{12}(x-10)\right) + 10.5$
حيث يمثّل T المعدل اليومي لدرجات الحرارة (°C) ويمثّل x اليوم من السنة بعد الأول من يناير.
استعمل هذه الدالة لإيجاد اليوم من السنة الذي يكون فيه معدل درجات الحرارة مساويًا لـ 14°C

الوحدة 7 المشروع

نمذجة إضاءة القمر

يبدو القمر من الأرض أحيانًا على شكل قرص دائري مضيء في السماء، ثم يبدأ ذلك الجزء المضيء بالتناقص متخذًا أشكالًا مختلفة تبعًا للجزء الذي تنيره أشعة الشمس. يتّخذ القمر في مطلع الشهر القمري شكل هلال يكاد لا يُرى، ثم يبدأ بالاكتمال حتى يصبح بدرًا كاملًا. قام أحد المراصد البحرية بتصميم نموذج رياضي لقياس النسبة المضاءة من القمر عند منتصف الليل طوال شهر يناير من العام 2014. يبيّن الجدول التالي النتائج التي توصل إليها هذا المرصد.

نسبة الجزء المضيء من القمر، يناير 2014

اليوم	النسبة المضيئة	اليوم	النسبة المضيئة	اليوم	النسبة المضيئة	اليوم	النسبة المضيئة
1	1.00	9	0.32	17	0.03	25	0.68
2	0.97	10	0.23	18	0.07	26	0.78
3	0.92	11	0.15	19	0.13	27	0.87
4	0.84	12	0.09	20	0.20	28	0.94
5	0.74	13	0.04	21	0.28	29	0.98
6	0.64	14	0.01	22	0.38	30	1.00
7	0.53	15	0.00	23	0.48	31	0.99
8	0.42	16	0.01	24	0.58		

استكشافات

1. مثّل بيانات الجدول بيانيًا باستعمال الحاسبة أو الحاسوب.

2. أوجد قيم a، b، h و k حتى تكون المعادلة $y = a\cos(b(x-h)) + k$ نموذجًا يعبّر عن بيانات الجدول.

3. تحقق بيانيًا من المتطابقة $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ من خلال تعويض $\frac{\pi}{2}-\theta$ مكان θ في النموذج السابق واستعمال sin عوضًا عن cos، [مساعدة: $\theta = b(x-h)$].
ولاحظ كم يتطابق النموذج الجديد مع جدول البيانات.

4. تحقق بيانيًا من المتطابقة $\cos\theta = \cos(-\theta)$ من خلال تعويض $-\theta$ مكان θ في النموذج السابق، ولاحظ كم يتطابق النموذج الجديد مع جدول البيانات.

5. أوجد قيم a، b، h، و k حتى تكون المعادلة $y = a\sin(b(x-h)) + k$ نموذجًا يعبّر عن بيانات الجدول.

6. تحقق بيانيًا من المتطابقة $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ من خلال تعويض $\frac{\pi}{2}-\theta$ مكان θ في النموذج السابق واستعمال cos عوضًا عن sin، [مساعدة: $\theta = b(x-h)$].
ولاحظ كم يتطابق النموذج الجديد مع جدول البيانات.

7. تحقق بيانيًا من المتطابقة $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ من خلال تعويض $-\theta$ مكان θ في النموذج السابق، وتمثيل $-a\sin(-\theta) + k$.
قارن بين هذا النموذج والنموذج الأصلي.

الوحدة 8

الاحتمالات وطرق العد

تحتل الفروع التقليدية في الرياضيات، كالجبر والهندسة والتحليل الرياضي، الحيّز الأكبر في مناهج التعليم المدرسي، وتؤجّل موضوعات عديدة جديرة بالاهتمام، كحساب الاحتمال والإحصاء والتوافيق ونظرية البيان والتحليل العددي، إلى المرحلة الجامعية. لكن هذا الوضع بدأ يتغير بعد أن أصبحت التطبيقات الواقعية لفروع الرياضيات الأخرى تلعب دورًا مهمًّا في الحياة المعاصرة للمجتمعات الحديثة التي تعيش الآن في عصر المعلومات. ففي القطاعات المهنية، مثلًا، تلجأ الشركات إلى المعلومات والبيانات التي تستقيها من المستهلكين للترويج لمنتجاتها أو لإنتاج منتج جديد. كذلك تقرر الحكومات سياساتها بناءً على المعطيات السكانية ومؤشرات النمو الاقتصادي. وفي الأبحاث الطبية يقوم الباحثون باختبار الأدوية الجديدة على عدد من المرضى ويجمعون المعطيات لمعرفة ما إذا كانت هذه الأدوية آمنة وفعالة أم لا. كذلك تتنبأ المراصد الجوية بأحوال الطقس بناءً على جملة من المعطيات المناخية. وتشير استطلاعات الرأي إلى المرشّح الأوفر حظًّا للفوز في الانتخابات المقبلة.

لقد أصبحت الأمور في عالمنا اليوم، وفي كل مجال من مجالات الحياة، تتقرر بناءً على الترجيحات الاحتمالية، الأمر الذي يستدعي استيعاب مفهومي "الاحتمال" و"مبادئ العد" بعمق والتمرّس في حساب الاحتمالات. لذا نستعرض في هذه الوحدة المفاهيم والمهارات اللازمة للدخول إلى عالم حساب الاحتمال الذي فرض نفسه باعتباره الطريقة المثلى لفهم عالمنا المعقد.

8.1 مبدأ العد الأساسي Fundamental Counting Principle

ما ستتعلّمه
- مبدأ الضرب في العد
- مضروب العدد

... ولماذا
إذا كنت تعرف قواعد العد، بإمكانك أن تجد بدقة عدد العناصر في المجموعات المنتهية مهما كبرت.

معايير الدرس
11A.2.1

المصطلحات
- مخطط الشجرة tree diagram
- مبدأ الضرب في العد multiplication rule
- مضروب العدد factorial

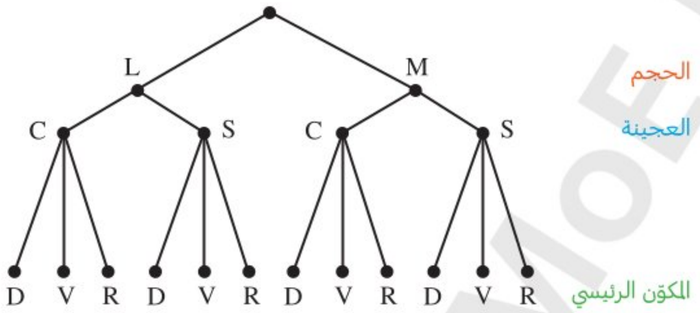
مبدأ الضرب في العد

تمرّ عملية طلب البيتزا في أحد المطاعم بثلاث مراحل.

- في المرحلة الأولى يتم اختيار حجم البيتزا من بين حجمين: الكبير L أو المتوسط M.
- في المرحلة الثانية يتم اختيار عجينة البيتزا من بين نوعين: المقرمشة C أو الطرية S.
- في المرحلة الثالثة يتم اختيار المكون الرئيسي من بين 3 مكوّنات متاحة: الدجاج D أو الروبيان R أو الخضار V.

"فما العدد الإجمالي لأنواع البيتزا المختلفة التي يمكن طلبها من هذا المطعم؟"

استعمل **مخطط الشجرة** أدناه لمعرفة كافة أنواع البيتزا التي يمكن للمطعم تقديمها.



عدد أنواع البيتزا = عدد الأحجام × عدد أنواع العجينة × عدد المكونات الرئيسية

$12 = 2 \times 2 \times 3$

وهذا مثال على **مبدأ الضرب في العد**، وهو إحدى الطرق التي تساعد في حساب عدد الطرق التي يمكن بها إنجاز عملية ما دون استعمال العد المباشر توفيرًا للوقت والجهد.

خطأ شائع
عند مقارنة مخطط الشجرة بمبدأ الضرب في العد تذكّر أن تعد المسارات من بداية الشجرة إلى نهايتها وليس عدّ الفروع لكل جزء من الشجرة.

مبدأ الضرب في العد

إذا كانت P عملية تتم بسلسلة من المراحل: $S_1, S_2, \ldots, S_n$

S_1 تتم من خلال r_1 طريقة مختلفة
S_2 تتم من خلال r_2 طريقة مختلفة
$\vdots$
S_n تتم من خلال r_n طريقة مختلفة

فإن عدد الطرق التي يمكن بها إنجاز العملية P هي:

$$r_1 \times r_2 \times \ldots \times r_n$$

مثال 1 لوحات السيارات

تتكون لوحة السيارة في بعض البلدان من ثلاثة أحرف إنجليزية يسارًا، متبوعة بثلاثة أرقام (من 0 إلى 9). أوجد عدد اللوحات المختلفة التي يمكن إنتاجها:

A. إذا لم تكن هناك شروط على الأحرف ولا على الأرقام المستخدمة.

B. إذا كان هناك شرط أن لا يتكرر حرف أو رقم في اللوحة.

الحل

A. إذا لم يكن هناك شروط على الأحرف ولا على الأرقام المستخدمة، يمكن ملء الخانة الأولى بأي حرف من أحرف الأبجدية الـ 26، وكذلك الأمر بالنسبة للخانتين الثانية والثالثة، كما يمكن ملء خانة الرقم الأول بأي رقم من الأرقام العشرة وكذلك الأمر بالنسبة للخانتين الثانية والثالثة.

ولذلك يمكن ملء الخانات الست بالأعداد:

26	26	26	10	10	10
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6

من خلال اعتماد مبدأ الضرب في العد

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17\ 576\ 000$$

إذن، يمكن إنتاج 000 576 17 لوحة إذا كان لا يوجد شروط على الأحرف ولا على الأرقام المستخدمة.

B. إذا كان الشرط أن لا يتكرر حرف أو رقم في اللوحة، يمكن ملء الخانة الأولى بأي حرف من أحرف الأبجدية الـ 26، وملء الخانة الثانية بأي حرف من الأحرف الـ 25 المتبقية، وملء الخانة الثالثة بأي من الأحرف الـ 24 المتبقية. أما بالنسبة لخانات الأرقام، فيمكن ملء خانة الرقم الأول بأي رقم من الأرقام العشرة وملء الخانة الثانية بأي رقم من الأرقام التسعة المتبقية وملء الخانة الثالثة بأي رقم من الأرقام الثمانية المتبقية.

ولذلك يمكن ملء الخانات الست بالأعداد:

26	25	24	10	9	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6

من خلال اعتماد مبدأ الضرب في العد

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 = 11\ 232\ 000$$

إذن، يمكن إنتاج 000 232 11 لوحة إذا كان الشرط أن لا يتكرر حرف أو رقم في اللوحة.

حاول أن تحل التمرين 1

شروط لوحة السيارات

على الرغم من أن منع تكرار الأحرف والأرقام في لوحات السيارات، كما في المثال 1، ليس له تبرير عملي إذ إنه يلغي أكثر من 6 مليون احتمال للوحة سيارة، إلا أن بعض الدول تفرض إلغاء بعض تراتيب الأحرف وذلك لمنع احتواء لوحة السيارة على ألفاظ غير ملائمة.

مثال 2 **استعمال مبدأ الضرب في العد**

ما عدد الأعداد الزوجية التي تتكون من 3 أرقام؟

الحل

الرقم الأول الذي في خانة المئات من العدد لا يمكن أن يكون 0 ، وإلا أصبح العدد مكونًا من رقمين، لذا لدينا 9 خيارات للرقم الأول. الرقم الثاني الذي في خانة العشرات يمكن أن يكون أي رقم، لذا لدينا 10 خيارات للرقم الثاني. للرقم الثالث الذي في خانة الآحاد 5 خيارات فقط لأن العدد يكون زوجيًا إذا انتهى بـ 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8
من خلال اعتماد مبدأ الضرب في العد يمكن ملء الخانات الثلاث بـ $450 = 5 \times 10 \times 9$ طريقة.
إذن، يوجد 450 عددًا زوجيًا مكونًا من 3 أرقام.

حاول أن تحل التمرين 6

يساعد مبدأ الضرب في العد على حل العديد من المسائل التي تتطلب إيجاد الأعداد المتوقّعة من نواتج عملية ترقيم ما.

مثال 3 **أرقام الهاتف**

في أمريكا الشمالية 680 مفتاحًا للمكالمات الهاتفية المحلية لم يستعمل منها لغاية يوليو 2013 سوى 390 مفتاحًا. (المفتاح عبارة عن رمز يتألف من 3 أرقام)

A. ما عدد المفاتيح التي لم يتم استعمالها؟

B. ما عدد أرقام الهاتف الإضافية التي تنتج عند استعمال جميع رموز المفاتيح غير المستعملة؟ (يتألف رقم الهاتف الذي يلي رمز المفتاح المحلي من 7 أرقام)

الحل

A. عدد المفاتيح غير المستعملة هو $680 - 390 = 290$

B. بما أن كل رقم هاتف يتألف من 7 أرقام، ويمكن نظريًا استعمال أي رقم من الأرقام العشرة $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ لأي منها، فإن عدد أرقام الهاتف المتاحة لكل مفتاح هي:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$$

للحصول على عدد جميع أرقام الهاتف باعتماد مبدأ الضرب في العد نضرب 10^7 في عدد المفاتيح غير المستعملة، أي 290
إذن، يمكن نظريًا الحصول على 2.9 بليون رقم هاتف إضافي من المفاتيح التي لم تستعمل حتى يوليو 2013

حاول أن تحل التمرين 7

أرقام الهاتف

مع أن الأعداد المؤلفة من ثلاثة أرقام تقع بين 000 و 999 وعددها 1 000 ، إلا أن ليست جميعها مستعملة لمفاتيح الاتصال العالمية. فرمز البلد، مثلًا، لا يبدأ بـ 0 أو 1

مضروب العدد

أحد أهم تطبيقات مبدأ الضرب في العد هو حساب عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب عناصر مجموعة تشتمل على n عنصرًا.

على سبيل المثال، لو أردنا حساب عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب خمسة كتب: الرياضيات M والفيزياء P واللغة الإنجليزية E وعلوم الحياة B والتاريخ H على رف واحد في إحدى المكتبات، نبدأ أولا بترقيم الأماكن المخصصة لوضع الكتب على الرف من 1 الى 5:

1 2 3 4 5

لو أردنا وضع كتاب الرياضيات M في المكان رقم 1، يكون لدينا أربعة خيارات من الكتب في المكان رقم 2:

M P   M E   M B   M H

1 2 3 4 5   1 2 3 4 5   1 2 3 4 5   1 2 3 2 5

بما أنه يمكن وضع أي من الكتب الخمسة في المكان رقم 1، يكون لدينا $5 \times 4 = 20$ طريقة مختلفة لترتيب الكتابين الأوّلين.

عند وضع الكتابين في المكانين 1 و 2، يمكن ملء الأماكن الباقية بأي من الكتب الثلاثة الباقية:

M P E   M P B   M P H

1 2 3 4 5   1 2 3 4 5   1 2 3 4 5

عند وضع ثلاثة كتب في الأماكن 1 و 2 و 3 يتبقى كتابان للاختيار من بينهما للمكان رقم 4 ويتبقى كتاب واحد لوضعه في المكان رقم 5

إذن، باستعمال مبدأ الضرب في العد يمكن ترتيب الكتب بـ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة مختلفة.

يمكن التعبير عن ناتج الضرب $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ باستعمال الرمز $5!$

ويُقرأ **مضروب العدد** 5

مضروب العدد

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن **مضروب** n ويُرمز له بالرمز $n!$ يمثّل عملية الضرب:

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots \times 2 \times 1$$

ونعرّف $0! = 1$

لاحظ أن $5! = 120$، أي إنّه يمكن استعمال مضروب العدد 5 للحصول على عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب عناصر مجموعة تشتمل على 5 عناصر.

ترتيب n من العناصر المتمايزة

إذا كان n هو عدد عناصر إحدى المجموعات، فإن تلك العناصر يمكن ترتيبها بـ $n!$ طريقة مختلفة.

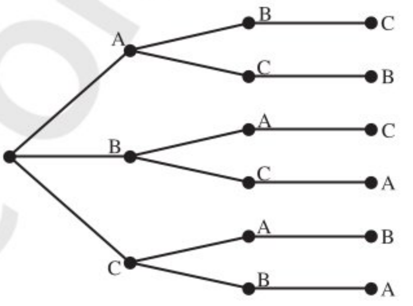
العناصر المتمايزة

العناصر المتمايزة هي عناصر مختلفة عن بعضها مثنى مثنى بطريقة ما.

المجموعة تحتوي على عناصر متمايزة دائمًا.

حل آخر

لو تمت تسمية تلك العناصر المتمايزة A, B, C،
فإن الترتيبات الستة المختلفة لتلك العناصر هي:
.ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
إنّ مخطط الشجرة طريقة جيدة لعرض تلك الخيارات:



مثال 4 ترتيب ثلاثة عناصر متمايزة

أوجد عدد الطرق الممكنة لترتيب ثلاثة عناصر متمايزة.

الحل

بما أن ترتيب العناصر الثلاث يعني وجود 3 خيارات للعنصر الأول وخياران للعنصر الثاني وخيار واحد فقط للعنصر الثالث،
إذن، يمكن ترتيب تلك العناصر بـ $6 = 3!$ طريقة مختلفة.

حاول أن تحل التمرين 10

لتبسيط مقادير تتضمن مضروبًا وتسهيل حسابها، يمكن استخدام بعض المتطابقات الهامة.
معظم تلك المتطابقات يرتكز على المتطابقتين الرئيسيتين أدناه:

متطابقات المضروب الأساسية

لأي عدد صحيح $n \geq 1$، $n! = n(n-1)!$
لأي عدد صحيح $n \geq 0$، $(n+1)! = (n+1)n!$

يمكن استعمال تلك المتطابقات لتبسيط المقادير التي تتضمن المضروب.

مثال 5 تبسيط مقادير تتضمن مضروب العدد

بسّط ما يلي:

A. $\mathbf{\frac{100!}{98!}}$ **B.** $\mathbf{\frac{(n+1)!}{(n-1)!}}$

الحل

A. $$\frac{100!}{98!} = \frac{100 \times 99!}{98!}$$
$$= \frac{100 \times 99 \times \cancel{98!}}{\cancel{98!}}$$
$$= 9\,900$$

B. $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n!}{(n-1)!}$$
$$= \frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$
$$= n(n+1)$$
$$= n^2 + n$$

حاول أن تحل التمرين 24

مراجعة سريعة 8.1

في التمارين 1-6، أوجد قيمة المقدار.

1. $5!$
2. $\frac{10!}{5!}$
3. $\frac{10!}{5! \times 2!}$
4. $\frac{10!}{9!}$
5. $\frac{4! \times 10!}{5!}$
6. $\frac{4! \times 1!}{0!}$

الدرس 8.1 التمارين

1. تتكون أرقام الهاتف الداخلية للمكاتب في إحدى الشركات من أربعة أرقام. أوجد عدد ترتيبات أرقام الهاتف شرط ألا يتكرر أي رقم في الترتيب الواحد.

2. **ملابس** يرغب خالد في اختيار بنطال وقميص من خزانته التي تحتوي أربعة بناطيل مختلفة وخمسة قمصان.
ما عدد الخيارات الممكنة لدى خالد؟

3. **طرق ممكنة** هناك ثلاثة طرق من المدينة "A" إلى المدينة "B"، وأربعة طرق من المدينة "B" إلى المدينة "C". كم عدد خيارات الطرق التي يمكن استعمالها للانتقال من المدينة "A" إلى المدينة "C" مرورًا بالمدينة "B"؟

4. **انتخابات المجلس الطلابي** ترشح لمنصب رئيس المجلس الطلابي أربعة طلاب ولمنصب نائب الرئيس ثلاثة طلاب. ما عدد الأزواج المرتبة من هذين المنصبين التي يمكن الحصول عليها بعد فرز الأصوات؟

5. إذا كانت لوحات السيارات في بلد ما تتشكل من رقمين يسارًا متبوعين بحرفين من الحروف الإنجليزية، متبوعين بثلاثة أرقام، شرط ألّا تتكرر الأرقام والحروف في اللوحات، ما عدد لوحات السيارات الممكنة في هذا البلد؟

6. ما عدد الأعداد الفردية المكونة من 4 أرقام؟

7. ما عدد لوحات السيارات التي يمكن تشكيلها إذا كانت اللوحة تحوي خمسة رموز، من أرقام أو أحرف اللغة الإنجليزية؟

8. **رمي القطعة النقدية** ما عدد النواتج المختلفة التي يمكن الحصول عليها إذا تم رمي قطعة نقدية 10 مرات؟

في التمارين 9-12، أوجد عدد الطرق المختلفة التي يمكن من خلالها إنجاز المهمة.

9. ترتيب ثلاثة أشخاص لأخذ صورة.

10. ترتيب أربع وظائف حسب أهميتها، من الأكثر أهمية الى الأقل أهمية.

11. ترتيب خمسة كتب على الرف من اليسار إلى اليمين.

12. إعطاء ميداليات من أول مرتبة إلى خامس مرتبة لأول خمسة رابحين في مسابقة للركض السريع.

13. **ترتيب الأحرف** أوجد عدد الكلمات التي تتألف من أحرف كلمة "خوارزمي". (ليس ضروريًا أن نجدها في أي معجم)

14. **ترتيب الأحرف** أوجد عدد الكلمات التي يمكن تأليفها من أحرف كلمة "بحر".

15. **احتفال مدرسي** في الصف الأمامي ثلاثة مقاعد مخصصة لمدير المدرسة والنائب الإداري والنائب الأكاديمي.
بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب جلوس هؤلاء الاشخاص على المقاعد الثلاثة؟

16. **مباراة العلوم** تخصص أربعة جوائز للمشاريع الأربعة الفائزة في مباراة العلوم. أوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها توزيع الجوائز على المشاريع الفائزة.

في التمارين 17-20، أوجد قيمة المقدار دون استعمال الحاسبة، ثم تأكد من صحة إجابتك باستعمال الحاسبة.

17. $4!$
18. $(3!)(0!)$
19. $\frac{5!}{4!}$
20. $(2!) + (4!)$

في التمارين 21-24، بسّط المقادير التالية:

21. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

22. $\frac{n!}{(n-1)!}$

23. $\frac{n(n+3)!}{(n+4)!}$

24. $\frac{(n+2)!}{n!}$

في التمرينين 25 و 26 أوجد مثالًا معاكسًا لتبين عدم صحّة المعادلة.

25. $(n+m)! = n! + m!$

26. $(nm)! = n!m!$

27. **اختبار الرياضيات** يتألف أحد اختبارات الرياضيات من قسمين. في القسم الأول يتم الاختيار من بين موضوعين: الهندسة أو العمليات الحسابية. في القسم الثاني يمكن الاختيار من بين ثلاثة موضوعات: الإحصاء أو الهندسة التحليلية أو الاحتمال. أوجد عدد التشكيلات المختلفة من مواضيع هذا الاختيار.

28. في لعبة لرمي مكعّب مرقّم من 1 إلى 6، تُرمى خمسة مكعبات مرقّمة دفعة واحدة. ما هي النتائج التي يمكن الحصول عليها إذا كانت المكعبات من ألوان مختلفة؟

أسئلة اختبار معيارية

29. **صواب أم خطأ** $(5!)^2 = 25!$

30. **صواب أم خطأ** لاحظ حل سعيد في الشكل أدناه.

$$\frac{12!}{(2!)(6!)} = \frac{12!}{(2 \times 6)!} = \frac{12!}{12!} = 1$$

هل ما كتبه سعيد صحيح؟ وضّح إجابتك.

31. **اختيار من متعدد** في أحد المطاعم يمكن الاختيار من بين 3 أنواع من المقبّلات وأربعة أطباق رئيسية، ونوعين من أطباق التحلية. العدد الإجمالي للتشكيلات الممكنة من الوجبات المختلفة عند تناول الطعام في هذا المطعم هي:

A. 9

B. 14

C. 24

D. 48

32. **اختيار من متعدد** قيمة العدد الصحيح n التي تجعل من المعادلة $\frac{(n+1)!}{2(n!)} = 2$ صحيحة هي:

A. 5

B. 1

C. 4

D. 3

استكشاف

33. **نشاط جماعي** لكل من المقادير أدناه، اكتب مسألة يكون هذا المقدار حلًا لها:

A. $2 \times 4 \times 7$

B. 2^5

C. 3×10^{10}

D. $6!$

E. $10!$

34. **الكتابة للتعلم** لنفرض أن رسالة ما أرسلت إلى خمسة أشخاص في أول أسبوع من السنة، وقام هؤلاء الخمسة بإرسالها بدورهم إلى خمسة أشخاص آخرين في الأسبوع الثاني من السنة. لنفرض أيضًا أن كل من يتلقى الرسالة يرسلها بدوره إلى خمسة أشخاص. اشرح كيف نتأكد من أنّ أحد الأشخاص سيتلقى الرسالة حتمًا مرة أخرى خلال السنة.توسيع الأفكار

توسيع الأفكار

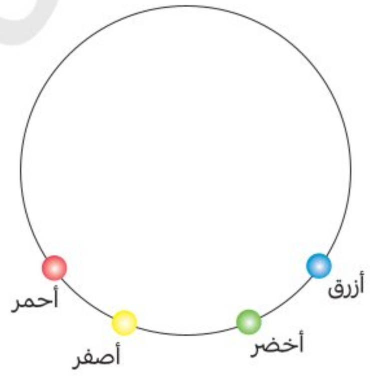
35. أحجية فيبوناتشي ينتهي العدد !50 بسلسلة من الأصفار المتتالية.

A. ما عدد هذه الأصفار؟

B. كيف يمكنك معرفة ذلك؟

36. طاولة مستديرة بكم طريقة يمكن لأربعة أشخاص الجلوس إلى طاولة مستديرة؟

37. حبات ملونة أربع حبات خرز ملونة (حمراء، زرقاء، صفراء، وخضراء) مرتّبة في سلسلة تؤلف عقدًا بسيطًا كما هو مبين في الصورة. ما عدد الترتيبات الممكنة لهذه الحبات في هذا العقد؟



8.2 التباديل Permutations

ما ستتعلّمه
- مفهوم التباديل
- حساب التباديل

... ولماذا
في مسائل العدّ، عندما يكون ترتيب العناصر مهمًا، يمكنك إيجاد عدد العناصر في المجموعات بدقة مهما كبرت.

معايير الدرس
11A.2.2

المصطلحات
- تباديل permutations

مفهوم التباديل

أحد أهم تطبيقات مبدأ الضرب في العد هو حساب عدد الطرق التي يمكننا بها ترتيب عناصر مجموعة عدد عناصرها n عنصرًا.

تعلمت في الدرس السابق أنه عند حساب طرق ترتيب 3 عناصر نجد أن هناك 3 خيارات للعنصر الأول وخيارين للعنصر الثاني وخيارًا واحدًا للعنصر الثالث. وتبعًا لمبدأ الضرب في العدّ، عدد طرق ترتيب العناصر يساوي $3! = 6$ أي أن هناك 6 **تباديل** مختلفة لهذه العناصر.
كل ترتيب لعناصر المجموعة يسمى تبديلًا لهذه المجموعة.
يمكن تعميم هذه العلاقة على مجموعة مكوّنة من n عنصرًا.

تباديل مجموعة مكوّنة من n عنصرًا

عدد تباديل n من العناصر المتمايزة هو $n!$

تكون عناصر المجموعة متمايزة عادةً عن بعضها بعضًا.
ولكن كيف نعدّل في طريقة العد إذا كانت بعض تلك العناصر غير متمايزة؟

عند حساب التباديل لأحرف كلمة QATAR نحصل على $5!$ من التباديل إلا أن تبديل الحرفين A فيما بينهما لن ينتج كلمة جديدة، لذلك يجب تصحيح العدد الإضافي الناتج عن طريق القسمة على عدد تباديل الحرفين A أي $2!$ وعندها يكون عدد التباديل

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

قاعدة تباديل العناصر غير المتمايزة

إذا تضمّنت المجموعة: n_1 عنصرًا من النوع الأول
n_2 عنصرًا من النوع الثاني
n_k عنصرًا من النوع k
حيث: $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k = n$
يكون عدد التباديل المتمايزة

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

مثال 1 حساب التباديل غير المتمايزة

احسب عدد الكلمات المؤلفة من 9 أحرف (ليس ضروريًا أن يكون لها معنى) والتي يمكن تكوينها باستعمال أحرف كل من الكلمات التالية:

A. DRAGONFLY

B. BUTTERFLY

C. BUMBLEBEE

الحل

A. كل تبديل بين أحرف التسعة يعطي كلمة مختلفة. إذن، يمكن تكوين $9! = 362\ 880$ تباديل (كلمات) متمايزة .

B. عدد التباديل أيضًا !9، لكن التبديل بين حرفي T لا يعطي كلمة مختلفة.
يُصحّح العد الزائد عن طريق القسمة كما ورد في القاعدة:

$$\frac{9!}{2!} = 181\ 440$$

إذن، يمكن تكوين 440 181 كلمة متمايزة باستعمال أحرف كلمة BUTTERFLY

C. عدد التباديل أيضًا !9، لكن هناك 3 أحرف B غير متمايزة و 3 أحرف E غير متمايزة.
لذا، ولتجنب العد الزائد، يجب القسمة على !3 مرتين.

$$\frac{9!}{3! \times 3!} = 10\ 080$$

إذن، يمكن تكوين 080 10 كلمة متمايزة باستعمال أحرف كلمة BUMBLEBEE

حاول أن تحل التمرين 1

حساب التباديل

في العديد من المسائل يكون من المطلوب ترتيب عدد من عناصر المجموعة وليس كل عناصرها.

على سبيل المثال، لو أردنا اختيار وترتيب ثلاثة عناصر من مجموعة تضم 4 عناصر نرمز لها بالأحرف A, B, C, D، نحصل على 24 ترتيبًا مختلفًا هي:

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

يمكن إيجاد عدد تلك التراتيب باستعمال مبدأ الضرب في العد. عند اختيار العنصر الأول لدينا 4 خيارات، وعند اختيار العنصر الثاني لدينا 3 خيارات، وعند اختيار العنصر الثالث لدينا خياران.
عدد تلك الطرق المختلفة يساوي $4 \times 3 \times 2 = 24$ طريقة.

كل من هذه التراتيب يسمى تبديلاً لأربعة من العناصر مأخوذة 3 عناصر كل مرّة.
يمكن تعميم ذلك الى تبديل مجموعة من n عنصرًا متمايزة مأخوذة r عنصرًا كل مرّة.
عند اختيار العنصر الأول لدينا n من الخيارات، عند اختيار العنصر الثاني لدينا $n - 1$ من الخيارات، وهكذا الى أن نصل الى العنصر r، عندها يكون لدينا $n - (r - 1)$ من الخيارات.

n	$n-1$	$n-2$	$n-3$		$n-(r-1)$
↓	↓	↓	↓	…	↓
1	2	3	4		r

باستعمال مبدأ الضرب في العد، يمكن ترتيب تلك العناصر بعدد من الطرق هو:
$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(r-1))$ طريقة مختلفة.

ويمكن تبسيط العبارة باستعمال مضروب العدد كما يلي:

$$\begin{aligned} & n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(r-1)) \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

قاعدة التباديل

يُرمز لعدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة r عنصرًا في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$
ويُحسب كما يلي:

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 0 \le r \le n \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1) \end{aligned}$$

إذا كان $r > n$ ، فإن ${}_nP_r = 0$

لاحظ أن:

$${}_nP_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\times(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$${}_nP_{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

$${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

وهذا مطابق لما سبق توضيحه من أن عدد تباديل n هو $n!$

وهذا ما يبين لماذا اعتبرنا أن: $0! = 1$

مثال 2 حساب التباديل

أوجد قيمة كل من التباديل التالية:

A. $_5P_5$ **B.** $_6P_4$ **C.** $_{11}P_3$ **D.** $_nP_3$

الحل

A. باستعمال القاعدة:

$$_5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5! = 120$$

B. باستعمال القاعدة:

$$_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

C. يمكننا تطبيق القاعدة كما في الفرع B، أو اعتماد مبدأ الضرب في العد:

$$_{11}P_3 = 11 \times 10 \times 9 = 990$$

D. من الأسهل هنا اعتماد مبدأ الضرب في العد. لدينا n من العناصر المتمايزة وثلاث خانات لملئها. لنفترض أن $n \geq 3$

$$_nP_3 = n(n-1)(n-2)$$

حاول أن تحل التمرين 2

حساب عدد التباديل باستعمال الآلة الحاسبة:

نجد في معظم الآلات الحاسبة الحديثة خيارًا لإدخال $_nP_r$ هذه الآلات تحسب أيضًا المضروب الذي يكون في بعض الحالات عددًا كبيرًا جدًا. فإذا أردت أن تحسب عدد التباديل لـ 90 عنصرًا تأخذ منها في كل مرة 5 عناصر، عليك بالتأكيد أن تستخدم المفتاح $_nP_r$. إنّ استعمال الصيغة $\frac{90!}{85!}$ سيسبب حتمًا ما يُعرف بخطأ التجاوز، وهو خطأ ينتج عن تجاوز الأعداد التي تعالجها الحاسبة العدد الأقصى المحدد لها.

يمكن استعمال التباديل لحل مسائل تتضمن معرفة عدد الطرق المختلفة لترتيب عناصر متمايزة في مجموعة أو لترتيب بعض عناصر هذه المجموعة.

مثال 3 استعمال التباديل

يوجد في مكتبة هند ثمانية كتب، أعدت قائمة رتبت فيها ثلاثة كتب هي الأكثر تفضّيلاً لديها.

A. بكم طريقة يمكن لهند إعداد قائمة الكتب الثلاثة المفضّلة لديها؟

B. إذا أرادت هند إعداد قائمة ترتب فيها خمسة كتب من بين الكتب الثمانية، بكم طريقه يمكنها فعل ذلك؟

الحل

إن إعداد قائمة بالكتب يفيد تلقائيًا وجوب الترتيبات.

A. تضمّ القائمة 3 كتب مرتّبة من أصل 3 كتب مفضّلة.
إذن، يمكن لهند إعداد تلك القائمة بـ $3! = 6$ طريقة.

(تابع)

B. تضم القائمة خمسة كتب مرتبة من أصل ثمانية كتب.

استعمل قاعدة التباديل $\quad {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\ , 0 \leq r \leq n$

عوّض $n = 8$ و $r = 5$ $\quad {}_8P_5 = \frac{8!}{(8-5)!}$

بسّط $\quad = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6\ 720$

إذن، يمكن ترتيب عرض الكتب في القائمة بـ 720 6 طريقة.

حاول أن تحل التمرين 4

لمعرفة عدد الطرق المختلفة لترتيب عناصر متمايزة لا يوجد بينها عناصر متكررة يمكن استعمال قاعدة التباديل مباشرة.

مثال 4 **سباق السيارات**

يتنافس 15 سائقًا في بطولة الفورملا 1 للسيارات السريعة. بكم طريقة يمكن ترتيب المتسابقين في المراكز الست الأولى؟

الحل

بما أن السائقين "عناصر متمايزة"، ولا يوجد تكرار في المراكز،
فإن هذه تباديل لـ 15 عنصرًا مأخوذة 6 كل مرة.

$${}_{15}P_6 = \frac{15!}{(15-6)!} = \frac{15!}{9!} = 3\ 603\ 600$$

إذن، يمكن ترتيب السائقين في المراكز الستّ الأولى بـ 600 603 3 طريقة مختلفة.

حاول أن تحل التمرين 6

إرشاد

لا يوجد تكرار في المراكز إذ أن كل متسابق لا يمكن أن ينال إلا مركزًا واحدًا فقط.

مراجعة سريعة 8.2

في التمارين 1-6 أوجد قيمة العبارة.

1. ${}_6P_6$
2. ${}_5P_4$
3. ${}_{20}P_1$
4. ${}_8P_3$
5. ${}_{10}P_9$
6. ${}_7P_2$

في التمارين 7-10، أوجد قيمة الصيغة من دون استعمال الحاسبة، ثم تأكد من صحة إجابتك باستعمال الحاسبة.

7. ${}_4P_1$
8. ${}_{12}P_1 + {}_{10}P_2$
9. ${}_{15}P_1$
10. $\frac{{}_{10}P_9}{10!}$

الدرس 8.2 التمارين

1. **تبديل الأحرف** أوجد عدد الكلمات التي يمكن تأليفها من أحرف كلمة "رياضيات". (ليس ضروريًا أن نجدها في أي معجم)

2. أوجد قيمة العبارة في كل مما يلي:

a. ${}_7P_6 + {}_6P_5$

b. $\frac{{}_8P_7}{8!}$

c. ${}_nP_1$

d. ${}_nP_{n-1}$

في التمارين 3-6، أوجد عدد الطرق الممكنة التي يمكن من خلالها إنجاز المهمة.

3. ترتيب ثلاثة فائزين في المراتب الأولى لبطولة في الشطرنج من بين تسعة مشاركين.

4. اختيار رئيس مجلس إدارة إحدى الشركات ونائبه من بين سبعة أعضاء في المجلس.

5. ترتيب ثلاثة كتب على رف يتسع لخمسة كتب.

6. إعطاء ميداليات للاعبين الذين أحرزوا المراكز الثلاثة الأولى في مسابقة للعدو السريع يشارك فيها ثمانية متسابقين.

7. **ممثلي الصف** ترغب إدارة إحدى المدارس في انتداب وفد من أربعة طلاب لتمثيل الصف الحادي عشر في مسابقة العلوم. أبدى سبعة طلاب رغبتهم في ذلك. يتألف الوفد من رئيس ونائب للرئيس وأمين للسر ومساعد.
بكم طريقة يمكن تشكيل هذا الوفد؟

8. **تبديل الأحرف** أوجد عدد الكلمات التي يمكن تأليفها من أحرف كلمة "زمهرير". (ليس ضروريًا أن نجدها في أي معجم)

9. **مسرحية** في نادي الفنون المسرحية ستة عشر ممثلًا. بكم طريقة يمكن اختيار تسعة منهم لأداء الأدوار المطلوبة في إحدى المسرحيات؟

10. **مقاعد الاختبار** بكم طريقة يمكن أن يجلس 22 طالبًا في قاعة تحتوي 30 مقعدًا؟

11. **كلمة المرور** يرغب وليد في تشكيل رمز من أربعة أرقام مختلفة لحماية هاتفه المحمول. ما عدد جميع الرموز المختلفة التي يمكن لوليد اختيارها؟

12. **لوحة سيارات** ما عدد لوحات السيارات التي يمكن تشكيلها إذا كانت اللوحة تحوي خمسة أرقام يمينًا يليها حرف إنكليزي واحد؟

13. **انتخابات** ينتخب 13 عضوًا من أعضاء نادي الرماية رئيسًا، ونائب رئيس، وأمينًا للسر من بين الأعضاء.
بكم طريقة يمكن القيام بذلك؟

14. **مجلس البلدية** يختار رئيس البلدية قائمة تضم 6 مشاريع، مرتبة حسب الأولوية، من أصل 12 مشروعًا خاضعًا للدرس، وذلك ليموّلها المجلس البلدي.
كم قائمة من هذا النوع يمكنه تشكيلها؟

15. **لوائح الاجابات** ما عدد لوائح الإجابات المختلفة التي يمكن أن نحصل عليها للاختبار من 10 أسئلة "اختيار من متعدد"، حيث لكل سؤال خمس إجابات محتملة؟

أسئلة اختبار معيارية

16. صواب أم خطأ $_7P_7 = {}_7P_1$ ، وضّح إجابتك.

17. صواب أم خطأ انظر إلى حلّ غادة أدناه.

$$\frac{_3P_3}{_5P_3} = \frac{3!}{\frac{5!}{(5-3)!}} = \frac{3!}{2!5!} = \frac{1}{40}$$

هل ما كتبته صحيح؟ وضّح إجابتك.

