الوحدة
8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ
Statistics and Probability

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: مقاييس التشتّت	• إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة. • إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات منظمة في جداول تكرارية. • استنتاج أثر إجراء تحويل لبيانات مفردة في كلٍّ من وسطها الحسابي وانحرافها المعياري. • استعمال تحويل البيانات لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقَّدة (ذات القيم غير الصحيحة)؛ تسهيلًا للحسابات. • إيجاد الانحراف المعياري والوسط الحسابي لبيانات مفردة قبل تحويلها وبَعده من خلال معرفة العلاقة التي استُعمِلت للتحويل، وبعض المعلومات عن البيانات بعد التحويل.	التباين. الانحراف المعياري. تحويل البيانات.	• أقلام لوح ملوّنة. • آلة حاسبة علمية.	5
الدرس 2: الجداول التكرارية ذات الفئات	• تنظيم بيانات عددية متصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول. • تنظيم بيانات عددية منفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول. • تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات. • حل مسائل حياتية على مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.		• أقلام لوح ملوّنة. • آلة حاسبة علمية.	3
الدرس 3: المُدرَّجات التكرارية	• تعرّف المُدرَّجات التكرارية. • تمثيل البيانات العددية المتصلة المنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول بمدرَّجات تكرارية. • تعرّف مفهوم الكثافة التكرارية، وتوظيفه في تمثيل البيانات العددية المتصلة المنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية الطول بمدرَّجات تكرارية.	المُدرَّجات التكرارية. الكثافة التكرارية.	• أقلام لوح ملوّنة. • آلة حاسبة علمية. • ورقة المصادر 2 • لوح مستوى إحداثي متنقل. • ورقة المصادر 8	3
الدرس 4: الاحتمالات وأشكال ڤن	• التعبير بالرموز عن حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن. • إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية مُمثَّلة بأشكال ڤن. • استعمال أشكال ڤن لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية. • إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن. • تعرّف مفهوم الاحتمالات المتنافية الشاملة، واستعمالها في حلّ المسائل.	الحادث المُتمِّم. الحوادث المتنافية. الحوادث الشاملة.	• أقلام لوح ملوّنة. • ورقة المصادر 9	4
الدرس 5: الاحتمال الهندسي	• تعرّف الاحتمال الهندسي. • إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الأطوال. • إيجاد احتمالات هندسية باستعمال المساحات. • إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الزوايا.	الاحتمالات الهندسية.	• أقلام لوح ملوّنة. • ورقة المصادر 10 • ورقة المصادر 11 • ورقة المصادر 12	3
عرض نتائج مشروع الوحدة				1
اختبار نهاية الوحدة				1
المجموع:				20 حصة

الوحدة 8


الوحدةُ 8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ
Statistics and Probability

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُقدِّمُ هذهِ الوحدةُ مجموعةً مِنْ موضوعاتِ الإحصاءِ والاحتمالاتِ التي يُعَدُّ اكتسابُها ضروريًّا لكلِّ إنسانٍ في هذا العصرِ، مثلَ: تنظيمِ البياناتِ، وتحليلِها، واستعمالِ قوانينِ الاحتمالاتِ لوضعِ استنتاجاتٍ دقيقةٍ عنْها؛ ما يساعدُ على اتخاذِ قراراتٍ صحيحةٍ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ اليوميةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مفردةٍ.
- ✓ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ معطاةٍ، ثمَّ تمثيلَها في مُخطَّطاتٍ تكراريةٍ.
- ✓ تمثيلَ البياناتِ بأشكالِ ڤِنْ.
- ✓ إيجادَ احتمالاتِ وقوعِ الحوادثِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ إيجادَ مقاييسِ التشتُّتِ لبياناتٍ مفردةٍ، وأُخرى مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.
- ◄ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.
- ◄ تقديرَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ.
- ◄ إيجادَ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ، وإيجادَ احتمالاتٍ هندسيةٍ.

118

نظرة عامة على الوحدة

سيتعرّف الطلبة في هذه الوحدة مفهوم التباين والانحراف المعياري بوصفهما مقياسين من مقاييس تشتّت البيانات، وسيجدونهما لبيانات مفردة وبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية. كما سيتعرفون أثر تحويل البيانات المفردة في كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري، ويستعملونه في حل المسائل. سيتعرّف الطلبة أيضًا كيفية تنظيم البيانات المتصلة والمنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول، إضافة إلى تعرّف مفهوم الكثافة التكرارية وتوظيفه في تمثيل البيانات العددية المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية الطول بمدرَّجات تكرارية. إضافة إلى ما سبق، سيتعرّف الطلبة تقدير مقاييس النزعة المركزية للجداول التكرارية ذات الفئات.

واستكمالًا لما تعلّمه الطلبة سابقًا حول إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية، سيتعرّف الطلبة كيفية إيجاد احتمالات حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن، واستعمال أشكال ڤن لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية.

وسيتعرّف الطلبة أيضًا مفهومًا جديدًا في الاحتمالات يُسمّى (**الاحتمال الهندسي**)، وسيجدون احتمالات هندسية باستعمال الأطوال والمساحات والزوايا.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف السادس

- تعرّف البيانات العددية المتصلة والمنفصلة.
- تنظيم البيانات في جداول تكرارية، وحساب مقاييس النزعة المركزية لها.
- تنظيم بيانات عددية متصلة ومنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول، وتمثيلها باستعمال المخططات التكرارية.

الصف السابع

- وصف أثر القيمة المتطرفة في الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات المفردة.
- حساب الوسيط والمنوال والمدى لمجموعة من البيانات المفردة، وتحديد المقياس الأنسب لوصف البيانات.
- حساب احتمالات وقوع حوادث لتجارب عشوائية متساوية الاحتمال.

الصف الثامن

- تعرّف المدى الربيعي وعلاقته بتشتّت البيانات.
- إيجاد المدى الربيعي لبيانات مفردة.
- استخدام مخطط الشجرة، والجدول، ومخطط الاحتمال لعرض الفضاء العيني لتجارب عشوائية مُركَّبة.
- إيجاد احتمالات حوادث مُركَّبة باستعمال مخطط الشجرة، والجدول، ومخطط الاحتمال.

الصف التاسع

- إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة، وبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.
- استعمال تحويل البيانات لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقَّدة؛ تسهيلًا للحسابات.
- تنظيم بيانات عددية متصلة ومنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- تمثيل البيانات العددية المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول وغير متساوية الطول بمُدرَّجات تكرارية.
- إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية مُمثَّلة بأشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الأطوال والمساحات والزوايا.

الصف العاشر

- فهم أشكال الانتشار، ووصفها.
- إيجاد الربيعيات والمئينات، للبيانات المُبوَّبة في جداول تكرارية باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.
- إيجاد مقاييس التشتّت في جداول مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- حساب احتمالات حوادث متنافية، وغير متنافية، ومُتمِّمة الحادث.
- حساب احتمالات الحوادث المستقلة وغير المستقلة.