18. اختيار من متعدد يقدم مطعم في وسط المدينة عرضًا للحصول على وجبة طعام مجانية إذا تمكن الزبون من معرفة رمز المرور الخاص بباب المطعم والمؤلف من ثلاثة أرقام فردية مختلفة.

ما عدد الرموز التي يمكن تشكيلها؟

A. 120 **B.** 240

C. 60 **D.** 30

19. اختيار من متعدد إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فأي المقادير التالية يساوي 1؟

A. $(n-n)!$ **B.** $_nP_n$

C. $_{2n}P_{2n}$ **D.** $(2n-n)!$

استكشاف

20. نشاط جماعي لكل من المقادير أدناه، اكتب مسألة يكون المقدار حلًا لها.

a. $_8P_4$

b. $_{24}P_5$

c. $_{14}P_7$

d. $\frac{10!}{2! \times 2! \times 2!}$

e. $\frac{5!}{3!}$

21. الكتابة للتعلم يضم فريق لكرة السلة 14 لاعبًا. يريد المدرب اختيار خمسة لاعبين من بينهم للمراكز الخمسة المطلوبة في الملعب.

بكم طريقة يمكن للمدرب اختيار الفريق علمًا أن المركز رقم واحد يتنافس عليه ثلاثة لاعبين والمراكز الأربعة البقية يمكن أن يشغلها أي لاعب من بقية اللاعبين؟

توسيع الأفكار

22. أوجد قيمة n التي تحقق المعادلة $_nP_2 = 56$

23. ترتيب الكتب في صندوق 5 كتب رياضيات و 4 كتب تاريخ و 6 كتب علوم. يريد صاحب المكتبة عرض كتابي رياضيات وكتابي تاريخ وثلاثة كتب علوم على الرف من بين تلك الموجودة في الصندوق.

بكم طريقة يمكن ترتيب تلك الكتب على الرف علمًا أن كتب نفس المادة يجب أن تكون دائمًا متجاورة؟

24. الكتابة للتعلم

a. بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف كلمة PARALLEL؟

b. بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب تلك الأحرف شرط أن يكون الحرفان P و R دائمًا متجاورين؟

8.3 التوافيق Combinations

ما ستتعلّمه

- مفهوم التوافيق
- عدد المجموعات الجزئية

... ولماذا

في حساب الاحتمالات، يجب معرفة عدد أجزاء المجموعات بغضّ النظر عن ترتيب عناصرها.

معايير الدرس

11A.2.3

11A.2.4

المصطلحات

- توافيق combinations

مفهوم التوافيق

التوافيق هو اختيار بعض أو كل العناصر من مجموعة تحتوي عناصر متمايزة بدون أهمية لترتيب تلك العناصر.

في الدرس السابق قمنا بحساب عدد التباديل عند اختيار 3 أحرف من بين الأحرف A, B, C, D وكان الناتج 24 تبديلًا. ولكن عندما لا يكون لترتيب العناصر المختارة أهمية يتقلص العدد إلى 4 تراتيب فقط كما هو موضح في الشكل أدناه.

ABC	ABD	ACD	BCD
~~ACB~~	~~ADB~~	~~ADC~~	~~BDC~~
~~BAC~~	~~BAD~~	~~CAD~~	~~CBD~~
~~BCA~~	~~BDA~~	~~CDA~~	~~CDB~~
~~CAB~~	~~DAB~~	~~DAC~~	~~DBC~~
~~CBA~~	~~DBA~~	~~DCA~~	~~DCB~~

يسمّى كل واحد من هذه التراتيب الأربعة توفيقًا. في التوفيق الواحد ABC عدد التباديل هو $6 = 3!$ وهذا يصح لباقي التوافيق. إذن، العدد الإجمالي للتباديل يساوي عدد التوافيق مضروبًا في 6، إذا تم الرمز لتوافيق مجموعة من 4 عناصر مأخوذة 3 عناصر كل مرة بالرمز ${}_4C_3$ فإن عدد التباديل يكون ${}_4P_3 = 3! \times {}_4C_3$ أي إن

$${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!}$$

بهذا المعنى، التوافيق المكونة من r عنصرًا، والمختارة من مجموعة مكونة من n عنصرًا، هي مجموعات جزئية من هذه المجموعة وعدد التباديل يساوي عدد التوافيق مضروبًا في $r!$.

إذن، ${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$

هكذا يكون:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{1}{r!} \times \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

إشارة إلى الرموز

تستخدم بعض الكتب الرمز $P(n\ ,\ r)$ بدلًا من ${}_nP_r$ والرمز $C(n\ ,\ r)$ بدلًا من ${}_nC_r$.

أما الرمز الأكثر استعمالًا فهو $\binom{n}{r}$ للإشارة إلى ${}_nC_r$.

كلّ من الرمزين $\binom{n}{r}$ و ${}_nC_r$ يُقرأ عادةً: "n توافيق r" أو "n فوق r".

قاعدة التوافيق

عدد التوافيق المكونة من r عنصرًا والمختارة من مجموعة مكونة من n عنصرًا من العناصر المتمايزة يُرمز له بالرمز ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ ,\ 0 \le r \le n$$

إذا كان $r > n$، فإن ${}_nC_r = 0$

التوافيق على الآلة الحاسبة

نجد في معظم الآلات الحاسبة الحديثة خيارًا لإدخال ${}_nC_r$. كما في التباديل، يفضّل استخدام المفتاح ${}_nC_r$ على استعمال الصيغة: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$، حيث أن كل مضروب قد يكون وحده أكبر من قدرة استيعاب الآلة الحاسبة.

مثال 1 تمييز التوافيق من التباديل

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات التالية تباديل أم توافيق.

A. يُنتخب الرئيس ونائب الرئيس وأمين السر من بين أعضاء النادي البالغ عددهم 25 عضوًا.

B. يختار طاهٍ 5 حبات بطاطس من كيس فيه 12 حبة بطاطس لتحضير سلطة البطاطس.

C. معلّم يضع مخططًا لأماكن جلوس طلابه البالغ عددهم 22 طالبًا في صف فيه 30 مقعدًا.

الحل

A. تباديل، فالترتيب هنا مهم لتحديد المنصب الذي سيشغله كل منهم.

$${}_{25}P_3 = 13\,800$$

B. توافيق، لأن مذاق الطعام يبقى هو نفسه بغضّ النظر عن ترتيب حبات البطاطس المختارة.

$${}_{12}C_5 = 792$$

C. تباديل، لأن توزيعًا مختلفًا للطلاب على نفس المقاعد ينتج عنه مخطط مختلف لأماكن جلوس الطلاب.

$${}_{30}P_{22} \approx 6.5787 \times 10^{27}$$

عندما تحدد قاعدة العدّ، يمكنك بسهولة الحصول على الإجابة العددية الدقيقة باستعمال الآلة الحاسبة.

حاول أن تحل التمرين 2

نستعمل قاعدة التوافيق في العدّ في كل مرة لا يكون فيها ترتيب العناصر المختارة مهمًا.

مثال 2 **حساب التوافيق**

كان على لجنة التحكيم في إحدى المسابقات أن تختار 10 من المتسابقين البالغ عددهم 51 متسابقًا إلى التصفيات النهائية. أوجد عدد الخيارات المتوفرة للجنة التحكيم.

الحل

ليس هناك أي أهمية لترتيب المتسابقين المختارين في هذه المسألة، لذا، نعتمد قاعدة التوافيق في العدّ.

$${}_{51}C_{10} = \frac{51!}{10!(41)!} = 12\ 777\ 711\ 870$$

إذن، يمكن اختيار 10 متسابقين للتصفيات النهائية بطرق عددها 870 711 777 12

حاول أن تحل التمرين 6

لاحظ أنه عند اختيار 10 متسابقين من بين 51 متسابقًا للمشاركة في المسابقة يكون لدينا ${}_{51}C_{10}$ خيارًا ويبقى 41 متسابقًا خارج الخيارات وهو نفس العدد الذي نحصل عليه عند حساب عدد طرق "اختيار" 41 من أصل 51 متسابقًا لاستثنائهم من المسابقة وهو ${}_{51}C_{41}$
أي أن ${}_{51}C_{10} = {}_{51}C_{41}$.

يمكن تعميم ذلك الى حالة اختيار r عنصرًا من مجموعة تتضمن n عنصرًا فيكون عدد التوافيق ${}_{n}C_{r}$ مساويًا لعدد الطرق التي يمكن من خلالها "عدم اختيار" $n - r$ عنصرًا من نفس المجموعة أي ${}_{n}C_{n-r}$

تناظر التوافيق

${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$ وذلك لأي عدد صحيح موجب n.

ملاحظة: سيطلب منك برهنة هذه العلاقة جبريًا في التمرين رقم 16

عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها n

إذا كانت جميع عناصر المجموعة A تنتمي إلى مجموعة أخرى B فإن المجموعة A تُعدّ مجموعة جزئية من B.

يمكننا من خلال العدّ وفق قاعدة التوافيق أن نصل إلى معرفة عدد المجموعات الجزئية لمجموعة ما.

ملاحظة

بعض خصائص التوافيق

- ${}_{n}C_{n} = 1$
- ${}_{n}C_{1} = n$

وذلك لأي عدد صحيح موجب n.

مثال 3 اختيار مكونات البيتزا

يمنح أحد المطاعم البيتزا للزبائن حرية اختيار ما يريدون من 10 مكوّنات متاحة: بصل، زيتون، فطر، فلفل، ...
ما عدد أنواع البيتزا التي يمكن طلبها:

A. إذا كانت تشتمل على أي ثلاثة مكونات؟

B. إذا كانت تشتمل على أي عدد من المكونات (من 0 إلى 10)؟

الحل

A. لا تأثير بالتأكيد لترتيب المكونات في نوع البيتزا (مثلًا، البيتزا بفلفل وفطر وزيتون هي نفسها البيتزا بفطر وزيتون وفلفل).
إذن، يمكن الحصول على العدد من خلال قاعدة التوافيق: $_{10}C_3 = 120$

B. لمعرفة عدد البيتزا يمكننا جمع التوافيق $_{10}C_r$ لجميع قيم r من $r = 0$ إلى $r = 10$.
أي $_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + ... + {}_{10}C_{10}$
غير أن بإمكاننا، باستخدام مبدأ العد، الحصول على هذا العدد بطريقة أسهل.
يمكن اعتبار عملية اختيار مكوّنات البيتزا سلسلة من 10 مراحل:

-المرحلة الأولى: للمكوّن الأول خياران (إما أن يوضع في البيتزا وإما لا)
-المرحلة الثانية: للمكوّن الثاني خياران أيضًا
- المرحلة الثالثة: للمكوّن الثالث كذلك خياران
... وهكذا وصولًا إلى المكوّن العاشر الذي له أيضًا خياران.

عند استخدام مبدأ العدّ فإن العدد الإجمالي هو:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1\ 024$$

إذن، عدد أنواع البيتزا التي يمكن أن يقدمها المطعم باستعمال بعض من المكونات العشرة هو 024 1 نوعًا.

حاول أن تحل التمرين 12

يقدم لنا حل المثال 3 قاعدة يمكن اعتمادها لعد المجموعات الجزئية لمجموعة ما. فعند أي عنصر في المجموعة نكون أمام خيارين (إما قبوله ضمن المجموعة الجزئية أو رفضه) ويتكرر هذا الأمر بعدد عناصر المجموعة، وكان في المثال عدد العناصر 10

قاعدة عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها n

عدد المجموعات الجزئية لمجموعة من n عنصرًا هو 2^n

بما في ذلك المجموعة نفسها والمجموعة الخالية $\varnothing$.

يمكننا طرح المسألة السابقة بطريقة معكوسة، أي معرفة عدد مكونات البيتزا من خلال عدد أنواعها الممكنة.

مثال 4 تحليل فحوى إعلان

إذا أعلن المطعم أنه يقدم 256 نوعًا مختلفًا من البيتزا بحسب المكونات التي تحتويها، فما عدد المكونات المتوفرة لدى المطعم؟

الحل

نعلم أنه إذا كان عدد المكونات n فإن:

$$256 = 2^n$$

$$2^8 = 2^n$$

$$n = 8$$

إذن، عدد المكونات 8

حاول أن تحل التمرين 13

قد تتضمن بعض المتطابقات التوافيق ويمكن برهانها باستعمال قاعدة التوافيق ومضروب العدد

مثال 5 برهان متطابقة باستعمال المضروب

برهن لكل عدد صحيح $n \geq 2$ أن $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = n$

الحل

صيغة التوافيق

$$\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

متطابقات المضروب الأساسية

$$= \frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{2!\cancel{(n-1)!}} - \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\cancel{(n-2)!}}$$

$$= \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2-n}{2}$$

$$= \frac{2n}{2}$$

$$= n$$

حاول أن تحل التمرين 17

مراجعة سريعة 8.3

في التمارين 1-4، أوجد قيمة المقدار.

1. ${}_5C_5$

2. ${}_5C_0$

3. ${}_{10}C_3$

4. ${}_{10}C_7$

في التمارين 5-8، أوجد قيمة المقدار.

5. ${}_7C_4 + {}_7C_3$

6. ${}_8C_4$

7. ${}_{10}C_7 + {}_{10}C_6$

8. ${}_{11}C_7$

في التمارين 9-12، أوجد قيمة المقدار.

9. ${}_8C_5 - {}_8C_3$

10. $11 \times 10!$

11. ${}_{10}C_7 - {}_{10}C_3$

12. ${}_{10}C_1$

الدرس 8.3 التمارين

1. أوجد قيمة المقدار من دون استعمال الآلة الحاسبة.

a. ${}_6C_2$

b. ${}_9C_2$

c. ${}_{10}C_7$

d. ${}_{10}C_3$

2. حدد ما إذا كانت كل مسألة من المسائل التالية مسألة تباديل أم توافيق مبرّرًا إجابتك.

a. اختيار 13 تلميذًا من أصل 52 للمشاركة في معرض العلوم.

b. اختيار 7 أرقام (من دون تكرار) لتشكيل رقم هاتف.

c. اختيار 4 طلاب من الصف الحادي عشر لتمثيل الصف في مجلس الطلاب.

d. اختيار ممثلَين اثنين للعب دور علاء الدين ودور علي بابا في مسلسل سندباد.

في التمارين 3-5، أوجد قيمة المقدار باستعمال القاعدة، ثم تأكد من إجابتك باستعمال الآلة الحاسبة.

3. $\binom{9}{2}$

4. $\binom{166}{166}$

5. $\binom{166}{0}$

6. **تشكيل اللجان** سيتم تشكيل لجنة من ثلاثة أعضاء في جمعية عدد أعضائها 25 عضوًا. ما عدد الطرق التي يمكن بها تشكيل اللجنة؟

7. **شراء الأقراص المدمجة** لدى محمد مبلغ من المال يكفي لشراء 3 أقراص مدمجة من أصل 48 قرصًا مدمجًا متوافرًا. كم مجموعة مؤلفة من 3 أقراص يمكن لمحمد أن يختار؟

8. **مقابلات عمل** أجرى رئيس قسم الموارد البشرية في إحدى الشركات مقابلات مع 8 أشخاص لشغل 3 وظائف متطابقة. كم مجموعة من 3 أشخاص يمكنه أن يوظف؟

في التمرينين 9 و 10، أوجد عدد التوافيق.

9. بكم طريقة نستطيع تقليص عدد المتسابقين من 11 إلى 3 في المرحلة النهائية؟

10. كم فريقًا مؤلفًا من أربعة أشخاص من أصل 8 أشخاص يمكننا أن نكوّن؟

11. **الاختبار النهائي** أعطى أستاذ طلبته 10 اسئلة في الاختبار النهائي، على أن يختار الطالب منها 8 اسئلة للإجابة عنها. بكم طريقة يستطيع الطالب اختيار أسئلته؟

12. **بوفيه السلطة** تتكون وجبة غداء مريم من طبق سلطة منوّع المكونات من مطعم يقدم بوفيه السلطة. تختار مريم دائمًا كميات متساوية من المكوّنات، لكنها تحب أن تنوّع في خياراتها. إذا كانت تستطيع الاختيار من بين 9 أنواع من المكونات، كم طبقًا مختلفًا من السلطة بإمكانها أن تشكل؟

.13 احتمالات البيتزا فطائر البيتزا التي يقدّمها أحد المطاعم ذات حجم واحد، لكن المطعم يروّج أن تشكيلته من المكوّنات تسمح بتقديم أكثر من 000 4 خيار مختلف من البيتزا. ما أقل عدد من المكونات يمكن لهذا المطعم أن يقدم؟

.14 مجموعات جزئية إن أي مجموعة جزئية من المجموعة "A" تسمى مجموعة جزئية "فعليّة" إذا لم تكن المجموعة الخالية أو المجموعة الكاملة "A". إذا كان عدد عناصر مجموعة n عنصرًا، ما عدد المجموعات الجزئية الفعلية التي تنتمي إليها؟

.15 برهن أنّ: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$، لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$.

.16 برهن أنّ: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$، لكل الأعداد الصحيحة $0 \leq r \leq n$

.17 برهن أنّ: $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$، لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 2$.

.18 برهن أنّ: $\binom{n}{n-2} + \binom{n+1}{n-1} = n^2$، لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 2$.

.19 منح جامعية في إحدى المدارس الثانوية، يتمتع 6 طلاب بالمؤهلات التي تمكّنهم من الترشح للحصول على منحة دراسية في إحدى الجامعات، لكن الاتفاق بين هذه الجامعة والمدرسة ينصّ على ترشيح 3 طلاب كحد أقصى للحصول على المنحة الجامعية كل عام، كما يفرض على المدرسة وبحد أدنى ترشيح طالب واحد على الأقل كل عام. ما عدد الخيارات المتوفرة لإدارة المدرسة لاختيار الطلاب المؤهلين للمنحة؟

.20 أطباق صينية يقدّم أحد المطاعم الصينية طبقًا خاصًا مؤلفًا من خيار أو خيارين أو ثلاثة خيارات من قائمة أطباق المقبلات لديها. إذا كان المطعم يقدّم 5 أنواع من المقبلات، كم تشكيلة من هذا الطبق الخاص يمكن إعدادها؟

أسئلة اختبار معيارية

.21 صواب أم خطأ إذا كان a و b عددين صحيحين موجبين، حيث $a + b = n$، فإن ${}_nC_a = {}_nC_b$
برّر إجابتك.

.22 صواب أم خطأ إذا كانت a , b , n أعدادًا صحيحة، حيث $a < b < n$، فإن ${}_nC_a < {}_nC_b$
برّر إجابتك.

.23 اختيار من متعدد لدينا ترتيب من 8 أشياء، نختار منها كل مرة 3 أشياء حيث الترتيب غير مهم. أيّ الصيغ التالية تعطي العدد الصحيح للتراتيب؟

A. ${}_8P_3$

B. ${}_8C_3$

C. $8! \times 3!$

D. $\frac{8!}{3!}$

E. $\frac{8!}{5!}$

.24 اختيار من متعدّد بكم طريقة يستطيع الحكام اختيار المراكز الخمسة الأولى الرابحة من أصل عشرة مرشحين في مسابقة لاختيار أفضل زي تقليدي تقيمها إحدى الجمعيات؟

A. 50

B. 120

C. 252

D. 30 240

E. 3 628 800

استكشاف

25. الكتابة للتعلم لدينا علبة بيض طازج فيها 12 بيضة، ونريد اختيار بيضتين منها لإعداد الفطور. ناقش المسألة من منظور مبدأ العد لتبين لماذا $_{12}C_2 = {}_{12}C_{10}$

26. إذا كان لمضلع منتظم n رأسًا، فإن عدد أقطاره تُحسب من خلال الصيغة $\frac{(n^2 - 3n)}{2}$.

a. اشرح لماذا عدد المقاطع التي تصل بين كل زوج من الرؤوس يساوي $_nC_2$.

b. استعمل النتيجة من الفرع a لتبرهن أن عدد الأقطار يساوي $\frac{(n^2 - 3n)}{2}$.

توسيع الأفكار

27. اختيار الممثلين يريد أحد المخرجين اختيار اثنين من الممثلين لأداء دورين في إحدى المسرحيات، ويريد أن يحظى بفرصة اختبار مدى انسجام أدائهيما، فقرر أن يختبر كل اثنين من المتقدمين لتجربة الأداء معًا. حضّر مساعداه في الإخراج والإدارة جدولين ليبيّنا له المدة اللازمة لإجراء كل الاختبارات، وذلك تبعًا لعدد الممثلين الذين سيقدمون تجارب الأداء.
أيّ الجدولين أدناه منطقي أكثر؟ ولماذا؟

الزمن اللازم (min)	عدد المتقدمين لتجربة الأداء
10	3
30	6
60	9
100	12
150	15

الزمن اللازم (min)	عدد المتقدمين لتجربة الأداء
10	3
45	6
110	9
200	12
320	15

28. ترتيب لاعبي كرة السلة يتكون كل فريق لكرة السلة من 12 لاعبًا. يختار المدرب 5 لاعبين للعب في بداية المباراة، بغض النظر عن رتبتهم بين زملائهم. ما المجموعات الممكنة المختلفة، المكونة من 10 لاعبين، التي يمكن تكوين فريقين منها؟

8.4 نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

ما ستتعلّمه
- قوى ذات الحدين
- مثلث باسكال
- نظرية ذات الحدين

... ولماذا
تطبيق نظرية ذات الحدين هو استعمال ذكي لمبادىء العد.

معايير الدرس
11A.2.5

11A.2.6

المصطلحات
- نظرية ذات الحدين binomial theorem
- معاملات ذات الحدين binomial coefficients
- مثلث باسكال Pascal's triangle

قوى ذات الحدين

دراسة الأنماط هي أحد مواضيع الدراسات الرياضية، وسوف نعرض في هذا الدرس قاعدة تُسمى **نظرية ذات الحدين**، يمكن استنتاجها من معاينة بعض الأنماط.

إذا قمنا بإيجاد مفكوك $(a+b)^n$ حيث $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ نجد أن:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$
$$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

هل يمكنك متابعة الصيغ والأنماط لاستنتاج مفكوك $(a+b)^6$؟

من الممكن أن تلاحظ:

1. أنّ قوى a تتناقص واحدًا واحدًا من 6 إلى 0
2. أنّ قوى b تتزايد واحدًا واحدًا من 0 إلى 6
3. أنّ معاملَي الحدين الأول والثاني هما 1 و 6 على الترتيب.
4. أنّ معاملَي الحدين الأخيرين هما 6 و 1 على الترتيب.

للوهلة الأولى، يمكن أن تلاحظ العلاقة التي تمكّنك من إيجاد باقي المعاملات، التي تسمى **معاملات ذات الحدين**، غير أن ذلك سوف يصبح أوضح بعد النشاط الاستكشافي التالي.

نشاط استكشافي 1 إيجاد معاملات ذات الحدين

1. أوجد قيمة ${}_3C_0, {}_3C_1, {}_3C_2, {}_3C_3$، أين يمكنك إيجاد هذه الأعداد مجتمعة في واحد من المفكوكات السابقة؟
2. استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد ${}_4C_r$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, 4$.
اكتب هذه الأعداد في قائمة أفقية. أين يمكنك أن تجد هذه الأعداد مجتمعة في واحد من المفكوكات السابقة؟
3. أوجد ${}_5C_r$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$، وحدّد أين يمكن أن تجد هذه الأعداد في المفكوكات السابقة.

من الممكن أن تكون قد لاحظت أن معاملات مفكوك $(a+b)^n$ هي بالضبط ${}_nC_r$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$. هل يمكن تفسير ذلك؟

في الواقع، إن مفكوك

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ \ldots\ldots\ (a+b)}_{n \text{ عامل}}$$

يتضمن جميع نواتج الضرب التي يمكن الحصول عليها عن طريق أخذ حرف واحد (إما a أو b) من كل عامل $(a+b)$. عدد طرق تكوين ناتج الضرب $a^r b^{n-r}$ هو بالضبط نفس عدد طرق اختيار r عاملًا للمساهمة في a ، لأنه من الواضح أن بقية العوامل وعددها $n-r$ تساهم في b.
عدد طرق اختيار r عاملًا من العوامل n هي ${}_nC_r$.

معاملات ذات الحدين

المعاملات التي تظهر في مفكوك $(a+b)^n$ هي قيم ${}_nC_r$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.
في بعض الأحيان يُستخدم الرمز $\binom{n}{r}$ عوضًا عن ${}_nC_r$ خصوصًا لمعاملات ذات الحدين.

مثال 1 استعمال ${}_nC_r$ لإيجاد مفكوك ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الحل

بما أن قوة القوس هي 7، لذلك توضع المتغيرات a^7 و b^0 ثم تبدأ قوّة المتغيّر a تقل بواحد فيما قوّة المتغيّر b تزيد بواحد مع الانتقال من حد إلى الحد الذي يقع إلى يمينه.
لإيجاد المعاملات أدخل ${}_7C_r\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ في الآلة الحاسبة، تحصل على القائمة $\{1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1\}$
استعمل هذه القيم لإيجاد المفكوك:

$$\begin{aligned}&(a+b)^7\\ &= 1a^7b^0 + 7a^6b^1 + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7a^1b^6 + 1a^0b^7\\ &= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7\end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 3

أسلوب الجدول

تستطيع أيضًا استعمال عرض الجدول (table display) لتعرض معاملات ذات الحدين. مثلًا، فليكن: ضع: $Y1 = 5{}_nC_rX$ و $\text{TblStart} = 0$ و $\Delta\text{Tbl} = 1$ لتعرض معاملات ذات الحدين لـ $(a+b)^n$

مثلث باسكال

إذا قمنا بحذف قوى a و b في المثلث الذي أنشأناه في بداية هذا الدرس نحصل على:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & \iddots & & & & \vdots & & & & \ddots & \end{array}$$

يُسمى هذا المثلث **مثلث باسكال**.

مثلث باسكال

كان «بليز باسكال» (1623-1662) قد استعمل هذا المثلث دون أن يكون هو الذي اكتشفه. فقد ظهر هذا المثلث لأول مرة سنة 1303 في الكتاب الصيني «المرآة الثمينة» لمؤلفه "Chu Shih-chieh" والذي وصفه بأنه «مخطط الطريقة القديمة لإيجاد القوى من الدرجة الثامنة وما دون».

للملاءمة، نشير إلى "1" في الجزء العلوي من مثلث باسكال بالصف "0"، وهذا يسمح لنا بربط الأرقام على طول الصف n بمفكوك $(a+b)^n$.

يشتمل مثلث باسكال على عدد كبير من الأنماط التي لاتزال الرياضيات المعاصرة تعمل على كشفها وتبيانها. واحدة من هذه الأنماط، وهي أبسطها، هي تلك التي تمكّن من الانتقال من مستوى إلى المستوى الذي يليه.

مثال 2 بناء مثلث باسكال

بيّن كيف يمكن استعمال المستويات الخمسة الأولى من مثلث باسكال لاستنتاج المستوى السادس. استعمل هذا المستوى لإيجاد مفكوك $(x+y)^6$.

الحل

نلاحظ أن العددين الأول والأخير لأي مستوى هما 1، وأن كل عدد بينهما هو ناتج جمع العددين الواقعين أعلاه مباشرة. إذن، يمكن أن نستنتج المستوى 6 من المستوى 5 كما يلي:

المستوى الخامس		1		5		10		10		5		1	
			+		+		+		+		+		
المستوى السادس	1		6		15		20		15		6		1

المستوى السادس هو عبارة عن معاملات $(x+y)^6$، إذن:

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

حاول أن تحل التمرين 6

تشير تقنية الجمع في المثال السابق إلى صيغة ارتدادية يمكن التعبير عنها كما يلي:

الصيغة الارتدادية لمثلث باسكال

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

أو

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

يمكن الاستدلال على هذه الصيغة باستعمال العد. لنفترض أننا نقوم باختيار r عنصرًا من مجموعة من n عنصرًا، يمكن فعل ذلك بـ ${}_nC_r$ طريقة مختلفة.

الآن ضع علامة فارقة على أحد العناصر. بكم طريقة يمكن اختيار العناصر على أن يكون العنصر ذو العلامة الفارقة من بينها؟

هناك $r-1$ عنصرًا لاختيارها من بين $n-1$ عنصرًا بدون علامة فارقة، أي ${}_{n-1}C_{r-1}$

بكم طريقة يمكن اختيار العناصر بحيث لا يكون العنصر ذو العلامة الفارقة من بينها؟

هنا يجب اختيار r عنصرًا من بين $n-1$ عنصرًا إذن، ${}_{n-1}C_r$

بما أن اختيار العناصر r يتضمن إما اختيار العنصر ذي العلامة الفارقة من بينها أو لا، لذا يمثل العدد ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ جميع الخيارات وبدون تداخل.

إذن، ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

نظرية ذات الحدين

ليس من الضروري إنشاء مثلث باسكال لإيجاد مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$ لأنه لدينا صيغة لحساب قيم معاملات هذا المفكوك وهي: ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

سوف نورد هنا الصيغة العامة لنظرية ذات الحدين، نكتبها بصورتها التقليدية مستخدمين الرمز $\binom{n}{r}$ بدلًا من ${}_nC_r$.

عدد حدود مفكوك ذات الحدين

عدد حدود مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$ هو $n+1$

نظرية ذات الحدين

لكل عدد صحيح موجب n،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

حيث

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال 3 **مفكوك ذات الحدين**

أوجد مفكوك كل من:

A. $\left(2x - y^2\right)^4$

B. $\left(p - \frac{1}{2}q\right)^5$

الحل

A. نستعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(a+b)^4$ حيث $a = 2x$ و $b = -y^2$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\left(2x - y^2\right)^4$$

$$= (2x)^4 + 4(2x)^3\left(-y^2\right) + 6(2x)^2\left(-y^2\right)^2 + 4(2x)\left(-y^2\right)^3 + \left(-y^2\right)^4$$

$$= 16x^4 - 32x^3y^2 + 24x^2y^4 - 8xy^6 + y^8$$

(تابع)

B. نستعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(a+b)^5$ حيث $a = p$ و $b = \frac{-1}{2}q$

$$(a+b)^5$$
$$= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\left(p - \tfrac{1}{2}q\right)^5$$
$$= p^5 + 5p^4\left(-\tfrac{1}{2}q\right) + 10p^3\left(-\tfrac{1}{2}q\right)^2 + 10p^2\left(-\tfrac{1}{2}q\right)^3 + 5p\left(-\tfrac{1}{2}q\right)^4 + \left(-\tfrac{1}{2}q\right)^5$$
$$= p^5 - \tfrac{5}{2}p^4q + \tfrac{5}{2}p^3q^2 - \tfrac{5}{4}p^2q^3 + \tfrac{5}{16}pq^4 - \tfrac{1}{32}q^5$$

حاول أن تحل التمرين 9

يمكن كتابة نظرية ذات الحدين باستعمال رمز المجموع كما يلي:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

يمكن استعمال هذه الصيغة لايجاد معامل أي حد من حدود مفكوك ذات الحدين.

مثال 4 إيجاد قيمة معاملات ذات الحدين

A. أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(x+2)^{15}$.

B. أوجد معامل b^6 في مفكوك $\left(2b^2 - \frac{1}{b}\right)^{12}$.

الحل

A. نظرية ذات الحدين: $(a+b)^{15} = \sum_{r=0}^{15}\binom{15}{r}\left(a^{15-r}\right)\left(b^r\right)$

عوّض $a = x$ و $b = 2$ $\quad (x+2)^{15} = \sum_{r=0}^{15}\binom{15}{r}\left(x^{15-r}\right)\left(2^r\right)$

إذن، حدود ذات الحدين هي: $\binom{15}{r}\left(x^{15-r}\right)\left(2^r\right)$

للحصول على x^{10} يجب أن تكون $15 - r = 10$ أي إن $r = 5$

$$\binom{15}{5}\left(x^{15-5}\right)\left(2^5\right)$$
$$= \frac{15!}{5!(15-5)!} \times x^{10} \times 2^5 = 3003 \times x^{10} \times 32 = 96\,096 \times x^{10}$$

إذن، معامل x^{10} هو 96 096

(تابع)

B. نظرية ذات الحدين: $(a+b)^{12} = \sum_{r=0}^{12} \binom{12}{r} (a^{12-r})(b^r)$

عوّض $a = 2b^2$ و $b = -\frac{1}{b}$

إذن، حدود ذات الحدين هي:

$$\binom{12}{r}\left(2b^2\right)^{12-r}\left(\frac{-1}{b}\right)^r$$

$$= \binom{12}{r}(2)^{12-r}\left(b^2\right)^{12-r}\left(\frac{-1}{b}\right)^r$$

اعزل المتغير b حتى تحصل على أسه منفردًا

$$= \binom{12}{r}(2)^{12-r}(b)^{24-2r}(b)^{-r}(-1)^r$$

اجمع أسس b لتحصل على أس واحد

$$= \binom{12}{r}(2)^{12-r}(b)^{24-3r}(-1)^r$$

بما أن المطلوب هو معامل b^6 وفي الحد العام b^{24-3r}

$$24 - 3r = 6$$

$$r = 6$$

إذن، معامل b^6 هو:

$$\binom{12}{6}(2)^6(-1)^6 = 59\ 136$$

حاول أن تحل التمرين 12

مراجعة سريعة 8.4

في التمارين 1-6، أوجد مفكوك المقدار بالطريقة العادية، ثم تأكد من إجابتك باستعمال نظرية ذات الحدين.

1. $(3s + 2t)^2$ **2.** $(3p - 4q)^2$

3. $(u + v)^3$ **4.** $(b - c)^3$

5. $(2x - 3y)^3$ **6.** $(2m - 3y)^3$

الدرس 8.4 التمارين

في التمارين 1-3، أوجد مفكوك ذات الحدين مستعملًا الآلة الحاسبة لإيجاد معاملات ذات الحدين.

1. $(a + b)^4$ **2.** $(a + b)^6$

3. $(x + y)^7$

في التمارين 4-6، أوجد مفكوك ذات الحدين مستعملًا مثلث باسكال لإيجاد معاملات ذات الحدين.

4. $(x + y)^3$ **5.** $(x + y)^5$

6. $(p + q)^8$

في التمرينين 7 و 8، استعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك ذات الحدين لكل دالة.

7. $f(x) = (x - 2)^5$ **8.** $g(x) = (x + 3)^6$

في التمارين 9-11، استعمل نظرية ذات الحدين لايجاد المفكوك.

9. $(2y - 3x)^5$ **10.** $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$

11. $(x^{-2} + 3)^5$

في التمارين 12-15، أوجد معامل الحد المطلوب في مفكوك ذات الحدين.

12. الحد $x^{11}y^3$، $(x + y)^{14}$

13. الحد x^5y^8، $(x + y)^{13}$

14. الحد x^4، $(x - 2)^{12}$

15. الحد الخالي من x، في مفكوك $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$

16. استعمل القاعدة $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ لتبرهن أنّ $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

(هذا النمط من مثلث باسكال الذي يظهر في المثال 2)

17. برهن أنّ $\binom{n}{r-1} + 2\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+2}{r+1}$ ثم فسّر إجابتك من خلال عناصر مثلث باسكال.

أسئلة اختبار معيارية

18. **صواب أم خطأ** إن المعاملات المتتالية في مفكوك ذات الحدين $(x - y)^{50}$، تتناوب في الإشارة (معامل موجب ثم معامل سالب ثم معامل موجب، وهكذا). برّر إجابتك.

19. **صواب أم خطأ** إن ناتج جمع أي صف في مثلث باسكال هو عدد صحيح زوجي. برّر إجابتك.

20. اختيار من متعدد أي مما يلي هو معامل x^4 في مفكوك $(2x+1)^8$؟

A. 16

B. 256

C. 1 120

D. 1 680

E. 26 680

21. اختيار من متعدد إن ناتج جمع معاملات مفكوك $(3x-2y)^{10}$ هو:

A. 1

B. 1 024

C. 58 025

D. 59 049

E. 9 765 625

22. اختيار من متعدد

$$(x+y)^3 + (x-y)^3 =$$

A. 0

B. $2x^3$

C. $2x^3 - 2y^3$

D. $2x^3 + 6xy^2$

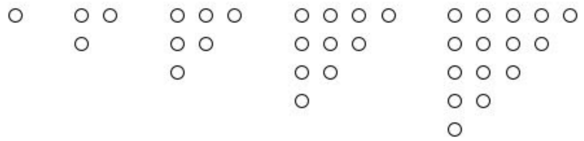
E. $6x^2y + 2y^3$

استكشاف

23. أوجد أكبر عدد صحيح n بحيث تستطيع الآلة الحاسبة حساب $n!$.

24. أوجد أكبر عدد صحيح n بحيث تستطيع الآلة الحاسبة حساب $\binom{n}{100}$.

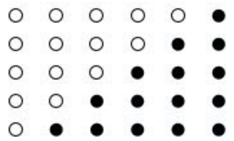
25. الأرقام المثلثية الأعداد التي هي في صورة $1 + 3 + \cdots + n$ تُسمى أعدادًا مثلثية لأنها تعد الأرقام في مجموعات مثلثية، كما هو مبين أدناه.



a. احسب أول 10 أعداد مثلثية.

b. أين تظهر الأعداد المثلثية في مثلث باسكال؟

c. الكتابة للتعلم اشرح لماذا يبين المخطط أدناه أن العدد المثلثي رقم n يمكن أن يكتب في الصيغة $\frac{n(n+1)}{2}$



d. اكتب القاعدة من الفرع (c) كمعامل ذو الحدين.
(لهذا السبب تبدو الأعداد المثلثية على صورتها في مثلث باسكال)

26. نشاط جماعي استكشاف مثلث باسكال توزّع مع زملائك في مجموعات من اثنين أو ثلاثة. حاولوا أن تتوقعوا، بمجرد النظر إلى الأنماط في مثلث باسكال، الإجابات عن الأسئلة التالية:

a. أي الأعداد الصحيحة الموجبة يظهر أقل عدد من المرات؟

b. أي الأعداد يظهر أكبر عدد من المرات؟

c. هل يوجد أي عدد صحيح موجب لا يظهر في مثلث باسكال؟

d. إذا أخذت أي مستوى من الأعداد، وبدأت بطرح الأعداد وجمعها بشكل متناوب، ما النتيجة؟

e. إذا كان P عددًا أوليًا، ما المشترك بين كل الأعداد الداخلية التي يتضمنها المستوى رقم P؟

f. أي صف كل أعداده الداخلية زوجية؟

g. أي صف يتضمن فقط أعدادًا فردية؟

h. ما الأنماط الأخرى التي تستطيع أن تلاحظها؟
شارك اكتشافات مجموعتك مع مجموعات أخرى.

توسيع الأفكار

27. استعمل نظرية ذات الحدين لتبرهن أن جمع كل أعداد الصف رقم n في مثلث باسكال يساوي 2^n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

(إرشاد: استعمل نظرية ذات الحدين لمفكوك $(1 + 1)^n$)

28. استعمل نظرية ذات الحدين لتبرهن أن طرح وجمع الأعداد بالتناوب في أي صف في مثلث باسكال يساوي صفر. أي إنّ:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - .... + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

29. برهن أنّ:

$$\sum_{r=0}^{n} 2^r \binom{r}{2} = 3^n$$

8.5 احتمالات الحوادث Probabilities of Events

ما ستتعلّمه

- فضاء العيّنة واحتمال الحدث
- دالة الاحتمال

... ولماذا

ينبغي أن يعرف كل منا كيف يمكن أن يكون للاحتمالات "قوانين" رياضية.

معيار الدرس

11A.10.1

المصطلحات

- تجربة عشوائية random experiment
- فضاء العيّنة sample space
- حدث event
- دالة الاحتمال probability function

فضاء العيّنة واحتمال الحدث

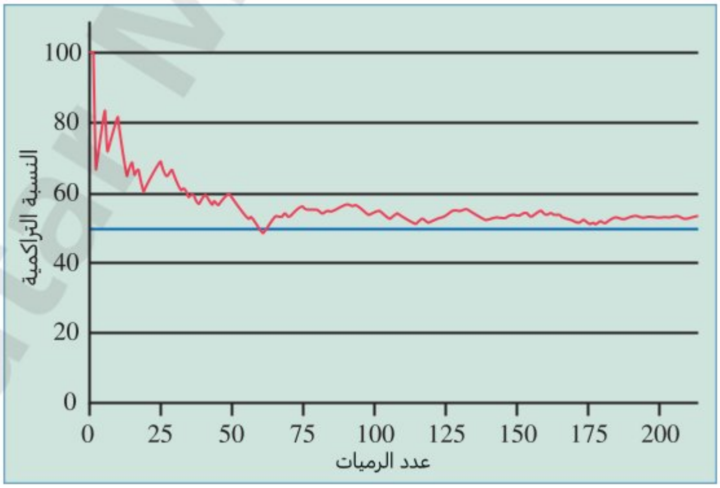
يعتمد معظم الناس عند توقع إمكانية حدوث أمر ما على التخمين، لكن ذلك لا يمت إلى مبادئ الرياضيات بصلة، لذا كثيرًا ما يقعون ضحية لخدعة المعطيات المضللة. سنعمل في هذا الدرس على بناء تصور عن الاحتمالات يقوم على مبادىء وأسس رياضية.

ربما يشكّل رمي قطعة نقدية معدنية مثالًا بسيطًا على الاحتمالات. لكل قطعة نقدية وجهان: صورة وكتابة. ماذا نقصد حين نقول إن إمكانية الحصول على الصورة هو "50-50"؟ (أو حين نقول إن احتمال الحصول على الصورة هو $\frac{1}{2}$؟)

إننا لا نقصد بالطبع أننا سنحصل على الصورة مرة وعلى الكتابة مرة إذا رمينا القطعة النقدية مرتين، ولا نقصد كذلك (كما يعتقد كثيرون) أن إمكانية حصولنا على الكتابة تزداد في حال حصلنا على الصورة 8 مرات من 10 رميات بينما حصلنا على الكتابة مرتين فقط، وذلك لكي تتعادل النتيجتان.

لمزيد من التوضيح سنرمي القطعة النقدية مئات المرات ونسجّل عدد المرات التي نحصل فيها على الصورة بالنسبة لعدد الرميات.

حصلنا باستعمال محاكاة على الحاسب، عند رمي القطعة النقدية 200 مرة، على التمثيل البياني والجدول أدناه.



عدد الرميات	الناتج	عدد الصور	% حتى الآن
1	صورة	1	100
2	صورة	2	100
3	كتابة	2	66.7
4	صورة	3	75
5	صورة	4	80
6	صورة	5	83
7	كتابة	5	71.4
8	صورة	6	75
9	صورة	7	77.8
10	صورة	8	80
⋮			
100	كتابة	54	54
⋮			
200	صورة	104	52

مع أن عدد المرات التي حصلنا فيها على الصورة أكبر في البداية، إلا أن النسبة تقترب أكثر فأكثر من 50% مع تزايد عدد الرميات. هذا لا يعني أن القطعة بدأت تميل إلى إظهار الكتابة أكثر. ففي الحقيقة، يُظهر الجدول أن نسبة الحصول على صورة بين الرمية 11 والرمية 100 هي $\frac{46}{90} \approx 51\%$، وتصبح 50% بين الرميتين 101 و 200
الأكثر ثباتًا إذن هو سلوك الرميات على المدى الطويل لا على المدى القصير. هذا السلوك على المدى الطويل هو ما يمكن أن يكون أساسًا في بناء نظرية الاحتمالات.

التجربة العشوائية هي كل عملية تؤدي إلى نتائج متوقعة، وتكون هناك إمكانية لتحديد نتائجها قبل إجرائها.

فضاء العيّنة لأي تجربة عشوائية هو مجموعة النتائج الممكنة للتجربة ويرمز له بالرمز S.
على سبيل المثال، عندما نرمي قطعة نقدية تكون النتائج المتوقعة إما صورة (H) وإما كتابة (T).
إذن، فضاء العيّنة هو $S = \{H, T\}$.

الحدث هو أي مجموعة جزئية من فضاء العيّنة، وهي تمثّل النتائج التي تشترك في صفة معيّنة كما في المثال التالي.

مثال 1 تحديد الحدث

A. عند رمي مكعب منتظم مرقم من 1 إلى 6، حدّد الحدث A: "الحصول على عدد فردي"، والحدث B: "الحصول على عدد أصغر من 5".

B. إذا رمينا قطعة نقدية 3 مرات، حدّد الحدث C: "الحصول على صورة مرتين" باستعمال أشكال ڤن.

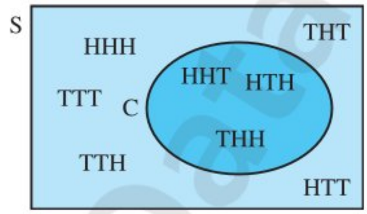
الحل

A. يتألف فضاء العيّنة من ستة نواتج، $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$

B. يتألف فضاء العيّنة من 8 نواتج ممكنة هي:

$$S = \{HHH, HHT, HTT, TTT, THH, THT, TTH, HTH\}$$



"الحصول على صورة مرتين" هو حدث مكوّن من ثلاثة عناصر:

$$C = \{HHT, HTH, THH\}$$

حاول أن تحل التمرين 1

تعريف احتمال الحدث

احتمال الحدث E هو القيمة التي يقترب منها التكرار النسبي عند تكرار التجربة عددًا كبيرًا من المرات.

في مثال القطعة النقدية نقول إن احتمال الحصول على الصورة هو $\frac{1}{2}$، وبالتالي فإن نسبة عدد المرات التي نحصل فيها على الصورة إلى عدد الرميات الكلي تقترب دائمًا من 50% أي $\frac{1}{2}$ كما تؤكد التجربة. إلا أنه عليك الانتباه لهذا المنحى في التفكير. فاحتمال أن يضرب نيزك كوكب الارض هذا اليوم ليس $\frac{1}{2}$، على الرغم من وجود احتمالين فقط، {أن يضرب، أن لا يضرب}. هذه المقاربة تصلح فقط في حالة النواتج التي لها إمكانية الحدوث نفسها.

مثال 2 **اختبار الحدس المتعلق بالاحتمال**

ما الاحتمال لكل من الحوادث التالية:

A. الحصول مرتين على الصورة بعد رمي قطعة نقدية مرتين.

B. سحب بطاقة تحمل الرقم 7 من مجموعة بطاقات مكونة من 52 بطاقة مرقمة من 1 إلى 13 كل 4 بطاقات منها تحمل نفس الرقم.

C. الحصول على عددين مجموعهما 4 عند رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6

D. مريض يشعر بألم في ركبته، وأخبره طبيبه أن عليه أن يجري مزيدًا من الفحوصات لتحديد ما إذا كان الألم سببه التهاب الوتر أم التهاب كيسي أم التهاب المفصل أم تمزق في الغضروف المفصلي.

الحل

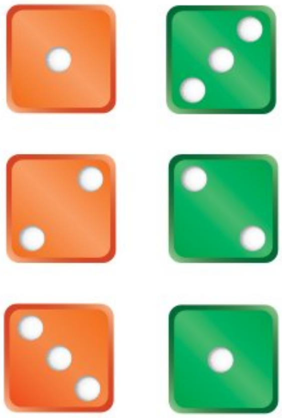
A. هناك أربعة نواتج لها إمكانية الحدوث نفسها: $\{HH, HT, TH, TT\}$. نسبة HH من فضاء العينة هي 1 من 4، إذن الاحتمال هو $\frac{1}{4}$

B. عدد النواتج الممكنة هو 52 ولها كلها نفس إمكانية الحدوث، تحمل 4 من بينها الرقم 7 إذن، الاحتمال هو $\frac{4}{52}$ أو $\frac{1}{13}$

C. بحسب "مبدأ الضرب في العد"، هناك $6 \times 6 = 36$ ناتج محتمل ولها نفس إمكانية الحدوث. منها ثلاثة $\{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$ تنتج مجموع 4 (انظر الشكل 8.5.1).
إذن، الاحتمال هو $\frac{3}{36}$ أو $\frac{1}{12}$

D. بما أن هذه النواتج الأربعة ليس لها نفس إمكانية الحدوث، لذا، لا يمكننا الحصول على الاحتمال من هذه المعلومات.

حاول أن تحل التمرين 7



الشكل 8.5.1 النواتج الممكنة للحصول على عددين مجموعهما 4 عند رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6

هل حساب الاحتمالات هو للألعاب فقط؟

تعود نشأة حساب الاحتمالات إلى الرسائل المتبادلة بين العالمين بليز باسكال (1623-1662) وبيير فيرما (1601-1665) وكانت تتعلق بألعاب الحظ، لكنها قطعت شوطًا كبيرًا منذ ذلك الحين. فقد طوّر ديفيد بلاكويل (1919-2010)، وهو أول أميركي من أصول أفريقية يحصل على عضوية في معهد برينستون للدراسات المتقدمة، بشكل كبير نظرية وتطبيقات حساب الاحتمالات، ولا سيما في مجالات الإحصاء وفيزياء الكم ونظرية المعلومات. كما أنتجت أعمال جون فون نيومان (1903-1957) فرعًا منفصلًا من الرياضيات المتقطعة الحديثة التي هي بالفعل عن الألعاب، وتُسمى نظرية الألعاب.

عندما تكون لجميع نتائج تجربة ما إمكانية الحدوث نفسها، يمكننا عندئذ تعريف قاعدة لحساب احتمالات الحوادث.

احتمال الحدث (النواتج التي لها إمكانية الحدوث نفسها)

إذا كان E حدثًا في فضاء عيّنة S منته غير خالٍ، يشتمل على نواتج لها نفس إمكانية الحدوث، يمكننا نمذجة احتمال الحدث E باستعمال القاعدة التالية:

$$P(E) = \frac{\text{عدد النواتج في E}}{\text{عدد النواتج في S}}$$

لاعتماد هذا التعريف لاحتمال الحدث يجب أن تكون للنواتج نفس إمكانية الحدوث.
لفهم هذا الأمر بدقة، نعود إلى المثال السابق حيث طُلب منا أن نحدد قيمة احتمال حصولنا على عددين مجموعهما 4 عند رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6 في الفرع C.
يعتقد كثير من الناس أن حصولنا على المجموع 4 هو أحد النواتج الممكنة من بين كل النواتج لمجموع العددين على المكعبين وهي: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$، وبالتالي فإن احتمال ذلك هو $\frac{1}{11}$ لكننا وجدنا أن احتمال ذلك هو $\frac{1}{12}$، ويعود هذا الفرق إلى أن ليس للنواتج كلها نفس إمكانية الحدوث.
يمكننا أن نحدد لكل ناتج قيمته الاحتمالية التي تتناسب مع عدد المرات التي يكون فيها المجموع مساويًا لهذا الناتج. تبيّن الجداول أدناه الاحتمالات لهذه النواتج.

الناتج	القيمة الاحتمالية
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

المجموع	المكعب الثاني					
	1	2	3	4	5	6
المكعب الأول 1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

كل النواتج	المكعب الثاني					
	1	2	3	4	5	6
المكعب الأول 1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

توضّح القيم الاحتمالية المختلفة أنه ليس لكل المجاميع نفس إمكانية الحدوث، غير أننا بإمكاننا أيضًا تحديد احتمال حدث ما من خلال جمع احتمالات نواتجه كما في المثال التالي:

مثال 3 رمي المكعب

أوجد احتمال حصولنا على عددين مجموعهما يقبل القسمة على 3 عند رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6

الحل

يتشكل الحدث E من النواتج $\{3, 6, 9, 12\}$. لحساب احتمال E، نجمع احتمالات النواتج في E. (انظر جدول القيمة الاحتمالية):

احتمال حصول الناتج 3 هو حصولنا على أحد الزوجين المرتبين (1 ,2) أو (2 ,1)، أي $\frac{2}{36}$

احتمال حصول الناتج 6 هو حصولنا على أحد الأزواج المرتبة

(4, 2) أو (2, 4) أو (3, 3) أو (5, 1) أو (1, 5)، أي $\frac{5}{36}$

احتمال حصول الناتج 9 هو حصولنا على أحد الأزواج المرتبة (5 ,4) أو (4 ,5) أو (3 ,6) أو (6 ,3)، أي $\frac{4}{36}$

احتمال حصول الناتج 12 هو حصولنا على الزوج المرتب (6 ,6)، أي $\frac{1}{36}$

إذن:

$$P(E) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

حاول أن تحل التمرين 9

يمكننا أن نلاحظ أن هذه الطريقة لحساب الاحتمالات، تعود بطريقة غير مباشرة إلى حساب الاحتمال في فضاء عيّنة عدد نواتجه 36، احتمال حدوث كل ناتج منها هو $\frac{1}{36}$، هذه النواتج هي الأزواج المرتبة المبيّنة في الجدول أعلاه والتي يعبّر كل منها عن ناتج محتمل للمكعب 1 أو المكعب 2، فإذا اعتمدنا قاعدة الاحتمال التي عرّفناها أعلاه، علينا أن نعد الحالات التي يقبل فيها المجموع القسمة على 3 وهي 12، ثم نقسم $\frac{12}{36}$ لنحصل على $\frac{1}{3}$

دالة الاحتمال

تعْرف قاعدة الاحتمال دالة تحدّد لكل ناتج من النواتج الممكنة قيمة عددية معيّنة، ولكن ليست كل دالة تحدّد قيمة عددية للنواتج الممكنة هي **دالة احتمال**.

يمكننا مما تقدم أن نحدد ما يلي:

تعريف دالة الاحتمال

دالة الاحتمال هي دالة P تحدّد لكل ناتج في فضاء عيّنة ما S قيمة عددية وفق الشروط التالية:

1. $0 \le P(E) \le 1$ لكل ناتج E
2. مجموع الاحتمالات لكل نواتج فضاء العيّنة S هو 1
3. $P(\emptyset) = 0$
4. $P(S) = 1$

يمكن استعمال دالة الاحتمال لنمذجة احتمال أي حدث.

احتمال الحدث (قاعدة عامة)

إذا كان S فضاء عيّنة منته غير خالٍ، وكان احتمال كل ناتج فيه تحدّده دالة احتمال P، وكان E أي حدث في S، فإن احتمال الحدث E يساوي مجموع احتمالات النواتج في E.

المجموعة الخالية

كل مجموعة لا تحتوي على عناصر تسمّى "المجموعة الخالية" ويرمز لها بالرمز $\emptyset$.

مثال 4 اختبار دالة احتمال

لترجيح فوز فريق في دوري لكرة السلة تشارك فيه أربعة فرق، وضع محلل رياضي القائمة أدناه لتحديد احتمالات الفوز لكل فريق ببطولة الدوري.

هل تمثّل هذه القائمة دالة احتمال؟

الفريق	الاحتمال
1	2/5
2	1/3
3	1/6
4	1/8

الحل

هذه الدالة لا تصلح أن تكون دالة احتمال لأن $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \neq 1$

حاول أن تحل التمرين 12

لا يكون تحديد الاحتمالات سهلًا دائمًا، لكن العمليات الحسابية اللازمة لتحديدها تقتصر على الضرب والجمع، وبشكل أساسي على مبادئ العد. فيما يلي الطريقة المتبعة لذلك:

طريقة تحديد الاحتمالات

1. تحديد فضاء العيّنة المشتمل على كل النواتج الممكنة، ويستحسن اختيار فضاء عيّنة تكون جميع نواتجه لها نفس إمكانية الحدوث.

2. إذا كانت لكل نواتج الفضاء S إمكانية الحدوث نفسها، فإن قيمة احتمال الحدث تحدّدها مبادئ العد:

$$P(E) = \frac{\text{عدد النواتج في } E}{\text{عدد النواتج في } S}$$

3. إن لم تكن للنواتج إمكانية الحدوث نفسها، علينا أن نحدّد دالة الاحتمال (وهو أمر قد لا يكون سهلًا) مع التأكد من تحقق شروط دالة الاحتمال، وعندئذ يكون احتمال الحدث E هو مجموع احتمالات كل نواتج E.

إرشاد

تنقسم حروف اللغة الإنجليزية إلى قسمين:
القسم الأول حروف العلّة وهي: a, e, o, u, i وتشكل باقي الحروف القسم الثاني وتُسمى الحروف الساكنة.

مثال 5 إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اختار الأستاذ خمسة طلاب من بين الأسماء المعلّقة على الحائط للعمل على مشروع معًا. أوجد احتمال أن تبدأ أسماء الطلاب الخمسة بحرف ساكن.

الحل

نحدّد أولًا ما إذا كانت المسألة عن التباديل أو التوافيق.
بما أن ترتيب اختيار الطلاب ليس ذا أهمية، نستعمل التوافيق لمعرفة عدد النواتج المحتملة والنواتج التي يُراد حساب احتمالها.
كخطوة أولى، نوجد العدد الإجمالي للنواتج المحتملة، الذي يمثّل عدد عناصر فضاء العينة.

$${}_{18}C_5 = \frac{18!}{5!\,(18-5)!} = 8\,568$$

هناك 8 568 طريقة لاختيار الطلاب الخمسة من بين الأسماء المعلّقة على الحائط.
في الخطوة الثانية، نجد عدد النواتج المحتملة، أي عدد كل الأسماء التي تبدأ بحرف ساكن ولا يبدأ أي من الأسماء بحرف علّة.

$${}_5C_0 = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} = 1 \qquad {}_{13}C_5 = \frac{13!}{5!\,(13-5)!} = 1\,287$$

(تابع)

استعمل مبدأ العد الأساسي. اضرب نتيجتَي النواتج المحتملة لإيجاد العدد الإجمالي للنواتج.

$${}_{13}C_5 \times {}_5C_0 = 1\,287 \times 1 = 1\,287$$

هناك 287 1 ناتج حيث تبدأ كل الأسماء بحرف ساكن.

نجد الاحتمال.

$$P(\text{كل الأسماء تبدأ بحرف ساكن}) = \frac{\text{عدد النواتج حيث تبدأ كل الأسماء بحرف ساكن}}{\text{العدد الاجمالي للنواتج المحتملة}}$$

$$= \frac{1\,287}{8\,568} \approx 0.15$$

إذن، احتمال أن تبدأ الأسماء الخمسة كلها بحرف ساكن هو 0.15 أو 15% تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 14

مثال 6 اختيار الكتب

لدى جاسم 4 كتب علمية و 6 كتب أدبية أراد قراءتها بترتيب عشوائي.

A. أوجد احتمال أن تكون أول 4 كتب يقرؤها كتبًا علمية.

B. أوجد احتمال أن يكون أول كتابين علميين والكتاب الثالث أدبي.

الحل

A. نحدّد أولًا ما إذا كانت المسألة عن التباديل أو التوافيق.

بما أن الترتيب مهم في هذه المسألة، حيث أن جاسم يقرأ الكتب واحدًا تلو الآخر، نستعمل التباديل لمعرفة عدد النواتج المحتملة والنواتج التي يُراد حساب احتمالها.

كخطوة أولى نوجد العدد الإجمالي للنواتج المحتملة:

$${}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5\,040$$

هناك 040 5 طريقة لترتيب 4 كتب من بين 10 كتب.

في الخطوة الثانية، نجد عدد النواتج التي يُراد حساب احتمالها

$${}_4P_4 = \frac{4!}{(4-4)!} = 24$$

هناك 24 طريقة بحيث تكون الكتب الأربعة الأولى كتبًا علمية.

نجد الاحتمال:

$$P(\text{أول 4 كتب علمية}) = \frac{24}{5\,040}$$

$$= \frac{1}{210} \approx 0.0048$$

إذن، احتمال أن تكون أول 4 كتب علمية هو 0.0048 تقريبًا.

(تابع)

B. نستعمل التباديل لمعرفة عدد النواتج المحتملة والنواتج التي يُراد حساب احتمالها.
كخطوة أولى نوجد العدد الإجمالي للنواتج المحتملة:

$${}_{10}P_3 = 720$$

هناك 720 طريقة لترتيب 3 كتب من بين 10 كتب.
في الخطوة الثانية، نجد عدد النواتج التي يُراد حساب احتمالها

$${}_4P_2 \times {}_6P_1 = 72$$

هناك 72 طريقة بحيث يكون أول كتابين علميين والكتاب الثالث أدبي.
نجد الاحتمال:

$$P(\text{أول كتابين علميين والكتاب الثالث أدبي}) = \frac{72}{720}$$
$$= \frac{1}{10} = 0.1$$

إذن، احتمال أن يكون أول كتابين علميين والكتاب الثالث أدبي هو 0.1

حاول أن تحل التمرين 19

إرشاد

يمكن استعمال مبدأ العد في حل المثال 6 كما يلي:

A. $P(\text{أول 4 كتب علمية}) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8 \times 7}$
$= \frac{1}{210}$

B. $P(\text{أول كتابين علميين والكتاب الثالث أدبي})$
$= \frac{4 \times 3 \times 6}{10 \times 9 \times 8}$
$= \frac{1}{10}$

مراجعة سريعة 8.5

في التمارين 1-7، أوجد عدد النواتج المحتملة للتجربة.

1. رمي قطعة نقدية واحدة.

2. رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6

3. رمي ثلاث قطع نقدية مختلفة.

4. رمي ثلاث مكعبات مرقمة مختلفة.

5. سحب خمس صور من مجموعة مكوّنة من 52 صورة.

6. خمسة أشخاص يقفون في صف لالتقاط صورة جماعية.

7. تشكيل أعداد من ثلاثة أرقام من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ من دون تكرار الرقم.

في التمرينين 8 و 9، أوجد قيمة المقدار باستعمال القلم والورقة، ثم تحقق من صحة إجابتك باستعمال الحاسبة.

8. $\frac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3}$

9. $\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}$

الدرس 8.5 التمارين

1. نرمي قطعة نقدية ومكعبًا مرقمًا من 1 إلى 6، ونسجل الرقم والوجه الناتج بالترتيب. مثلًا، $(5, H)$ تعني 5 للمكعب وصورة للقطعة النقدية. أوجد فضاء العيّنة ثم حدّد الحدث A: الحصول على عدد فردي وصورة.

2. يستعمل اللاعبون في إحدى اللعب، هرمًا من أربعة أوجه مرقمًا من 1 إلى 4، على شكل نقاط. يتم حساب رصيد كل لاعب برمي الهرم مرتين وإضافة 1 إلى مجموع النقاط في الرميتين.

a. أوجد فضاء العيّنة عند رمي الهرم مرتين (سجّل النقاط في الرميتين الأولى والثانية).

c. أوجد فضاء العيّنة لرصيد اللاعب.

في التمارين 3-10، تمّ رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6، أحدهما أحمر والآخر أخضر. أوجد احتمال الحدث.

3. المجموع 9

4. المجموع عدد زوجي.

5. الرقم على المكعب الأحمر أكبر من الرقم على المكعب الأخضر.

6. المجموع أصغر من 10

7. العددان فرديان.

8. العددان زوجيان.

9. المجموع عدد أولي.

10. المجموع 7 أو 11

11. **الكتابة للتعلم** اشرح لماذا لا يمكن أن تكون العبارة التالية صحيحة. احتمالات أن يبيع متجر حواسيب 0، 1، 2، أو 3 حواسيب في أي يوم هي 0.12، 0.45، 0.38، و 0.15 بالترتيب.

12. **الكتابة للتعلم** لدى جاسم أرنب يعيش في قفص من أربع حجرات. راقب جاسم نسبة المدة التقريبية التي يقضيها الأرنب في كل حجرة، وأنشأ الجدول التالي.

الحجرة	A	B	C	D
نسبة المدة	0.25	0.20	0.35	0.30

a. هل هذه دالة احتمال صحيحة؟ وضّح إجابتك.

b. هل هناك خطأ في طريقة تفكير جاسم؟ وضّح إجابتك.

13. (تكملة للتمرين السابق) افترض أن جاسم رأى أن الأرنب يقضي وقته في الحجرات الأربعة حسب النسبة التالية: 1 : 2 : 3 : 4، أوجد النسب التي عليه كتابتها في الجدول أعلاه. هل هذه دالة احتمال صحيحة؟

14. بالعودة إلى المثال 5، يقوم الأستاذ باختيار 3 طلاب. أوجد احتمال أن ينتهي اسم كل منهم بحرف علّة؟

15. **تأجير السيارات** لدى شركة لتأجير السيارات 25 سيارة معدّة للتأجير: 20 سيارة كبيرة و 5 متوسطة الحجم. إذا اختارت مجموعة من السياح سيارتين اختيارًا عشوائيًا، أوجد احتمال أن تكون السيارتان كبيرتي الحجم.

16. يحتوي صندوق على 3 كرات: زرقاء وخضراء وصفراء. نقوم بالتجربة التالية: سحب كرتين من الصندوق على التوالي مع الإرجاع وتسجيل لونها.

a. أوجد فضاء العيّنة لهذه التجربة.

b. أوجد حدث اختيار الكرة الصفراء أولًا.

c. أوجد حدث اختيار نفس الكرة مرتين متتاليتين.

17. أعد التجربة السابقة ولكن من دون إعادة الكرة الأولى.

18. يرمي نعيم قطعة نقدية 3 مرات ويسجّل في كل مرة ما إذا كانت صورة أو كتابة.

a. أوجد فضاء العيّنة لهذه التجربة.

b. أوجد الحدث حيث عدد المرات التي نحصل فيها على صورة أكثر من عدد المرات التي نحصل فيها على كتابة.

19. يقدّم 4 ممثلين و 5 موسيقيين عروضًا مختلفة في أحد المسارح. يتم اختيار ترتيب تقديم العروض بشكل عشوائي.

a. أوجد احتمال أن يكون أول 3 مشاركين ممثلين.

b. أوجد احتمال أن يكون أول مشاركيَن من الممثلين والمشارك الثالث موسيقي.

20. تتضمن قائمة أحد المطاعم 4 وجبات نباتية و 5 وجبات لحوم. تكون طلبات الزبائن عشوائية.

a. أوجد احتمال أن تكون أول ثلاثة طلبات وجبات نباتية.

b. أوجد احتمال أن يكون أول طلبين وجبات نباتية والطلب الثالث وجبة لحوم.

21. **اختبار نهاية السنة الدراسية** أعطى الأستاذ طلابه 20 سؤالًا ثم اختار منها 8 أسئلة للاختبار الأخير. إذا كان أحد الطلاب يعرف إجابات 14 سؤالًا منها، أوجد احتمال أن يستطيع الطالب الإجابة على عدد الأسئلة المطلوبة.

a. كل الأسئلة الثمانية.

b. 5 أسئلة بالتحديد.

c. 6 أسئلة على الأقل.

22. **متطلبات التخرج** لكي يتخرج طالب يدرس علوم الرياضة البدنية في الجامعة يجب أن ينجح في مادتين على الأقل يختارهما من: التمارين الرياضية، السباحة، فنون الدفاع عن النفس، الجمباز، كرة الطاولة، الجري، كرة السلة، كرة القدم، الكرة الطائرة. إذا قرر الطالب اختيار المادتين بشكل عشوائي من صندوق يحتوي على أسماء الألعاب، أوجد احتمال أن يختار كرة الطاولة وكرة السلة.

التمارين 23-26 تخص لعبة للأطفال مؤلفة من 24 قطعة تركيبية، بستة ألوان (أحمر وأزرق وأخضر وأصفر وبنفسجي وبرتقالي) في أربعة أشكال (مربع ودائرة وبيضاوي ومستطيل). تتألف حصة كل طفل من 6 قطع. أوجد احتمال كل حدث.

23. حصة أحدهم كلها أشكال دائرة.

24. كل حصة من ستة قطع هي من نفس الشكل.

25. حصة أحدهم تشتمل على القطع الحمراء الأربعة.

26. تشتمل حصة أحدهم على قطعتين صفراوين من نفس عدد الأضلع.

27. **الكتابة للتعلم** بعد تعرّض منى لإصابة في ركبتها، أخبرها الطبيب أن احتمال شفاء ركبتها بشكل كامل بعد العملية الجراحية هو 90%، كيف حدّد الطبيب هذا الاحتمال في رأيك؟

28. **الكتابة للتعلم** تقول نشرة الطقس إن احتمال هطول المطر أثناء ذهابك في نزهة برية غدًا هو 30%، كيف يضع خبراء الطقس توقعاتهم في رأيك؟

أسئلة اختبار معيارية

29. **صواب أم خطأ** يتألف فضاء عيّنة من حوادث لها نفس إمكانية الحدوث. برّر إجابتك.

30. **صواب أم خطأ** قيمة احتمال حدث قد تكون أكبر من 1، برّر إجابتك.

31. **اختيار من متعدد** احتمال الحصول على عددين مجموعهما 5 عند رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6 هو:

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{9}$

E. $\frac{1}{11}$

32. **اختيار من متعدد** أي القيم التالية لا يمكن أن تكون احتمالًا لحدث؟

A. 0

B. 0.95

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{3}{\pi}$

E. $\frac{\pi}{2}$

33. **اختيار من متعدد** تم رمي قطعة نقدية 3 مرات على التوالي. ما احتمال ظهور الصورة مرة واحدة فقط؟

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{2}{3}$

استكشاف

34. تتألف لعبة أطفال من 52 قطعة تركيبية مقسمة إلى 4 مجموعات، كل مجموعة لها شكل محدد ومؤلفة من 13 قطعة مرقمة من 1 إلى 13، يأخذ طفل 5 قطع منها عشوائيًا. أوجد احتمال كل مما يلي.

a. أن تشتمل حصة الطفل على قطعة واحدة على الأقل عليها الرقم 13

b. أن تشتمل حصة الطفل على أي ثلاث قطع من شكل واحد وزوج من القطع من شكل آخر.

توسيع الأفكار

35. القيمة المتوقعة إذا كانت نواتج تجربة هي قيم رقمية معطاة (مثل مجموع العددين عند رمي مكعبين مرقمين)، نعرّف القيمة المتوقعة بأنها مجموع كل القيم العددية مضروبة كل باحتمالها. على سبيل المثال، لنفترض أننا إذا رمينا مكعب مرقم من 1-6 وحصلنا على عدد من مضاعفات العدد 3 نربح في اللعبة 3 نقاط، وإلا نخسر نقطة.
يبيّن الجدول أدناه احتمال الحصول على كلا الرميتين.

قيمة النقاط	+3	−1
الاحتمال	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$

القيمة المتوقعة هي:

$$3 \times \left(\frac{2}{6}\right) + \left(-1\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{6}{6}\right) - \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

هذا يعني أننا نربح $\frac{1}{3}$ نقطة في كل رمية على المدى الطويل.

a. توصَف اللعبة بأنها "عادلة" إذا كانت القيمة المتوقعة تساوي الصفر. على افتراض أننا ما زلنا نربح 3 نقاط عند الحصول على مضاعفات العدد 3، أوجد قيمة النقاط التي يجب أن نخسرها إذا لم نحصل على مضاعفات العدد 3، بحيث تكون اللعبة "عادلة".

b. لنفترض أننا نرمي مكعبين مرقمين وننظر إلى مجموع العددين حسب الشروط الأصلية. أي أننا نربح 3 نقاط عند الحصول على مضاعفات العدد 3، وإلا نخسر نقطة، أوجد القيمة المتوقعة لهذه اللعبة.

8.6 الحوادث المتنافية Mutualty Exclusive Events

ما ستتعلّمه

- احتمالات الحوادث المتنافية.
- احتمالات الحوادث غير المتنافية.

... ولماذا

ترتبط العمليات على المجموعات بخصائص المجموعات التي تمثّلها وهو ما يسهل إيجاد احتمالاتها.

معايير الدرس

11A.10.1

11A.10.2

المصطلحات

- حدثان متنافيان
disjoint events / mutually exclusive events
- الحوادث المتنافية والشاملة
mutually exclusive and exhaustive events

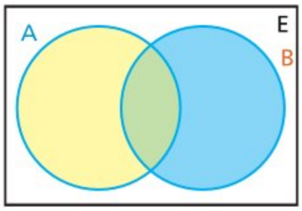
تذكير

العمليات على المجموعات:

الاتحاد

يمثّل $A \cup B$ اتحاد المجموعتين A و B أي جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو المجموعة B.

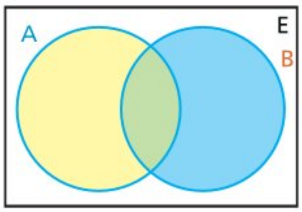
$A \cup B = \{x{:}x \in A \text{ أو } x \in B\}$



التقاطع

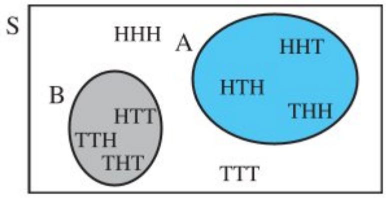
يمثّل $A \cap B$ تقاطع المجموعتين A و B أي جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A وإلى المجموعة B.

$A \cap B = \{x{:}x \in A \text{ و } x \in B\}$



احتمالات الحوادث المتنافية

إذا رمينا ثلاث قطع نقدية معًا، فإن إمكانية حصولنا على صورتين وكتابتين في الوقت نفسه أمر مستحيل، لذا نقول إن الحدثين A (الحصول على صورتين) و B (الحصول على كتابتين) **حدثان متنافيان**. هذا يعني أن مجموعة نواتج A ومجموعة نواتج B ليس بينهما أي ناتج مشترك أي $A \cap B = \varnothing$.



في هذه الحالة فإن الحدث "A أو B" يمثّل اتحاد المجموعتين A و B، وهذا الاتحاد يتضمّن جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو إلى المجموعة B. نعبّر عن اتحاد المجموعتين A و B باستعمال الصفة المميزة $A \cup B = \{x{:}\ x \in A \text{ أو } x \in B\}$ وبالتالي فإن احتماله يساوي مجموع احتمالات نواتج المجموعتين A و B ويعبّر عن ذلك بالصيغة:

$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$.

في المقابل، الحدث "A و B" يمثّل تقاطع المجموعتين A و B، وهذا التقاطع يتضمّن جميع العناصر التي تنتمي إلى كلتا المجموعتين A و B في الوقت نفسه، ونعبّر عن تقاطع المجموعتين A و B باستعمال الصفة المميزة $A \cap B = \{x{:}\ x \in A \text{ و } x \in B\}$، وبالتالي فإن هذا الحدث هو المجموعة الخالية $\varnothing$.

إذن، $P(A \text{ و } B) = P(\varnothing) = 0$.

الحدثان المتنافيان

يُسمى الحدثان A و B من فضاء عيّنة S حدثين متنافيين إذا كان $A \cap B = \varnothing$ ، أي لا يوجد بينهما أي ناتج مشترك، ويكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

يمكننا تعريف متمم الحدث A وهو الحدث A' الذي هو مجموعة النواتج غير الموجودة في A حيث الصفة المميزة لمتمم الحدث A' هي $A' = \{x{:}\ x \in S \text{ و } x \notin A\}$.
يمكننا القول إن الحدث A' هو "عدم وقوع A" وبالعكس.

في هذه الحالة، $A' \cup A = S$، ومنه:

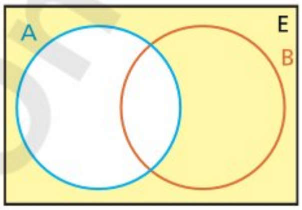
$$P(A) + P(A') = P(S) = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

المتممة

متممة المجموعة A هي المجموعة `A التي تحوي كل العناصر الموجودة في المجموعة E وغير موجودة في A

$A^` = \{x: x \in E$ و $x \notin A\}$



مثال 1 احتمالات الحوادث المتنافية ومتمم الحدث

تفيد البيانات في أحد البلدان أن احتمال ارتكاب الشخص مخالفة مرورية وفقًا لفئته العمرية يكون كما يلي:

الفئة العمرية (بالسنوات)	18-20	21-29	30-39	40 وما فوق
الاحتمال	0.06	0.47	0.29	0.18

A. أوجد احتمال أن يكون مرتكب المخالفة المرورية من أصغر فئة عمرية.

B. أوجد احتمال أن يكون عمر مرتكب المخالفة المرورية من 21 إلى 39 سنة.

C. أوجد احتمال أن يكون عمر مرتكب المخالفة المرورية أقل من 40 سنة.

الحل

كل احتمال هو قيمة بين 0 و 1، ومجموع الاحتمالات هو 1، إذن يشكّل الجدول دالة احتمال.

A. احتمال أن يكون مرتكب المخالفة المرورية من أصغر فئة عمرية هو 6%

B. احتمال أن يكون عمر مرتكب المخالفة المرورية من 21 إلى 39 سنة أي في الفئة 21-29 أو فئة 30-39 هو

$$P\big((21\text{-}29) \text{ أو } (30\text{-}39)\big) = 0.47 + 0.29 = 0.76$$

C. احتمال أن يكون عمر مرتكب المخالفة المرورية أقل من 40 سنة هو

$$P\big(\text{أقل من } 40\big) = 1 - P\big(40 \text{ وما فوق}\big) = 1 - 0.18 = 0.82$$

حاول أن تحل التمرين 1

مثال 2 إيجاد احتمالات الحوادث المتنافية

عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6، إذا كان E يمثّل حدث "الحصول على عدد زوجي" و T يمثّل حدث "الحصول على أحد العددين 3 أو 5".

A. أوجد احتمال الحدث "E أو T" أي الحصول على عدد زوجي أو على أحد العددين 3 أو 5

B. أوجد احتمال الحدث "E و T".

الحل

A. يتضمن فضاء العيّنة 6 نواتج محتملة بينها 3 أعداد زوجية. إذن، يتشكل الحدث E من النواتج $\{2, 4, 6\}$ والحدث T من النواتج $\{3, 5\}$. إذن، الحدثان E و T متنافيان.

$$P\big(E \text{ أو } T\big) = P(E) + P(T)$$

$$P(E) = \frac{\text{عدد النواتج في } E}{\text{عدد النواتج في } S}$$

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(تابع)

$$P(T) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(E \text{ أو } T) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

B. الحدثان E و T متنافيان. إذن، $P(E \text{ و } T) = 0$.

حاول أن تحل التمرين 3

إذا كانت مجموعة من الحوادث متنافية مثنى مثنى واتحادها يساوي فضاء العيّنة S لتجربة عشوائية فإن هذه الحوادث تُسمى **حوادث متنافية وشاملة**.

الحوادث المتنافية والشاملة

إذا كانت $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ حوادث من فضاء العيّنة (S)، فإنها تكون متنافية وشاملة إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان الآتيان:

1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = S$ (حوادث شاملة)

2. $A_r \cap A_k = \varnothing$ (حوادث متنافية)

لكل قيم k, r من المجموعة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ حيث $r \neq k$.

وعليه يكون $1 = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

مثال 3 **الحوادث المتنافية والشاملة**

إذا كانت A_1, A_2, A_3 حوادث متنافية وشاملة، حيث $P(A_1) = 2P(A_2) = 4P(A_3)$، أوجد $P(A_1)$.

الحل

مجموع احتمالات الحوادث المتنافية والشاملة يساوي 1

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

عوّض $P(A_2) = \frac{P(A_1)}{2}$ و $P(A_3) = \frac{P(A_1)}{4}$

$$P(A_1) + \frac{P(A_1)}{2} + \frac{P(A_1)}{4} = 1$$

وحّد المقامات

$$\frac{4P(A_1)}{4} + \frac{2P(A_1)}{4} + \frac{P(A_1)}{4} = 1$$

بسّط

$$\frac{7P(A_1)}{4} = 1$$

$$7P(A_1) = 4$$

$$P(A_1) = \frac{4}{7}$$

إذن، $P(A_1) = \frac{4}{7}$.

حاول أن تحل التمرين 4

احتمالات الحوادث غير المتنافية

قد يتضمن فضاء العينة أحداث ذات نواتج مشتركة فيما بينها عندها تسمى حوادث غير متنافية ولحساب احتمالاتها يمكن الاستعانة بأشكال ڤن.