مشروعُ الوحدةِ
جمعُ البياناتِ، وتنظيمُها، وتحليلُها

فكرةُ المشروعِ جمعُ بياناتٍ عنْ عددٍ منَ الأشخاصِ، وتنظيمُها، وتحليلُها.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أطلبُ إلى 40 شخصًا (نصفُهُمْ منَ الذكورِ، ونصفُهُمُ الآخرُ منَ الإناثِ) قياسَ عددِ دقّاتِ قلوبِهِمْ في الدقيقةِ الواحدةِ، وتحديدَ اليدِ التي يكتبونَ بها، وبيانَ إذا كانوا يرتدونَ نظّاراتٍ أمْ لا.
2. أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والوسيطَ والمنوالَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ.
3. أجدُ الانحرافَ المعياريَّ والتباينَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ.
4. أُنظِّمُ بياناتِ عددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.
5. أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والمنوالَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ باستعمالِ الجدولينِ اللذينِ أنشأْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ، ثمَّ أُقارِنُ ذلكَ بالإجابةِ الدقيقةِ لكلٍّ منْهُما.
6. أُمثِّلُ كُلًّا منَ الجدولينِ التكراريينِ اللذينِ أنشأْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ، ثمَّ أكتبُ وصفًا للبياناتِ.
7. أُمثِّلُ بياناتِ اليدِ المُستعمَلةِ للكتابةِ، وبياناتِ ارتداءِ النظّارةِ في شكلِ قِنٍّ.
8. أكتبُ مجموعةً منَ المسائلِ الاحتماليةِ عنْ حادثِ اختيارِ شخصٍ عشوائيًّا منْ بينِ مجموعةٍ منَ الأشخاصِ، ثمَّ أطلبُ إلى بعضِ زملائي/ زميلاتي إجابةَ هذهِ المسائلِ.

عرضُ النتائجِ:

- أُصمِّمُ مطويةً أكتبُ فيها النتائجَ التي توصَّلْتُ إليْها في هذا المشروعِ.
- أعرضُ المطويةَ أمامَ طلبةِ الصفِّ، ثمَّ أُقارِنُ نتائجي بنتائجِهِمْ.

119

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	إيجاد مقاييس النزعة المركزية للبيانات.			
2	تنظيم بيانات عـدد دقّات قلب كل من الذكـور والإناث في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.			
3	تقدير الوسط الحسابي والمنوال للجدولين التكراريين.			
4	تمثيل كل من الجدولين التكراريين بمُدرَّج تكراري.			
5	التعاون والعمل بروح الفريق.			
6	إعداد المشروع في الوقت المُحدَّد.			
7	عرض المشروع بصورة واضحة (مهارة التواصل).			
8	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى جمع بيانات عن عدد من الأشـخاص، وإيجاد الانحـراف المعياري والتباين لها، وتنظيمها في جداول تكرارية متساوية الطول، وتقدير مقاييس النزعة المركزية لهـذه البيانات، وتمثيلها بمُدرَّج تكراري، ووصفها.

ويهدف مشـروع الوحدة أيضًا إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعـي وتعزيزهما، وتطويـر مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكّد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضّـح للطلبة المـواد والأدوات اللازمـة لتنفيـذ المشـروع، وعناصـر المُنتَج النهائـي المطلوب منهم، وأؤكـد أهميـة توثيـق خطـوات تنفيـذ المشـروع أوَّلًا بأوَّل، وتعزيزها بالصور.
- أذكّـر الطلبة بالعودة إلى المشـروع في نهاية كل درس مـن دروس الوحدة؛ لاسـتكمال ما يجـب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبيّن للطلبة سلفًا معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبيّن للطلبة ما يأتي:

- إمكانيـة استعمال التكنولوجيـا فـي عـرض نتائـج المشـروع، مثـل: المطويـة، وبرمجيـة العـروض التقديمية.
- اختيـار كل مجموعـة أحـد أفرادهـا؛ للوقـوف أمـام المجموعات الأُخرى، وعـرض البيانات التي جمعها مـع أفـراد مجموعتـه (تتمثّل أهميـة هـذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفـراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلُّب عليها؛ تعزيزًا لمهاراتهم في حل المشكلات.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة.
- إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.
- استنتاج أثر إجراء تحويل لبيانات مفردة في كل من وسطها الحسابي وانحرافها المعياري.
- استعمال تحويل البيانات لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقَّدة (ذات القيم غير الصحيحة)؛ تسهيلًا للحسابات.
- إيجاد الانحراف المعياري والوسط الحسابي لبيانات مفردة قبل تحويلها وبَعده من خلال معرفة العلاقة التي استُعمِلت للتحويل، وبعض المعلومات عن البيانات بعد التحويل.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد المدى، والربيعيات، والمدى الربيعي، لمجموعة مفردة من البيانات.
- حساب مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 1

مقاييسُ التشتُّتِ

Measures of Variation

فكرةُ الدرسِ

- إيجادُ التباينِ والانحرافِ المعياريِّ لبياناتٍ مفردةٍ، وأُخرى مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.
- تحديدُ أثرِ تحويلِ البياناتِ في كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ.

المصطلحاتُ التباينُ، الانحرافُ المعياريُّ، تحويلُ البياناتِ.

مسألةُ اليومِ في ما يأتي عددُ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ كلَّ يومٍ مُدَّةَ 10 أيامٍ:

3, 3, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 3, 6

1) أجدُ تباينَ عددِ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ في الأيامِ العشرةِ.

2) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ في الأيامِ العشرةِ.

التباينُ، والانحرافُ المعياريُّ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مقاييسَ التشتُّتِ تُستعمَلُ لوصفِ مقدارِ تشتُّتِ البياناتِ وتباعدِها. ومنْ هذهِ المقاييسِ: المدى، والمدى الربيعيُّ. ولكنْ، كلٌّ منْ هذينِ المقياسينِ يعتمدُ على قِيَمٍ مُحدَّدةٍ منَ البياناتِ، لا على القِيَمِ جميعِها؛ لذا توجدُ مقاييسُ أُخرى أكثرُ دقَّةً للتشتُّتِ تأخذُ جميعَ قِيَمِ البياناتِ بالاعتبارِ.

أتذكَّرُ

المدى هوَ الفرقُ بينَ أكبرِ قِيَمِ البياناتِ وأصغرِها. أمّا المدى الربيعيُّ فهوَ الفرقُ بينَ الربيعِ الأعلى والربيعِ الأدنى.

في ما يأتي مجموعةٌ منَ البياناتِ، وسطُها الحسابيُّ هوَ: $\bar{x} = 64$.

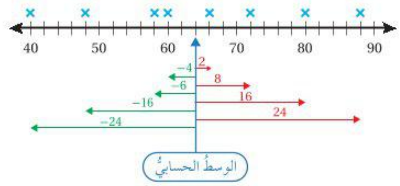
58, 88, 40, 60, 72, 66, 80, 48

تُستعمَلُ الصيغةُ $x - \bar{x}$ لإيجادِ انحرافِ (بُعْدِ) كلِّ مشاهدةٍ منْ قِيَمِ البياناتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ. وبذلكَ، فإنَّ انحرافَ قِيَمِ البياناتِ أعلاهُ عنْ وسطِها الحسابيِّ باستعمالِ هذهِ الصيغةِ هوَ كما يأتي:

لغةُ الرياضياتِ

يُطلَقُ على كلِّ قيمةٍ منَ القِيَمِ في مجموعةِ البياناتِ اسمُ المشاهدةِ.

120



عندَ جمعِ الانحرافاتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ أعلاهُ، فإنَّ الناتجَ يكونُ كما يأتي:

$$-24 + -16 + -6 + -4 + 2 + 8 + 16 + 24 = 0$$

أُلاحِظُ أنَّ مجموعَ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا، وهذا لا يقتصرُ على هذهِ البياناتِ فقطْ، وإنَّما يتحقَّقُ في أيِّ مجموعةِ بياناتٍ عدديةٍ؛ لذا، فإنَّ حسابَ مجموعِ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يُقدِّمُ شيئًا عنْ تشتُّتِ البياناتِ، ولا يُميِّزُ أيَّ مجموعةِ بياناتٍ عنْ أُخرى. إلّا أنَّ إيجادَ مُربَّعاتِ هذهِ الانحرافاتِ يجعلُها موجبةً. ولهذا، فإنَّ مجموعَ مُربَّعاتِ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يساوي صفرًا.