مثال 4 إيجاد الاحتمالات باستعمال أشكال ڤن (1)

في إحدى الشركات، 54% من الموظفين نساء و 62% من الموظفين متزوجون. نصف النساء متزوجات أيضًا.

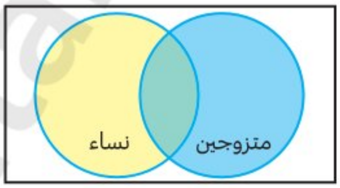
A. أوجد نسبة الرجال من موظفي الشركة المتزوجين.

B. إذا اخترنا موظفًا بطريقة عشوائية، أوجد احتمال أن يكون هذا الموظف رجلًا غير متزوج.

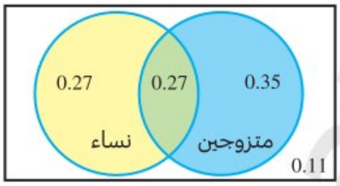
الحل

لكي ننظّم الفئات، نرسم مستطيلًا كبيرًا يمثّل فضاء العيّنة (كل موظفي الشركة) ومنطقتين متداخلتين تمثّلان "النساء" و "المتزوجين" (انظر الشكل 8.6.1).
نضع قيم النسب المئوية في أماكنها (انظر الشكل 8.6.2) وفق المنطق التالي:

- تضم منطقة التداخل (الخضراء) نصف النساء، أو $(0.5)(54\%) = 27\%$ من الموظفين.
- تضم المنطقة الصفراء، التي تشمل بقية النساء، $(54 - 27)\% = 27\%$ من الموظفين.
- تضم المنطقة الزرقاء، التي تشمل بقية المتزوجين، $(62 - 27)\% = 35\%$ من الموظفين.
- تضم المنطقة البيضاء، التي تشمل الرجال غير المتزوجين، $(100 - 89)\% = 11\%$ من الموظفين.



الشكل 8.6.1



الشكل 8.6.2

نستطيع الآن أن نجيب عن السؤالين من خلال النظر إلى أشكال ڤن.

A. نلاحظ من شكل ڤن أن نسبة الرجال المتزوجين إلى جميع الموظفين المتزوجين (من الرجال والنساء) هي $\frac{0.35}{0.62}$، أي 56.45% تقريبًا.

B. نرى أن 11% من الموظفين رجال غير متزوجين. إذن 0.11 هو الاحتمال المطلوب.

حاول أن تحل التمرين 6 a-c

"أو" المتضمنة

لاحظ أننا نستعمل في الرياضيات دائمًا "أو" بمعناها المتضمن، أي "أحد الطرفين أو كليهما". هذا أيضًا ما يعنيه الناس عادةً في الحديث العادي.

إذا سألنا في المثال السابق: ما احتمال أن يكون أحد الموظفين امرأة أو متزوجًا؟ لإيجاد هذا الاحتمال، إذا قمنا بجمع الاحتمالين $1.16 = 0.62 + 0.54 =$ (امرأة)P + (متزوج)P وهو عدد أكبر من 1 أي أنه غير مقبول، ويعود السبب للحصول على هذا العدد إلى أن احتمال أن يكون الموظف إمرأة متزوجة احتُسب مرتين، وعليه للحصول على القيمة الصحيحة لهذا الاحتمال، علينا أن نطرح من هذا المجموع قيمة احتمال أن يكون الموظف امرأة متزوجة. أي:

$$\begin{aligned} P(\text{امرأة أو متزوج}) &= P(\text{متزوج}) + P(\text{امرأة}) - P(\text{امرأة ومتزوج}) \\ &= 0.54 + 0.62 - 0.27 \\ &= 0.89 \end{aligned}$$

مبدأ عام في حساب الاحتمالات

إذا كان A و B حدثين في نفس فضاء العيّنة، يكون لدينا:

$$P(A \text{ أو } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 5 إيجاد الاحتمالات باستعمال أشكال ڤن (2)

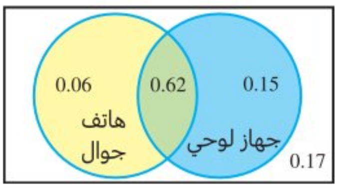
في إحدى المدارس، 68% من الطلاب يمتلكون هواتف جوالة و 77% يمتلكون أجهزة لوحية و 62% يمتلكون الإثنين معًا.

A. أوجد احتمال أن يمتلك أحد الطلاب هاتفًا جوالًا أو جهازًا لوحيًا.

B. أوجد احتمال أن يمتلك أحد الطلاب هاتفًا جوالًا أو جهازًا لوحيًا ولكن لا يمتلكهما معًا.

الحل

نرسم أولًا شكل ڤن (انظر الشكل 8.6.3).



الشكل 8.6.3

من الأسهل عادةً أن نبدأ بمنطقة التداخل (62% يمتلكون الجهازين)، ثم نحسب النسبة المئوية التي تعطينا القيمة الإجمالية الصحيحة لكل دائرة:

نسبة الذين يمتلكون هاتفا جوالاً فقط هي: $68\% - 62\% = 6\%$

نسبة الذين يمتلكون جهازًا لوحيًا فقط هي: $77\% - 62\% = 15\%$

A. ليكن الحدثان:

C: هاتف جوال

I: جهاز لوحي

$$\begin{aligned} P(C \text{ أو } I) &= P(C) + P(I) - P(C \text{ و } I) \\ &= 0.68 + 0.77 - 0.62 \\ &= 0.83 \end{aligned}$$

(تابع)

أو يمكن استعمال شكل ڤن كما يلي:

$$P(C \text{ أو } I) = 0.06 + 0.62 + 0.15 = 0.83$$

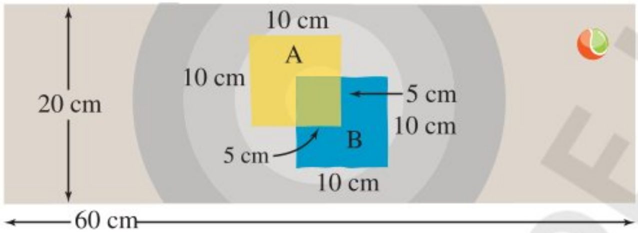
B. باستعمال شكل ڤن:

$$P(\text{لكن ليس كلاهما } C \text{ أو } I) = 0.06 + 0.15 = 0.21$$

حاول أن تحل التمرين 6d

مثال 6 **إيجاد الاحتمالات لحوادث غير متنافية**

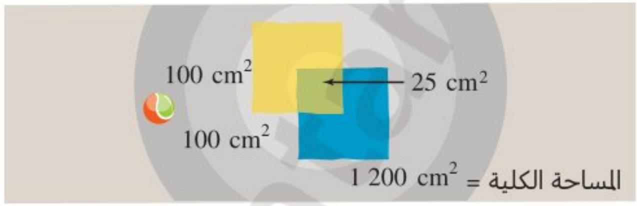
صنع طلاب لوحة تهديف تشتمل على مربعين متداخلين A و B، كما هو مبيّن في الشكل أدناه.



إذا كانت لاحتمالات إصابة الكرة اللاصقة أي نقطة على لوحة التهديف إمكانية الحدوث نفسها، أوجد احتمال وقوع الكرة في أحد المربعين أو في كليهما.

الحل

نوجد أولًا مساحة كل من المربعين ومساحة منطقة التداخل.



ثم نوجد الاحتمالات. لاحظ أننا نطرح مساحة منطقة التداخل حتى لا نحسبها مرتين ضمن المساحة الكلية.

$$P(A \text{ أو } B) = \frac{100}{1\,200} + \frac{100}{1\,200} - \frac{25}{1\,200}$$
$$= \frac{175}{1\,200} = \frac{7}{48}$$

إذن، احتمال وقوع الكرة في أحد المربعين أو في كليهما هو $\frac{7}{48}$ أو 15% تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 8

مثال 7 **إيجاد الاحتمالات باستعمال القانون**

A و B حدثان في فضاء العيّنة S. حيث أن: $P(A \cap B) = 0.3$، $P(A \cup B) = 0.9$ و $P(A) = 0.7$.

A. أوجد $P(B)$.

B. أوجد $P(B' \cap A)$.

الحل

A. استعمل القانون $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

عوّض بالقيم المعطاة $0.9 = 0.7 + P(B) - 0.3$

$0.9 = 0.4 + P(B)$

اطرح 0.4 من طرفَي المعادلة $P(B) = 0.5$

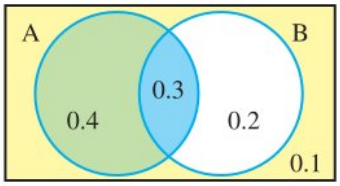
إذن، $P(B) = 0.5$.

B. الحدث $B' \cap A$ يتضمن النواتج عند حصول A وعدم حصول B في نفس الوقت. (انظر الشكل 8.6.4).

إذن، هو يتضمن تلك النواتج في A بدون تلك المشتركة مع الحدث B:

$P(B' \cap A) = P(A) - P(B \cap A)$

$P(B' \cap A) = 0.7 - 0.3 = 0.4$



الشكل 8.6.4

إذن، $P(B' \cap A) = 0.4$.

حاول أن تحل التمرين 13

مراجعة سريعة 8.6

في التمارين 1-10، ليكن $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هو فضاء العيّنة.

1. أوجد حدثًا متنافيًا مع الحدث $A = \{2, 4\}$.

2. أوجد متمم الحدث $A = \{1, 3, 6\}$.

3. أوجد متمم الحدث $\varnothing$.

4. أوجد متمم الحدث S.

5. أوجد حدثًا غير متنافٍ مع الحدث $A = \{2, 4, 5\}$.

6. أوجد حدثين مختلفين B و C كلاهما غير متنافٍ مع الحدث $A = \{2, 4, 5\}$.

7. أوجد حدثين مختلفين B و C كلاهما متنافٍ مع الحدث $A = \{2, 4, 5\}$.

8. أوجد حدثين مختلفين لكن غير متنافيين B و C كلاهما غير متنافٍ مع الحدث $A = \{2, 4, 5\}$.

9. أوجد حدثين مختلفين ومتنافيين B و C كلاهما غير متنافٍ مع الحدث $A = \{2, 4, 5\}$.

10. أوجد عدد الأحداث غير الخالية المتنافية مع الحدث $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

الدرس 8.6 التمارين

1. أصدرت شركة لصنع الحلوى بالشوكولاته (وهي قطع شوكولاته مغطاة بطبقة رقيقة من الحلوى الملونة)، بيانًا حول نسبة الملونات المستعملة في الإنتاج بشكل عام، كما هو مبيّن في الجدول أدناه.

اللون	بني	أحمر	أصفر	أخضر	برتقالي
النسبة	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1

تم اختيار قطعة شوكولاته واحدة بشكل عشوائي من كيس فتح لأجل التجربة.
أوجد احتمال أن تكون قطعة شوكولاته مغطاة باللون المعطى:

a. أحمر

b. ليس أحمر

c. لا برتقالي ولا أصفر.

2. يحتوي كيس على 40 كرة زجاجية، 8 كرات منها خضراء و 2 من الكرات زرقاوان. نختار كرة عشوائيًا. أوجد احتمال كل حدث أدناه.

a. الكرة خضراء أو زرقاء.

b. الكرة ليست خضراء ولا زرقاء.

3. يحتوي صندوق على 100 كرة زجاجية، 30 كرة منها زرقاء و 10 برتقالية. نختار كرة عشوائيًا. أوجد احتمال كل حدث أدناه.

a. الكرة زرقاء أو برتقالية.

b. الكرة ليست زرقاء ولا برتقالية.

4. إذا كانت A_1 , A_2 , A_3 حوادث شاملة و متنافية، حيث $P(A_1) = 3P(A_2) = 5P(A_3)$، أوجد $P(A_1)$.

5. إذا كانت A_1 , A_2 , A_3 حوادث شاملة و متنافية، حيث $P(A_1) = 2P(A_2) = 3P(A_3)$، أوجد $P(A_2)$.

6. **استعمال أشكال ڤن** A و B حدثان في فضاء عيّنة S حيث $P(A) = 0.6$، $P(B) = 0.5$، $P(A \text{ و } B) = 0.3$.

a. ارسم شكل ڤن يبيّن المجموعتين المتداخلتين A و B وضع على الشكل احتمالات المناطق الأربعة المتشكلة.

b. أوجد احتمال أن يحدث A ولا يحدث B.

c. أوجد احتمال أن لا يحدث أي من A أو B.

d. أوجد احتمال أن يحدث A أو B.

7. **استعمال أشكال ڤن** A و B حدثان في فضاء عيّنة S حيث $P(A) = 0.7$، $P(B) = 0.4$، $P(A \text{ و } B) = 0.2$.

a. ارسم شكل ڤن يبيّن المجموعتين المتداخلتين A و B وضع على الشكل احتمالات المناطق الأربعة المتشكلة.

b. أوجد احتمال أن يحدث A ولا يحدث B.

c. أوجد احتمال أن لا يحدث أي من A أو B.

d. أوجد احتمال أن يحدث A أو B.

8. في لعبة فيديو على شاشة مستطيلة أبعادها 34 cm و 20 cm، تمثّل السفينة الفضائية دائرتين متداخلتين طول نصف قطر الواحدة 6 cm حيث مساحة المنطقة المتداخلة $20\ cm^2$، احتمالات ظهور ثقب أسود على الشاشة في أي نقطة لها نفس إمكانية الحدوث. أوجد احتمال ظهور الثقب الأسود داخل حدود السفينة الفضائية، مقربًا النسبة المئوية لأقرب عدد صحيح.

9. يرمي جاسم كرة نحو لوح تهديف مربع الشكل طول ضلعه 8 in وفي مركزه ثقب دائري طول نصف قطره 2 in، أوجد احتمال مرور الكرة من الثقب. قرّب النسبة المئوية إلى أقرب عدد صحيح.

10. في تجربة بسيطة، وُضعت كرات مرقمة من 1 إلى 20، في صندوق، وتم اختيار كرة عشوائيًا.

a. أوجد احتمال أن يكون الرقم المختار من مضاعفات 3

b. أوجد احتمال أن يكون الرقم المختار ليس من مضاعفات 4

11. A و B حدثان في فضاء عيّنة S. أوجد الاحتمال $P(A \cup B)$ في كل من الحالات التالية:

a. A و B حدثان متنافيان حيث أن $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.12$.

b. $P(A) = 0.25$ و $P(B) = 0.35$ و $P(A \cap B) = 0.06$.

12. أوجد احتمال متمم الحدث A حيث أن $P(A) = 0.55$.

13. A و B حدثان حيث أن

$P(A \cap B) = 0.15, P(A \cup B) = 0.85, P(B) = 0.6$.

a. أوجد $P(A)$.

b. أوجد $P(A` \cap B)$.

14. إذا كان احتمال الحدث A هو 0.37

a. أوجد احتمال أن لا يحدث A.

b. أوجد احتمال أن A قد يحدث وقد لا يحدث.

15. كثيرًا ما تكون الرسائل الإلكترونية رسائل طفيلية غير مرغوب فيها (spam). نختار رسالة طفيلية عشوائيًا. يبيّن الجدول أدناه توزيع مواضيع هذه الرسائل.

الموضوع	احتيال	منتوجات	للمرح	صحي	مالي	للبالغين
الاحتمال	0.145	0.209	0.081	0.075	0.142	0.165

a. أوجد احتمال اختيار رسالة طفيلية موضوعها ليس من ضمن المواضيع المذكورة.

يحرص الأهل عادة على حماية أولادهم من الرسائل الخاصة بمواضيع البالغين والبريد الاحتيالي.

b. أوجد احتمال أن يكون موضوع الرسالة الطفيلية المختارة موضوعًا آخر غير هذين الموضوعين.

16. أراد طلال أن يعرف في أول يوم دراسي في الأسبوع عدد الساعات التي كرّسها الطلاب للمذاكرة في الليلة السابقة. أوقف طلال عشوائيًا الطلاب، بحسب ترتيب دخولهم إلى الصف، وسأل كل واحد منهم: "كم ساعة درست ليلة أمس؟"
يمثّل الجدول أدناه عيّنة من الطلاب الذين أجابوا عن السؤال.

عدد الساعات	0	1	2	3	4	5
عدد الطلاب	4	12	8	3	2	1

a. أوجد احتمال أن يكون أي طالب قد درس أقل من 3 ساعات.

b. أوجد احتمال أن يكون أي طالب قد درس ساعتين أو ثلاث ساعات.

c. أوجد احتمال أن يكون أي طالب قد درس أقل من 6 ساعات.

17. نرمي قطعة نقدية ومكعبًا مرقمًا ونسجل الرقم والوجه الذي يظهر.

a. أوجد احتمال أن يكون الرقم أكبر من 3

b. أوجد احتمال أن نحصل على الصورة وعلى الرقم 6

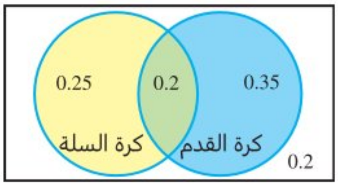
18. صُنع مكعب مرقم من 1 إلى 6 بحيث يكون احتمال ظهور الرقم 1 مثل احتمال ظهور الأرقام الأخرى.

a. أوجد احتمال ظهور الرقم 5

b. أوجد احتمال ظهور رقم فردي.

19. **الكتابة للتعلم** اشرح لما لا يكون احتمال حصول الحدث A أو B مساويًا دائما لمجموع احتمال الحدث A و احتمال الحدث B؟

20. **عمل جماعي** سأل وليد زملاءه في الصف عن الرياضة التي يمارسها كل منهم ونظّم المعطيات على شكل ڤن في الرسم أدناه. قال وليد أن 80% من الطلاب يمارسون رياضة واحدة فقط. هل هو محقّ في ذلك؟ برّر إجابتك.



21. تعطي إحدى المستشفيات رموزًا للمرضى بحسب تمتعهم أو عدم تمتعهم بتأمين صحي وبحسب حالتهم المرضية. تصنّف حالة مريض على أنها جيدة (G)، عادية (F)، خطيرة (S) أو حرجة (C). يعيّن موظف الاستقبال إشارة 0 للمرضى الذين ليس لديهم تأمين صحي وإشارة 1 للمرضى الذين لديهم تأمين صحي، ويستعمل أحد الأحرف للحالة.
على سبيل المثال، (1, C) تعني أن المريض لديه تأمين صحي وحالته حرجة.

a. أوجد فضاء العيّنة لهذه التجربة.

b. أوجد الحدث: "المريض ليس لديه تأمين وحالته خطيرة أو حرجة".

c. أوجد الحدث: "المريض في وضع جيد أو عادي".

d. أوجد الحدث: "المريض لديه تأمين".

22. استقصاء متخرجي الثانوية أجري في إحدى المدارس استقصاء شمل مجموعة متخرجي الثانوية في العام 2000
من أصل 254 طالبًا ثانويًا تخرجوا تلك السنة، 172 طالبًا من مواطني البلد، التحق منهم بالجامعة 124 طالبًا، وبقية الطلاب من الأجانب المقيمين، التحق منهم بالجامعة 58 طالبًا.
أوجد احتمالات الحوادث التالية:

a. أن يكون المتخرج مواطنًا.

b. أن يكون المتخرج قد التحق بالجامعة.

c. أن يكون المتخرج مواطنًا التحق بالجامعة.

23. أسباب الوفيات أجرى أحد المستشفيات بحثًا لتحديد أهم أسباب وفاة المرضى، على أن يحدّد البحث سببًا واحدًا للوفاة لكل حالة وفاة. أظهرت النتائج أن 45% من الوفيات سببها أمراض القلب و 22% من الوفيات سببها مرض السرطان.

a. أوجد احتمال أن يكون سبب وفاة أحد الأشخاص، اختير عشوائيًا، أمراض القلب أو السرطان.

b. أوجد احتمال أن تكون الوفاة لأسباب أخرى.

أسئلة اختبار معيارية

24. صواب أم خطأ احتمال أن يلعب حمد كرة السلة (الحدث B) بعد المدرسة هو 20%، احتمال أن يذهب مع أصدقائه إلى الحديقة (الحدث T) بعد المدرسة هو 45%، يقول رضوان إن P(B أو T) = 65%. هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.

25. صواب أم خطأ في مدرسة ثانوية عدد طلابها 400 طالب، 6 طلاب هم أعضاء في نادي الرياضيات ونادي الشطرنج. هناك 20 طالبًا في نادي الرياضيات، و 12 طالبًا في نادي الشطرنج. يبيّن الشكل أدناه ما كتبه طارق حيث يحسب احتمال أن يكون طالب ما، تم اختياره عشوائيًا، عضوًا في نادي الرياضيات أو في نادي الشطرنج. هل ما كتبه صحيح؟ برّر إجابتك.

الحدث **C**: الطالب عضو في نادي الشطرنج
الحدث **M**: الطالب عضو في نادي الرياضيات

$$P(C \text{ أو } M) = P(C) + P(M)$$
$$= \frac{12}{400} + \frac{20}{400}$$
$$= \frac{32}{400} = 0.08$$

26. اختيار من متعدد يتم تدوير القرص المبيّن في الشكل أدناه مرتين. إذا كانت فرصة وقوف المؤشر على النواتج 1 و 2 و 3 و 4 لها نفس إمكانية الحدوث، أوجد احتمال أن يكون مجموع النتيجتين 6

A. $\frac{1}{16}$
B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{8}$
D. $\frac{3}{4}$
E. $\frac{3}{16}$

استكشاف

27. نرمي مكعبين مرقمين من 1-6 على سبيل التجربة.

a. مهمتك الأولى أن تسجل الأرقام التي تظهر على المكعبين.

i. أوجد فضاء العيّنة للتجربة.

ii. أوجد احتمال أن يكون الرقمان متساويين.

iii. أوجد احتمال أن يكون الفرق بين الرقمين 2

iv. أوجد احتمال أن يكون الرقمان مختلفين.

b. مهمتك الثانية أن تسجل مجموع الرقمين الظاهرين على المكعبين.

i. أوجد احتمال أن يكون المجموع 1

ii. أوجد احتمال أن يكون المجموع 9

iii. أوجد احتمال أن يكون المجموع 8

iv. أوجد احتمال أن يكون المجموع 13

توسيع الأفكار

28. يلعب نادر بلعبة أطفال مؤلفة من 52 قطعة تركيبية مقسمة إلى 4 مجموعات، كل مجموعة لها شكل محدد (مربع أو دائرة أو بيضاوي أو مستطيل) ومؤلفة من 13 قطعة مرقمة من 1 إلى 13، حيث يختار قطعة عشوائيًا وينظر إليها.

a. أوجد احتمال أن القطعة التي اختارها:

i. رقمها 1 وشكلها دائرة.

ii. رقمها 1 وشكلها دائرة أو أي قطعة شكلها مستطيل.

iii. رقمها 1 أو أي قطعة شكلها دائرة.

iv. رقمها لا يتعدى الرقم 11

b. يختار نادر الآن القطعة التي شكلها بيضاوي ورقمها 10 ويضعها على الطاولة ثم يختار قطعة ثانية. أوجد احتمال أن تكون القطعة الثانية:

i. رقمها 1 وشكلها دائرة.

ii. رقمها لا يتعدى الرقم 11

c. يختار نادر الآن القطعة التي شكلها بيضاوي ورقمها 10 ويرجعها إلى المجموعة ثم يختار قطعة ثانية. أوجد احتمال أن تكون القطعة الثانية:

i. رقمها 1 وشكلها دائرة.

ii. رقمها لا يتعدى الرقم 11

8.7 الحوادث المستقلة Independent Events

ما ستتعلّمه

- احتمالات الحوادث المستقلة
- مخطط الشجرة الاحتمالية

... ولماذا

لفهم العلاقات بين الأحداث والتمييز بين الأحداث المرتبطة وتلك المستقلّة.

معايير الدرس

11A.10.3

11A.10.5

المصطلحات

- حدثان مستقلان independent events

احتمالات الحوادث المستقلة

في العديد من مسائل الاحتمالات يتعين علينا التفكير في تأثير احتمال حدث ما على احتمال حدوث آخر. نقول عن حدثين إنهما **حدثان مستقلان** إذا كان حدوث الأول (أو عدم حدوثه) لا يؤثر في احتمال حدوث الآخر. لحساب احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا نستعمل أحد مبادئ الاحتمالات وهو مبدأ الضرب.

الحدثان المستقلان

إذا كان احتمال الحدث A هو $P(A)$ واحتمال الحدث B هو $P(B)$.

يكون A و B حدثين مستقلين، إذا وفقط إذا كان احتمال حدوثهما معًا هو $P(A) \times P(B)$.

أي أن:

$$A \text{ و } B \text{ حدثان مستقلان} \iff P(A \text{ و } B) = P(A) \times P(B)$$

يُستعمل مبدأ الضرب $P(A \text{ و } B) = P(A) \times P(B)$ لاختبار مدى استقلالية حدثين وذلك عبر المقارنة بين حاصل ضرب $P(A)$ في $P(B)$ مع $P(A \text{ و } B)$.

مثال 1 تحديد حدثين مستقلين

يحتوي صندوق على 12 كرة خضراء و 8 كرات حمراء.

A. إذا سحبت كرة عشوائيًا من الصندوق ثم أعيدت (مع إرجاع)، وبعد ذلك سحبت كرة مرة ثانية، هل يؤثر لون الكرة الأولى في ما قد يكون لون الكرة في المرة الثانية؟

B. إذا سحبت كرة عشوائيًا من الصندوق دون إرجاع، وبعد ذلك سحبت كرة مرة ثانية، هل يؤثر لون الكرة الأولى في ما قد يكون لون الكرة في المرة الثانية؟

الحل

A. لتحديد ما إذا كان اختيار الكرة الأولى يؤثر في احتمالات اختيار الكرة الثانية أم لا، علينا تحديد احتمالات كل عملية اختيار كرة.

فضاء العيّنة للكرة الأولى: 12 خضراء و 8 حمراء.

إذن، $P(\text{خضراء}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ و $P(\text{حمراء}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

فضاء العيّنة للكرة الاولى
12 كرة خضراء
8 كرات حمراء

فضاء العيّنة للكرة الثانية: 12 خضراء و 8 حمراء.

إذن، $P(\text{خضراء}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ و $P(\text{حمراء}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

فضاء العيّنة للكرة الثانية
12 كرة خضراء
8 كرات حمراء

الاحتمالات متساوية، إذن لون الكرة الأولى لا يؤثر في احتمالات نواتج اختيار الثانية وبالتالي الحدثان مستقلان.

(تابع)

B. للإجابة عن السؤال B علينا تحديد ما إذا كان الحدثان مستقلين أم لا.

فضاء العيّنة للكرة الأولى: 12 خضراء و 8 حمراء.

إذن، $\text{P}(\text{خضراء}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ و $\text{P}(\text{حمراء}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

فضاء العيّنة للكرة الاولى
12 كرة خضراء
8 كرات حمراء

إذا كانت الكرة الأولى خضراء يكون فضاء العيّنة للكرة الثانية: 11 خضراء و 8 حمراء.

إذن، $\text{P}(\text{خضراء}) = \frac{11}{19}$ و $\text{P}(\text{حمراء}) = \frac{8}{19}$.

فضاء العيّنة للكرة الثانية
11 كرة خضراء
8 كرات حمراء

إذا كانت الكرة الأولى حمراء، يكون فضاء العيّنة للكرة الثانية: 12 خضراء و 7 حمراء.

فضاء العيّنة للكرة الثانية
12 كرة خضراء
7 كرات حمراء

إذن، $\text{P}(\text{خضراء}) = \frac{12}{19}$ و $\text{P}(\text{حمراء}) = \frac{7}{19}$.

إذن، عندما لايتم إرجاع الكرة الأولى إلى الوعاء فإن ذلك يؤثر في احتمالات اختيار الكرة الثانية، وبالتالي الحدثان غير مستقلين.

حاول أن تحل التمرين 3

مثال 2 استعمال تعريف حدثين مستقلين

إذا كانت هناك إشارة مرور في الطريق الى المدرسة، وكان احتمال أن تكون خضراء عند الوصول إليها كل يوم هو 30%، أوجد احتمال أن تكون خضراء في يومين متتاليين.

الحل

لنفترض أن احتمال أن تكون الإشارة خضراء عند الوصول إليها هو حدث عشوائي، وأنها إذا كانت خضراء في أحد الأيام فإن ذلك لا يؤثر في ما سيكون لونها في اليوم التالي.

$$\text{P}(\text{خضراء في اليوم الأول وخضراء في اليوم الثاني}) =$$

$$\text{P}(\text{خضراء في اليوم الأول}) \times \text{P}(\text{خضراء في اليوم الثاني}) = 0.30 \times 0.30 = 0.09$$

حاول أن تحل التمرين 4

مخطط الشجرة الاحتمالية

في بعض التجارب التي تتم على مرحلتين (أو حتى أكثر) يمكن عرض كافة نواتج التجربة من خلال أداة تسمى **مخطط الشجرة الاحتمالية** وهي أداة قوية ومفيدة لحل مسائل في الاحتمال.

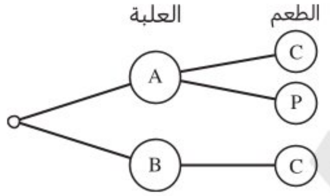
مثال 3 استعمال مخطط الشجرة

لدينا علبتان من البسكويت A و B. تحتوي العلبة A على قطعتين من البسكويت بالشوكولاته وقطعتين من البسكويت بالفستق. تحتوي العلبة B على قطعة واحدة من البسكويت بالشوكولاته.

إذا سحبنا قطعة من البسكويت عشوائيًا، أوجد احتمال أن تكون قطعة بسكويت بالشوكولاته.

الحل

بما أن إجمالي عدد قطع البسكويت 5، و 3 قطع منها بطعم الشوكولاته (C) والباقي بطعم الفستق (P)، قد نتسرّع ونجيب بأن الاحتمال $\frac{3}{5}$، لكن هذه الإجابة لن تكون صحيحة إلا إذا كانت قطع البسكويت كلها موجودة في علبة واحدة. واقع أن قطع البسكويت الخمس موجودة في علبتين يفيد أنه ليس لجميعها نفس إمكانية الحدوث لأن فرصة اختيار قطعة البسكويت الوحيدة التي بطعم الشوكولاته في العلبة B أكبر من فرصة القطعتين اللتين في العلبة A. يجب أن نفكّر في الأمر باعتباره تجربة من مرحلتين. نختار العلبة أولًا، ثم نختار قطعة البسكويت منها.

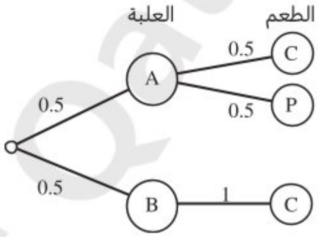


الآن نملأ المخطط بقيم الاحتمالات لكل حدث:

علبة واحدة A وعلبة واحدة B إذن $P(A) = P(B) = \frac{1}{2} = 0.5$

في العلبة A قطعتان من كل نوع، إذن احتمال أن نسحب قطعة بطعم الشوكولاتة يساوي احتمال أن نسحب قطعة بطعم الفستق، إذن $P(C) = P(P) = \frac{2}{4} = 0.5$

في العلبة B قطعة واحدة فقط وهي بالشوكولاتة، إذن احتمال أن تكون قطعة البسكويت بطعم الشوكولاتة يساوي 1



$P(C \text{ و } A) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$

$P(C \text{ و } B) = 0.5 \times 1 = 0.5$

إذن:

$P\big((C \text{ و } A) \text{ أو } (C \text{ و } B)\big) = 0.25 + 0.5 = 0.75$

حاول أن تحل التمرين 6

مثال 4 إيجاد احتمال حدثين مستقلين

يريد حمد اختيار القميص الذي يرتديه اليوم، فاختار واحدًا من القمصان الأربعة المبيّنة أدناه عشوائيًا.

إذا كان احتمال أن تمطر اليوم هو 40% أو $\frac{2}{5}$

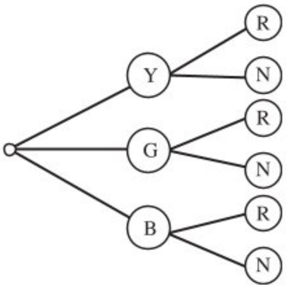
A. أوجد احتمال أن يرتدي حمد قميصًا أصفرًا ولا تمطر اليوم.

B. أوجد احتمال أن يرتدي حمد قميصًا أصفرًا ولا تمطر اليوم أو أن يرتدي قميصه الأخضر وتمطر اليوم.

الحل

A. يمكن اعتبار ما يقوم به حمد عبارة عن تجربة من مرحلتين، المرحلة الأولى اختيار قميص من بين الأربعة ثم المرحلة الثانية وتمثل حالة الطقس.
إذن، يمكن التعبير عن التجربة بمخطط الشجرة الاحتمالية أدناه حيث:

الحدث Y يمثّل القميص ذو اللون الأصفر.
الحدث G يمثّل القميص ذو اللون الأخضر.
الحدث B يمثّل القميص ذو اللون الأزرق.
الحدث R يمثّل الطقس الممطر.
الحدث N يمثّل الطقس غير الممطر.

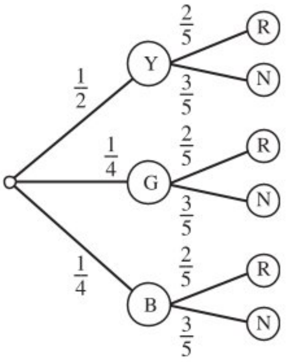


الآن تملأ المخطط بقيم الاحتمالات لكل حدث:

عدد القمصان الصفراء 2 من أصل 4 إذن، $P(Y) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
عدد القمصان الخضراء 1 من أصل 4 إذن، $P(G) = \frac{1}{4}$
عدد القمصان الزرقاء 1 من أصل 4 إذن، $P(B) = \frac{1}{4}$
احتمال أن تمطر 40% إذن، $P(R) = \frac{2}{5} = 0.4$
احتمال أن لا تمطر: $P(N) = 1 - P(R) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$

(تابع)

عند ذلك سيصبح مخطط الشجرة الإحتمالية على الشكل التالي:



لاحظ أن الحدثين N, Y مستقلين.

الاحتمال المطلوب هو $P(Y \text{ و } N) = P(Y) \times P(N) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 30\%$

إذن، احتمال أن يرتدي حمد قميصه الأصفر وأن لا تمطر اليوم هو 30%

B. أولًا، احتمال أن يرتدي حمد قميصه الأصفر ولا تمطر اليوم هو $P(Y \text{ و } N)$ وتم حسابه في الجزء A.

ثانيًا، نجد احتمال أن يرتدي حمد قميصه الأخضر وتمطر اليوم هو $P(G \text{ و } R)$.

لاحظ أن الحدثين R، G مستقلين.

باستعمال الأعداد على مخطط الشجرة الاحتمالية:

$$P(G \text{ و } R) = P(G) \times P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10\%$$

أخيرًا، نجد $P\left((G \text{ و } R) \text{ أو } (Y \text{ و } N)\right)$

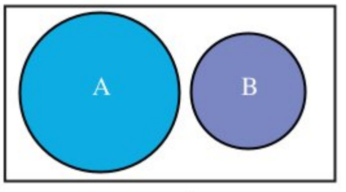
لاحظ أن الحدثين "N و Y" ، "R و G" متنافيين.

$$P\left((G \text{ و } R) \text{ أو } (Y \text{ و } N)\right) = P(G \text{ و } R) + P(Y \text{ و } N) = 10\% + 30\% = 40\%$$

لاحظ أننا نجمع الاحتمالين لإيجاد احتمال حدوث أحدهما.

إذن، احتمال أن يرتدي حمد قميصه الأصفر ولا تمطر اليوم أو أن يرتدي قميصه الأخضر وتمطر اليوم هو 40%

حاول أن تحل التمرين 7



الشكل 8.7.1 بما أن الحدثين A و B حدثان متنافيان، فإن وقوع الحدث A يعني عدم وقوع الحدث B، وبالتالي يصبح احتمال الحدث B مساويًا للصفر. إذن الحدثان المتنافيان A و B ليسا مستقلين.

لا يمكن لحدثين متنافيين أن يكونا مستقلين. لأنه ليس للحدثين المتنافيين أي ناتج مشترك بينهما، أي أن وقوع أحدهما يعني عدم وقوع الحدث الآخر مما يجعل احتمال وقوعه يساوي صفرًا.

من الأخطاء الشائعة التي علينا تجنب الوقوع فيها هو استعمال مبدأ الضرب لحساب احتمالات الحوادث المتنافية باعتبار أنها حوادث مستقلة.

مثال 5 إيجاد احتمال حوادث متنافية وحوادث مستقلة

تحتاج الحواسيب التي تنتجها شركة معروفة إلى صيانة دورية. قدّرت الشركة الحواسيب التي تحتاج بعد المبيع إلى صيانة مرة واحدة في الشهر الأول بنسبة 17% والتي تحتاج إلى صيانة مرتين في الشهر الأول بنسبة 7% وتلك التي تحتاج إلى صيانة ثلاث مرات أو أكثر في الشهر الأول بنسبة 4%

A. أوجد احتمال أن يكون حاسوب اختير عشوائيًا:

i. يحتاج إلى صيانة.

ii. لا يحتاج إلى صيانة.

iii. لا يحتاج إلى صيانة أكثر من مرة.

B. إذا اشتريت حاسوبين من هذه الشركة، أوجد احتمال:

iv. أن لا يحتاج أي منهما إلى صيانة.

v. أن يحتاج كلاهما إلى صيانة.

الحل

A. الحدث "يحتاج إلى صيانة" يعني أن جهاز الحاسوب يحتاج إلى "صيانة واحدة" أو "صيانة مرتين" أو "صيانة ثلاث مرات أو أكثر"، وبما أن كل الحوادث المذكورة متنافية، نستعمل قانون الجمع.

i. $P\left(\text{يحتاج الصيانة}\right) = P\left(\left(\text{صيانة واحدة}\right) \text{ أو } \left(\text{صيانة مرتين}\right) \text{ أو } \left(\text{صيانة ثلاث مرات أو أكثر}\right)\right)$

$= 0.17 + 0.07 + 0.04 = 0.28$

ii. $P\left(\text{لا يحتاج صيانة}\right) = 1 - P\left(\text{يحتاج الصيانة}\right)$

$= 1 - (0.28) = 0.72$

iii. $P\left(\text{صيانة ليس أكثر من مرة واحدة}\right) = P\left(\left(\text{لا يحتاج صيانة}\right) \text{ أو } \left(\text{صيانة واحدة}\right)\right)$

$= 0.72 + 0.17 = 0.89$

B. بما أن عمليتي صيانة الحاسوبين مستقلتان الواحدة عن الأخرى، فإن بإمكاننا استعمال مبدأ الضرب. نستعمل احتمالات الحوادث من الجزء A لإجراء الحسابات.

i. $P\left(\text{لا يحتاج أي منهما إلى صيانة}\right) = (0.72)(0.72) = 0.5184$

ii. $P\left(\text{كلاهما يحتاج إلى صيانة}\right) = (0.28)(0.28) = 0.0784$

حاول أن تحل التمرين 8

مراجعة سريعة 8.7

في التمارين 1-3، إذا كان A و B حدثين مستقلين، أوجد $P(A \cap B)$.

1. $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{4}$

2. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{8}$

3. $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{5}{6}$

في التمارين 4-6، حدّد ما إذا كان A و B حدثين مستقلين.

4. $P(A \cap B) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A) = \frac{1}{3}$

5. $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{5}{7}, P(A \cap B) = \frac{2}{7}$

6. $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{5}{16}$

الدرس 8.7 التمارين

1. احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{1}{2}$، واحتمال الحدث B هو $P(B) = \frac{1}{3}$. أوجد الاحتمال (A و B)P إذا كان الحدثان A و B حدثين مستقلين.

2. احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{4}{5}$، واحتمال الحدث "A و B" هو $P(A \text{ و } B) = \frac{2}{3}$ أوجد الاحتمال P(B) إذا كان الحدثان A و B حدثين مستقلين.

3. يحتوي صندوق على 10 بطاقات، 5 منها سوداء و 5 حمراء. نسحب بطاقتين من الصندوق، كل مرة بطاقة واحدة.

   a. إذا سحبنا بطاقة من الصندوق ثم أعدناها إليه، وبعد ذلك سحبنا بطاقة ثانية، هل يؤثر لون البطاقة الأولى في ما قد يكون لون البطاقة الثانية؟ وضّح إجابتك.

   b. إذا سحبنا بطاقة من الصندوق ولم نعدها إليه، ثم سحبنا بطاقة ثانية، هل يؤثر لون البطاقة الأولى في ما قد يكون لون البطاقة الثانية؟ وضّح إجابتك.

4. إذا كان احتمال أن يسجّل راشد ركلة جزاء هو 60 %، أوجد احتمال أن يسجّل راشد ركلتَي جزاء متتاليتين.

5. **طعام مقصف المدرسة** عندما يقدم مقصف إحدى المدارس شطائر اللحم يكون احتمال أن يقدم زبادي 70%، وعندما لا يقدم المقصف شطائر اللحم يكون احتمال أن يقدم الزبادي 30% يعرف الطلاب أن شطائر اللحم لا تتوافر في المقصف إلا في يوم واحد من أيام الأسبوع الدراسي المؤلف من 5 أيام، لكنهم لا يعرفون في أي يوم. إذا كان يوم غد هو يوم الأحد، أوجد احتمال أن:

   a. يقدم مقصف المدرسة شطائر اللحم.

   b. يقدم مقصف المدرسة شطائر اللحم والزبادي.

   c. يقدم مقصف المدرسة زبادي.

6. **لعبة الفيديو** إن هطل المطر غدًا فإن احتمال أن يلعب خالد لعبة الفيديو المفضلة لديه هو 0.8، وإن لم تمطر غدًا فإن احتمال أن يلعب خالد لعبة الفيديو المفضلة لديه هو احتمال 0.4 فقط. إذا كان احتمال هطول المطر غدًا هو 60%، أوجد احتمال أن يلعب خالد لعبة الفيديو المفضلة لديه.

7. عند تدوير القرص المبيّن في الشكل أدناه مرتين. إذا كان احتمال أن يقف المؤشر على الجزء الأزرق كل مرة هو $\frac{1}{3}$ و احتمال أن يقف المؤشر على الجزء البرتقالي كل مرة هو $\frac{2}{3}$ ، أوجد احتمال أن نحصل على نفس اللون في المرتين. وضّح إجابتك.

.8 **فئة الدم** يعدّ الأشخاص ذوو فئة الدم –O متبرعين عامين، أي يمكنهم التبرع بالدم لكل أصحاب فئات الدم الأخرى، وتبلغ نسبتهم 8% من مجموع سكان العالم.

.a يصل شخص إلى مستشفى للتبرع بالدم. أوجد احتمال أن لا تكون فئة دمه –O.

.b يصل شخصان إلى مستشفى، كل منهما مستقل عن الآخر، للتبرع بالدم. أوجد احتمال:

.i أن يكون الاثنان من ذوي فئة الدم –O.

.ii أن يكون واحد منهما على الأقل من ذوي فئة الدم –O.

.iii أن يكون واحد منهما فقط من ذوي فئة الدم –O.

.c يظهر 8 أشخاص بشكل عشوائي للتبرع بالدم. أوجد احتمال أن يكون واحد منهم على الأقل من ذوي فئة الدم –O.

.9 **آلات حاسبة** تعرف إحدى شركات تصنيع الآلات الحاسبة أن احتمال أن تكون آلة حاسبة مختارة عشوائيًا من خط الإنتاج معيبة هو 0.037، إذا اختار مهندسو الشركة 4 آلات حاسبة عشوائيًا خلال يوم عمل، أوجد احتمال أن لا تكون أي واحدة منها معيبة.

.10 احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{2}{7}$، واحتمال الحدث B هو $P(B) = \frac{5}{7}$. أوجد الاحتمال $P(A \text{ أو } B)$ إذا كان الحدثان A و B حدثين مستقلين.

.11 احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{3}{4}$، واحتمال الحدث "$A \cup B$" هو $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$. أوجد الاحتمال $P(B)$ إذا كان الحدثان A و B حدثين مستقلين.

.12 ليكن الحدثان A و B حيث $P(A) = \frac{3}{4}$، $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$، $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$. أوجد $P(B)$. هل الحدثان A و B مستقلان؟

في التمارين 13-15، حدّد ما إذا كان A و B حدثين مستقلين.

13. $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{6}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

14. $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{6}, P(A \cup B) = \frac{2}{7}$

15. $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{13}{256}, P(A \cap B) = \frac{2}{25}$

.16 إذا رمينا خمسة مكعبات مرقمة من 1 إلى 6 في نفس الوقت، أوجد احتمال حصولنا على نفس الرقم بالنسبة للمكعبات الخمسة.

في التمرينين 17 و 18، افترض أنك ترمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرتين.

.17 أوجد احتمال أن تحصل على عدد زوجي في الرمية الأولى وعلى عدد أصغر من 3 في الرمية الثانية.

.18 أوجد احتمال أن تحصل على عدد فردي في الرمية الأولى وعلى عدد أكبر من 3 في الرمية الثانية.

أصدرت شركة تصنع حلوى الفستق (فستق مغطى بطبقة رقيقة من الحلوى الملونة) بيانًا حول نسبة الملونات المستعملة في إنتاجها بشكل عام، كما هو مبيّن في الجدول أدناه.

اللون	بني	أحمر	أصفر	أخضر	برتقالي
النسبة	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1

في التمارين 19-24، لإجراء التجربة اختيرت قطعتان من حلوى الفستق عشوائيًا من كيسين.
أوجد احتمال أن يكون لقطعتَي الحلوى اللون (الألوان) المعطاة.

.19 القطعتان بنيتان

.20 القطعتان برتقاليتان

.21 واحدة حمراء والأخرى خضراء

.22 واحدة بنية والأخرى صفراء

.23 ولا واحدة صفراء

.24 الأولى ليست حمراء، والثانية ليست برتقالية

.25 **الكتابة للتعلم** إن احتمال سطوع الشمس ساعة على الأقل يوميًا في مدينة تتمتع بطقس بارد خلال شهر يوليو هو 0.78، واحتمال هطول المطر فيها مدة نصف ساعة على الأقل هو 0.44، واحتمال أن تكون السماء غائمة طوال اليوم هو 0.22، اكتب فقرة توضّح فيها صواب أو خطأ هذه العبارة.

26. أعسر أم أيمن يميل الأطفال عمومًا عند بلوغهم عمر السنة إلى ترجيح استعمال إحدى اليدين على الأخرى. حوالي 60% يميلون إلى استعمال اليد اليمنى، وحوالي 10% يميلون إلى استعمال اليد اليسرى، أما الباقون فلا يرجّحون يدًا على أخرى في هذه المرحلة. لنفترض أنك تراقب ثلاثة أطفال في عمر السنة في حضانة يومية. أوجد احتمال أن:

a. لا يرجّح أيّ منهم يدًا على أخرى.

b. كلهم يظهرون ترجيحًا ليد على الأخرى.

c. كلهم يظهرون ترجيحًا لنفس اليد.

27. كرات مطاطية تحتوي آلة لبيع الكرات المطاطية على 12 كرة حمراء، و 5 بيضاء و 3 زرقاء. نُدخل في الآلة ثلاث عملات نقدية لنأخذ ثلاث كرات، واحدة تلو الأخرى. أوجد احتمال:

a. أن لا تكون أي من الكرات حمراء.

b. أن تكون الكرات الثلاث بنفس اللون.

c. أن نحصل على الألوان الثلاثة (كرة حمراء وكرة بيضاء وكرة زرقاء).

28. كرة مطاطية زرقاء لنفترض أن أختك الصغيرة تصر على الحصول على كرة زرقاء من الآلة في التمرين السابق، وهذا يعني أن تواصل شراء الكرات إلى حين حصولك على كرة زرقاء. أوجد احتمال أن تضطر لشراء 5 كرات.

أسئلة اختبار معيارية

29. صواب أم خطأ إذا كان احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{3}{4}$، واحتمال الحدث B هو $P(B) = \frac{1}{3}$، واحتمال $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$، فإن الحدثين A و B حدثان مستقلان. برّر إجابتك.

30. صواب أم خطأ الحدثان المتنافيان لا يمكن أن يكونا غير مستقلين. برّر إجابتك.

31. اختيار من متعدد إذا كان $P(A) = \frac{1}{7}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$، لكي يكون الحدثان A و B مستقلين يجب أن يساوي P(B) القيمة:

A. $\frac{7}{8}$
B. $\frac{3}{8}$
C. $\frac{5}{8}$
D. $\frac{3}{7}$
E. $\frac{5}{7}$

32. اختيار من متعدد إذا كان $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{5}$، لكي يكون الحدثان A و B مستقلين، يجب أن يساوي $P(A \cup B)$ القيمة:

A. $\frac{12}{25}$
B. $\frac{11}{25}$
C. $\frac{10}{25}$
D. $\frac{13}{25}$
E. $\frac{15}{25}$

استكشاف

33. الاحتمال التجريبي من الضروري غالبًا في التطبيقات الواقعية تكرار التجربة عددًا كبيرًا من المرات وتسجيل النتائج ثم تقريب احتمالات النواتج الممكنة. يبيع أحد المخابز خمسة أنواع من الكعك. سجّل المخبز مبيعات الأنواع الخمسة من هذا الكعك لأول 500 كعكة بيعت خلال أسبوع معيّن كما هو مبيّن في الجدول التالي.

نوع الكعك	الكمية المبيعة
عادي	185
شوفان	60
قمح	55
قرفة وزبيب	125
محلّى	75

a. استعمل البيانات المعطاة لتقرّب احتمال أن يشتري زبون عشوائي الكعك العادي. قم بالمثل لباقي أنواع الكعك لتقرّب القيم الاحتمالية وضعها في جدول.

b. افترض أن الحوادث مستقلة، أوجد احتمال أن يشتري 3 زبائن متتالين الكعك العادي.

c. **الكتابة للتعلم** هل تعتقد أنه من المنطقي افتراض أن عمليات شراء الزبائن الثلاثة المتتالين هي حوادث مستقلة؟ وضّح إجابتك.

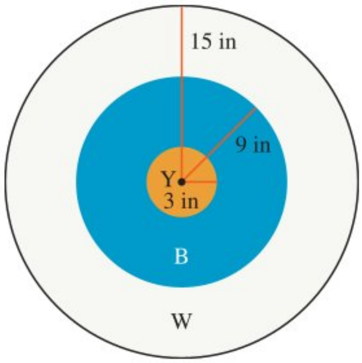
34. يضع معلّم الرياضيات أحيانًا شالًا حول عنقه عند دخول الصف. راقب سالم العلاقة بين وضع المعلم للشال وأن يكون هناك اختبار للرياضيات في نفس اليوم. كانت الاحتمالات كالتالي:

- P(وضع الشال) = 10%
- P(اختبار الرياضيات) = 15%
- P((وضع الشال) و (اختبار الرياضيات)) = 5%

هل الحدثان "وضع الشال" و "اختبار الرياضيات" مستقلان؟ وضّح إجابتك.

توسيع الأفكار

35. تجري سلمى تجربة علمية لعرضها في معرض العلوم، حيث تريد سلمى أن تختبر ما إذا كان النمل يفضّل ألوانًا معيّنة، ولذلك أطلقت مجموعة من النمل على المسطح الملون المبيّن في الشكل أدناه.



إذا كان النمل منتشرًا بشكل عشوائي على المسطح، أوجد احتمال أن تكون نملة معيّنة داخل الدائرة الزرقاء ولكن خارج الدائرة الصفراء. قرب الإجابة إلى أقرب نسبة مئوية صحيحة.

هل الحدثان "داخل الدائرة الزرقاء" و "خارج الدائرة الصفراء" حدثان مستقلان؟

36. إذا كان `A متمم الحدث A و `B متمم الحدث B، وكان الحدثان A و B حدثين مستقلين، أثبت أن `A و `B حدثان مستقلان.

8.8 الاحتمال المشروط Conditional Probability

ما ستتعلّمه
- إيجاد احتمال مشروط
- الحوادث غير المستقلة

... ولماذا
يدل الاحتمال المشروط على مدى ترابط الحوادث، مما يسمح باتخاذ القرار المناسب في كثير من الحالات.

معايير الدرس
11A.10.4

11A.10.5

المصطلحات
- احتمال مشروط conditional probability

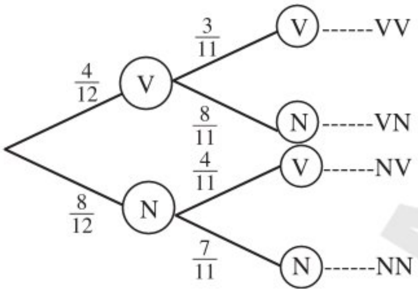
إيجاد احتمال مشروط

عند استعمال مخطط الشجرة لإيجاد احتمال يبدأ شكل جديد من الاحتمالات بالظهور، يُسمى **الاحتمال المشروط**، وذلك عندما يكون وقوع حدث ما مشروط بوقوع حدث آخر يسبقه.

لنفترض مثلًا أنه لدى صالح علبة تحتوي على 12 قطعة من الشوكولاته بنكهات مختلفة، 4 منها بنكهة الفانيليا، وكانت القطع كلها متشابهة في الشكل الخارجي. أعطى صديقه جاسم قطعتين منها، ما احتمال أن تكون القطعتان بنكهة الفانيليا؟

سنستعمل هنا مخطط الشجرة في حساب الاحتمال، تمهيدًا لصياغة تعريف دقيق للاحتمال المشروط ومعرفة قاعدته.

ما يهم أن يعرفه جاسم هو أن في العلبة نوعين من الشوكولاته: بنكهة الفانيليا (V) وبنكهة غير الفانيليا (N). عند اختيار قطعتَي الشوكولاته تكون هناك أربعة نواتج محتملة: VV, VN, NV, NN كما هو مبيّن في الشكل أدناه.



ولحساب احتمال النتيجة VV على جاسم أن يجد احتمال أن يختار قطعة شوكولاته بنكهة الفانيليا في أول اختيار وهو $\frac{4}{12}$، واحتمال أن يختار قطعة شوكولاته بنكهة الفانيليا في ثاني اختيار، علمًا أن الاختيار الأول كان قطعة شوكولاته بنكهة الفانيليا، وهو $\frac{3}{11}$

إذن حسب مبدأ الضرب في الاحتمال، احتمال نتيجة الشوكولاته بالفانيليا في الاختيارين هو:

$$\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد احتمالات النواتج الأخرى.

إذا افترضنا أن جاسم سحب قطعتَي الشوكولاته على التوالي، فلكي يحصل على قطعتين بنكهة الفانيليا يجب أن تكون الأولى بنكهة الفانيليا (A) والثانية بنكهة الفانيليا (B) بناءً على أن الأولى بنكهة الفانيليا (A).

لاحظنا أن ثمة فرقًا بين احتمالَي وقوع الحدثين. فاحتمال الحدث الأول (A) هو $\frac{4}{12}$، بينما احتمال الحدث الثاني، وهو احتمال مشروط بالحدث الأول، هو $\frac{3}{11}$

نكتب: $P(A) = \frac{4}{12}$ و $P(B|A) = \frac{3}{11}$ وتُقرأ احتمال وقوع الحدث (B) بشرط وقوع الحدث (A).

بالتالي يكون احتمال وقوع الحدثين A و B معًا هو $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$.

مبدأ الضرب العام في الاحتمال

بالنسبة لأي حدثين A و B، حيث $A \neq \varnothing$،

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

مثال 1 استعمال مبدأ الضرب العام في الاحتمال

أجرى المدير الفني لفريق كرة قدم استبيان لمعرفة نسبة مشجعي الفريق في عدد من المدارس الثانوية. نتيجة الاستبيان مبيّنة في الشكل المجاور.

أوجد احتمال أن طالبًا ما شمله الاستبيان يكون

الطلاب الذين يرغبون حضور المباراة:

- 70% من التلاميذ يرغبون الحضور.
- 80% من التلاميذ الذين يرغبون الحضور هم من مشجعي الفريق.

الطلاب الذين لا يرغبون حضور المباراة:

- 30% من التلاميذ لا يرغبون الحضور.
- 25% هم من التلاميذ الذين لا يرغبون الحضور من مشجعي الفريق.

A. من الذين يرغبون حضور مباراة الفريق ومن مشجعيه.

B. من الذين لا يشجعون الفريق؟

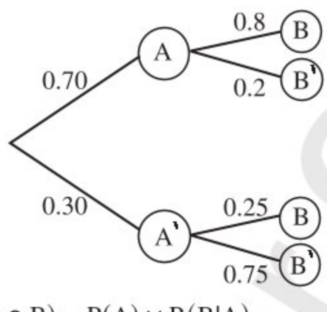
الحل

استعمل صيغة الاحتمال المشروط لإيجاد الاحتمال المركب.

A. ليكن الحدثان:

A: الحضور

B: مشجع



$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$= 0.7 \times 0.8$ عوّض $P(A) = 0.7$ و $P(B|A) = 0.8$

$= 0.56$ أو 56%

إذن، احتمال أن يرغب طالب ما شمله الاستبيان حضور مباراة الفريق ومن مشجعيه هو 0.56 أو 56 %

(تابع)

B. نوجد أولًا $P(B' \cap A)$:

$$P(B' \cap A) = P(A) \times P(B'|A)$$
$$= 0.7 \times 0.2$$
$$= 0.14$$

ثم نوجد $P(B' \cap A')$:

$$P(B' \cap A') = P(A') \times P(B'|A')$$
$$= 0.3 \times 0.75$$
$$= 0.225$$

إذن، احتمال أن يكون طالب ما شمله الاستبيان ليس من مشجعي الفريق هو:

$$P(B') = P(B' \cap A) + P(B' \cap A')$$
$$= 0.14 + 0.225$$
$$= 0.365$$

حاول أن تحل التمرين 2

من مبدأ الضرب العام في الاحتمال يمكن استنتاج صيغة لحساب الاحتمال المشروط كما يلي:

صيغة الاحتمال المشروط

بالنسبة لأي حدثين A و B، حيث $A \neq \varnothing$،

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال 2 فهم الاحتمال المشروط

شكّل طلاب إحدى المدارس لجنة لتمويل الأنشطة اللاصفية في المدرسة، واختاروا أعضاء هذه اللجنة من الأندية الفاعلة في المدرسة وفق التوزيع المبيّن في الجدول أدناه.

	مسرح	علوم	فنون	المجموع
العاشر	3	9	24	36
الحادي عشر	6	18	16	40
الثاني عشر	8	13	18	39
المجموع	17	40	58	115

(تابع)

أوجد احتمال أن يكون عضو اختير من نادي الفنون عشوائيًّا من الصف الحادي عشر.

الحل

الطريقة 1

لإيجاد احتمال أن يكون العضو المختار من الصف الحادي عشر (B) علمًا أنه عضو في نادي الفنون (A)، نستعمل صيغة الاحتمال المشروط.

لأي حدثين A و B، حيث $A \neq \varnothing$، $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$P(B|A) = \frac{P(\text{الفنون} \cap \text{الحادي عشر})}{P(\text{الفنون})} = \frac{\frac{16}{115}}{\frac{58}{115}} = \frac{8}{29}$$

الطريقة 2

نلاحظ أن الشرط " أن يكون العضو المختار في نادي الفنون" قد اختزل الفضاء العيني للتجربة كما هو موضّح في الجدول التالي:

	فنون
العاشر	24
الحادي عشر	16
الثاني عشر	18
المجموع	58

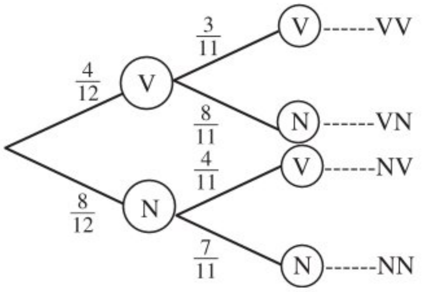
نستعمل الجدول لإيجاد احتمال أن يكون العضو المختار من الصف الحادي عشر (B) علمًا أنه عضو في نادي الفنون (A).

$$P(B|A) = \frac{\text{عدد طلاب الحادي عشر في نادي الفنون}}{\text{عدد الأعضاء في نادي الفنون}} = \frac{16}{58} = \frac{8}{29}$$

إذن، احتمال أن يكون عضو اختير من نادي الفنون عشوائيًّا من الصف الحادي عشر هو $\frac{8}{29}$

حاول أن تحل التمرين 5

بالعودة إلى المسألة في بداية الدرس، إذا كانت القطعة الثانية التي أعطاها صالح لصديقه جاسم بنكهة الفانيليا فما احتمال أن تكون القطعة الأولى بنكهة الفانيليا؟



إنه سؤال مثير للاهتمام، ولكن لا يمكن إيجاد إجابته من خلال قراءة البيانات من شجرة الاحتمال.

تعطينا شجرة الاحتمال (الأولى بنكهة الفانيليا | الثانية بنكهة الفانيليا)P، ولكننا نريد إيجاد (الثانية بنكهة الفانيليا | الأولى بنكهة الفانيليا)P أي الاحتمال المشروط بالاتجاه المعاكس، وهما حالتان مختلفتان وقد لا تكون لهما نفس قيمة الاحتمال. لا يكون الاحتمال بالاتجاه المعاكس ظاهرًا في شجرة الاحتمال، ولكن لدينا كل المعطيات الكافية لإيجاد قيمته.

مثال 3 إيجاد الاحتمال المشروط بالاتجاه المعاكس

لدينا علبتان من البسكويت A و B. تحتوي العلبة A على قطعتين من البسكويت بالشوكولاته وقطعتين من البسكويت بالفستق. تحتوي العلبة B على قطعة واحدة من البسكويت بالشوكولاته.
إذا سحبنا قطعة بسكويت عشوائيًّا من إحدى العلبتين، أوجد احتمال أن تكون هذه القطعة من العلبة A علمًا أنها بالشوكولاته (C). (انظر الشكل 8.8.1)

الحل

بحسب الصيغة $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$.

أولًا علينا إيجاد $P(A \cap C)$، أي احتمال سحب قطعة بسكويت من العلبة A وأن تكون مصنوعة من الشوكولاته: $P(A \cap C) = P$ (العلبة A ∩ شوكولاته)

لاحظ أن في هذه التجربة يتم اختيار علبة من اثنتين أي أن احتمال اختيار كل من العلبتين هو $\frac{1}{2}$، وفي العلبة A يوجد قطعتين مصنوعتين من الشوكولاته من بين 4 قطع.

إذن، $P(A \cap C) = P$ (العلبة A ∩ شوكولاته) $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$.

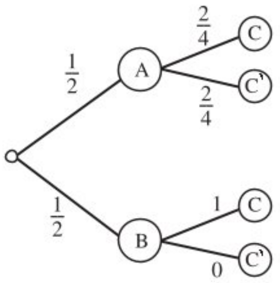
ثم نجد قيمة $P(C)$. أي احتمال سحب قطعة شوكولاته.

$P(C) = P$ (العلبة A ∩ شوكولاته) $+ P$ (العلبة B ∩ شوكولاته) $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$

أخيرًا نعوّض في الصيغة:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$

حاول أن تحل التمرين 6



الشكل 8.8.1 شجرة الاحتمال للتجربة في المثال 3

الحوادث غير المستقلة

يمكننا من خلال الاحتمال المشروط أن نتبيّن ما إذا كان الحدثان A و B مستقلين أم لا. ببساطة، إن معنى أن احتمال الحدث A لا يؤثر في احتمال الحدث B هو بالضبط $P(B|A) = P(B)$، وهو ما يمكن تبيّنه من صيغة الاحتمال المشروط.

الحوادث المستقلة والاحتمال المشروط

يكون الحدثان A و B حدثين مستقلين إذا وفقط إذا كان $P(B|A) = P(B)$
إذن، لكل حدثين مستقلين $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

مثال 4 اختبار الاحتمال المشروط لمعرفة الحوادث المستقلة

يبيّن الجدول أدناه معلومات عن المركبات المركونة في مرأب للسيارات في فترة بعد الظهر من أحد الأيام. إذا اخترنا إحدى المركبات عشوائيًا، وكان B هو الحدث "أن تكون المركبة سوداء" و V هو الحدث "أن تكون المركبة حافلة صغيرة"، هل الحدثان V و B مستقلان أم غير مستقلين؟

	سيارة	حافلة صغيرة	شاحنة صغيرة	المجموع
حمراء	5	0	2	7
بيضاء	0	0	2	2
سوداء	6	3	4	13
المجموع	11	3	8	22




الحل

الطريقة 1

بما أن، $P(B) = \frac{13}{22} \neq 0$ و $P(V \cap B) = \frac{3}{22}$ إذن:

$$P(V|B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{13}{22}} = \frac{3}{13}$$

بما أن $P(V|B) \neq P(V)$، إذن الحدثان V و B غير مستقلين.

الطريقة 2

بما أن $P(V) = \frac{3}{22} \neq 0$ و $P(B \cap V) = P(V \cap B)$،

$$P(B|V) = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{3}{22}} = 1$$

احتمال 1، 100%، يعني أن الناتج أكيد: إذا اخترنا حافلة صغيرة، يجب أن يكون لونها أسود.

بما أن $P(B|V) \neq P(B)$، إذن الحدثان V و B غير مستقلين.

حاول أن تحل التمرين 9

نصيحة دراسية

عند تنظيم جدول الاحتمالات، انتبه للنواتج المستحيلة الحدوث أو تلك المؤكد حدوثها.

على سبيل المثال، من المستحيل اختيار حافلة صغيرة حمراء.

كذلك يمكن أن يدلنا الاحتمال المشروط على مدى الارتباط بين حدثين أو مدى تأثير وقوع حدث في وقوع حدث آخر، الأمر الذي يساعد على اتخاذ القرار الأكثر صوابًا في كثير من الحالات.

مثال 5 استعمال الاحتمال المشروط لاتخاذ القرار المناسب

يريد خبير في التسويق استعمال البيانات الإحصائية لمبيعات الهواتف الجوالة الواردة في الجدول أدناه لوضع خطة تسويقية إلكترونية. يريد الخبير معرفة الأنواع الأكثر مبيعًا بعد أن أجرى المشترين بحثًا إلكترونيًا عنه، أي عبر الإنترنت.

ليكن الحدثان:

S: البحث

B: الشراء.

البحث الإلكتروني عن الهواتف الجوالة وسلوك المشترين

البحث والشراء (S و B)	البحث (S)	المنتج
16%	46%	W
14%	32%	X
12%	35%	Y
15%	40%	Z

أوجد احتمال أن يشتري الزبون هاتفًا من كل نوع بعد أن يجري عنه بحثًا عبر الإنترنت.

الحل

استعمل القاعدة $P(B|S) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)}$.

P(B | S)	المنتج
$\frac{0.16}{0.46} \approx 0.348 = 34.8\%$	W
$\frac{0.14}{0.32} = 0.4375 = 43.75\%$	X
$\frac{0.12}{0.35} \approx 0.343 = 34.3\%$	Y
$\frac{0.15}{0.40} = 0.375 = 37.5\%$	Z

إذن، المنتج X بحسب الجدول أعلاه، احتمال أن يشتريه الزبائن بعد إجراء بحث عنه هو الأكبر، لذا ربما يكون خيارًا جيدًا للحملة التسويقية الإلكترونية.

حاول أن تحل التمرين 10

مراجعة سريعة 8.8

في التمارين 1-3، حدّد ما إذا كان الحدثان A و B مستقلين أم لا، مستعملًا قاعدة الاحتمال المشروط.

1. $P(A) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{3}{16}, P(B) = \frac{3}{4}$

2. $P(A \cap B) = \frac{3}{8}, P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{5}$

3. $P(A) = 2\,P(A \cap B), P(B) = \frac{1}{2}$

في التمارين 4-7، أوجد الاحتمال المشروط $P(B|A)$.

4. $P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A) = \frac{2}{5}$

5. $P(A \cap B) = \frac{3}{4}, P(A) = \frac{4}{5}$

6. $P(A \cap B\,) = \frac{1}{7}, P(A) = \frac{3}{7}$

7. $P(A) = 2\,P(A \cap B)$

الدرس 8.8 التمارين

1. في مهرجان مدرسي، %5 من الطلاب سيربحون جائزة. تكون أنواع الجوائز الخمسة المبيّنة في الشكل أدناه لها نفس إمكانية الحدوث. أوجد احتمال أن يربح طالب في المهرجان قصة مصورة. وضّح إجابتك.

2. في إحدى المدارس الثانوية، الرياضة المفضلة لدى %40 من الطلاب هي كرة القدم. من بين هؤلاء %20 من طلاب الحادي عشر. من بين الطلاب الذين رياضتهم المفضلة ليست كرة القدم %30 هم من طلاب الحادي عشر. أوجد احتمال أن يكون طالب قد اختير عشوائيًا هو من طلاب الحادي عشر ورياضته المفضلة هي كرة القدم.

في التمرينين 3 و 4، لتكن $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{2}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. أوجد الاحتمال المشروط.

3. $P(B|A)$

4. $P(A|B)$

5. استعمل البيانات الواردة في الجدول أدناه لإيجاد احتمال كل حدث.

	سنة ثانية (J)	سنة أولى (S)
برمجة الكمبيوتر (R)	24	16
تصميم الألعاب (D)	22	18

a. $(J|R)$

b. $(R|J)$

c. $(D|S)$

d. $(S|D)$

6. **الاحتمال المشروط** هناك شعبتان لصف الأول أساسي في مدرسة ابتدائية. شعبة المعلّمة صفاء فيها 12 طالبًا يضعون نظارات و 8 لا يضعون نظارات، بينما شعبة المعلّمة جنى فيها 10 طلاب يضعون نظارات و 15 لا يضعون نظارات. إذا تم اختيار طالب عشوائيًا من إحدى الشعبتين، وكان هذا الطالب يضع نظارات، أوجد احتمال أن يكون من شعبة المعلّمة صفاء.

7. **عمل جماعي** على الطاولة صندوقان متماثلان. في الصندوق الأول قطعة نقدية عادية وقطعة نقدية كلا وجهيها "صورة"، وفي الصندوق الثاني 3 قطع نقدية عادية. اختار أحد أصدقائك قطعة نقدية من أحد الصندوقين وأراك أحد وجهيها فتبيّن أنه "صورة". أوجد احتمال أن يكون صديقك قد اختار القطعة النقدية من الصندوق الأول.

8. لنفرض أنك تختار بطاقة عشوائيًا من مجموعة البطاقات في الشكل أدناه.

W2	B3	W4	B3	B2	W3

يمثّل B الحدث "اختيار بطاقة زرقاء" ويمثّل T الحدث "اختيار بطاقة عليها 3". هل B و T حدثان مستقلان؟ وضّح إجابتك.

9. بالعودة إلى المثال 4، ليكن R الحدث "اختيار مركبة حمراء" و C الحدث "اختيار سيارة".
هل الحدثين R و C مستقلين أم غير مستقلين؟ وضّح إجابتك.

10. يريد خبير في التسويق استعمال البيانات الإحصائية لمبيعات الحاسوب الواردة في الجدول أدناه لوضع خطة تسويقية إلكترونية. يريد الخبير معرفة الأنواع الأكثر مبيعًا بعد أن أجرى المشترين بحثًا إلكترونيًا عنه، أي عبر الإنترنت. كما يوضّح الجدول التالي:

المنتج	البحث %	البحث والشراء %
J	35%	10%
K	28%	9%
L	26%	8%
M	24%	5%

أي منتج عنده احتمال الشراء الأكبر من قبل الزبائن؟ وضّح إجابتك.

في التمرينين 11 و 12، حدّد ما إذا كان الحدثان A و B مستقلين أم لا، مستعملًا قاعدة الاحتمال المشروط.

11. $P(A) = \frac{4}{7}$، $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$، $P(A \cup B) = \frac{5}{7}$

12. $P(A) = \frac{1}{3}$، $P(B|A) = \frac{2}{3}$، $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

13. يختار الطلاب رقمين من 0 إلى 9 عشوائيًا لكتابة عدد بين 0 و 99، هل الحدثان "أول رقم الآحاد، 6" و "ثاني رقم العشرات، 5" مستقلان أم غير مستقلين في كل من الحالتين التاليتين؟ ما قيمة P(56) في كل حالة؟

a. لا يمكن تكرار الأرقام.

b. يمكن تكرار الأرقام.

في التمارين 14-16، تجرّب شركة أدوية دواءً جديدًا، حيث اختارت بعض المرضى عشوائيًا إما لتناول الدواء قيد التجربة وإما لتناول دواء وهمي.

	الدواء التجريبي	دواء وهمي
المرضى الذين أبدوا تحسنًا	53	47
المرضى الذين لم يبدوا تحسنًا	65	35

14. أوجد احتمال أن يكون أحد المرضى الذين يتناولون الدواء التجريبي قد أبدى تحسنًا. قرّب الإجابة إلى أقرب نسبة مئوية صحيحة.

15. هل تناول "الدواء التجريبي" و "إبداء التحسن" حدثان مستقلان أم غير مستقلين؟

16. بالاستناد إلى الجدول أعلاه، هل تنصح بترخيص الدواء الجديد؟ وضّح إجابتك.

17. **الكتابة للتعلم** كيف يمكننا تبسيط الصيغة $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ لإيجاد احتمالَي الحدثين A و B عندما يكونان مستقلين؟

18. يبلغ عدد أعضاء نادٍ رياضي، 500 1 عضو، 200 منهم طلاب المدارس الثانوية. 300 عضو من أعضاء النادي يمارسون السباحة. عدد أعضاء فريق السباحة المدرسي 45، وجميعهم من أعضاء النادي. أوجد احتمال أن يكون عضو في النادي الرياضي تم اختياره عشوائيًا من طلاب المدارس الثانوية، وعضوًا في فريق السباحة المدرسي.

أسئلة اختبار معيارية

19. **صواب أم خطأ** كتبت ليلى $P(A|B) = P(B|A)$. هل ما كتبته صحيح؟ برّر إجابتك.

20. **صواب أم خطأ** يعلم تامر أن $P(R) = 0.8$ و $P(B) = 0.2$ و $P(B \cap R) = 0.05$. هل ما كتبه أدناه صحيح؟ برّر إجابتك.

$$P(B|R) = \frac{0.05}{0.2} = 0.25$$

21. **اختيار من متعدد** إذا كان الحدثان A و B حدثين مستقلين، فإن $P(A|B)$ يساوي:

A. $P(A)$

B. $P(B)$

C. $P(B/A)$

D. $P(A) \times P(B)$

E. $P(A) + P(B)$

22. **اختيار من متعدد** أي من أزواج الحوادث التالية حوادث مستقلة اختر كل ما ينطبق؟

A. طالب اختير عشوائيًا لديه محفظة. طالب اختير عشوائيًا لون شعره بني.

B. الحدثان A و B حيث $P(A) = \frac{3}{5}$ و $P(B|A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{5}{9}$.

C. طالب اختير عشوائيًا هو طالب ثاني ثانوي. طالب اختير عشوائيًا هو طالب أول ثانوي.

D. الحدثان A و B حيث $P(A) = 0.30$ و $P(B) = 0.25$ و $P(A \cap B) = 0.075$.

E. الحدثان A و B حيث $P(A) = 0.40$ و $P(B) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.012$.

استكشاف

23. في صندوق 50 بطارية، منها 10 فارغة و 5 ضعيفة. افترض أنك تختار من الصندوق عشوائيًا بطاريات فارغة أو ضعيفة بهدف إعادة التدوير. إذا كانت أول بطارية اخترتها فارغة والثانية ضعيفة، أوجد احتمال أن تكون البطارية الثالثة ضعيفة.

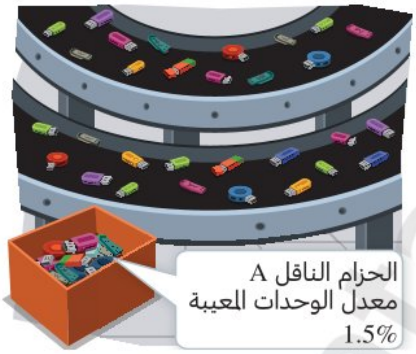
24. في حفل خيري، وضع المشرف على الحفل صندوقين يحتوي كل منهما خليطًا من علب الخضار وعلب الحساء، من دون لصاقات تحدد محتويات العلب، أحدهما إلى اليمين والآخر إلى اليسار، وطلب من المشاركين في اللعبة تخمينات محتويات العلب، على أن يحصل صاحب التخمين الصحيح على جائزة. في كل حالة أدناه: إذا اختار المشارك الأول علبة خضار، أوجد احتمال أن يكون اختارها من الصندوق الأيسر.

a. في الصندوق الأيسر علبتا خضار و 8 علب حساء، وفي الصندوق الأيمن 7 علب خضار و 3 علب حساء.

b. في الصندوق الأيسر 8 علب خضار وعلبتا حساء، وفي الصندوق الأيمن 5 علب خضار و 5 علب حساء.

توسيع الأفكار

25. قرّر مفتش الإنتاج في إحدى الشركات أن 1% من وحدات الذاكرة المحمولة التي تنتجها الشركة معيبة. إذا كان خط التركيب A ينتج 20% من وحدات الذاكرة المحمولة عمومًا، أوجد احتمال أن تكون وحدة ذاكرة محمولة معيبة، مختارة عشوائيًا، هي من الحزام الناقل A. وضّح إجابتك.



26. تصنع ماجدة طاولة باستعمال قطع خزف تختارها وتركّبها عشوائيًا. تختار ماجدة القطع من دون النظر إليها. في الشكل أدناه، يرمز Y للون الأصفر و B للون الأزرق و R للون الأحمر و G للون الأخضر. قارن بين القيمتين

P(الأولى زرقاء | الثانية صفراء)

P(الأولى صفراء | الثانية صفراء)

إذا كانت ماجدة تختار القطع من دون إعادتها. ثم قارن بين القيمتين إذا كانت ماجدة تعيد القطع التي تختارها إلى كومة القطع لأنها تريد لونًا آخر.

الوحدة 8 مراجعة الوحدة

1. عند شراء ناصر سيارة، عُرض عليه اختيار فئتها من ضمن 3 فئات (عائلية، رياضية، فاخرة)، ونوع ناقل الحركة فيها (آلي، يدوي)، ولونها من ضمن 8 ألوان.
بكم طريقة يمكن لناصر اختيار سيارته الجديدة؟

2. أوجد عدد لوحات السيارات التي تبدأ بحرفين من حروف اللغة الإنجليزية متبوعَين بأربعة أرقام. افترض أنه لا توجد أحرف أو أرقام مكررة.

3. بكم طريقة مختلفة يمكن لـ 12 عدّاءً إنهاء سباق للجري في المراتب الأولى والثانية والثالثة؟

4. ستمنح المدرسة اثنين من طلابها جائزة الروح الرياضية. تأهل لهذه الجائزة 6 رياضيين و 8 من غير الرياضيين.
ما عدد الطرق المختلفة التي يمكن من خلالها منح الجائزة إذا كان المطلوب منح الجائزة لواحد من الرياضيين على الأقل؟

5. بكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس خمسة أطفال في صف واحد علمًا أن اثنين منهم، ناصر وعبدالكريم، يجب أن يجلسا متجاورين دائمًا؟

في التمارين 6-9، احسب قيمة المقدار، ثم تحقق من إجابتك باستعمال الحاسبة.