عندَ حسابِ الوسطِ الحسابيِّ لمُربَّعاتِ الانحرافاتِ، بقسمةِ مجموعِها على عددِها، ينتجُ مقياسٌ مُهِمٌّ منْ مقاييسِ التشتُّتِ يُسمّى **التباينَ** (variance)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ σ^2. فمثلًا، يُمكِنُ حسابُ تباينِ مجموعةِ البياناتِ أعلاهُ على النحوِ الآتي:

$$\sigma^2 = \frac{(-24)^2 + (-16)^2 + (-6)^2 + (-4)^2 + 2^2 + 8^2 + 16^2 + 24^2}{8} = 223$$

وبأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للتباينِ، ينتجُ مقياسٌ آخرُ لتشتُّتِ البياناتِ يُسمّى **الانحرافَ المعياريَّ** (standard deviation).

في هذا الدرسِ، سيُنظَرُ إلى جميعِ البياناتِ بوصفِها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، يُرمَزُ إلى وسطِهِ الحسابيِّ بالرمزِ μ، ويُقرَأُ: ميو.

مفهومٌ أساسيٌّ — **التباينُ، والانحرافُ المعياريُّ**

يُعرَّفُ تباينُ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n، ووسطُها الحسابيُّ μ، بالصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ انحرافَ المشاهدةِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ أكبرَ منَ الوسطِ الحسابيِّ، ويكونُ سالبًا إذا كانَتْ أصغرَ منَ الوسطِ الحسابيِّ.

رموزٌ رياضيةٌ

الحرفُ اليونانيُّ σ يُقرَأُ: سيجما، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على الانحرافِ المعياريِّ. أمّا الرمزُ σ^2 فيُقرَأُ: سيجما تربيعٌ، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على التباينِ.

رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الرمزُ $\sum$ للدلالةِ على المجموعِ. وفي قانونِ التباينِ، فإنَّهُ يُستعمَلُ للدلالةِ على مجموعِ مُربَّعاتِ انحرافاتِ البياناتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ بصورةٍ مختصرةٍ، ويُقرَأُ: سيجما.

- المجـال العاطفي لا يقل أهمية عن المجـال المعرفي؛ لذا يجب ألّا أقول للطالب/ للطالبة: (إجابتك خطأ)، بـل أقول له/ لها: (لقـد اقتربت من الإجابـة الصحيحـة، فمـنْ يسـتطيع إعطاء إجابـة أخرى؟)، ثم أشـكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السـؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه/ أعزّزها، ثـم أطلـب إلى الطالـب الأوّل/ الطالبـة الأولى الإجابة عن السـؤال مرّة أخرى، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت مَن أجاب عن السـؤال نفسـه إجابة صحيحة.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح مجموعة من الأعداد المتتابعة مع تكرار بعضها (مثلًا: ... ,5 ,3 ,3 ,3 ,2 ,2).
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة تنظيم البيانات المكتوبة على اللوح في جدول تكراري للعدد وعدد مرّات تكراره.
- أطلب إلى المجموعات إيجاد الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال للبيانات.
- أطلب إلى المجموعات إيجاد المدى، والمدى الربيعي للبيانات.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند **(مسألة اليوم)**، ثم أسألهم:
  - » كم يومًا أحصت فيه أميرة عدد أكواب الماء التي شربتها؟ 10 أيام.
  - » ما مدى عدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟ 4 أكواب.
  - » ما المدى الربيعي لعدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟ 1 كوب.
  - » ما تباين عدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟
  - » ما الانحراف المعياري لعدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤالين السابقين في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَنْ يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

مثال 1 : منَ الحياةِ

تجارةٌ: في ما يأتي عددُ الأجهزةِ الكهربائيةِ التي بيعَتْ في متجرٍ خلالَ خمسةِ أشهرٍ:

18, 22, 21, 25, 24

1 أجدُ التباينَ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ للأجهزةِ المَبيعةِ.

$\mu = \frac{\sum x}{n}$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$= \frac{18+22+21+25+24}{5} = 22$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ انحرافَ كلِّ قيمةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، إضافةً إلى حسابِ مُربَّعاتِ الفروقِ.

x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
18	-4	16
22	0	0
21	-1	1
25	3	9
24	2	4
المجموعُ		30

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القِيَمَ التي توصَّلْتُ إليْها بصيغةِ التباينِ.

$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$ صيغةُ التباينِ

$= \frac{30}{5} = 6$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

إذنْ، التباينُ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ هوَ 6.

2 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ.

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$\sigma = \sqrt{6} \approx 2.45$

أتعلَّمُ

إذا كانَتِ البياناتُ: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ تُمثِّلُ عيِّنةً عشوائيةً منْ مجتمعٍ إحصائيٍّ ما، فإنَّ التباينَ يُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ s^2، ويُعرَّفُ بأنَّهُ:

$$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}$$

في هذا الدرسِ، ستُعامَلُ جميعُ البياناتِ على أساسِ أنَّها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ التباينَ سيُعرَّفُ بالصيغةِ الواردةِ في صندوقِ المفهومِ الأساسيِّ السابقِ.

أتذكَّرُ

مجموعُ $(x-\mu)$ يساوي صفرًا.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أذكّر الطلبة بمفهوم تشتّت البيانات، وبمقياسي التشتّت اللذين تعلموهما سابقًا، وهما: المدى، والمدى الربيعي، ثم أوضّح لهم أن دقة هذين المقياسين ضعيفة؛ لأنهما يعتمدان على قيم محددة من البيانات، وأنه توجد مقاييس أكثر دقة لقياس التشتّت تأخذ في الحسبان قيم البيانات كافّة، والتي سوف يتعلّمونها في هذا الدرس.
- أكتب مجموعة البيانات الآتية على اللوح:

  58, 88, 40, 60, 72, 66, 80, 48

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إلى كل مجموعة إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات على دفاترهم، ثم أطلب إلى مندوب/ مندوبة عن إحدى المجموعات إيجاد الوسط الحسابي على اللوح.
- أوضّح للمجموعات أن الصيغة $x - \bar{x}$ تُستعمَل لإيجاد انحراف (بُعد) كل مشاهدة من قيم البيانات عن وسطها الحسابي، ثم أطلب إليهم استعمال هذه الصيغة لإيجاد انحراف قيم البيانات عن وسطها الحسابي، ثم رسم مخطط سهمي لتوضيح هذه الانحرافات.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، وبعد إنهاء المجموعات المطلوب إليهم أسألهم:
  » إذا كانت المشاهدة أكبر من الوسط الحسابي، فما إشارة انحرافها عن الوسط الحسابي؟ موجبة.
  » إذا كانت المشاهدة أصغر من الوسط الحسابي، فما إشارة انحرافها عن الوسط الحسابي؟ سالبة.
  » ما مجموع انحراف المشاهدات عن وسطها الحسابي؟ 0
  » هل مجموع انحرافات أي مجموعة بيانات عددية عن وسطها الحسابي يساوي صفرًا، أم أن هذا يقتصر على هذه المجموعة من البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.

- أوضّـح للطلبة أن مجمـوع انحرافـات أي مجموعـة بيانـات عددية عن وسـطها الحسـابي يسـاوي صفرًا، ولكـن بتربيـع هـذه الانحرافـات وإيجـاد الوسـط الحسـابي لمربعاتها نحصل على مقياس تشتّت جديد يُسـمّى (**التبايـن**)، ثـم أقدّم لهـم رمز التبايـن وصيغته بالاسـتعانة بصندوق (**مفهوم أساسـي**)، ثـم أجد لهم تباين مجموعة البيانات على اللوح.
- أوضّح للطلبة أنه عند أخذ الجذر التربيعي للتباين فإنه ينتج مقياس تشتّت آخر يُسمّى (**الانحراف المعياري**)، ثم أجد لهم الانحراف المعياري للبيانات على اللوح.
- أناقـش الطلبـة في حـل المثال 1 علـى اللـوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبـة إلى صندوقي (**رموز رياضية**) الواردين فـي الصفحة 121 من كتـاب الطالب؛ لمـا لهمـا مـن أهمية فـي تعريـف الطلبـة بالرمز الدالّ على التباين، والرمز الدالّ على المجموع، وكيفية قراءة كل منهما.
- ألفـت انتباه الطلبة إلى أنه يُطلَق على كل قيمة من قيم البيانات اسم (**مشاهدة**).
- ألفـت انتباه الطلبة إلـى صندوق (**أتعلّـم**) الوارد فـي هامش المثـال 1؛ لتعريفهم بالفرق بين تباين البيانـات التي تمثّل عينة عشـوائية من المجتمع، وبيـن تباين البيانات التـي تمثّل مجتمعًا إحصائيًّا من حيث الرمز والصيغة لكل منهما.
- عند مناقشة حل المثال 1، أوجّه الطلبة إلى تنظيم البيانات في جدول؛ لتسهيل إيجاد انحرافاتها عن الوسط الحسابي، ومربعات هذه الانحرافات.

أتحقَّقُ منْ فهمي

إنترنتْ: في ما يأتي عددُ زائري موقعٍ إلكترونيٍّ تعليميٍّ خلالَ أيامِ أحدِ الأسابيعِ:

103, 115, 124, 125, 171, 165, 170

a) أجدُ التباينَ لعددِ زائري الموقعِ في ذلكَ الأسبوعِ. $\sigma^2 \approx 707.71$

b) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ زائري الموقعِ في ذلكَ الأسبوعِ. $\sigma \approx 26.6$

توجدُ صيغةٌ أُخرى لإيجادِ التباينِ منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافِ المشاهداتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

أتعلَّمُ

تُستعمَلُ هذهِ الصيغةُ لتسهيلِ الحساباتِ في حالِ كانَتْ قيمةُ الوسطِ الحسابيِّ عددًا غيرَ صحيحٍ.

مثال 2

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ الآتيةِ: 15, 14, 18, 6, 12, 4, 7, 8, 8

لإيجادِ التباينِ، أَتَّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ.

$$\mu = \frac{\sum x}{n} \quad \text{صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ}$$

$$= \frac{15+14+18+6+12+4+7+8+8}{9} = \frac{92}{9} \quad \text{بالتعويضِ، والتبسيطِ}$$

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ عددٌ غيرُ صحيحٍ؛ لذا يُفضَّلُ إيجادُ التباينِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ.

x	x^2
15	225
14	196
18	324
6	36
12	144
4	16
7	49
8	64
8	64
المجموعُ	1118

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القِيَمَ التي توصَّلْتُ إليْها بصيغةِ التباينِ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2 \quad \text{الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ}$$

$$= \frac{1118}{9} - \left(\frac{92}{9}\right)^2 \quad \Sigma x^2 = 1118, \mu = \frac{92}{9} \text{ بتعويضِ}$$

$$\approx 19.73 \quad \text{باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ}$$

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزيــة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أوضّـح للطلبـة أن هنـاك صيغـة أخـرى للتبايـن غيـر تلـك التـي تعلّموها، ثم أكتـب لهم الصيغـة الجديدة علـى اللـوح، وألفـت انتباههم إلـى أنـه لا حاجة إلى حسـاب انحرافات المشـاهدات عن الوسط الحسابي عند اسـتعمال هـذه الصيغة؛ لذا يُفضَّل اسـتعمالها في حال كان الوسـط الحسابي عددًا غير صحيح؛ لتسهيل الحسابات.
- أناقـش مـع الطلبـة حـل المثال 2 علـى اللـوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشـاد: بعد الانتهاء من مناقشــة المثال 2، أوجّــه الطلبة إلى إيجـاد تباين البيانات باســتعمال الصيغة الأولى للتباين، وملاحظة الفرق بين الصيغتين من حيث سهولة الحسابات.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند التطبيق في الصيغة الثانية للتباين، وذلك بطرح الوســط الحســابي للبيانات من الوســط الحســابي لمربعات القيم؛ لذا أؤكّد وبشكل مستمر أن الصحيح هو طرح مربع الوسط الحسابي.

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$$\sigma \approx 4.44$$

أتحقّقُ منْ فهمي

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ الآتيةِ: **1, 4, 5, 7, 6, 14, 11**

a) $\sigma^2 \approx 16.41$

b) $\sigma \approx 4.05$

التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

تعلّمْتُ سابقًا تنظيمَ بياناتٍ عدديةٍ باستعمالِ جداولَ تكراريةٍ. والآنَ سأتعلّمُ كيفَ أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لبياناتٍ مُنظّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

يُمكِنُ إيجادُ تباينِ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n، ووسطُها الحسابيُّ μ، إذا كانَتْ مُنظّمةً في جداولَ تكراريةٍ، حيثُ f عددُ مرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ، باستعمالِ إحدى الصيغتينِ الآتيتينِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

أتذكّرُ

يُمكِنُ إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ المُنظّمةِ في جداولَ تكراريةٍ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ: $\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$، حيثُ f عددُ مرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

قمصانٌ: يُبيّنُ الجدولُ التالي عددَ القمصانِ الرياضيةِ لمجموعةٍ منْ طلبةِ الصفِّ التاسعِ في إحدى المدارسِ. أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

عددُ القمصانِ (x)	1	2	3	4	5	6
التكرارُ (f)	2	12	45	114	41	16

لإيجادِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

x	f	$x \times f$	x^2	$x^2 \times f$
1	2	2	1	2
2	12	24	4	48
3	45	135	9	405
4	114	456	16	1824
5	41	205	25	1025
6	16	96	36	576
المجموعُ	230	918	91	3880

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f} = \frac{918}{230}$$ بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$ الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ

$$= \frac{3880}{230} - \left(\frac{918}{230}\right)^2$$ بالتعويضِ

$$= 0.93905$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتعلَّمُ

ألاحِظُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ عددٌ غيرُ صحيحٍ؛ لذا يُفضَّلُ إيجادُ التباينِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$$\sigma \approx 0.969$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

عائلـةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التالي عددَ الأخوةِ والأخواتِ لمجموعةٍ منْ طالباتِ الصفِّ التاسعِ في مدرسةِ عائشةَ. أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ. $\sigma^2 \approx 1.05, \sigma \approx 1.02$

عددُ الأخوةِ والأخواتِ	1	2	3	4	5
التكرارُ (f)	2	4	8	5	1

مثال 3: من الحياة

- أناقش الطلبة في ما تعلّموه سابقًا عن الجدول التكراري (الذي يبيّن عدد مرات ظهور كل قيمة من قيم البيانات).
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية، ثم أقدّم لهم صيغتي التباين الخاصتين بالبيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية بالرموز، بالاستعانة بصندوق **(مفهوم أساسي)** الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بصيغة الوسط الحسابي الخاصة بالبيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية.
- ألفت انتباه الطلبة في المثال 3 إلى أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح؛ لذا فإنه يُفضَّل استعمال الصيغة الثانية للتباين.