6. $\binom{789}{787}$

7. ${}_{12}C_8$

8. ${}_{15}C_2 + {}_{15}C_3$

9. ${}_{12}P_8$

10. أوجد عدد التباديل المتمايزة التي يمكن تشكيلها من أحرف الكلمتين التاليتين:

a. INDULGENCE

b. CHARACTERISTICS

11. عند رمي قطعة نقد 4 مرات متتالية، ما عدد الطرق للحصول على صورتين متتاليتين فقط؟

12. يشارك عبدالكريم في مخيم للأنشطة الصيفية. يمكنه أن يختار 3 أنشطة فقط من بين الأنشطة المذكورة في الرسم أدناه. ما عدد المجموعات المختلفة المؤلفة من 3 أنشطة التي يمكن أن يختارها عبدالكريم؟

13. سوف تدعو سعاد 3 من صديقاتها العشر إلى حفلة تخرجها. بكم طريقة مختلفة يمكن لسعاد فعل ذلك؟

14. لنفترض أننا نريد ترتيب 8 من العناصر المتمايزة مأخوذة 3 عناصر في كل مرة حيث إن ترتيب تلك العناصر غير ذي أهمية. هل كل من العبارات التالية تعطي العدد الصحيح للتراتيب؟ أجب بنعم أم لا.

	نعم	لا
${}_8P_3$	❑	❑
${}_8C_3$	❑	❑
$\frac{{}_8P_3}{3!}$	❑	❑
$8! \times 3!$	❑	❑
$\frac{8!}{3!}$	❑	❑
$\frac{8!}{5!}$	❑	❑
$\frac{8!}{3!5!}$	❑	❑
8×7	❑	❑

15. اشترى منصور قفلًا جديدًا لدراجته. تشير التعليمات المرفقة بالقفل إلى ضرورة اختيار 3 أعداد من أصل 30 عددًا متوافرًا على قرص دائري، إذا أراد حمايتها فعلًا، علمًا أنه لا يستطيع اختيار العدد نفسه مرّتين.
أوجد عدد الترتيبات التي يمكن لمنصور اختيار القفل بموجبها. هل تمثّل تلك التراتيب تباديل أم توافيق؟ برّر إجابتك.

في التمارين 16-18، أوجد مفكوك ذات الحدين.

16. $(3x^2 + y^3)^2$

17. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^6$

18. $(1 + x)^6 - (1 - x)^6$

19. أوجد معامل الحد الخالي من x في مفكوك ذات الحدين $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$.

20. فضاء العينة لتجربة عشوائية هو $\{1, 2, 5, 10\}$.
هل تشكل $P(1) = 0.45$, $P(2) = 0.25$, $P(3) = 0.15$
$P(10) = 0.05$ دالة احتمال؟ وضّح إجابتك.

21. فضاء العيّنة لتجربة عشوائية هو $\{A, B, C\}$.
احتمال الناتج A هو نصف احتمال الناتج B، لكنه ثلاثة أمثال احتمال الناتج C. أوجد احتمالات النواتج الثلاثة.

22. في السحب الخيري توجد 5 أرقام رابحة من 1 إلى 40، أوجد احتمال ربح مشترك اشترى 12 بطاقة أرقامها مختلفة.

23. **كرنفال** في إحدى زوايا ألعاب الكرنفال، يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية: 5 حمراء و 3 بيضاء و 2 زرقاء. يقدم الكرنفال هدية لأي لاعب ينجح في اختيار 3 كرات زجاجية بحيث تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة زرقاء بالترتيب.
أوجد احتمال أن يربح أحد اللاعبين هدية الكرنفال.

24. **أحزمة الأمان** يقدّر خبراء السلامة المرورية أن نسبة السائقين الذين يضعون أحزمة الأمان على الطريق السريع هي 85% تقريبًا.
إذا أوقفت الشرطة 5 سيارات عند حاجز مروري، أوجد احتمال كل من النواتج التالية:

a. كل السائقين يضعون حزام الأمان.

b. السائق الرابع هو أول واحد لا يضع الحزام.

c. سائق واحد على الأقل لا يضع الحزام.

25. إذا كانت A_1, A_2, A_3 حوادث متنافية وشاملة، حيث $P(A_1) = 6P(A_2) = 5P(A_3)$. أوجد $P(A_2)$.

26. يدحرج سالم مكعبًا مرقّمًا من 1 إلى 6 ليقرر تركيبة أرقام جديدة لقفل دراجته. إذا تبقّى لديه رقم واحد، أوجد احتمال كل حدث أدناه. استعمل ما تعرفه عن الحوادث المتنافية لشرح طريقة تفكيرك.

a. أن يحصل سالم على رقم زوجي ورقم أصغر من 2، وضّح إجابتك.

b. أن يحصل سالم على رقم زوجي أو رقم أصغر من 2، وضّح إجابتك.

27. **دجاج** أجرت جمعية حماية المستهلك اختبارًا ميدانيًا شمل 23 متجرًا، لعيّنات من الدجاج معروضة في قسم الحسومات، حيث فحصت العيّنات لاختبار التلوث البكتيري. 81% من العيّنات كانت ملوثة بالبكتيريا رقم 1 و 15% منها بالبكتيريا رقم 2، و 13% كانت ملوثة بنوعي البكتيريا. أوجد احتمال أن تكون عيّنة من الدجاج خالية من البكتيريا.

28. بالاعتماد على نتائج الاختبار في التمرين السابق، هل يبدو نوعا التلوث البكتيري حدثين مستقلين؟ وضّح إجابتك.

29. **سباق الخيل** إذا كان مسار سباق الخيل رطبًا، فإن إمكانية فوز الحصان "الأدهم" في السباق الخامس هي 70%، أما إذا كان المسار جافًا فإن إمكانية فوزه هي 40% تتوقع هيئة الأرصاد الجوية أن إمكانية أن يكون المسار رطبًا هي 80%، أوجد احتمال أن:

a. المسار رطب و "الأدهم" يفوز.

b. المسار جاف و "الأدهم" يفوز.

c. "الأدهم" يفوز.

30. الحدثان A و B مستقلان حيث $P(A) = k$ و $P(B) = k + 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.18$.

a. أوجد قيمة k.

b. أوجد $P(A \cup B)$.

31. يحظى كل شخص مشترك في سحب بفرصة نسبتها 3% لربح جائزة. إمكانية أن تكون هذه الجائزة بطاقتي مسرح هي 25%، أوجد احتمال أن يربح شخص اشترك في السحب بطاقتي المسرح.

32. الحدثان A و B مستقلان حيث $P(A) = \frac{9}{16}$ و $P(B) = \frac{3}{8}$. أوجد احتمال:

a. أن يحدث الحدثان.

b. أن يحدث الحدث A فقط.

c. أن لا يحدث أي حدث من الحدثين.

33. الحدثان A و B مستقلان حيث $P(A) = 0.6$ و $P(B) = 0.8$. أوجد $P(A \cup B)$.

34. أظهر استقصاء شمل مئتي شخص، 90 منهم إناث، أن 60 منهم عاطلون عن العمل، وأن 20 شخصًا من العاطلين عن العمل ذكور.

a. أكمل الجدول التالي مستعملًا المعلومات المعطاة.

	ذكور	إناث	المجموع
العاطلون عن العمل			
العاملون			
المجموع			200

b. إذا اختير شخص عشوائيًا من هذه المجموعة المكوّنة من 200 شخص، أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص:

i. أنثى عاطلة عن العمل.

ii. ذكرًا علمًا أنه عاطل عن العمل.

35. قام العاملون في مركز صحي بفحص 80 رجلًا تمّ اختيارهم عشوائيًا لمعرفة ما إذا كان عندهم ضغط دم مرتفع و/أو كوليستيرول. يوجز الجدول أدناه النتائج.

الكولسترول

ضغط الدم	مرتفع	معتدل	المجموع
مرتفع	22	12	34
معتدل	6	48	54
المجموع	28	60	88

a. أوجد احتمال أن يكون لدى أحد الرجال ضغط دم مرتفع وكوليستيرول.

b. أوجد احتمال أن يكون لدى رجل كوليستيرول علمًا أن ضغط دمه مرتفع.

c. في هذه المجموعة من الرجال، هل الكوليستيرول وضغط الدم المرتفع حدثان مستقلان؟

36. يحتوي كيس على 10 كرات حمراء و 10 كرات خضراء و 6 كرات بيضاء. إذا اخترنا كرتين من الكيس عشوائيًا من دون إعادتهما إلى الكيس، أوجد احتمال أن تكون الكرتان من لونين مختلفين.

37. تمّ رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6 وتسجيل الرقمين اللذين ظهرا. إذا كان مجموع هذين الرقمين S، أوجد احتمال أن يكون:

a. أحد الرقمين على الأقل 3

b. أحد الرقمين على الأقل 3، علمًا أن $S < 8$.

38. احتمالا الحدثين A و B هما $P(A) = \frac{3}{11}$ و $P(B) = \frac{4}{11}$. أوجد قيمة $P(A \cap B)$ إذا كان:

a. $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$

b. الحدثان A و B مستقلين.

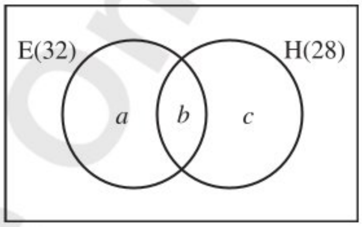
39. احتمالات الحدثين A و B هي $P(A) \neq 0$ و $P(A) \neq 1$، و $P(B) \neq 0$ و $P(B) \neq 1$. في كل من الحالات المبيّنة أدناه، حدّد ما إذا كان الحدثان A و B متنافيين أم مستقلين أم لا هذا ولا ذاك.

a. $P(A|B) = P(A)$

b. $P(A \cap B) = 0$

c. $P(A \cap B) = P(A)$

40. مدرسة فيها 88 طالبًا، يدرس 32 منهم الاقتصاد (E) ويدرس 28 منهم التاريخ (H)، و 39 طالبًا لا يدرسون أي من الموضوعين. يمثّل شكل ڤن التالي هذه المعلومات.



a. احسب قيم a, b, c

b. إذا اختير طالب عشوائيًا،

i. أوجد احتمال أن يكون ممن يدرسون الاقتصاد والتاريخ معًا.

ii. أوجد احتمال أن لا يكون ممن يدرسون التاريخ علمًا أنه يدرس الاقتصاد.

c. إذا اختيرت مجموعة من 3 طلاب عشوائيًا،

i. أوجد احتمال أن لا يكون أحد من هؤلاء ممن يدرسون الاقتصاد.

ii. أوجد احتمال أن يكون واحد منهم على الأقل ممن يدرسون الاقتصاد.

الوحدة 8 تقويم

.1 بسّط ما يلي:

a. $\frac{76!}{75!}$

b. $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

.2 أوجد عدد الرحلات المختلفة للسفر من المدينة A إلى المدينة B مرورًا بالمدينة C. علمًا أنه يمكن السفر في 3 رحلات مختلفة من A إلى C و 4 رحلات مختلفة من C إلى B.

.3 حدد ما إذا كان كل من التراتيب التالية يمثّل تبديلًا أم توفيقًا، ثم احسب عدد التوافيق أو التباديل:

.a اختيار 4 كتب عشوائيًا من قائمة تتضمن 11 كتابًا.

.b ترتيب 10 فرق لكرة القدم في نهاية بطولة الدوري.

.c اختيار لجنة من 5 أشخاص من بين 9 أشخاص لتحديد قائمة الطعام.

.d عرض 8 نماذج للطائرات في صف واحد.

.e اختيار رئيس الصف، ونائبه، وأمين الصندوق من بين 12 طالبًا مترشحًا.

.4 عدد أعضاء أحد النوادي 45 عضوًا. الهيئة الإدارية تتألف من ثلاثة أعضاء. بكم طريقة مختلفة يمكن تشكيل هذه الهيئة؟

.5 تتألف لجنة تحكيم مشاريع الرياضيات من سبعة أعضاء، يريدون الجلوس إلى منصة أمامها 7 كراسي. أوجد كل الطرق المختلفة التي يمكن بها لجميع هؤلاء الأعضاء الجلوس إلى المنصة معًا.

.6 يريد نادي الصداقة، المؤلف من 5 أعضاء، انتخاب رئيس وأمين للسر. أوجد جميع الطرق المختلفة التي يمكن بها انتخاب لجنة مصغّرة مؤلفة من عضوين، أحدهما يمثل منصب الرئيس والآخر يمثل منصب أمين السر.

.7 ما عدد المستقيمات التي يمكن الحصول عليها باستعمال النقاط P, Q, R, S؟ وضّح إجابتك.

.8 أوجد مفكوك ذات الحدين $(2x+y)^5$.

.9 أوجد معامل الحد x^2y^6 في مفكوك ذات الحدين $(2x+y)^8$.

.10 برهن لأي عدد صحيح n أنّ:

$$n = \binom{n+1}{2} - \binom{n}{2}$$

.11 برهن لأي عدد صحيح n أنّ:

$$_{n}P_{n-1} = n(_{n-1}P_{n-1})$$

.12 تقوم مجموعة من المتطوعين بالترفيه عن الأطفال المرضى في إحدى المستشفيات عبر قراءة القصص وتقديم الهدايا. يتم اختيار الهدايا عشوائيًا من كيس يحتوي على 8 أقراص مدمجة و 10 تذاكر مجانية لحضور مسرحية.

.a بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 6 أقراص مدمجة من بين الأقراص الثمانية المتوفرة؟

.b بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 تذاكر مجانية؟

.c بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أقراص مدمجة و 3 تذاكر مجانية؟

.13 فضاء العينة لتجربة عشوائية هو $\{a, b, c, d\}$.
هل تشكّل $P(a) = 0.35$, $P(b) = 0.2$, $P(c) = 0.25$ و $P(d) = 0.35$ دالة احتمال؟ وضّح إجابتك.

.14 يحتوي صندوق على 10 بطاقات، 6 منها تتضمّن سؤالًا عن التوافيق، و 4 تتضمّن كلّ منها سؤالًا عن التباديل. يختار جاسم 3 بطاقات عشوائيًا من الصندوق. أوجد احتمال أن تتضمّن هذه البطاقات 3 أسئلة عن التوافيق.

15. يحتوي صندوق سكاكر على 6 حبات بنكهة الكاراميل و 4 حبات بنكهة الفانيليا، وكلها متشابهة. إذا بدأ شخص بتناول قطع السكاكر الواحدة تلو الأخرى، أوجد احتمال:

a. أن تكون أول ثلاث حبّات بنكهة الكراميل.

b. أن تكون أول حبة كراميل هي الحبة الثالثة.

16. في سكن طلابي جامعي، 66% من الغرف تحتوي على ثلاجة، و 41% تحتوي على تلفاز، و 32% تحتوي الاثنين معًا.

a. هل الحدثان، أن يكون في الغرفة تلفاز وأن يكون في الغرفة ثلاجة، حدثان متنافيان؟ وضّح إجابتك.

b. أوجد احتمال أن تحتوي غرفة نختارها عشوائيًا على ثلاجة أو تلفاز.

c. أوجد احتمال أن تحتوي غرفة نختارها عشوائيًا على ثلاجة ولا تحتوي على تلفاز.

17. A و B حدثان في فضاء العيّنة S. أوجد الاحتمال $P(A\cup B)$ في كل من الحالات التالية:

a. A و B حدثان متنافيان حيث أن $P(A) = 0.15$ و $P(B) = 0.6$.

b. $P(A) = 0.5$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A\cap B) = 0.3$.

18. إذا كانت A_1, A_2, A_3 حوادث متنافية وشاملة، حيث $P(A_1) = 2P(A_2) = 6P(A_3)$، أوجد $P(A_1)$.

19. يتم اختيار بطاقة عشوائيًا من 5 بطاقات مرقمة من 1 إلى 5، يقول أحد الطلاب إن اختيار رقم زوجي، أي الحدث E، واختيار عدد أولي، أي الحدث P، هما حدثان مستقلان. هل الحدثان E و P مستقلان أم غير مستقلين؟ وضّح إجابتك.

20. أجري استقصاء شمل مائة طالب، حيث سئلوا: "هل تفضل مشاهدة التلفاز أم ممارسة الرياضة؟" اختار 33 طالبًا مواطنًا من أصل 46 طالبًا شملتهم الدراسة، واختار 33 ممارسة الرياضة، في حين اختار 29 طالبًا مقيمًا الرياضة.

	مواطن	مقيم	المجموع
التلفاز			
الرياضة	33	29	
المجموع	46		100

أكمل الجدول أعلاه، ثم أوجد احتمال:

a. أن يفضّل طالب، اختير عشوائيًا، مشاهدة التلفاز.

b. أن يفضّل طالب مشاهدة التلفاز، علمًا أنه مواطن.

21. توجد على الطاولة علبتان مفتوحتان من المكسرات المكوّنة من نوعين مختلفين. يتكون 30% من النوع A من الكاجو، بينما النوع B فيتكون 40% منه من الكاجو. تم اختيار علبة عشوائيًا، واختيار حبة مكسرات عشوائيًا أيضًا من العلبة. أوجد احتمال أن تكون حبة المكسرات:

a. من العلبة ذات النوع A.

b. حبة كاجو من العلبة ذات النوع A.

c. حبة كاجو.

d. من العلبة ذات النوع A، علمًا أنها حبة كاجو.

22. ليكن الحدثان A و B بالشروط التالية:

$$P(A|B) = 0.30,\ P(B|A) = 0.60,\ P(A\cap B) = 0.18$$

a. أوجد $P(B)$.

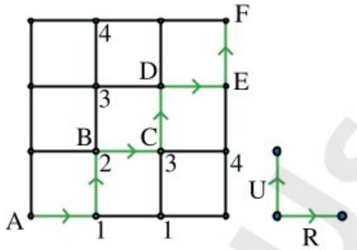
b. هل الحدثان A و B مستقلان؟ لماذا؟

الوحدة 8 المشروع

برمجة الروبوت

تقوم برمجة بعض الروبوتات على تحديد عدد واتجاه الخطوات التي على الروبوت القيام بها للانتقال من مكان إلى آخر، وذلك بأكثر من طريقة لإضفاء نوع من الحيوية على حركته.

أحد الروبوتات يحوّل المنطقة الواقعة بين مكان تواجده والنقطة التي يجب أن يصل إليها إلى شبكة، حيث يقوم بنوعين فقط من الخطوات الأمامية على الشبكة: إما إلى اليمين R وإما إلى أعلى U.



1. في الشبكة أعلاه يريد الروبوت الانتقال من النقطة A إلى النقطة F، فنمذج موقعي النقطتين على شبكة 3×3،
الأرقام المدوّنة على الشبكة عند كل نقطة تمثّل عدد الطرق المختلفة للانتقال من النقطة A إلى النقطة المقصودة.
على سبيل المثال، الرقم 3 عند النقطة C يعني أن هناك 3 طرق مختلفة للوصول إليها من النقطة A وهي (RRU , RUR, URR) والمسار الأخضر يمثّل أحد الطرق للانتقال من A إلى F (RURURU).

a. احسب عدد الطرق المختلفة التي يمكن للروبوت أن يسلكها للوصول إلى النقطة D انطلاقًا من النقطة A.

b. احسب عدد الطرق المختلفة التي يمكن للروبوت أن يسلكها للوصول إلى النقطة E.

c. برهن أنّ عدد المسارات المختلفة من الخطوات التي يمكن بها الوصول إلى النقطة F يساوي 20

d. أثبت أن بالإمكان إيجاد عدد المسارات عند كل نقطة باستعمال عناصر مثلث باسكال.

2. عمّم النتائج التي توصّلت إليها في الجزء الأول عندما يعمل الروبوت على نمذجة المواقع في صورة شبكة $n \times n$ وتحقق من صحة فرضياتك.

3. ينمذج أحد الروبوتات المواقع المختلفة للنقاط في صورة شبكة من $m \times n$.
برهن أنّ عدد المسارات المختلفة من الخطوات التي يمكن بها الانتقال من موقع إلى موقع آخر يساوي $\binom{m+n}{n}$.

الاحتمالات المقلوبة

الهدف من هذا المشروع هو إبراز التعارض بين نتائج حساب الاحتمال وما يمليه الحدس والقناعة البديهية.

توجد على الطاولة A علبتان إحداهما بيضاء والأخرى خضراء، وفي كلتيهما سكاكر، بعضها بطعم النعناع وبعضها الآخر بطعم الفراولة. كذلك الأمر بالنسبة للطاولة B.

لنفترض أن عدد الحبات بطعم الفراولة في العلبة البيضاء التي على الطاولة A أكبر من عدد الحبّات بطعم الفراولة في العلبة البيضاء التي على الطاولة B، وأن عدد الحبّات بطعم الفراولة في العلبة الخضراء التي على الطاولة A أكبر من عدد الحبّات بطعم الفراولة في العلبة الخضراء التي على الطاولة B.
استنتج ناصر أننا إذا وضعنا محتوى العلبتين البيضاء والخضراء على الطاولة A في علبة كبيرة ووضعنا محتوى العلبتين البيضاء والخضراء التي على الطاولة B في علبة كبيرة، فإن احتمال أن تُسحب حبة بطعم الفراولة من العلبة الكبيرة التي على الطاولة A سيكون دائمًا أكبر من احتمال أن تُسحب حبة بطعم الفراولة من العلبة الكبيرة على الطاولة B.
بيّن ما إذا كان استنتاج ناصر صحيحًا أم لا؟

لنفترض أن حبات السكاكر تتوزع على الشكل التالي:

على الطاولة A،

في العلبة البيضاء 140 حبة نعناع و 60 حبة فراولة.

في العلبة الخضراء 120 حبة نعناع و 80 حبة فراولة.

على الطاولة B،

في العلبة البيضاء 60 حبة نعناع و 40 حبة فراولة.

في العلبة الخضراء 40 حبة نعناع و 60 حبة فراولة.

1. أوجد احتمال أن تكون حبة سُحبت من العلبة البيضاء التي على الطاولة A بطعم الفراولة.
2. أوجد احتمال أن تكون حبة سُحبت من العلبة البيضاء التي على الطاولة B بطعم الفراولة.
3. قارن بين الاحتمالين.
4. أوجد احتمال أن تكون حبة سُحبت من العلبة الخضراء التي على الطاولة A بطعم الفراولة.
5. أوجد احتمال أن تكون حبة سُحبت من العلبة الخضراء التي على الطاولة B بطعم الفراولة.
6. قارن بين الاحتمالين.
7. أوجد احتمال أن تكون حبة سُحبت من العلبة الكبيرة التي على الطاولة A بطعم الفراولة.
8. أوجد احتمال أن تكون حبة سُحبت من العلبة الكبيرة التي على الطاولة B بطعم الفراولة.
9. ماذا تستنتج؟

صيانة الحواسيب

قامت شركة بتزويد كل من موظفيها بجهاز حاسوب.

للحفاظ على أجهزة الحاسوب، تستعين الشركة بخدمة صيانة الحواسيب.

لتقييم هذه الخدمة، قامت الشركة بإجراء مسح إحصائي طلبت فيه من كل موظّف تعبئة نموذج يحدّد فيه نوع الحاسوب الخاص به ورأيه في خدمة الصيانة.

هناك ثلاثة أنواع من الحواسيب: النوع A، والنوع B، والنوع C.

- 25% من الموظفين لديهم حاسوب من النوع A.
- 40% من الموظفين لديهم حاسوب من النوع B.
- بقية الموظفين لديهم حاسوب من النوع C.

نتج عن المسح الإحصائي ما يلي:

- 90% من الموظفين الذين لديهم حاسوب من النوع A راضون عن خدمة الصيانة.
- 65% من الموظفين الذين لديهم حاسوب من النوع B راضون عن خدمة الصيانة.
- 80% من الموظفين الذين لديهم حاسوب من النوع C راضون عن خدمة الصيانة.

نختار عشوائيًا أحد نماذج الموظفين.

1. أنشئ مخطط الشجرة الاحتمالية الذي يمثّل الموقف.
2. أوجد احتمال أن يكون النموذج يخص موظفًا لديه حاسوب من النوع A وهو راضٍ عن خدمة الصيانة.
3. أوجد احتمال أن يكون النموذج يخص موظفًا راضيًا عن خدمة الصيانة.
4. إذا كان النموذج يخص موظفًا راضيًا عن خدمة الصيانة، فما احتمال أن يكون حاسوب هذا الموظف من النوع A؟ من النوع B؟ من النوع C؟

أجرت الشركة المسح الإحصائي مرّة أخرى بعد مرور فترة من الزمن، ونتج عنه ما يلي:

- 90% من الموظفين الذين لديهم حاسوب من النوع A راضون عن خدمة الصيانة.
- 65% من الموظفين الذين لديهم حاسوب من النوع B راضون عن خدمة الصيانة.
- 70% من جميع الموظفين راضون عن خدمة الصيانة.

5. إذا كان النموذج يخص موظفًا راضيًا عن خدمة الصيانة، فما احتمال أن يكون حاسوب هذا الموظف من النوع A؟ من النوع B؟ من النوع C؟

الوحدة 9

الإحصاء

ثمة علاقات وروابط تحكمها قوانين ثابتة ودقيقة، مثل العلاقة بين ارتفاع درجة الحرارة وتمدّد معدن الحديد، أو العلاقة بين ضغط الغاز وحجمه، أو العلاقة بين قوة الجذب بين جسمين والمسافة الفاصلة بينهما. إن وجود قانون يحدّد العلاقة بين متغيرين يعني أن بإمكانك معرفة قيمة أحدهما إذا عرفت قيمة الآخر. على سبيل المثال، يمكنك معرفة مقدار ارتفاع درجة الحرارة من خلال معرفة مقدار تمدد الحديد، وهكذا.

من ناحية أخرى، هناك علاقات وروابط كثيرة لا يحكمها قانون ثابت ودقيق، مثل العلاقة بين طول الإنسان وقياس قدمه، أو العلاقة بين عمر الإنسان واحتمال إصابته ببعض الأمراض، أو العلاقة بين معدل درجات الطالب في مادة دراسية ومعدل درجاته في مادة دراسية أخرى، وهكذا.

تقوم الدراسات الإحصائية على محاولة إيجاد ما يشبه القانون في بعض أشكال الارتباط بين متغيرين يسمح لنا بالتنبؤ بالحالات غير الواقعة ضمن مجال الدراسة، مع معرفتنا بأن المعلومات التي نحصل عليها باستعمال هذا القانون التقريبي غير دقيقة تمامًا لكنها، مع ذلك، في غاية الأهمية، كما في الدراسات المالية والاقتصادية.

9.1 معامل الارتباط Correlation Coefficient

ما ستتعلّمه

- مخطط الانتشار وعلاقة الارتباط بين متغيرين
- تعريف معامل الارتباط
- أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل الارتباط

... ولماذا

في كثير من الأحيان، لا يمكن تبيّن الارتباط بين متغيرين إلا من خلال دراسة إحصائية لقواعد البيانات، الأمر الذي يسمح بتقدير حالات جديدة لاتخاذ القرار المناسب. كما لا يصح الاعتماد على الملاحظة فقط لمعرفة قوة الارتباط، لذلك نعرف معامل الارتباط لقياس قوة الارتباط بدقة.

معايير الدرس

11A.9.1

11A.9.2

11A.9.3

المصطلحات

- بيانات ذات متغيرين bivariate data
- مخطط انتشار scatter diagram
- ارتباط correlation
- ارتباط خطي linear correlation
- ارتباط موجب positive correlation
- ارتباط سالب negative correlation
- معامل الارتباط correlation coefficient

مخطط الانتشار وعلاقة الارتباط بين المتغيرين

يؤثر طول مدة التحضير لامتحان في درجة الطالب في ذلك الامتحان. كذلك نلاحظ، بشكل عام، أن قياس قدم الإنسان البالغ يرتبط بطوله. كذلك أيضًا يمكن أن نلاحظ أن التدخين يزيد من احتمال الإصابة بأمراض القلب.

تشير عبارات كهذه إلى العلاقة بين متغيرين يشتركان في نفس الموضوع:
طول مدة التحضير للامتحان، درجة الطالب في ذلك الامتحان.
قياس قدم شخص بالغ، طول ذلك الشخص.
كمية السجائر التي يدخنها مدخن، احتمال إصابة ذلك المدخن بأحد أمراض القلب.

لدراسة العلاقة بين أي متغيرين يشتركان في نفس الموضوع، نقيس كلا المتغيرين للحصول على بيانات ذات قائمتين. على سبيل المثال، نأخذ عيّنة من بضعة أشخاص و نقيس قياسات أقدامهم وأطوالهم، أو نأخذ عيّنة من الطلاب ونسجل المدة التي يقضيها كل منهم في التحضير للامتحان والدرجة التي حصل عليها في ذلك الامتحان، وهكذا.

في كل مرة نحصل على مجموعة من الأزواج المرتبة التي تُسمى **بيانات ذات متغيرين**.

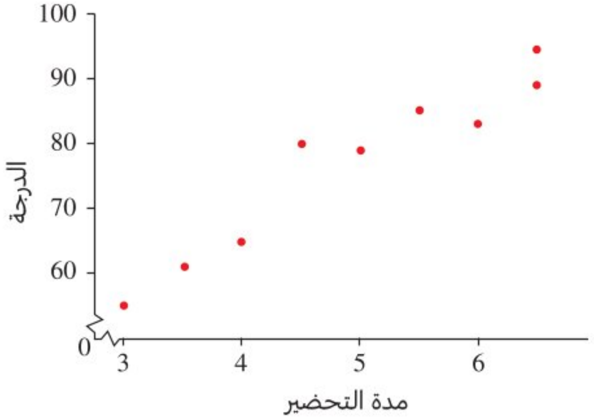
نستعمل لدراسة هذه المتغيرات تمثيلًا بيانيًا يمثّل محوره الأفقي قيم المتغير الأول، المتغير المستقل، ويمثّل محوره الرأسي قيم المتغير الثاني، المتغير التابع. يمثّل كل زوج مرتب بنقطة في هذا المستوى الإحداثي، ومجموع هذه النقاط يُسمى **مخطط الانتشار**.

في بعض الحالات يمكن لأي من المتغيرين أن يؤدي دور المتغير المستقل، فيكون الآخر هو المتغير التابع كما في مثال الطول وقياس القدم، ولكن في حالات أخرى يكون احتمال أن يؤدي أحد المتغيرين دور المتغير المستقل أكثر ترجيحًا، كما في مثال الامتحان، حيث طول مدة التحضير للامتحان هو المتغير المستقل ودرجة الطالب هي النتيجة أي المتغير التابع.

يبيّن الجدول أدناه المدة بالساعات التي أمضاها كل طالب في التحضير للامتحان والدرجة التي حصل عليها.

الطلاب	جابر	حمد	أحمد	طلال	محمد	راشد	جمال	حسن	بسام	جاسم
مدة التحضير	4	4.5	6	3.5	3	5	5.5	6.5	7	6.5
الدرجة	65	80	83	61	55	79	85	89	92	95

ننشىء مخطط انتشار بيانات الجدول:



نلاحظ أن درجة الطالب في الامتحان تزداد كلما ازداد عدد ساعات تحضيره للامتحان.
إذن هناك **ارتباط** بين مدة التحضير للامتحان ودرجة الطالب. وبما أنه كلما ازداد المتغير الأول يزداد المتغير الثاني، فالارتباط موجب.

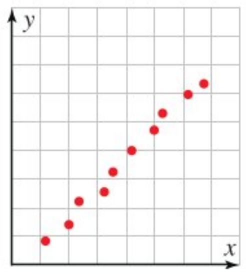
الارتباط

يكون المتغيران المعرّفان على موضوع واحد مترابطين إذا كانت كل قيمة للمتغير الأول تدفع المتغير الثاني إلى قيمة خاصة مناسبة. عندما يترابط المتغيران، تبدو النقاط في مخطط الانتشار كأنما تتوزع حول منحنى معين. يحدد قوة هذا الارتباط مدى قرب النقاط من هذا المنحنى.

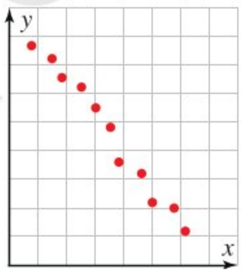
في **الارتباط الخطي**، تتوزع النقاط في مخطط الانتشار حول خط مستقيم. يكون الارتباط الخطي بين المتغيرين **ارتباطًا موجبًا** إذا كانت الزيادة في قيمة المتغير الأول تؤدي إلى زيادة في قيمة المتغير الثاني. كما يكون الارتباط بينهما **ارتباطًا سالبًا** إذا كان التزايد في قيمة المتغير الأول يؤدي إلى تناقص قيمة المتغير الثاني.

أنواع الارتباط الخطي

ارتباط موجب



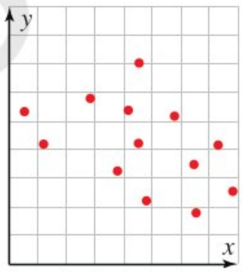
ارتباط سالب



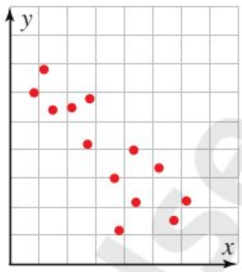
يمكن الاستدلال على مدى قوة الارتباط من كيفية توزّع البيانات في مخطط الانتشار.

قوة الارتباط الخطي

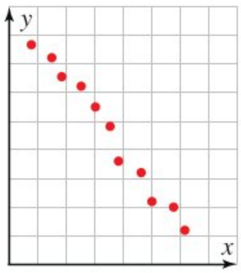
ارتباط ضعيف



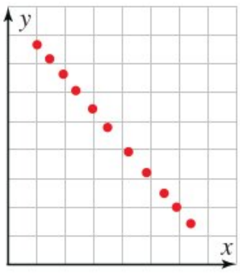
ارتباط متوسط



ارتباط قوي

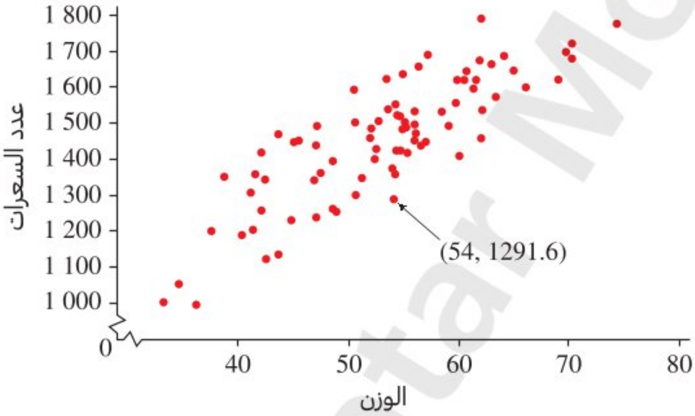


ارتباط تام

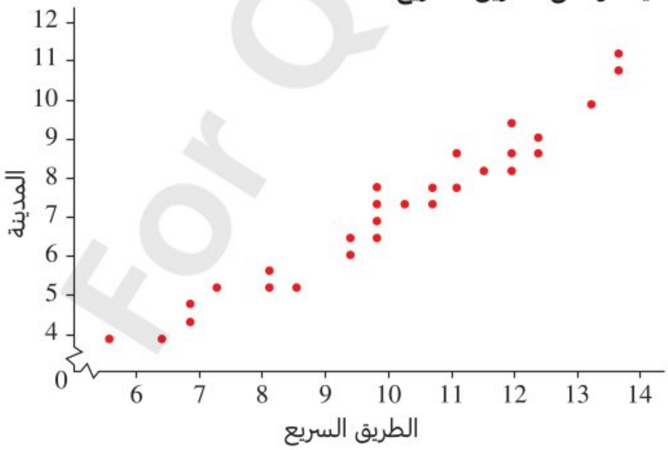


مثال 1 قوة الارتباط

يبيّن مخطط الانتشار الأول أوزان 80 شخصًا وعدد السعرات الحرارية التي يستهلكها كل منهم خلال 24 ساعة.



بينما يبيّن المخطط الثاني كمية الوقود التي استهلكتها 28 سيارة بوحدة km/L داخل المدينة أو على الطريق السريع.



(تابع)

A. أوجد نوع الارتباط في كل مخطط.

B. حدّد مخطط الانتشار الذي يشتمل على الارتباط الأقوى.

الحل

A. تتوزع النقاط في كلا المخططين حول خط مستقيم ميله موجب.
إذن، الارتباط موجب في كليهما.

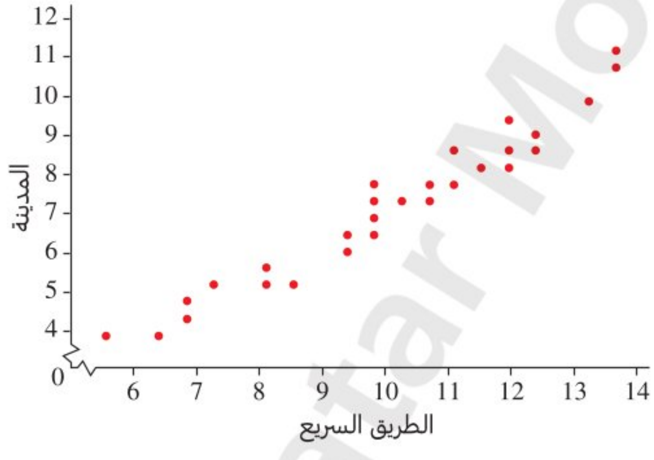
B. النقاط في المخطط الثاني أقرب إلى خط مستقيم، وبالتالي الارتباط فيه أقوى.

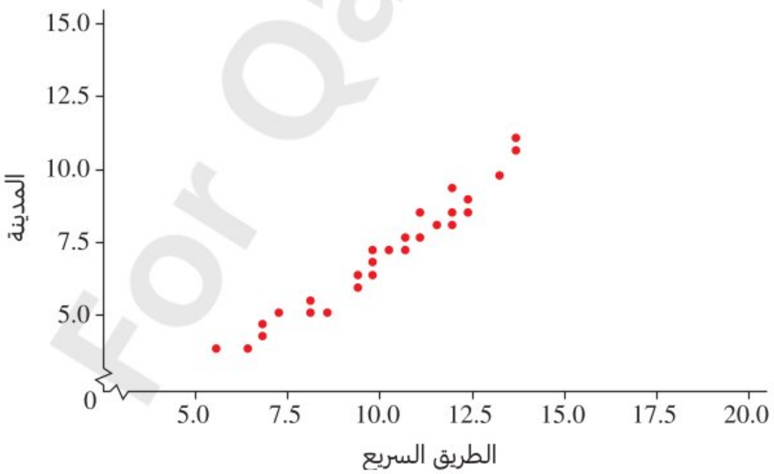
حاول أن تحل التمرين 3

تعريف معامل الارتباط

لقد أوضحنا أن الارتباط يكون خطيًا إذا كانت نقاط البيانات متجمعة حول خط مستقيم، وأن قوة هذا الارتباط تزداد كلما اقتربت النقاط أكثر من هذا الخط. غير أن تقديرنا لقوة الارتباط لا يزال يعتمد حتى الآن على الملاحظة والنظر فقط، الأمر الذي قد يجعل الأمور تلتبس علينا.

لننظر، مثلًا إلى مخططَي الانتشار أدناه الذين يبيّنان استهلاك الوقود لمجموعة من السيارات خلال القيادة داخل المدينة والقيادة على الطريق السريع:





تفيد الملاحظة أن الارتباط في المخطط العلوي أقل قوة من الارتباط في المخطط السفلي. رغم أن المخططَين في الواقع يعبّران عن نفس قاعدة البيانات مع تغير في طول الوحدات على المحورين.

لذا نحتاج إلى مقياس أكثر دقة لتحديد نوع الارتباط وقياس قوته بين متغيرين، وهذا المقياس العددي هو **معامل الارتباط** الخطي (ويُسمى أيضًا معامل ارتباط بيرسون) ويرمز له بالرمز r الذي نعرّفه كالتالي:

معامل الارتباط الخطي

معامل الارتباط لقاعدة بيانات تتألف من n زوج مرتب $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ هو:

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_y}\right)$$

حيث:

$\bar{x}$ هو الوسط الحسابي للمتغير x

$\bar{y}$ هو الوسط الحسابي للمتغير y

S_x هو الانحراف المعياري للمتغير x

S_y هو الانحراف المعياري للمتغير y

بإمكاننا أن نتبيّن أن معامل الارتباط يمكن أن يكتب في الصيغة التالية، وهي الصيغة العملية التي نستعملها عند احتساب معامل الارتباط.