مثال إضافي:

يبيّن الجدول الآتي عدد الأهداف التي أحرزها فريق كرة قدم في آخر 20 مباراة له. أجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

عدد الأهداف (x)	التكرار (f)
0	6
1	8
2	4
3	2

$\sigma^2 = 0.89, \sigma \approx 0.94$

نشاط مفاهيمي: تحويل البيانات

- أقدّم للطلبة مفهوم تحويل البيانات، ثم أقسّمهم إلى مجموعات رباعية، لتنفيذ النشاط المفاهيمي **(تحويل البيانات)** الوارد في صفحة 126 من كتاب الطالب.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة أثناء تنفيذهم النشاط.
- أناقش مع المجموعات السؤال 1 من أسئلة **(أحلّل النتائج)** الواردة في النشاط المفاهيمي، وذلك بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:
  - » ما الوسط الحسابي لعلامات الطلبة قبل إضافة 3 علامات إلى علامة كل طالب؟ 13
  - » ما الوسط الحسابي لعلامات الطلبة بعد إضافة 3 علامات إلى علامة كل طالب؟ 16
  - » هل تأثّر الوسط الحسابي بإضافة العلامات؟ نعم.
  - » كيف نصف هذا التأثّر؟ الوسط الحسابي الجديد ناتج من إضافة العدد 3 إلى الوسط الحسابي القديم.
  - » ما الانحراف المعياري لعلامات الطلبة قبل إضافة 3 علامات إلى علامة كل طالب؟ 3.03 تقريبًا.
  - » ما الانحراف المعياري لعلامات الطلبة بعد إضافة 3 علامات إلى علامة كل طالب؟ 3.03 تقريبًا.
  - » هل تأثّر الانحراف المعياري بإضافة العلامات؟ لا.
  - » برأيكم/ برأيكن، لماذا تأثّر الوسط الحسابي للبيانات بعد الإضافة ولم يتأثّر الانحراف المعياري؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم إلى أن إضافة عدد حقيقي إلى مجموعة بيانات يؤثّر في وسطها الحسابي، وأن الوسط الحسابي الجديد ينتج من إضافة العدد الحقيقي نفسه إلى الوسط الحسابي القديم. أما الانحراف المعياري فإنه لا يتأثر بإضافة عدد حقيقي إلى مجموعة البيانات؛ لأن الإضافة لا تؤثّر في تشتّتها، ويمكنني تعزيز هذا الاستنتاج بتمثيل البيانات بالنقاط قبل الإضافة وبعدها.

تحويلُ البياناتِ

تحويلُ البياناتِ (data transformation) هوَ تطبيقُ عمليةٍ حسابيةٍ (أوْ أكثرَ) على جميعِ القِيَمِ في مجموعةِ بياناتٍ للحصولِ على مجموعةٍ أُخرى مختلفةٍ. سأستكشفُ في النشاطِ المفاهيميِّ الآتي أثرَ تحويلِ البياناتِ في كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ.

نشاطٌ مفاهيميٌّ — تحويلُ البياناتِ

الإجراءاتُ:

في ما يأتي علاماتُ 5 طلبةٍ في اختبارِ رياضياتٍ، نهايتُهُ العظمى هيَ 20:

12, 17, 11, 9, 16

1) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ.
2) إذا أرادَ المُعلِّمُ إضافةَ 3 علاماتٍ إلى علامةِ كلِّ طالبٍ، فأجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ بعدَ التحويلِ.
3) إذا أرادَ المُعلِّمُ تحويلَ نهايةِ الاختبارِ العظمى إلى 40، بضربِ كلِّ علامةٍ في العددِ 2، فأجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ بعدَ التحويلِ.

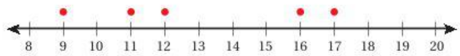
أحلّلُ النتائجَ:

1) أُقارِنُ بينَ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ قبلَ تحويلِ العلاماتِ وبعدَ تحويلِها بإضافةِ 3 علاماتٍ. ماذا أستنتجُ؟
2) أُقارِنُ بينَ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ قبلَ تحويلِ العلاماتِ وبعدَ تحويلِها بضربِها في العددِ 2. ماذا أستنتجُ؟

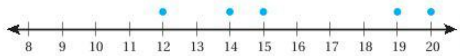
أستنتجُ منْ هذا النشاطِ أنَّ إضافةَ العددِ 3 إلى علامةِ كلِّ طالبٍ أثّرَتْ في الوسطِ الحسابيِّ، ولمْ تُؤثِّرْ في الانحرافِ المعياريِّ؛ لأنَّ هذهِ الإضافةَ أدَّتْ إلى انسحابِ البياناتِ جميعِها بالمقدارِ نفسِهِ (3 وحداتٍ إلى اليمينِ) كما يظهرُ في التمثيلِ النقطيِّ التالي، لكنَّ ذلكَ لمْ يُؤثِّرْ في تشتُّتِ البياناتِ.

أستنتجُ أيضًا أنَّ الوسطَ الحسابيَّ الجديدَ ناتجٌ منْ إضافةِ العددِ 3 إلى الوسطِ الحسابيِّ القديمِ.

علاماتُ الطلبةِ قبلَ التحويلِ.



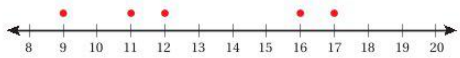
علاماتُ الطلبةِ بعدَ إضافةِ العددِ 3 إليْها.



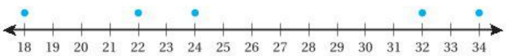
أمّا تحويلُ البياناتِ بضربِها في العددِ 2 فقدْ أثَّرَ في كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ؛ لأنَّ عمليةَ الضربِ تُؤثِّرُ في تشتُّتِ البياناتِ كما يظهرُ في التمثيلِ النقطيِّ التالي.

كذلكَ أستنتجُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ الجديدَ ناتجٌ منْ ضربِ الوسطِ الحسابيِّ القديمِ في العددِ 2، وكذا الحالُ بالنسبةِ إلى الانحرافِ المعياريِّ.

علاماتُ الطلبةِ قبلَ التحويلِ.



علاماتُ الطلبةِ بعدَ ضربِها في العددِ 2.



مفهومٌ أساسيٌّ — **تحويلُ البياناتِ**

عندَ تحويلِ مجموعةٍ منَ البياناتِ باستعمالِ العلاقةِ: $y = ax + b$، حيثُ a و b عددانِ حقيقيانِ، و x المشاهدةُ قبلَ التحويلِ، و y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ، فإنَّهُ:

- يُمكِنُ إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ μ_y باستعمالِ العلاقةِ: $\mu_y = a\mu_x + b$، حيثُ μ_x الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.
- يُمكِنُ إيجادُ الانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ σ_y باستعمالِ العلاقةِ: $\sigma_y = |a|\sigma_x$، حيثُ σ_x الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.

- أناقش مع المجموعات السؤال 2 من أسئلة (**أحلّل النتائج**) الوارد في النشاط المفاهيمي بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ما الوسط الحسابي لعلامات الطلبة قبل ضرب العلامات في 2؟ 13
  - » ما الوسط الحسابي لعلامات الطلبة بعد ضرب العلامات في 2؟ 26
  - » هل تأثّر الوسط الحسابي بضرب العلامات؟ نعم.
  - » كيف نصف هذا التأثّر؟ الوسط الحسابي الجديد ناتج من ضرب الوسط الحسابي القديم في 2
  - » ما الانحراف المعياري لعلامات الطلبة قبل ضرب العلامات في 2؟ 3.03 تقريبًا.
  - » ما الانحراف المعياري لعلامات الطلبة بعد ضرب العلامات في 2؟ 6.06 تقريبًا.
  - » هل تأثّر الانحراف المعياري بضرب العلامات؟ نعم.
  - » كيف نصف هذا التأثّر؟ الانحراف المعياري الجديد ناتج من ضرب الانحراف المعياري القديم في 2
- أناقش الطلبة في إجابة الأسئلة السابقة، وأتوصّل معهم إلى أن ضرب مجموعة بيانات بعدد حقيقي يؤثّر في وسطها الحسابي، وأن الوسط الحسابي الجديد ينتج من ضرب العدد الحقيقي نفسه في الوسط الحسابي القديم، . وكذلك يتأثر الانحراف المعياري للبيانات عند ضربها بعدد حقيقي؛ لأن عملية الضرب تؤثّر في تشتّتها، وأن الانحراف المعياري الجديد ينتج من ضرب القيمة المُطلَقة لذلك العدد في الانحراف المعياري القديم، ويمكنني تعزيز هذا الاستنتاج بتمثيل البيانات بالنقاط قبل الضرب وبعده.
- ألخّص الاستنتاجات التي توصّلت إليها مع الطلبة حول تحويل البيانات على اللوح بالرموز، بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.

تنويع التعليم

- يساعد تمثيل البيانات بالنقاط الطلبة على تخيُّل أثر كل نوع من أنواع التحويل في البيانات، وبخاصة أولئك الذين يتمتّعون بذكاء بصري.

يُستعمَلُ تحويلُ البياناتِ أحياناً لإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ المُعقَّدةِ (ذاتِ القِيَمِ غيرِ الصحيحةِ)؛ تسهيلًا لإجراءِ الحساباتِ.

مثال 4 : منَ الحياةِ

علومٌ: قاسَ عالِمٌ درجةَ حرارةِ مفاعلٍ نوويٍّ (بالسلسيوس) في 5 مواقعَ مختلفةٍ، وكانَتِ النتائجُ التي توصَّلَ إليْها كما يأتي:

332.5, 335.3, 336.2, 337.5, 340.3

استعملَ هذا العالِمُ العلاقةَ: $y = 10x - 3300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، حيثُ x درجةُ الحرارةِ قبلَ التحويلِ، وy درجةُ الحرارةِ بعدَ التحويلِ:

معلومةٌ

تنتجُ منَ التفاعلاتِ النوويةِ طاقةٌ حراريةٌ كبيرةٌ تُستعمَلُ لتوليدِ الطاقةِ الكهربائيةِ.

أُفكِّرُ

كيفَ توصَّلَ العالِمُ إلى المعادلةِ: $y = 10x - 3300$؟ هلْ هذا التحويلُ هوَ الوحيدُ المُمكِنُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

1) **أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.**

الخطوةُ 1: أجدُ درجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

أستعملُ العلاقةَ: $y=10x-3300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، بحيثُ تصبحُ كالآتي:

25, 53, 62, 75, 103

الخطوةُ 2: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

$$\mu_y = \frac{\sum y}{n}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{25 + 53 + 62 + 75 + 103}{5} = 63.6$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ: 63.6

الخطوةُ 3: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ، ثمَّ أُعوِّضُ في صيغةِ الانحرافِ المعياريِّ:

y	y^2
25	625
53	2809
62	3844
75	5625
103	10609
المجموعُ	23512

مثال 4: من الحياة

- أوضّح للطلبة أهمية تحويل البيانات في إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للبيانات ذات القيم غير الصحيحة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أوضّح للطلبة أن العلاقة التي توصّل إليها العالم تسهم في تبسيط المشاهدات؛ تسهيلًا لإجراء الحسابات، ثم أطلب إلى أحد الطلبة استعمال العلاقة في إيجاد درجات الحرارة بعد التحويل، ثم أطلب إلى آخر إيجاد الوسط الحسابي لدرجات الحرارة بعد التحويل، ثم إلى آخر إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة بعد التحويل.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد الوسط الحسابي لدرجات الحرارة قبل التحويل -من دون الرجوع إلى البيانات الأصلية- بالاعتماد على الوسط الحسابي بعد التحويل وصيغة تحويل الوسط الحسابي، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاده.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة قبل التحويل -من دون الرجوع إلى البيانات الأصلية- بالاعتماد على الانحراف بعد التحويل وصيغة تحويل الانحراف المعياري، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاده.

أتذكَّرُ

الانحـــرافُ المعياريُّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ.

الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ	$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^2}$
بتعويضِ $\Sigma y^2 = 23512, \mu_y = 63.6, n = 5$	$= \sqrt{\frac{23512}{5} - (63.6)^2}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	≈ 25.64

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ 25.64

2 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

- الوسطُ الحسابيُّ قبلَ التحويلِ:

صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ	$\mu_y = a\mu_x + b$
بتعويضِ $\mu_y = 63.6, a = 10, b = -3300$	$63.6 = 10\mu_x - 3300$
بجمعِ 3300 إلى طرفَيِ المعادلةِ	$3363.6 = 10\mu_x$
بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 10	$336.36 = \mu_x$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ 336.36

- الانحرافُ المعياريُّ قبلَ التحويلِ:

صيغةُ تحويلِ الانحرافِ المعياريِّ	$\sigma_y = \lvert a\rvert\sigma_x$
بتعويضِ $\sigma_y = 25.64, a = 10$	$25.64 \approx \lvert 10\rvert\sigma_x$
بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 10	$2.564 \approx \sigma_x$

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ 2.564 تقريبًا.

إرشادات:

- أُدير نقاشًا مع الطلبة حول إجابة السؤال الموجود في صندوق (**أفكّر**) المجاور للمثال 4، وأتوصّل معهـم إلى أن المشـاهدات جميعها تحتوي على منزلة عشرية واحدة؛ لذا فإنه يمكن التخلّص من هـذه المنزلة بضرب جميع المشـاهدات في 10، إضافة إلـى أن المشاهدات جميعها تشـترك في العـدد 3300 الذي يمكـن التخلّص منـه بطرحه مـن كل مشـاهدة، ثـم أطلب إلـى الطلبـة اقتراح معادلات أخرى للتحويل.
- ألفت انتباه الطلبة عند إيجاد الانحراف المعياري للبيانات بعد التحويل في المثال 4 إلى أن الوسط الحسـابي عدد غير صحيح؛ لذا يُفضَّل اسـتعمال الصيغـة الثانيـة للانحـراف المعيـاري؛ تسـهيلًا للحسابات.
- ألفـت انتبـاه الطلبـة إلـى أن قيمـة الانحـراف المعيـاري قُرِّبـت بعـد التحويـل فـي المثـال 4؛ لـذا فإنـه يلزم وضـع إشـارة التقريب عنـد إيجاد الانحراف المعياري للبيانات قبل التحويل.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعـض الطلبة بعدم أخذ القيمــة المُطلَقة للعدد الــذي ضُربــت فيــه البيانات عند حســاب الانحراف المعياري للبيانات بعد التحويل؛ لذا أؤكّد هذا بشكل مستمر.