الصيغة الثانية لمعامل الارتباط الخطي

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

من خصائص معامل الارتباط الخطي:

- معامل الارتباط هو مقياس قوة الترابط الخطي بين متغيرين كميَّين:
  - لا تستعمل الارتباط مع المتغيرات غير الكمية.
  - يكون لمعامل الارتباط معنى فقط عند وجود علاقة خطية. إذا كان هناك ترابط خطي، فإن معامل الارتباط يدل على مدى قوّته.

- يمكننا إثبات أن قيمة معامل الارتباط الخطي تحقّق $-1 \le r \le 1$
- إذا كان $r > 0$، يكون الارتباط الخطي موجبًا، وكلما اقترب r من 1، كان الارتباط الخطي الموجب أقوى.
- إذا كان $r < 0$، يكون الارتباط الخطي سالبًا، وكلما اقترب r من -1، كان الارتباط الخطي السالب أقوى.
- عندما $r = 1$ أو $r = -1$ يكون الارتباط الخطي تامًا.
- عندما تكون قيمة r قريبة من الصفر، عندها يوجد الارتباط الخطي ضعيف بين المتغيرين.

فترات قوة الارتباط الخطي

إذا كان $|r|$ القيمة المطلقة للارتباط الخطي، يمكن تحديد الفترات التي يكون فيها الارتباط الخطي قويًا، أو متوسطًا، أو ضعيفًا، على الشكل التالي:

- $|r| = 0$، لا يوجد ارتباط خطي
- $|r| \in]0, 0.19]$، ارتباط خطي ضعيف جدًا
- $|r| \in [0.2, 0.39]$، ارتباط خطي ضعيف
- $|r| \in [0.4, 0.59]$، ارتباط خطي متوسط
- $|r| \in [0.6, 0.79]$، ارتباط خطي قوي
- $|r| \in [0.8, 1[$، ارتباط خطي قوي جدًا
- $|r| = 1$، الارتباط تام

مثال 2 إيجاد معامل الارتباط الخطي

A. أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y وحدّد نوعه وقوته.

$\sum xy = 482$ $\sum y = 63$ $\sum x = 76$

$n = 9$ $\sum y^2 = 481$ $\sum x^2 = 705$

B. أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين في الجدول التالي وحدّد نوعه وقوته.

x	80	45	70	51	60
y	65	61	63	35	45

(تابع)

الحل

A. الصيغة الثانية

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

عوّض

$$r = \frac{9 \times 482 - 76 \times 63}{\sqrt{9 \times 705 - (76)^2}\sqrt{9 \times 481 - (63)^2}}$$

$$r \approx \frac{-450}{452.59} \approx -0.994$$

إذن $r \approx -0.994$، أي أن هناك ارتباط سالب قوي جدًّا بين المتغيرين x و y.

B. من المستحسن عند حساب معامل الارتباط الخطي أن نجد القيم المطلوبة ونضعها في الجدول كما هو مبين أدناه.

x	y	x^2	y^2	xy
80	65	6 400	4 225	5 200
45	61	2 025	3 721	2 745
70	63	4 900	3 969	4 410
51	35	2 601	1 225	1 785
60	45	3 600	2 025	2 700
$\sum x = 306$	$\sum y = 269$	$\sum x^2 = 19\ 526$	$\sum y^2 = 15\ 165$	$\sum xy = 16\ 840$

الصيغة الثانية

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

عوّض

$$r = \frac{5 \times 16\ 840 - 306 \times 269}{\sqrt{5 \times 19\ 526 - (306)^2}\sqrt{5 \times 15\ 165 - (269)^2}}$$

$$r \approx \frac{1\ 886}{63.198 \times 58.86} \approx 0.507$$

إذن $r \approx 0.507$، أي أن هناك ارتباط موجب متوسط بين المتغيرين x و y.

حاول أن تحل التمرينين 7 و 9

إرشاد

ارجع إلى الصيغة الثانية لمعامل الارتباط الخطي لتعرف القيم التي عليك إيجادها في الجدول.

كثيرًا ما يحتاج حساب معامل الارتباط الخطي وقتًا طويلًا، ولا سيما إذا كان عدد الأزواج المرتبة في قاعدة البيانات كبيرًا. لذا نستعين في حالات كهذه بالحاسبة، واستعمال الحاسبة سهلٌ يسير، كل ما ينبغي فعله هو إدخال القيم بدقة والاهتداء إلى المفاتيح المناسبة.

في المثال 3 سوف نبيّن كيفية إيجاد معامل الارتباط الخطي باستعمال الحاسبة fx-82 ES PLUS.

مثال 3 إيجاد معامل الارتباط الخطي باستعمال الحاسبة

يبيّن الجدول أدناه تغير طول معدن يُستعمل في صناعة بعض الأجهزة الإلكترونية بتغير درجة الحرارة.

الحرارة (°C)	40	45	50	55	60	65	70	75	80
الطول (mm)	20	20.12	20.20	20.21	20.25	20.25	20.34	20.47	20.61

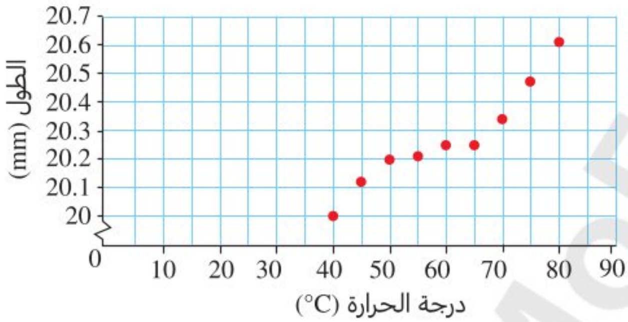
A. أنشىء مخطط الانتشار.

B. استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد معامل الارتباط الخطي.

C. استعمل معامل الارتباط الخطي لتحديد نوع الارتباط الخطي وقوته.

الحل

A.



B. أدخل البيانات في الحاسبة للحصول على معامل الارتباط الخطي.

اضغط المفاتيح:

لتحصل على الجدول التالي

املأ الجدول بالبيانات المعطاة

ثم اضغط المفاتيح:

إذن، $r \approx 0.955$.

C. الارتباط موجب وقيمة r قريبة من 1، إذن الارتباط قوي جدًا.

حاول أن تحل التمرين 12

إرشاد

عند استعمال الحاسبات من نوع ES 82، ES 85 في إيجاد معامل الارتباط الخطي يستبدل المفتاح

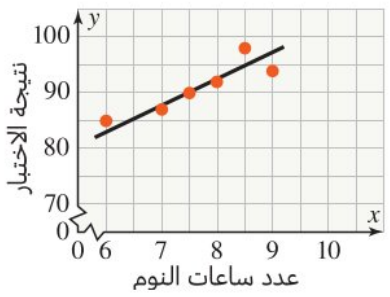
بالمفتاح

.

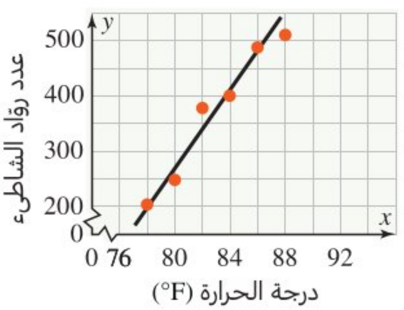
من المفيد أن نتذكر دائمًا أن معامل الارتباط الخطي يستعمل لتحديد نوع وقوة الارتباط فقط عندما يكون الارتباط خطيًا. عندما يبين معامل الارتباط الخطي أن الارتباط قوي، هذا لا يعني دائمًا أن هناك علاقة سببية بين المتغيرين. على سبيل المثال، قد يوجد ارتباط قوي بين كمية النفط الخام المستورد في البلد X، ومعدل المواليد في البلد Y. هذا لا يعني بالضرورة أن التزايد في استيراد النفط الخام يسبب تزايدًا في نسبة المواليد. إلا أنه، في بعض الحالات، توجد علاقة سببية بين المتغيرين. على سبيل المثال، قد يكون التزايد في مستوى الدخل في بلدٍ ما والتناقص في معدل البطالة في نفس البلد في علاقة ارتباطٍ سالبٍ قوي. إذن تكون هذه العلاقة سببية.

مثال 4 الارتباط والسببية

A. وجد أحد التلاميذ ارتباطًا موجبًا بين عدد ساعات النوم التي حصل عليها زملاؤه قبل اختبارٍ ما ونتائجهم في الاختبار نفسه. هل بإمكانه التنبؤ بحصوله على درجة جيدة في الاختبار في حال قرر الخلود إلى النوم مبكرًا؟



B. لاحظ عامل انقاذٍ أن نسب الوافدين إلى الشاطئ تزداد مع ارتفاع درجات الحرارة. هل بإمكانه الاستنتاج أن تغير معدلات الحرارة وحده يؤدي إلى تزايد عدد رواد الشاطئ؟



الحل

A. يقوم مفهوم السببية على العلاقة القائمة بين السبب والنتيجة، ما معناه أن كل تحولٍ يطرأ على المتغير الأول يُحدث بدوره تحولًا في المتغير الثاني.
لتحديد ما إذا كان ثمة علاقة سببية بين متغيرَين معيّنين، لا بد من إجراء تجربة تتحكم بسائر المتغيرات التي يمكن لها أن تؤثر على العلاقة بين المتغيرَين المستهدَفين. لا يمكن للتلميذ الجزم بأنه سيحصل على درجة جيدة في اختباره لمجرد خلوده إلى النوم مبكرًا، لأن نتيجته قد تخضع لمتغيرات أخرى كالوقت المستغرق في الدرس ومدى تمكنه من موضوع الاختبار.

B. بما أنه لم يقم بأي تجربة لدراسة متغيرات أخرى كتوقعات الأرصاد الجوية وعامل الوقت، لا يمكن لحارس الإنقاذ أن يعزو تزايد عدد رواد الشاطئ إلى ارتفاع درجات الحرارة وحدها.

حاول أن تحل التمرين 16

أثر التعديلات الخطية على معامل الارتباط

نقول إن قيم متغيّر ما عُدّلت خطيًّا عندما يتم ضرب المتغير بمعامل ثم إضافة ثابت.
فيما يلي أثر التعديلات الخطية على معامل الارتباط.

نشاط استكشافي 1

لاحظ البيانات في الجدول أدناه.

x	39	23	34	26	31
y	33	31	32	18	23

1. أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y.

2. إذا كان $x' = x - 10$ و $y' = y + 5$، املأ الجدول التالي ثم أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x' و y'.

x'					
y'					

ماذا تلاحظ؟

3. إذا كان $x' = 2x - 10$ و $y' = 3y - 20$، املأ الجدول التالي ثم أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x' و y'.

x'					
y'					

ماذا تلاحظ؟

4. إذا كان $x' = -3x + 20$ و $y' = 2y - 10$، املأ الجدول التالي ثم أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x' و y'.

x'					
y'					

ماذا تلاحظ؟

إن أداء النشاط السابق بالشكل الصحيح يؤدي إلى النتيجة التالية:

أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل الارتباط

إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y يساوي r، وعُدّلت قيم كل من x و y خطيًا، أي حسب العلاقة:

$$x' = ax + b$$

$$y' = cy + d$$

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و $c \neq 0$،
فإن معامل الارتباط بين x' و y' يكون:

1. r، إذا كانت إشارتا a و c متشابهتين.

2. $-r$، إذا كانت إشارتا a و c مختلفتين.

يمكننا أن نلاحظ مما سبق أن قيمة معامل الارتباط الخطي لا تتغير عند إزاحة أو تمدد أو تضيّق أي من المتغيرين.

مثال 5 إيجاد معامل الارتباط الخطي باستعمال الإزاحة

A. **إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y يساوي 0.45، وكان $x' = 3x - 2$ و $y' = y - 3$، أوجد معامل الارتباط الخطي بين x' و y'.**

B. **إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y يساوي -0.55، وكان $x' = 5x - 6$ و $y' = 1 - 2y$ ، فأوجد معامل الارتباط الخطي بين x' و y'.**

C. **في الجدول التالي:**

x	3	4	5	5	2
y	31	61	111	111	51

أوجد معامل الارتباط الخطي بين x و y' باستعمال الإزاحة $y' = \frac{(y-1)}{10}$.

الحل

A. بما أن معاملَي x و y لهما نفس الإشارة، فإن معامل الارتباط الخطي بين x' و y' يبقى كما هو بين x و y ويساوي 0.45

B. بما أن معاملَي x و y مختلفان في الإشارة، فإن معامل الارتباط الخطي بين x' و y' يساوي 0.55 أي بعكس إشارة معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y.

(تابع)

C. أدخل البيانات في الحاسبة للحصول على معامل الارتباط الخطي.

اضغط المفاتيح:

املأ الجدول بالبيانات المعطاة

ثم اضغط المفاتيح:

إذن، $r = 0.855$.

بما أن معامل y في الإزاحة $y' = \frac{(y-1)}{10}$ موجب، يبقى معامل الارتباط الخطي بين x و y' هو ذاته معامل الارتباط الخطي بين x و y ويساوي 0.855

حاول أن تحل التمرينين 18 و 22

مثال 6 تطبيق على معامل الارتباط

يبيّن الجدول التالي العمر (بالأشهر) والوزن (بالباوند) لعدد من الأطفال.

عمر الطفل ووزنه	
العمر (بالأشهر)	الوزن (بالباوند)
18	23
20	25
24	24
26	32
27	33
29	29
34	35
39	39
42	44

A. **أوجد معامل الارتباط الخطي بين عمر الطفل ووزنه.**

B. **أوجد معامل الارتباط الخطي بين عمر الطفل وعدد السعرات الحرارية التي يستهلكها خلال 24 ساعة، إذا كان العدد التقريبي للسعرات الحرارية يمكن حسابه باستعمال الدالة الخطية $y = 15w + 20$، حيث w هو الوزن، وحدّد قوته ونوعه.**

(تابع)

الحل

A. أدخل البيانات في الحاسبة للحصول على معامل الارتباط.

اضغط المفاتيح:

املأ الجدول بالبيانات المعطاة

ثم اضغط المفاتيح:

إذن، $r \approx 0.948$.

B. بما أن الدالة التي تمثّل عدد السعرات الحرارية $y = 15w + 20$ دالة خطية وهي تحويل خطي للوزن w، وبما أن معامل w موجب (15)، فإن معامل الارتباط الخطي $(r \approx 0.948)$ بين العمر والوزن يبقى نفسه بين العمر وعدد السعرات الحرارية. وبما أن معامل الارتباط بين العمر والوزن موجب قوي يكون الارتباط الخطي بين العمر والسعرات الحرارية موجبًا قويًا أيضًا.

إذن، هناك ارتباط موجب قوي بين العمر وعدد السعرات الحرارية.

حاول أن تحل التمرين 26

مراجعة سريعة 9.1

في التمارين 1-4، حدّد ما إذا كان المتغيران مترابطين أم لا.

1. درجة الحرارة (°C) وعدد المثلجات المباعة.

2. كمية الوقود وعدد الأميال المقطوعة.

3. عمر الولد ومبلغ مصروف الجيب المعطى له.

4. نتائج اختبازي اللغة العربية والرياضيات.

في التمارين 5-7، أوجد $\sum xy$ و $\sum y$ و $\sum x$ للمتغيرين x و y.

5.

x	1	2	7	2	3	1
y	1	1	4	2	4	3

6.

x	3	1	4	9	7	2
y	8	8	10	3	1	2

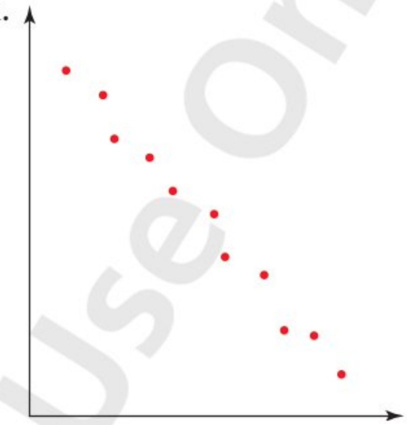
7.

x	1	9	2	7	5	3
y	6	2	6	1	3	4

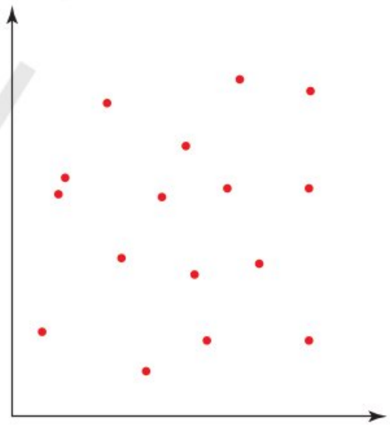
الدرس 9.1 التمارين

في التمرينين 1 و 2، حدّد ما إذا كان هناك ارتباط في مخطط الانتشار واذكر نوعه إن وجد.

1.



2.



في التمارين 3-5، أنشىء مخطط الانتشار وحدّد ما إذا كان هناك ارتباط بين المتغيرين، ثم حدّد نوعه وقوته.

3. يبيّن الجدول التالي بيانات قياس اليد في مقابل قياس القدم لتسعة طلاب.

قياس اليد (cm)	18	18.5	15	15.5	19	19	17	17	18
قياس القدم (cm)	20	19	16.5	16	20	21	17	16.5	18

4. يبيّن الجدول التالي بيانات المتغيرين x و y.

x	15	20	20	18	19	20	20	13	14	23
y	54	57	57	58	57	59	58	48	49	64

5. يبيّن الجدول التالي بيانات المتغيرين x و y.

x	100	130	120	150	140	170	160	190	180
y	77	87	96	107	110	130	132	144	153

6. تمثّل البيانات في الجدول أدناه نتائج تجربة أُجريت على 14 سيارة صغيرة، تربط بين كمية استهلاك الوقود وسرعة القيادة.

السرعة km/h	60	65	70	75	80	85	90
استهلاك وقود km/h	16.9	16.8	15.9	15.9	14.4	14.3	13.2

السرعة km/h	95	100	110	120	130	140	150
استهلاك وقود km/h	14.3	12.1	12.1	9.8	9.0	8.0	7.1

a. أنشىء مخطط الانتشار.

b. صِف العلاقة بين المتغيرين، وحدّد أيهما المتغير المستقل، وأيهما المتغير التابع، ثم برّر إجابتك.

c. هل العلاقة بين المتغيرين قوية؟ برّر إجابتك.

في التمارين 7-11، أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين x و y.

7. $\sum x = 70.3$ $\quad \sum y = 53$ $\quad \sum xy = 471.4$

$\sum x^2 = 701.53$ $\quad \sum y^2 = 474$ $\quad n = 9$

8. $\sum x = 271$ $\quad \sum y = 177$ $\quad \sum xy = 11\,043$

$\sum x^2 = 18\,256$ $\quad \sum y^2 = 11\,567$ $\quad n = 6$

9.

x	17	19	24	25	42	44
y	1	2	3	4	5	6

10.

x	85	70	57	47	45	41
y	50	41	30	31	29	22

11.

x	7	8	5	5	7	4
y	11.2	10.1	9	9	12	8

في التمارين 12-15، استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y.

12.

x	40	50	55	70	80
y	20.1	20.3	20.35	20.36	20.4

13.

x	6	8	10	12	14	16	18	20	22
y	4.3	8.8	3.4	10.6	14	8.9	9.6	13.3	16.2

14.

x	8.1	6.1	11.4	5	9	8.1	8.2
y	11.2	9.3	12.1	10	11	11.1	13

15.

x	2.1	2.7	3.1	3.7	4.5	4.8	5.4	5.6
y	3.6	3.9	4.2	3.8	4.7	5.2	6	6.4

16. في عدد من المدن، تبيّن أن ثمة ارتباطًا موجبًا بين عدد السيارات والنسبة السكانية. هل يمكن الاستنتاج أن ازدياد عدد السيارات في مدينةٍ ما يؤدي بالضرورة إلى تزايد عدد سكانها؟ برّر إجابتك.

17. يبيّن الجدول التالي درجات التقييم التي أعطاها شخصان لسبعة مطاعم مختلفة.

رمز الشركة	A	B	C	D	E	F	G
الشخص الأول	9	11	19	3	2	5	16
الشخص الثاني	6	15	13	10	5	2	20

a. أوجد معامل الارتباط وحدّد نوع الارتباط وقوته.

b. هل يمكننا استنتاج علاقة سببية بين المتغيرين؟

في التمرينين 18 و 19، إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y يساوي 0.89، أوجد معامل الارتباط الخطي بين x' و y'.

18. $x' = 2x - 6$ و $y' = 1 - 4y$

19. $x' = 3 + x$ و $y' = -5 + 2y$

20. في الجدول التالي، أوجد معامل الارتباط الخطي باستعمال الإزاحة $y' = y - 100$.

x	1	2	4	5	5
y	101	101	103	102	104

21. في الجدول التالي، أوجد معامل الارتباط الخطي باستعمال الإزاحتين $x' = x - 200$ و $y' = y - 50$.

x	202	201	199	198	197
y	51	52	50	51	49

22. في الجدول التالي

x	4	1	2	2	3
y	41	81	121	121	81

أوجد معامل الارتباط الخطي بين x و y' باستعمال الإزاحة $y' = \frac{y-1}{40}$.

في التمارين 23-25، أنشىء مخطط الانتشار وحدّد نوع الارتباط وقوته، ثم تحقق من صحة إجابتك بإيجاد معامل الارتباط الخطي.

23.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	5	2	5	2	8	4

24.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	9	10	8	6	7	4	3	1	2	5

25.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	1	2	3	5	6

26. فيما يلي جدول العلامات (من عشرة) التي أعطاها حكمان في مسابقة محلية لإعداد الكعك.

رمز الكعكة	A	B	C	D	E	F	G
الحكم الأول	6.3	7.3	8.1	9.4	4.5	5	7.6
الحكم الثاني	5.4	7.6	7.6	8.6	4.4	5.3	8.3

a. أوجد معامل الارتباط الخطي وحدّد نوع الارتباط وقوته.

b. أوجد معامل الارتباط الخطي بين علامات الحكم الأول وعلامات أعطاها أحد الحضور، إذا كانت علاماته يمكن حسابها باستعمال الدالة الخطية $A = 5g + 2$، حيث A هي العلامة التي أعطاها هذا الشخص من الحضور و g هي علامة الحكم الثاني.

27. يبيّن الجدول أدناه العلامات (من مئة) التي حصل عليها 9 طلاب في مادتَي التاريخ والجغرافيا.

تاريخ	68	74	81	59	74	64	81	89	79
جغرافيا	54	69	69	51	61	54	72	75	59

a. أنشىء مخطط الانتشار.

b. أوجد معامل الارتباط الخطي وحدّد نوع الارتباط وقوته باستعمال الآلة الحاسبة.

28. يبيّن الجدول أدناه العلاقة بين الدخل السنوي للفرد (بالدولار) والعدد المتوقع لعمر الفرد عند الولادة في عيّنة من 8 دول.

الدولة	A	B	C	D	E	F	G	H
الدخل السنوي للفرد	150	200	220	350	470	550	730	1 280
العمر المتوقع	41	45	50	46	47	47	55	64

a. أنشىء مخطط الانتشار.

b. أوجد معامل الارتباط الخطي وحدّد نوع الارتباط وقوته باستعمال الآلة الحاسبة.

29. يبيّن الجدول أدناه العلامات (من عشرين) التي حصل عليها 10 طلاب في مادتَي الرياضيات والفيزياء.

رياضيات	16	17	20	18	18	16	19	19	15	11
فيزياء	11	13	13	14	12	10	12	13	9	8

a. أنشىء مخطط الانتشار.

b. حدّد نوع الارتباط وقوته.

c. تحقق من إجاباتك عبر إيجاد معامل الارتباط باستعمال الحاسبة.

d. استعمل الإزاحتين $x' = x - 20$ و $y' = y - 10$ لإيجاد معامل الارتباط الخطي من دون استعمال الحاسبة.

أسئلة اختبار معيارية

30. **صواب أم خطأ** يقول غانم إن الارتباط يكون سالبًا إذا كان معامل الارتباط سالبًا. برّر إجابتك.

31. **صواب أم خطأ** في أي ارتباط بين متغيرين نستطيع اختيار أي منهما ليكون المتغير المستقل، فيكون الآخر هو المتغير التابع. برّر إجابتك.

32. **صواب أم خطأ** أوجدت ريم معامل الارتباط الخطي بين متغيرين، فوجدت أن قيمته $r = 1.01$. هل هي محقة؟ برّر إجابتك.

33. **اختيار من متعدد** في مخطط انتشار، خمس نقاط بينها ارتباط قوي. أربع منها هي $(3, 3.1)$، $(1.5, 1.6)$، $(1.9, 2.3)$، $(1.8, 2)$. النقطة الخامسة هي:

A. $(2, 10)$

B. $(2, 11)$

C. $(3, 15)$

D. $(2, 1.9)$

E. $(1.8, 20)$

34. **اختيار من متعدد** إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y هو r، فإن معامل الارتباط بين $2x$ و $2y$ هو:

A. $2r$

B. $\frac{r}{2}$

C. $r - 2$

D. r

E. $r + 2$

35. **اختيار من متعدد** إذا كان معامل الارتباط يساوي الصفر، $r = 0$، فهذا يعني:

A. لا يوجد ارتباط

B. يوجد ارتباط سالب

C. لا يوجد ارتباط خطي

D. يوجد ارتباط ضعيف

E. يوجد ارتباط قوي

استكشاف

36. يبيّن الجدول التالي العلاقة بين كمية هطول المطر (بالسنتمتر) وإنتاج محصول الأرز (بالأطنان).

كمية هطول المطر	10.1	18.6	8.1	11.3	6.9	14.1	14	13.8
محصول الأرز	27.1	36.2	21.6	25.2	16.9	36.1	27.2	25.6

a. أنشىء مخطط الانتشار وارسم تقديريًا خط التطابق الأفضل.

b. أوجد معامل الارتباط الخطي وحدّد نوع الارتباط وقوته باستعمال الآلة الحاسبة.

c. هل نستطيع أن نستنتج علاقة سببية بين المتغيرين؟

37. سجّل عبد الرحمن على مدى تسعة أشهر، عدد حوادث السير في بلدته وما إذا كان الطقس ماطرًا أم جافًا أثناء وقوع الحادث. يبيّن الجدول أدناه النتائج التي سجلها.

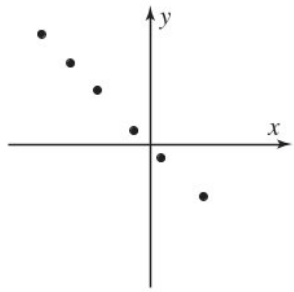
عدد الحوادث	2	3	6	2	6	3	1	6	5
عدد الأيام الجافة في الشهر	20	25	17	27	17	21	29	22	20

a. أنشىء مخطط انتشار لتوضح البيانات.

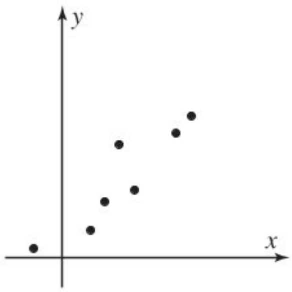
b. حدد نوع وقوة الارتباط.

c. هل تستطيع أن تستنتج علاقة سببية بين المتغيرين؟

38. انظر إلى مخططَي الانتشار في الشكل (1) والشكل (2) وأجب عن الأسئلة.



الشكل 1



الشكل 2

a. أوجد معامل الارتباط للشكل (1).

b. أثبت أن معامل الارتباط الخطي r في الشكل (2) يحقق $0 < r < 1$

توسيع الأفكار

39. أثبت أن معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و $y = ax + b$، حيث $a \geq 0$، هو 1

9.2 خط الانحدار Regression Line

ما ستتعلّمه

- معادلة خط الانحدار
- استعمال خط الانحدار

... ولماذا

يسمح خط الانحدار بتوقع الحالات التي لا تقع في جدول البيانات على نحو يقارب الحقيقة.

معيار الدرس

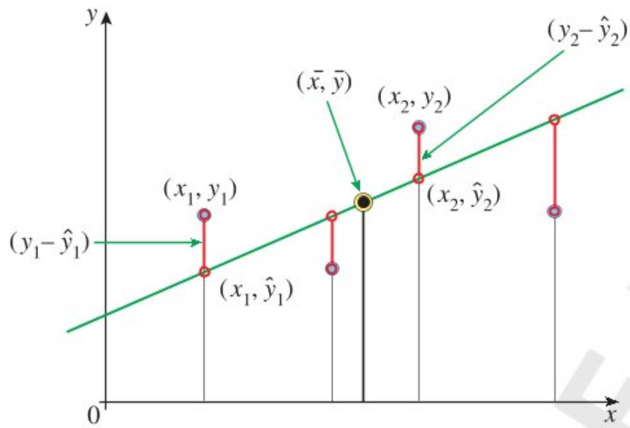
11A.9.4

المصطلحات

- خط الانحدار regression line
- خط المربعات الصغرى least squares line
- الاستكمال الداخلي interpolation
- الاستكمال الخارجي extrapolation

معادلة خط الانحدار

عندما نعرّف خط التطابق الأفضل بصيغة دقيقة من خلال تحديد الميل والمقطع فإنه يُسمى **خط الانحدار**. يبيّن الرسم البياني أدناه مخطط انتشار مجموعة بيانات، الخط الأخضر هو خط التطابق الأفضل.



نلاحظ بوضوح أن خط التطابق الأفضل لا يمر بكل نقاط البيانات بالضرورة، غير أنه رُسم بحيث تكون قيمة مجموع المسافات بين كل نقطة من المخطط والنقطة التي تقابلها على الخط أقل قيمة ممكنة.

بمعنى أدق، إذا أخذنا النقطة (x_1, y_1) مثلًا، فإن النقطة التي تقابلها على خط التطابق الأفضل هي $(x_1, \widehat{y_1})$ والفارق هو $y_1 - \widehat{y_1}$، كذلك $y_i - \widehat{y_i}$ هو الفارق لكل نقطة (x_i, y_i) في المخطط، حيث $\widehat{y}$ تُقرأ "*y hat*".

لكن هذه القيمة قد تكون موجبة أو سالبة. خط التطابق الأفضل هو الخط الذي يعطي القيمة الأدنى لمجموع القيم المطلقة لهذه الفوارق، أي أقل قيمة ممكنة للمجموع $\sum|y_i - \widehat{y_i}|$، وهو الخط الذي يعطي أدنى قيمة لمجموع مربعات الفوارق $\sum(y_i - \widehat{y_i})^2$، ولذلك يُسمى "**خط المربعات الصغرى**" أو خط الانحدار.

عند البحث عن معادلة الخط الذي يعطي القيمة الأدنى لمجموع مربعات الفوارق $\sum(y_i - \widehat{y_i})^2$، نصل إلى المعادلة:

$$y - \bar{y} = r\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x})$$

حيث:

$\bar{x}$ هو الوسط الحسابي للمتغير x

$\bar{y}$ هو الوسط الحسابي للمتغير y

S_x هو الانحراف المعياري للمتغير x

S_y هو الانحراف المعياري للمتغير y

r هو معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y.

تنبيه

ما يهم في خط التطابق الأفضل هو التقليل من مجموع المسافات التي تفصل النقاط عن الخط وليس القيم الجبرية للفوارق، فهو إذن يعطي القيمة الأدنى للمجموع $\sum|y_i - \widehat{y_i}|$ أو $\sum(y_i - \widehat{y_i})^2$.

وهذا يعني أن خط الانحدار يمر دائمًا بالنقطة $(\bar{x}, \bar{y})$، ويمكننا تبسيط الصيغة السابقة بدلالة الميل والمقطع من المحور y على الشكل:

$$y = ax + b$$

حيث الميل هو $a = r\,\frac{s_y}{s_x}$

الصيغة الأبسط $a = \dfrac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2} = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$

والمقطع هو $b = \bar{y} - a\bar{x}$

حيث $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ و $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$

مثال 1 إيجاد معادلة خط الانحدار

يبين الجدول أدناه عدد الأسماك الكبيرة (x) وعدد الأسماك الصغيرة (y) التي اصطادها صياد في سبعة أيام متتالية.

عدد الأسماك الكبيرة (x)	2	3	6	8	9	10	11
عدد الأسماك الصغيرة (y)	8	10	14	16	15	18	21

A. أوجد معادلة خط الانحدار.

B. ارسم خط الانحدار على مخطط الانتشار.

الحل

A.

x	y	x^2	xy
2	8	4	16
3	10	9	30
6	14	36	84
8	16	64	128
9	15	81	135
10	18	100	180
11	21	121	231
$\sum x = 49$	$\sum y = 102$	$\sum x^2 = 415$	$\sum xy = 804$

الصيغة الأبسط للميل $a = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$

عوّض $a = \dfrac{7 \times 804 - 49 \times 102}{7 \times 415 - 49^2}$

$a = 1.25$

(تابع)

صيغة المقطع $b = \bar{y} - a\bar{x}$

احسب الوسط الحسابي لكل من x, y $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{49}{7} = 7$

$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{102}{7} = 14.571$

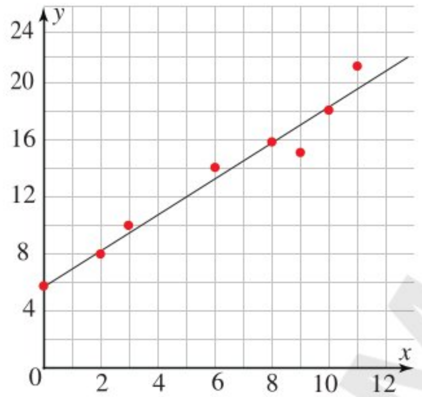
عوّض $b = 14.571 - 1.25 \times 7 = 5.821$

عوّض في معادلة خط الانحدار $y = ax + b$

$y = 1.25x + 5.821$

إذن، معادلة خط الانحدار هي $y = 1.25x + 5.821$.

B. مثّل بيانات المتغيرين على المستوى الإحداثي، ثم ارسم المستقيم الذي معادلته $y = 1.25x + 5.821$ المار بالنقطتين $(0, 5.821)$ و $(8, 15.821)$.



حاول أن تحل التمرين 1

مثال 2 القيمة الأدنى لمجموع القيم المتبقية

يبيّن الجدول أدناه العلاقة بين المتغيرين x و y.

x	11	12	13	14	15	16	17
y	21	43	31	34	29	55	33

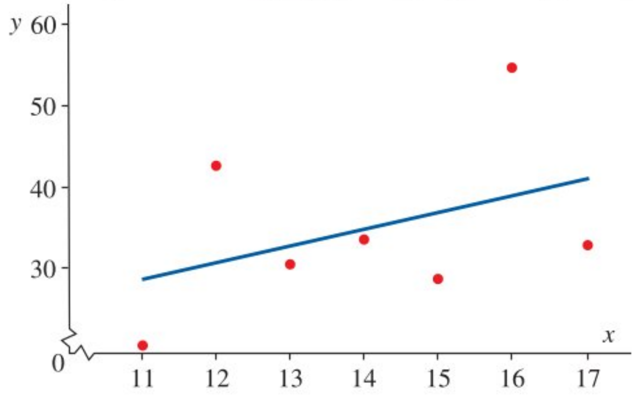
A. **أنشىء مخطط الانتشار وارسم خط الانحدار الذي معادلته $y = 2.071x + 6.14$.**

B. **حدّد الفارق بين كل نقطة في مخطط الانتشار والنقطة التي تقابلها على خط الانحدار ثم أوجد القيمة الأدنى لمجموع مربعات هذه الفوارق.**

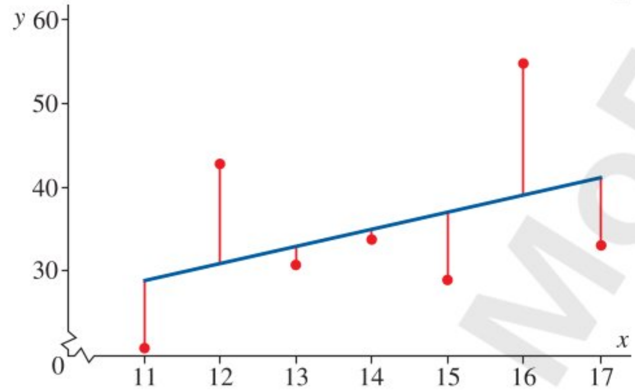
(تابع)

الحل

A. ارسم مخطط الانتشار، ثم ارسم خط الانحدار، عوّض في المعادلة $y = 2.071x + 6.14$ قيمتين للمتغير x فتحصل على نقطتين يمر بهما خط الانحدار.



B. نرسم في مخطط الانتشار من الجزء A، الفوارق المطلوبة على شكل خطوط حمراء.



نكوّن الجدول التالي الذي يبيّن القيمة المتوقعة على خط الانحدار بالإضافة إلى الفارق ومربع الفارق.

لإيجاد الفوارق، نطرح القيمة y الواقعة على خط الانحدار للمتغير x، من القيمة الحقيقية y للمتغير x.

x	y	القيمة المتوقعة على خط الانحدار	الفارق	مربع الفارق
11	21	28.92857	−7.92857	62.8622449
12	43	31	12	144
13	31	33.07143	−2.07143	4.290816327
14	34	35.14286	−1.14286	1.306122449
15	29	37.21429	−8.21429	67.4744898
16	55	39.28571	15.71429	246.9387755
17	33	41.35714	−8.35714	69.84183673

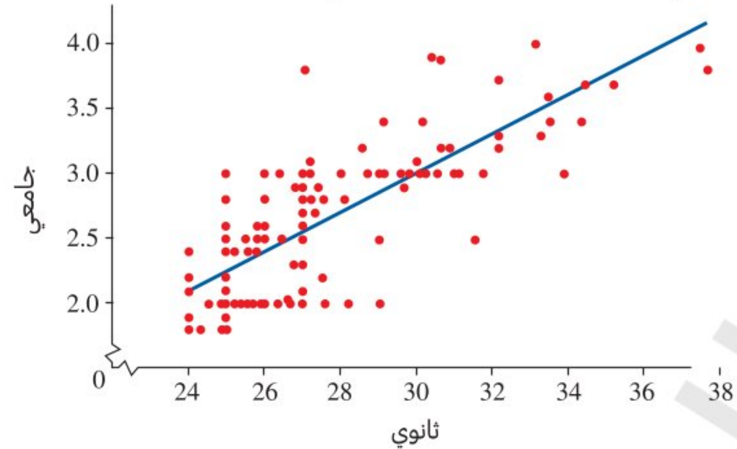
القيمة الأدنى لمجموع مربعات الفوارق هي مجموع الأعداد في عمود مربع الفارق وتساوي 596.71

حاول أن تحل التمرين 5

يمكنك محاولة إيجاد خط آخر، وستلاحظ أن هذه هي القيمة الأدنى لمجموع مربعات الفوارق.

استعمال خط الانحدار

يبيّن مخطط الانتشار التالي، المعدلات في المرحلة الثانوية (x) والجامعية (y) لمجموعة من الطلاب. باستعمال الحاسبة fx-82 ES يمكننا احتساب ميل ومقطع المحور y، فنجد أن معادلة خط الانحدار هي $y = 0.151x - 1.51$ وتمثيله البياني هو:



هذا يعني أن زيادة كل درجة في المعدل الثانوي تقابلها زيادة في المعدل الجامعي بمقدار 0.15 درجة تقريبًا. كذلك يمكننا توقع المعدل الجامعي لطالب كان معدله الثانوي 30 على سبيل المثال: $3.02 = 1.51 - (30)0.151$ = المعدل الجامعي.