توسعة

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن المفاعلات النووية، وطرق ضبط درجــة حرارتها، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

أتحقَّقُ منْ فهمي

درجاتُ حرارةٍ: رُصِدَتْ درجاتُ الحرارةِ (بالسلسيوس) في 7 مناطقَ مختلفةٍ منَ العاصمةِ عمّانَ في أحدِ الأيامِ، وكانَتْ على النحوِ الآتي:

$$32.1, 31.7, 31.2, 31.5, 31.9, 32.2, 32.7$$

استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = 10x - 300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، حيثُ x درجةُ الحرارةِ قبلَ التحويلِ، وy درجةُ الحرارةِ بعدَ التحويلِ:

a) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ. $\mu_y = 19, \sigma_y \approx 4.57$

b) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ. $\mu_x \approx 31.9, \sigma_x \approx 0.46$

يُمكِنُ أحيانًا إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ لمجموعةٍ منَ البياناتِ بعدَ تحويلِها منْ دونِ معرفةِ البياناتِ الأصليةِ، أوِ البياناتِ بعدَ التحويلِ؛ إذْ يكتفى بمعرفةِ العلاقةِ التي استُعمِلَتْ لإجراءِ التحويلِ، وبعضِ المعلوماتِ عنِ البياناتِ بعدَ التحويلِ.

مثال 5 : منَ الحياةِ

سرعةٌ: رُصِدَتْ سرعةُ 25 درّاجةً هوائيةً مشاركةً في سباقٍ للدرّاجاتِ عندَ مرورِها منْ أحدِ الشوارعِ بوحدةِ km/h، ثمَّ حُوِّلَتْ سرعةُ هذهِ الدرّاجاتِ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 10$، حيثُ y السرعةُ بعدَ التحويلِ، وx السرعةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = -5, \sum y^2 = 2803$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1) الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ بعدَ التحويلِ.

$$\mu_y = \frac{\sum y}{n}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{-5}{25} = -0.2$$ بتعويضِ $\sum y = -5, n = 25$

130

مثال 5: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة بيانات إذا عُلمت العلاقة التي استُعمِلت لإجراء التحويل، وبعض المعلومات الأخرى عن البيانات من دون الحاجة إلى معرفة البيانات الأصلية أو البيانات بعد التحويل.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أوضّح للطلبة أنه لإيجاد الوسط الحسابي لسرعة الدراجات قبل التحويل فإنه يلزم توافر معلومتين، هما: علاقة التحويل، والوسط الحسابي لسرعة الدراجات بعد التحويل، وبما أن علاقة التحويل معطاة في السؤال، فإننا بحاجة إلى إيجاد الوسط الحسابي بعد التحويل، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجادها، وأطلب إلى آخر إيجاد الوسط الحسابي قبل التحويل.
- أوضّح للطلبة أن العلاقة التي استُعمِلت لتحويل البيانات اعتمدت على إضافة (10−) إلى كل مشاهدة، ثم أذكّرهم بأن الإضافة لا تؤثّر في الانحراف المعياري؛ لذا فإن الانحراف المعياري لسرعة الدراجات قبل التحويل مُساوٍ للانحراف المعياري لسرعة الدراجات بعد التحويل، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الانحراف المعياري بعد التحويل.

الخطوةُ 2: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

$\mu_y = a\mu_x + b$	صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ
$-0.2 = \mu_x - 10$	بتعويضِ $\mu_y = -0.2, a = 1, b = -10$
$\mu_x = 9.8$	بجمعِ 10 إلى طرفي المعادلةِ

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ هوَ 9.8

2) الانحرافُ المعياريُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ بعدَ التحويلِ.

$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^{\,2}}$	الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ
$= \sqrt{\frac{2803}{25} - (-0.2)^2}$	بتعويضِ $\Sigma y^2 = 2803, \mu_y = -0.2$
≈ 10.6	باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوةُ 2: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ هوَ 10.6 تقريبًا؛ لأنَّ التحويلَ تمثَّلَ في إضافةِ (10−)، وهذا لا يُؤثِّرُ في الانحرافِ المعياريِّ.

أتذكَّرُ

إضافةُ قيمةٍ إلى البياناتِ لا تُؤثِّرُ في تشتُّتِها.

أتحقَّقُ من فهمي

زراعةٌ: **قيسَتْ كتلُ 40 كيسًا منَ السمادِ بوحدةِ kg، ثمَّ حُوِّلَتْ هذهِ الكتلُ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 60$، حيثُ y الكتلةُ بعدَ التحويلِ، و x الكتلةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = -814, \sum y^2 = 22125$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:**

a) الوسطُ الحسابيُّ لكتلِ أكياسِ السمادِ قبلَ التحويلِ. $\mu_x \approx 39.65$

b) الانحرافُ المعياريُّ لكتلِ أكياسِ السمادِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_x \approx 11.79$

معلومةٌ

يُعَدُّ الأردنُّ إحدى الدولِ الرائدةِ في إنتاجِ الأسمدةِ عاليةِ الجودةِ على مستوى العالَمِ؛ نظرًا إلى وفرةِ خاماتِ الفوسفاتِ التي تُستعمَلُ لصناعةِ الأسمدةِ.

تنويع التعليم:

في المثال 5، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة برويّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي سؤال (**أتحقّق من فهمي**) الذي يلي المثال 5، أعزّز الوعي البيئي لدى الطلبة بأهمية الأسمدة في تحسين خواصّ التربة، وزيادة قدرتها على الحفاظ على الماء والعناصر المعدنية.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (8 – 1) والمسألتين (11, 12) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

أتدرّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أمطارٌ: في ما يأتي عددُ الأيامِ الماطرةِ منْ شهرِ شباطَ في إحدى المدنِ على مدارِ سبعةِ أعوامٍ متتاليةٍ:

18, 20, 11, 13, 5, 12, 14

1) أجدُ تباينَ عددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ. $\sigma^2 \approx 20.5$

2) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ. $\sigma \approx 4.5$

كرةُ قدمٍ: شاركَ فريقُ كرةِ قدمٍ في دوريٍّ للمُحترفينَ 5 مواسمَ متتاليةٍ، وكانَ عددُ الأهدافِ التي سجّلَها الفريقُ في هذهِ المواسمِ كما يأتي:

61, 54, 44, 57, 38

3) أجدُ تباينَ عددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ. $\sigma^2 \approx 72.6$

4) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ. $\sigma \approx 8.5$

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

6) 12, 15, 18, 16, 7, 9, 14
$\sigma^2 \approx 13.14$, $\sigma \approx 3.62$

5) 27, 43, 29, 34, 53, 37, 19, 58
$\sigma^2 \approx 153.5$, $\sigma \approx 12.4$

أطفالٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي عددَ الأطفالِ في 35 عائلةً:

عددُ الأطفالِ	0	1	2	3	4	5
عددُ العائلاتِ	6	12	9	4	3	1

7) أجدُ تباينَ عددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ. $\sigma^2 \approx 1.6$

8) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ. $\sigma \approx 1.3$

كتلٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي كتلَ عددٍ منَ الصناديقِ في شاحنةٍ:

الكتلةُ (kg)	50	55	60	65	70	75
عددُ الصناديقِ	3	10	18	22	17	10

9 أجدُ تباينَ كتلِ هذهِ الصناديقِ. $\sigma^2 \approx 44$

10 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لكتلِ هذهِ الصناديقِ. $\sigma \approx 6.6$

نباتاتٌ: قاسَتْ مُهندِسةٌ زراعيةٌ أطوالَ 7 نبتاتٍ منَ النوعِ نفسِهِ (بالسنتيمترِ)، وكانَتِ النتائجُ التي توصَّلَتْ إليْها كما يأتي:

53.6, 52.7, 55.4, 55.4, 57.2, 59.9, 62.6

ثمَّ استعملَتِ العلاقةَ: $y = 10x - 500$ لتحويلِ أطوالِ النبتاتِ، حيثُ x طولُ النبتةِ قبلَ التحويلِ، وy طولُها بعدَ التحويلِ:

$\mu_y \approx 66.86, \sigma_y \approx 32.58$

11 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ النبتاتِ بعدَ التحويلِ.