خصائص خط الانحدار

- يمكن استعمال خط الانحدار لتوقّع قيم متغيّر استجابة y بحسب قيم المتغير التفسيري x.
- خط الانحدار يمر بالنقطة $(\bar{x}, \bar{y})$.
- عندما نستعمل معادلة خط الانحدار لتوقّع قيمة y لقيمة x محدّدة نكون قد أوجدنا متوسط قيم y عند قيمة x.

مثال 3 إيجاد معادلة خط الانحدار باستعمال الحاسبة

يبين الجدول أدناه العلاقة بين طول وعرض ورقة شجر.

الطول (mm)	103	119	144	148	87	124	151	145	121	127
العرض (mm)	35	39	43	55	34	38	52	42	31	43

أوجد معادلة خط الانحدار لبيانات الجدول في الصيغة $y = ax + b$ باستعمال الآلة الحاسبة.

(تابع)

الحل

في الحاسبة fx-82 ES PLUS اضغط المفاتيح:

املأ الجدول بالبيانات المعطاة:

لإيجاد المقطع y، اضغط المفاتيح:

نحصل على $b = \text{A} \approx 4.922$

لإيجاد الميل اضغط المفاتيح:

نحصل على $a = \text{B} \approx 0.286$

انتبه على أن $\text{A} = b$

$\text{B} = a$

إذن، معادلة الانحدار هي:

$$y = 0.286x + 4.922$$

حاول أن تحل التمرين 10

مثال 4 استعمال خط الانحدار في توقع النتائج

يبيّن الجدول أدناه الزيادة في إنتاج 8 حقول ذرة متساوية المساحة، بالأطنان، تمّت سقايتها بكميات مختلفة من الماء، بالسنتمرات.

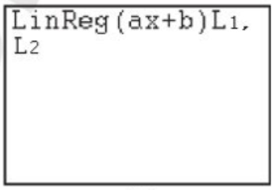
كمية الماء (x)	40	55	70	80	95	120	125	135
الإنتاج (y)	4.4	5.88	6.1	6.3	6.05	7.3	7.74	7.8

A. أوجد معادلة خط الانحدار لبيانات الجدول في الصيغة $y = ax + b$ باستعمال الآلة الحاسبة، ثم ارسم خط الانحدار.

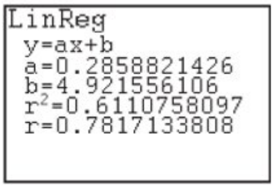
B. فسّر الميل والمقطع في معادلة خط الانحدار.

C. أوجد محصول الذرة لحقل سُقي بمقدار 75 cm من الماء ومحصول حقل سُقي بمقدار 195 cm من الماء.

(a)

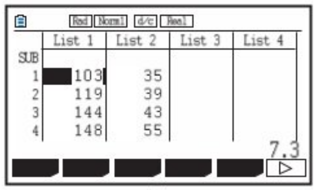


(b)

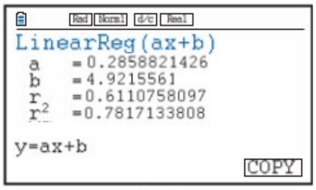


(c)

الشكل 9.2.1 خطوات إيجاد معادلة خط الانحدار باستعمال الحاسبة TI 84.



(a)



(b)

الشكل 9.2.2 خطوات إيجاد معادلة خط الانحدار باستعمال الحاسبة fx - CG20.

(تابع)

الحل

A. أدخل البيانات في الحاسبة للحصول على معامل الارتباط.

في الحاسبة fx-82 ES PLUS اضغط المفاتيح:

املأ الجدول بالبيانات المعطاة:

لإيجاد المقطع y، اضغط المفاتيح:

نحصل على $b = \mathrm{A} \approx 3.65625$

لإيجاد الميل اضغط المفاتيح:

نحصل على $a = \mathrm{B} \approx 0.031$

إذن، معادلة الانحدار هي: $y = 0.031x + 3.65625$

B. الميل هو 0.031، مما يعني أن زيادة كل وحدة في المحور x، أي كل 1 cm من المياه مضافة إلى الكمية المعتادة، تقابلها زيادة في محصول الذرة تساوي 0.031 طن.

المقطع y هو 3.65625، مما يعني إنه إذا لم تتم إضافة أي مياه إلى الكمية المعتادة فإن الناتج سيكون 3.65625 طن من الذرة.

C. عوّض $x = 75$ cm في معادلة خط الانحدار

$$y = 0.031(75) + 3.65625$$

$$y = 5.98125$$

إذن، محصول الذرة لحقل سُقي بمقدار 75 cm من الماء هو 5.98 طن تقريبًا.

عوّض $x = 195$ cm في معادلة خط الانحدار

$$y = 0.031(195) + 3.65625$$

$$y = 9.70125$$

إذن، محصول الذرة لحقل سُقي بمقدار 195 cm من الماء هو 9.7 طن تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 13

في الجزء C من المثال 4، تقع القيمة $x = 75$ ضمن مجال القيم المعلومة، فتُسمى عملية تقدير قيمة y **الاستكمال الداخلي**.

بينما لا تقع القيمة 195 ضمن مجال القيم المعلومة، فتُسمى بهذه الحالة عملية تقدير قيمة y **الاستكمال الخارجي**.

يمكن اعتبار التقدير في الاستكمال الداخلي موثوقًا أكثر منه في الاستكمال الخارجي، حيث أن الاتجاه العام لمجموعة البيانات قد لا يستمر.

مراجعة سريعة 9.2

في التمارين 1-3، أوجد الوسط الحسابي للمتغير x.

1.

x	2	4	5	7	8

2.

x	2	3	3	5	6

3.

x	3	4	7	8	10

في التمارين 4-6، بيّن ما إذا كانت كل نقطة من النقاط المعطاة تقع على المستقيم.

4. $y = x - 1$, A(1, 0), B(1, 1), C(2, 3)

5. $y = -2x - 3$, A(1, −4), B(0, −3), C(−2, 1)

6. $y = x + 2$, A(1, 1), B(1, −3), C(1, 3)

الدرس 9.2 التمارين

في التمارين 1-4، أوجد معادلة خط الانحدار، وارسم خط الانحدار على مخطط الانتشار.

1.

x	1	2	2	3	5
y	4	5	6	5	6

2.

x	3	4	4	5	6	8
y	9	9	8	6	8	7

3.

x	2	4	5	5	6
y	1	2	2	3	5

4.

x	2.1	2.4	2.6	2.2	2
y	1	1.5	1.7	1.8	2

5. لاحظ البيانات في الجدول أدناه.

x	20	23	24	27	27	36	43	57
y	11.5	11	10.8	11.2	11.7	11.3	12	12.8

a. ارسم مخطط الانتشار وخط الانحدار الذي معادلته $y = 0.045x + 10.03$.

b. حدّد الفارق بين كل نقطة في مخطط الانتشار والنقطة التي تقابلها على خط الانحدار وأوجد القيمة الأدنى لمجموع مربعات هذه الفوارق.

في التمارين 6-8،

a. أوجد معادلة خط الانحدار باستعمال الحاسبة.

b. حدّد الفارق بين كل نقطة في مخطط الانتشار والنقطة التي تقابلها على خط الانحدار وأوجد القيمة الأدنى لمجموع مربعات هذه الفوارق.

6.

x	4	0	1	2	9	3
y	2	2	1	1	0	3

7.

x	38	31	32	35	35	44	51	65
y	22	21	21	22	23	21.5	24	26

8.

x	16	17	16	14	11	21	18	28
y	23	30	22	27	29	16	18	14

9. أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$، إذا كان:

$$\sum x = 37.47,\ \sum y = 19.1,\ \sum xy = 107.644$$
$$\sum x^2 = 210.51,\ \sum y^2 = 61.18,\ n = 7$$

استعمل المعادلة لإيجاد قيمة y عندما $x = 3$.

10. استعمل الحاسبة لإيجاد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$ للبيانات التالية:

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y	10	9.4	9.6	12.4	9.2	8	7	10	8

11. استعمل الحاسبة لإيجاد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$ للبيانات التالية:

x	4	8	11.2	7.6	5.4	11.2	11.8	16.4
y	9.6	15.2	12.4	14.8	12.4	19.2	22.6	28.6

12. يبيّن الجدول أدناه عدد مقاعد 6 ملاعب كرة سلّة، و عدد البطاقات المباعة في يوم محدّد.

4 000	10 000	20 000	8 000	6 000	18 000	عدد المقاعد
2 400	5 200	15 400	5 200	3 000	10 800	عدد البطاقات المباعة

a. أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$ باستعمال الآلة الحاسبة.

b. أوجد، في هذا اليوم، عدد البطاقات المباعة في ملعب عدد مقاعده 16 000

13. لاختبار فائدة المساعدة الدراسية عن بعد (عبر الانترنت) في التحضير للاختبارات، أُعطي 6 طلاب اختبارًا قبل الخضوع لتجربة المساعدة الدراسية عن بعد واختبارًا بعد الخضوع للتجربة. كانت الاختبارات متشابهة، وتم تسجيل نتائج التجربة. كان الغرض من التجربة مراقبة تطور درجات الطلاب بعد المشاركة في التجربة.

يبيّن الجدول التالي نتائج التجربة.

الطالب	قبل	بعد
1	98	122
2	24	46
3	6	16
4	8	28
5	56	84
6	54	68

a. أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$.

b. أوجد الدرجة المتوقعة لطالب خضع للتجربة بعد أن كانت درجته 60

14. تنتج شركة كبيرة للإلكترونيات شاشات LCD لاستعمالها للحواسيب. يبيّن الجدول أدناه التكلفة الإنتاجية الشهرية العامة على مدى سنة من الإنتاج.

عدد الوحدات المنتجة	التكلفة
16	1 875
31	2 586
57	3 716
76	4 712
13	1 690
25	2 191
49	3 319
71	4 362
20	2 005
38	2 775
63	4 116
81	4 860

(عدد الوحدات المنتجة هي بالآلاف، والتكلفة هي بالألف يورو)

a. أنشىء مخطط الانتشار للبيانات.

b. أوجد معادلة خط الانحدار وارسمه في المخطط.

c. فسّر الميل والمقطع. ماذا يمكنك القول عن قوة الارتباط؟

15. يبيّن الجدول أدناه درجات مادتَي الرياضيات والفيزياء لاثني عشر طالبًا.

الرياضيات	7	6	5	5	6	3	7	7	5	4	5	7
الفيزياء	6	6	6	4	7	4	6	5	6	4	6	5

a. أوجد معامل الارتباط. ماذا يمكن أن تستنتج؟

b. أوجد معادلة خط الانحدار التي تمكّننا من توقع درجة الرياضيات من خلال درجة الفيزياء مستخدمًا الآلة الحاسبة.

c. أوجد الدرجة المتوقعة في الرياضيات لطالب درجته في الفيزياء 8

16. يدرس مزارع العلاقة بين كثافة الحبوب المبذورة في مساحة محددة ونوعية المنتوجات. يستطيع المزارع زيادة كمية الإنتاج باللجوء إلى بعض الطرق الحديثة لكنه يخشى أن يؤدي ذلك إلى انخفاض النسبة المئوية للمنتوجات العالية الجودة.
جمع المزارع البيانات في الجدول التالي:

130	140	150	160	170	البذور لكل فدان (x) في وحدات مناسبة
34.3	31.9	28.4	24.3	24	النسبة المئوية للمنتوجات العالية الجودة

a. ارسم مخططًا يمثّل البيانات. هل تناسب النموذج الخطي مع العلاقة بين المتغيرين x و y؟ برّر إجابتك.

b. أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$.

17. سجّل مختبر كيميائي نتائج 8 تجارب أجراها لزيادة الإنتاج في حقول متشابهة بتغيير درجة الحرارة. يبيّن الجدول أدناه نتائج تلك التجارب.

درجة الحرارة (x)	17	18	19	20	21	22	23	24
الإنتاج بالأطنان (y)	142	146	159	164	172	186	194	206

a. أنشىء مخطط الانتشار للبيانات.

b. أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$، وارسمه في المخطط مستخدمًا الآلة الحاسبة.

c. أوجد قيمة تقديرية لنتيجة تجربة في درجة حرارة 200

18. في تجربة عن الذاكرة، تم إعطاء 5 أشخاص (بشكل عشوائي) فترات زمنية متفاوتة لحفظ نفس القائمة من 20 كلمة، ثم طُلب منهم ذكر كل الكلمات التي يتذكرونها من القائمة. يبيّن الجدول أدناه معدل الكلمات التي تذكرها الأشخاص الخاضعون للاختبار y، والزمن المعطى، t، بالثواني.

t	10	20	30	40	50
y	6.1	9.2	11.3	12.3	12

a. أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = at + b$.

b. استعمل المعادلة لحساب قيمة y عندما $t = 10$. ماذا تلاحظ؟

c. استعمل المعادلة لحساب قيمة y عندما $t = 80$. ماذا تلاحظ؟

d. ناقش مدى تناسب خط الانحدار مع هذا النموذج وما إذا كانت هناك طريقة أفضل لنمذجة العلاقة بين y و t.

أسئلة اختبار معيارية

19. **صواب أم خطأ** يقول سليم إن الميل m في معادلة خط الانحدار يحقق $-1 \le m \le 1$، برّر إجابتك.

20. **صواب أم خطأ** نستطيع من خلال معادلة خط الانحدار تحديد ما إذا كان الارتباط قويًا أم لا. برّر إجابتك.

21. **اختيار من متعدد** إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y هو r، فإن الميل a لخط الانحدار يساوي:

A. r

B. $\frac{S_y}{S_x} r$

C. $\frac{S_x}{S_y} r$

D. $\frac{S_x}{S_y^2} r$

E. $\frac{S_y}{S_x^2} r$

22. **اختيار من متعدد** إذا كان المقطع b في معادلة خط الانحدار يساوي الصفر، فإن الميل a يساوي:

A. $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

B. $\frac{\bar{x}^2}{\bar{y}}$

C. $\frac{\overline{x^2}}{\bar{y}}$

D. $\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2}$

E. $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$

استكشاف

23. توظف شركة تجارية، إلى جانب موظفيها الدائمين، موظفين مؤقتين للعمل أيام السبت. أجرى مدير الشركة تجربة لمراقبة العلاقة بين عدد الموظفين المؤقتين وقيمة الهدر أيام السبت، على مدى 9 أيام سبت متتالية.

عدد الموظفين المؤقتين (x)	5	6	8	9	11	12	14	16	17
قيمة الهدر (y)	626	640	638	652	666	684	642	722	710

a. ارسم مخطط الانتشار للبيانات.

b. أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$، وارسمه في المخطط.

c. فسّر معنى قيمة كل من الميل والمقطع.

d. في أحد أيام السبت، قُطعت إحدى الطرق الرئيسية المؤدية إلى الشركة. أي يوم سبت كان في رأيك؟ برّر إجابتك.

.24 يبيّن الجدول أدناه نتائج تجربة تمت فيها زيادة كميات متفاوتة من المياه، بالسنتمتر، على الكمية المعتادة من المياه لري 7 قطع أرض متساوية في حقل زراعي، وسُجّل محصول كل قطعة أرض من التبن.

كمية الماء (x)	45	67.5	90	112.5	135	157.5	180
محصول التبن (y)	7.3	7.8	8.64	9.9	11	11.9	11.7

.a أوجد معادلة خط الانحدار لبيانات الجدول في الصيغة $y = ax + b$، ثم ارسم خط الانحدار

.b فسّر الميل والمقطع في معادلة خط الانحدار.

.c أوجد كمية ناتج التبن المتوقعة للقيم $x = 28$ و $x = 150$. ماذا يمكنك أن تقول عن مصداقية نتائج التجربة؟

توسيع الأفكار

.25 راقبت شركة عدد أيام رحلات العمل (x) التي يقوم بها مديرو الشركة وكشوفات حساب تكلفة الرحلة. يبيّن الجدول أدناه عينة عشوائية من هذه الرحلات.

عدد الأيام (x)	9	2	7	16	4	8	13	15	20
تكلفة الرحلة (y)	464	156	340	636	244	376	572	712	900

.a أنشىء مخطط الانتشار للبيانات. برّر أهمية إيجاد معادلة خط الانحدار باستعمال هذه النقاط.

.b أوجد معادلة خط الانحدار في الصيغة $y = ax + b$، وارسمه في المخطط.

.c فسّر الميل والمقطع في معادلة خط الانحدار.

.d أوجد التكلفة المتوقعة لرحلة دامت 11 يومًا.

.e حدّد، مبررًا السبب، ما إذا كنت تستطيع استعمال الخط لمعرفة التكلفة المتوقعة لرحلة مدتها شهران.

.26 **الخط الوسيط-الوسيط** اقرأ عن الخط الوسيط الوسيط (Median-Median Line) في الإنترنت، في المنشور المرفق بالحاسبة، أو من خلال المكتبة. ثم استعمل البيانات التالية لإكمال المسألة.

$$\{(2,8), (3,6), (5,9), (6,8), (8,11), (10,13), (12,14), (15,4)\}$$

.a ارسم مخطط الانتشار للبيانات.

.b أوجد معادلة خط الانحدار وارسمه.

.c أوجد معادلة الخط الوسيط ومثّله بيانيًا.

.d **الكتابة للتعلم** بالنسبة لهذه البيانات، أي الخطّين يبدو أنه خط التطابق الأفضل؟ لماذا؟

الوحدة 9 مراجعة الوحدة

في التمرينين 1 و 2، أنشىء مخطط الانتشار وحدّد نوع الارتباط الخطي وقوته، ثم تحقق من صحة إجابتك بإيجاد معامل الارتباط الخطي.

1.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	6	3	4	1	7	3

2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7	8	6	4	7	6	5	3	4	7

3. أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y.

$\sum x = 62$ $\quad \sum y = 64$ $\quad \sum xy = 550$

$\sum x^2 = 603$ $\quad \sum y^2 = 541$ $\quad n = 9$

في التمارين 4-7، أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y.

4.

x	3	5	6	8	9
y	1	1	4	2	4

5.

x	2	3	6	7	9
y	3	5	6	8	7

6.

x	87	72	59	49	47	43
y	51	42	31	32	30	23

7.

x	7.1	5.1	10.4	6	8	7.1	7.2
y	13.2	11.3	14.1	12	13	13.1	15

8. في عدد من الشركات، تبيّن أن ثمة ارتباطًا خطيًا موجبًا بين عدد الموظفين والإيرادات السنوية. هل يمكن الاستنتاج أن ازدياد عدد الموظفين في شركة ما يؤدي بالضرورة إلى ازدياد إيراداتها السنوية؟

9. تحرص إدارة الفنادق على تقدير العلاقة بين استهلاك الكهرباء وعدد النزلاء. يبيّن الجدول أدناه بيانات أحد الفنادق.

عدد النزلاء	الاستهلاك
232	237
311	278
321	270
334	303
352	298
375	328
412	387
447	390
456	376
472	402
480	431
495	430
512	432

a. أنشىء مخطط الانتشار.

b. أوجد معامل الارتباط الخطي باستعمال الحاسبة.

c. هل العلاقة بين المتغيرين قوية؟ برّر إجابتك.

10. إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y يساوي 0.38، فأوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x' و y' حيث $x' = 2x$ و $y' = 2y$.

في التمرينين 11 و 12 إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y يساوي 0.73، أوجد معامل الارتباط الخطي بين x' و y'.

11. $x' = 3x - 5$ و $y' = 1 - 3y$

12. $x' = 4 + x$ و $y' = -6 + 4y$

13. في الجدول التالي، أوجد معامل الارتباط الخطي باستعمال الإزاحتين $x' = x - 5$ و $y' = y - 10$.

x	2	3	5	6	6
y	20	20	22	21	23

14. يبيّن الجدول أدناه عدد المقاعد وعدد الحضور في يوم أحد في عشر قاعات محاضرات.

عدد المقاعد	170	144	56	130	40	110	90	216	30	64
عدد الحضور	124	99	31	96	24	76	40	121	22	45

a. أنشىء مخطط الانتشار.

b. حدّد نوع وقوة الارتباط في مخطط الانتشار.

c. ارسم خط الانحدار، وأوجد معادلته باستعمال الحاسبة.

15. **a.** استعمل خط الانحدار في التمرين السابق لتقدير عدد الحضور ذلك اليوم في قاعة تحتوي على 20 مقعدًا.

b. استعمل خط الانحدار لتقدير عدد الحضور في قاعة تحتوي على 120 مقعدًا.

c. أي التقديرين أدق؟ برّر إجابتك.

في التمارين 16-18، اعتبر البيانات في الجدول، ثم:

a. أوجد معادلة خط الانحدار باستعمال الحاسبة.

b. حدّد الفارق بين كل نقطة في مخطط الانتشار والنقطة التي تقابلها على خط الانحدار وأوجد القيمة الأدنى لمجموع مربعات هذه الفوارق.

16.

x	57	91	41	51	85	83	79	81	48
y	59	84	41	42	64	90	66	77	40

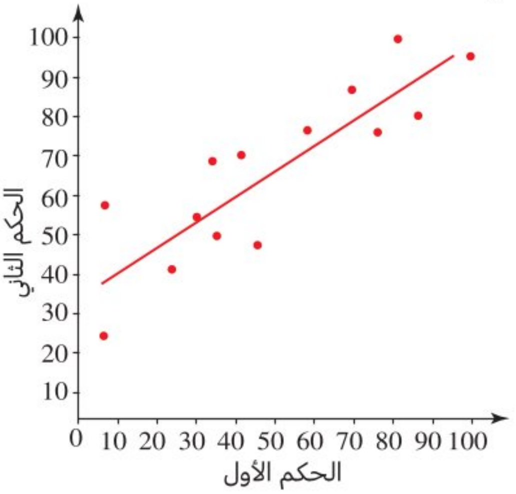
17.

x	65	92	111	157	203	230	293	321
y	60	100	120	160	195	230	290	333

18.

x	191	193	185	183	172	183	175	181
y	55	64	66	64	71	69	75	77

19. يبيّن مخطط الانتشار النتائج المئوية المعطاة لأربع عشرة متنافس في مسابقة للشعر، وذلك حسب رأي اثنين من الحكام.



a. أوجد معادلة خط الانحدار في صيغة $y = ax + b$.

b. ما معنى القيمتين a و b في هذا الموقف؟

c. استعمل المعادلة لتقدير النتيجة التي سيعطيها الحكم الثاني إذا أعطى الحكم الأول نتيجة 65

الوحدة 9 تقويم

1. أنشئ مخطط الانتشار للمتغيرين x و y وحدّد نوع الارتباط وقوته.

x	8	7	5	4	5	4
y	2	10	3	9	4	5

2. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين x و y.

$\sum x = 162.2$ ، $\sum y = 177.4$

$\sum x^2 = 19\,252.1$ ، $\sum y^2 = 12\,011.1$

$\sum xy = 11\,100.22$ ، $n = 6$

3. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين x و y دون استعمال الحاسبة.

x	3	11	4	9	7	5
y	5	1	5	1	2	3

4. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين x و y.

x	9	10	7	7	9	6
y	10.2	9.1	8	8	11	7

5. أنشئ مخطط الانتشار وحدّد نوع الارتباط وقوته، ثم تحقق من صحة إجابتك بإيجاد معامل الارتباط.

x	2	3	4	5	6	7
y	5	2	3	4	6	5

6. إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين x و y يساوي -0.67، أوجد معامل الارتباط الخطي بين $x' = 2x - 3$ و $y' = 3 - 6y$.

7. اعتبر البيانات في الجدول أدناه.

x	49	77	85	94	67	64	72	74	79
y	79	46	78	91	71	59	56	59	71

a. أوجد معادلة خط الانحدار باستعمال الحاسبة.

b. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين x' و y' حيث $x' = 3x$ و $y' = 3y$.

8. في الجدول التالي، أوجد معامل الارتباط باستعمال الإزاحتين $x' = x - 4$ و $y' = 15 - y$.

x	4	6	10	12	12
y	30	30	33	32	35

9. في إحدى الشركات، تبيّن أن ثمة ارتباطًا سالبًا بين عدد سنين الخبرة للموظفين وعدد أيام التغيب عن العمل. هل يمكن الاستنتاج أن ازدياد عدد سنين الخبرة لموظف ما يؤدي بالضرورة إلى انخفاض عدد أيام تغيبه؟

10. يبيّن الجدول أدناه الكمية المُنتَجة بالوحدات لعدد من الشركات وعدد العاملين في كل منها.

عدد العمال	4	5	6	8	9	10
الإنتاج	32	40	46	53	55	56

a. أوجد معادلة خط الانحدار لبيانات الجدول في الصيغة $y = ax + b$، ثم ارسم خط الانحدار.

b. فسّر الميل والمقطع في معادلة خط الانحدار.

c. أوجد الكمية المُنتَجة في شركة عدد موظفيها 7 وفي شركة عدد موظفيها 14

الوحدة 9 المشروع

مسافة التوقف الآمن

كانت إدارة المرور قلقة من أن الزمن اللازم للتوقف الآمن لسيارة تسير بسرعة 30 ميلًا في الساعة يكون أطول كلما كانت السيارة أقدم.

1. إذا كان قلق الإدارة في محله، ما نوع الارتباط الموجود؟

2. كلفت الإدارة شركة صيانة لفحص 10 سيارات أعمارها بالأشهر متفاوتة، لتراقب عدد الأمتار التي تتطلبها السيارة للتوقف الآمن عند السير بسرعة 30 ميلًا في الساعة، وحصلت على النتائج التالية:

عمر السيارة	6	12	18	24	30	42	54	70	78	88
مسافة التوقف	21.6	22.9	23.7	23.5	24.1	24.7	25.9	27.2	27.2	29.4

a. أنشىء مخطط انتشار لهذه النتائج.

b. أوجد معامل الارتباط واستنتج قوة الارتباط.

c. أوجد معادلة خط الانحدار ومثّله بيانيًا.

d. ماذا تعني القيم a و b في معادلة خط الانحدار $y = ax + b$؟

e. أوجد الفارق بين كل نقطة في مخطط الانتشار والنقطة التي تقابلها على خط الانحدار. أوجد قيمة مجموع مربعات الفوارق. ماذا تمثّل هذه القيمة؟

f. استعمل خط الانحدار لتقدير:

i. مسافة التوقف بالأمتار لسيارة عمرها 5 أشهر.

ii. مسافة التوقف بالأمتار لسيارة عمرها 10 أشهر.

3. أي الإجابات في الفرع السابق يمكن الاعتماد عليها؟ أعطِ سببًا.

4. استعمل التمثيل البياني للتأكد من تقديرك في الفرع (f.i.).

5. اكتب تقريرًا موجزًا إلى إدارة المرور تحدد فيه بوضوح نتيجة التجربة من وجهة نظر شركة الصيانة.

6. من المعلوم أنه خلال استعمال السيارات تُستهلك الإطارات ويتم استبدال المستهلكة بأخرى جديدة.

a. هل تتوقع أن يكون هناك ارتباط بين عمر الإطار ومسافة التوقف؟ برّر إجابتك.

b. إذا كان هذا الارتباط خطيًّا تامًّا، بمعنى أن $A = c + dm$، حيث A هو عمر الإطار و d هي مسافة التوقف:

i. هل يمكن تحديد ما إذا كانت m عددًا موجبًا أم سالبًا؟

ii. أوجد معامل الارتباط بين عمر الإطار وعمر السيارة.

iii. هل يمكن الاستنتاج أن هناك علاقة سببية بين المتغيرين؟ برّر إجابتك.

المصطلحات

ENGLISH	العربية
exponential function	دالة أسيّة
exponential growth	نمو أسي
exponential decay	اضمحلال أسي
natural base	أساس طبيعي
logarithm	لوغاريتم
common logarithm	لوغاريتم اعتيادي
natural logarithm	لوغاريتم طبيعي
logarithmic function	الدالة اللوغاريتمية
natural logarithmic function	دالة اللوغاريتم الطبيعي
change of base formula	صيغة تغيير الأساس
exponential equation	معادلة أسيّة
logarithmic equation	معادلة لوغاريتمية
positive angle	زاوية موجبة
negative angle	زاوية سالبة
initial side	ضلع الابتداء
terminal side	ضلع الانتهاء
standard position	وضع قياسي
coterminal angles	زوايا متطارفة
reference angle	زاوية مرجعية
reference triangle	مثلث مرجعي
unit circle	دائرة الوحدة
period	دورة
quadrantal angle	زاوية ربعية
circular functions	دوال دائرية
periodic functions	دوال دورية
period	دورة
midline	خط الوسط
amplitude	سعة

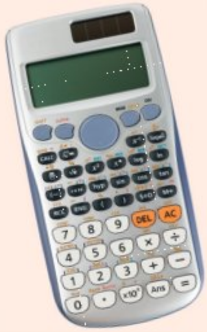
المصطلحات

ENGLISH	العربية
frequency	تردد
phase shift	إزاحة الطور
trigonometric identity	متطابقة مثلثية
trigonometric equations	معادلات مثلثية
tree diagram	مخطط الشجرة
multiplication rule	مبدأ الضرب في العد
factorial	مضروب العدد
permutations	تباديل
combinations	توافيق
binomial theorem	نظرية ذات الحدين
binomial coefficients	معاملات ذات الحدين
Pascal's triangle	مثلث باسكال
random experiment	تجربة عشوائية
sample space	فضاء العيّنة
event	حدث
probability function	دالة الاحتمال
disjoint events / mutually exclusive events	حدثان متنافيان
mutually exclusive and exhaustive events	الحوادث المتنافية والشاملة
independent events	حدثان مستقلان
conditional probability	احتمال مشروط
bivariate data	بيانات ذات متغيرين
scatter diagram	مخطط انتشار
correlation	ارتباط
linear correlation	ارتباط خطي
positive correlation	ارتباط موجب
negative correlation	ارتباط سالب
correlation coefficient	معامل الارتباط
regression line	خط الانحدار

المصطلحات

ENGLISH	العربية
least squares line	خط المربعات الصغرى
interpolation	الاستكمال الداخلي
extrapolation	الاستكمال الخارجي

ملحق



ملاحظة : تسلسل الضغط على الأزرار يكون دائمًا من اليسار إلى اليمين.

مقدمة

عند تشغيل الآلة الحاسبة، وقبل البدء بأي عملية حسابية نقوم بمسح الذاكرة:

`ON` `SHIFT` `9 (CLR)` `3 (BASE)` `=` `AC (OFF)`

أولًا: استخدام الآلة الحاسبة غير البيانية

I. معامل الارتباط r و معادلة خط الانحدار $y = \mathrm{B}x + \mathrm{A}$ التي تربط بين المتغيرين x و y .

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات
	`MODE SETUP` `3 (BASE)` `2 (CMPLX)`	تكوين جدول
	القيمة الأولى x ثم `=`، القيمة الثانية ثم `=`، ...، القيمة الأخيرة ثم `=`	ملء الجدول بقيم x المعطاة
	`▶`	الانتقال إلى العمود الذي يتضمن قيم y
	القيمة الأولى y ثم `=`، القيمة الثانية ثم `=`...، القيمة الأخيرة ثم `=`	ملء الجدول بقيم y المعطاة
	`AC (OFF)`	مسح الشاشة
	`SHIFT` `1 (STAT)` `5 (VECTOR)` `3 (BASE)` `=`	لإيجاد قيمة r
	`SHIFT` `1 (STAT)` `5 (VECTOR)` `2 (CMPLX)` `=`	لإيجاد قيمة B
	`SHIFT` `1 (STAT)` `5 (VECTOR)` `1 (STAT)` `=`	لإيجاد قيمة A

ملحق

II. الإحصاء بمتغير واحد.

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات	
	MODE 3 1	**الحالة الأولى:** قيم بيانات عيّنة	تكوين جدول
	SHIFT MODE ▼ 4 1 MODE 3 1	**الحالة الثانية:** جدول تكراري	
	القيمة الأولى x ثم =، القيمة الثانية ثم = ...، القيمة الأخيرة ثم =	**الحالة الأولى:** قيم بيانات عيّنة	ملء الجدول بقيم x المعطاة
 	القيمة الأولى x ثم =، القيمة الثانية ثم = ...، القيمة الأخيرة ثم = ثم نستعمل الأسهم ▶ للانتقال إلى إدخال قيم التكرار	**الحالة الثانية:** جدول تكراري	
	AC	مسح الشاشة	
	SHIFT 1 4 1 =	لإيجاد عدد البيانات المدخلة n	
	SHIFT 1 4 2 =	لإيجاد قيمة الوسط الحسابي $\bar{x}$	
	SHIFT 1 4 3 =	لإيجاد قيمة الانحراف المعياري σ_x	
	SHIFT 1 4 4 =	لإيجاد قيمة الانحراف المعياري s_x	
	SHIFT 1 6 1 =	لإيجاد القيمة الصغرى	
	SHIFT 1 6 2 =	لإيجاد القيمة العظمى	

ملحق

III. طرق العد.

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات
6! 720	اضغط العدد المعطى ثم SHIFT x^{-1} ($x!$) =	لإيجاد مضروب عدد
5P3 60	n SHIFT × (nPr) r =	لإيجاد عدد التباديل $_nP_r$
5C3 10	n SHIFT ÷ (nCr) r =	لإيجاد عدد التوافيق $_nC_r$

IV. الاحتمال الطبيعي.

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات
1:COMP 2:CMPLX 3:STAT 4:BASE-N 5:EQN 6:MATRIX 7:TABLE 8:VECTOR	MODE SETUP 3 (BASE) AC (OFF)	الوصول إلى وضعية التوزيع الطبيعي
1:P(2:Q(3:R(4:▸t	SHIFT 1 (STAT) 5 (VECTOR) 1 (STAT) a) =	لإيجاد قيمة الاحتمال $P(z < a)$
1:P(2:Q(3:R(4:▸t	SHIFT 1 (STAT) 5 (VECTOR) 2 (CMPLX) a) =	لإيجاد قيمة الاحتمال $P(z > a)$
لإيجاد قيمة الاحتمال $P(a \le z \le b)$ نوجد قيمة الفرق $P(z \le b) - P(z \le a)$		

V. الأعداد المركبة والعمليات عليها.

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة		الخطوات
1:COMP 2:CMPLX 3:STAT 4:BASE-N 5:EQN 6:MATRIX 7:TABLE 8:VECTOR	MODE SETUP 2 (CMPLX)		الوصول إلى وضعية CMPLX
1:MthIO 2:LineIO 3:Deg 4:Rad 5:Gra 6:Fix 7:Sci 8:Norm	SHIFT MODE SETUP 3 (BASE)	للقياس بالـ *degree*	اختيار المقياس
1:MthIO 2:LineIO 3:Deg 4:Rad 5:Gra 6:Fix 7:Sci 8:Norm	SHIFT MODE SETUP 4 (MATRIX)	للقياس بالـ *radian*	

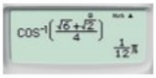
ملحق

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات
$(1+i\sqrt{3})^3$ -8	(قيمة a + ENG قيمة b) $x^{■}$ قيمة n =	لإيجاد قيمة $(a+ib)^n$
1:anX+bnY=cn 2:anX+bnY+cnZ=dn 3:aX²+bX+c=0 4:aX³+bX²+cX+d=0 0	MODE 5 3 قيمة a = قيمة b = قيمة c = = (يظهر الحل الأول) = (يظهر الحل الثاني)	لحل معادلة تربيعية $az^2+bz+c=0$
1:arg 2:Conjg 3:▸r∠θ 4:▸a+bi	قيمة a + قيمة b ENG SHIFT 2 3 =	لإيجاد المقياس r والسعة θ للعدد المركب $a+ib$
1:arg 2:Conjg 3:▸r∠θ 4:▸a+bi	SHIFT 2 2 قيمة a + قيمة b ENG) =	لإيجاد مرافق العدد المركب $a+ib$

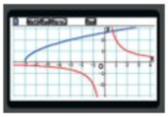
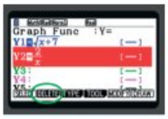
VI. الأوامر المباشرة.

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات
log(3) 0.4771212547 ln(5) 1.609437912 $\log_2(8)$ 3	لإيجاد قيمة $log\ a$: log قيمة a) = لإيجاد قيمة $ln\ a$: ln قيمة a) = لإيجاد قيمة $log_a\ b$: log■□ قيمة a ▸ قيمة b =	إيجاد قيم لوغاريتمية
e^3 20.08553692	SHIFT ln قيمة a =	إيجاد قيم أسية e^a
1:MthIO 2:LineIO 3:Deg 4:Rad 5:Gra 6:Fix 7:Sci 8:Norm	اختيار المقياس: SHIFT MODE 3 لإيجاد قيمة $\cos x°$: cos قيمة x) = لإيجاد قيمة $\sin x°$: sin قيمة x) = لإيجاد قيمة $\tan x°$: tan قيمة x) =	إيجاد نسب مثلثية لزوايا معطاة بالدرجات

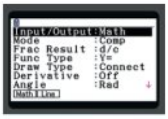
ملحق

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد الزوايا المرجعية (لإيجاد قياس الزاوية x بالراديان حيث $\cos x = a$)	SHIFT MODE 4 SHIFT cos قيمة a) =	 
إيجاد التكامل المحدود	∫ قيمة a قيمة b صيغة الدالة = **ملاحظة:** لإدخال x نضغط على ALPHA ثم)	

ثانيًا: استخدام الآلة الحاسبة البيانية

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تمثيل دالة بيانيًا	F6 EXE صيغة الدالة 5 MENU **ملاحظة:** نستعمل X,θ,T لاختيار المتغير x و للحصول على $\sqrt{\ }$ نضغط SHIFT ، x^2	 
لرسم التمثيل البياني لدالة ثانية	F6 EXE صيغة الدالة الثانية F6	
لإلغاء معادلة ومحو التمثيل البياني	F1 F2 نختار الدالة المطلوبة F6	

ملحق

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات
	لإيجاد أصفار الدالة: ◈ (TRACE) F1 (G-Solv) F5 لإيجاد القيمة العظمى للدالة: (V-Window) F3 (G-Solv) F5 لإيجاد القيمة الصغرى للدالة: (V-Window) F3 (G-Solv) F5 للحصول على المقطع y: (Sketch) F4 (G-Solv) F5 للحصول على إحداثيات تقاطع منحنيين: (G-Solv) F5 (G-Solv) F5 (ننتقل بالسهم لإيجاد باقي الإحداثيات عند وجود أكثر من نقطة) **ملاحظة:** عند ظهور *not found* يعني أن القيمة المطلوبة غير موجودة.	دراسة المزايا الأساسية لدالة
	**تفعيل وضعية Rad أو Deg:** (ZOOM) F2 أو (TRACE) F1 Angle (SET UP) MENU SHIFT (LIST) 1 (SET UP) MENU **لتفعيل وضعية الصيغة الحدودية:** الصيغ الحدودية (V-Window) F3 (G-Solv) F5 (FORMAT) 5 (SET UP) MENU (نستعمل X,θ,T لإدخال المتغير T) **ملاحظة:** للتحكم بقياسات الرسم البياني والمتغير T نضغط على (V-Window) F3 إذا كانت الشاشة على الرسم أو SHIFT ثم (V-Window) F3 إذا كانت الشاشة على لائحة المعادلات وندخل القيم التي تتناسب مع المثال المعطى.	الصيغة الحدودية

Photographs

2 Top Center Castaldostudio/Shutterstock; **26 Center Left** John Henshall/ALAMY;
59 Top Center Marisha/Shutterstock; **105 Top Left** In-Finity/Shutterstock; **105 Top Right** Norbert9/Shutterstock;
110 Center Left Artreef/Shutterstock; **111 Top Center** Alexandra Giese/Shutterstock;
131 Center Right vectorOK/Shutterstock; **132 Center** NASA/NASA;
146 Top Center Kovgabor/Shutterstock; **154 Top Center** vectorfusionart/Shutterstock;
176 Bottom Right Food Shop/Shutterstock; **211 Top Right** only shezada/Shutterstock;
239 Top Center GalapagosPhoto/Shutterstock; **271 Center Left** Evgenyrychko/Shutterstock
G4 Top Left Amankris/Shutterstock