12 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ النبتاتِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

$\mu_x \approx 56.69, \sigma_x \approx 3.26$

حقائبُ: قيسَتْ كتلُ 97 حقيبةَ يدٍ (بـ kg) على متنِ إحدى الرحلاتِ الجويةِ، ثمَّ حُوِّلَتْ كتلُ هذهِ الحقائبِ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 5$، حيثُ y الكتلةُ بعدَ التحويلِ، وx الكتلةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = 314, \sum y^2 = 1623$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

13 الوسطُ الحسابيُّ لكتلِ الحقائبِ قبلَ التحويلِ. $\mu_x \approx 8.2$

14 التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لكتلِ الحقائبِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_x^2 \approx 6.3, \sigma_x \approx 2.5$

15 في مجموعةِ بياناتٍ إحصائيةٍ، إذا كانَ: $n = 40$، وكانَ: $\sum x = 6400$، وكانَ: $\sum x^2 = 1400000$، فأجدُ الانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ. $\sigma_x \approx 97$

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (22 – 19).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 19 (**تبرير**)، أذكّر الطلبة بأن الانحراف المعياري مقياس لمدى تشتّت البيانات؛ لذا فإن إجابة السؤال تكون بتحديد أي البيانات أقل تشتّتًا.
- في السؤال 22 (**تحدٍّ**)، أوجّه الطلبة إلى التعويض في الصيغة الثانية للتباين.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 18 ,10 ,9 كتاب التمارين: 14 ,13 ,(4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (17 – 15) ,12 ,11 كتاب التمارين: (12 – 10) ,(7 – 5)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 19) ,17 ,16 كتاب التمارين: (18 – 15) ,(10 – 8)

قِيسَتْ أطوالُ أقطارِ 8 حبّاتِ برتقالٍ بوحدةِ cm، وكانَتِ انحرافاتُ أطوالِ الأقطارِ عنْ وسطِها الحسابيِّ كما يأتي: $4, -2, 3, 3, -1, k, -5, 2$

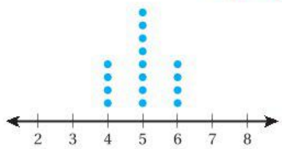
16 أجدُ قيمةَ الثابتِ k. $k = -4$

17 أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ أقطارِ حبّاتِ البرتقالِ. $\sigma^2 = 10.5, \sigma \approx 3.2$

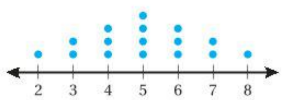
18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. $(1): \sigma^2 = 1.84$, $(2)\ \sigma \approx 1.4$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **تبريرٌ**: أيُّ التمثيلينِ النقطيينِ قيمةُ انحرافِهِ المعياريِّ أصغرُ: a أمْ b؟ أبرِّرُ إجابتي منْ دونِ إيجادِ الانحرافِ المعياريِّ لكلِّ تمثيلٍ. التمثيل a؛ لأن القيم فيه متقاربة أكثر من القيم في التمثيل b.



(a)



(b)

20 **تحدٍّ**: في مجموعةِ بياناتٍ إحصائيةٍ، إذا كانَ: $n = 10$, $\sum(3x-1) = 53$، فأجدُ $\sum x$.

$y = 3x-1, \mu_y = 5.3, \mu_x = 2.1, 2.1 = \frac{\sum x}{10}, \sum x = 21$

21 **تبريرٌ**: هلْ يُمكِنُ أنْ يكونَ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةٍ منَ البياناتِ صفرًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.
أنظر الهامش.

22 **تحدٍّ**: تمكَّنَ يوسفُ في لعبةٍ إلكترونيةٍ منْ إحرازِ النقاطِ الآتيةِ في المراحلِ الستِّ الأولى منَ اللعبةِ: 42 ,39 ,37 ,24 ,54 ,34. أجدُ عددَ النقاطِ التي يتعيَّنُ على يوسفَ إحرازُها في المرحلةِ السابعةِ منَ اللعبةِ ليكونَ الانحرافُ المعياريُّ لنتائجِها في المراحلِ السبعِ هوَ: $10\sqrt{2}$. أنظر الهامش.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
  » في مجموعة بيانات إحصائية، إذا كان: $n = 20$، وكان: $\sum(x-10) = 12$، وكان: $\sum(x-10)^2 = 144$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات. $\mu = 10.6, \sigma = 2.62$

2 أجد $\sum(x-8)$، و $\sum(x-8)^2$.

$\sum(x-8) = 52, \sum(x-8)^2 \approx 272$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (3 – 1) من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب/ طالبة كتابة 3 معلومات أساسية مُتعلَّمة في هذا الدرس على ورقة، ثم أجمع الأوراق، وأُعدّ قائمة تحوي المعلومات الأساسية المُشتَرَكة التي كتبها الطلبة؛ بُغية تقييم تعلّمهم، ومعالجة مواطن الضعف لديهم.

إجابات الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

21) يمكن أن يساوي الانحراف المعياري صفرًا إذا كانت القيم متساوية؛ حيث يكون انحراف كل قيمة عن وسطها صفرًا، ومنه فإن مربع انحراف كل قيمة عن وسطها يساوي صفرًا، ومجموع مربعات الانحرافات عن وسطها يساوي صفرًا.

22) أفرض أن m عدد النقاط التي يتعين على يوسف تسجيلها في المرحلة السابعة ليكون الانحراف المعياري $10\sqrt{2}$

$$\frac{9302 + m^2}{7} - \left(\frac{230 + m}{7}\right)^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2$$

بحل المعادلة $m = 71$

(يهمل الحل $m = 5.6$؛ لأنّ النقاط لا يمكن أن تكون كسورًا عشرية).

الدرسُ 2

الجداولُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ

Frequency Tables with Class Intervals

فكرةُ الدرسِ

- تنظيمُ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ متساويةِ الطولِ.
- تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ.

مسألةُ اليومِ

في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي استغرقَتْهُ مجموعةٌ منَ الأطفالِ لإنهاءِ لعبةِ قطعِ التركيبِ:

83	114	84	90	103
77	92	108	124	185
89	74	176	61	162
49	63	79	91	65

1) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

2) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ متصلةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الفئاتِ تُستعمَلُ لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا، وأنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ، بحيثُ تُقابِلُ كلُّ فئةٍ عددَ البياناتِ التي تحويها (التكرارُ). والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ متصلةٍ.

أتذكَّرُ

البياناتُ المتصلةُ هيَ بياناتٌ قِيَمُها المُمكِنةُ غيرُ قابلةٍ للعَدِّ، لكنَّها قابلةٌ للقياسِ، ويُمكِنُ تقريبُها لتُعطِيَ درجةً منَ الدقَّةِ. ومِنْ أمثلتِها: الطولُ، والكتلةُ، ودرجةُ الحرارةِ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

رياضةٌ: في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) المُستغرَقُ في لعبِ 24 مباراةَ كرةِ تِنِسٍ:

102	126	216	104	66	93	129	186
54	73	194	138	98	77	145	90
238	55	87	165	181	94	110	176

1 **أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها.

أصغرُ قيمةٍ في البياناتِ هيَ 54، وأكبرُ قيمةٍ فيها هيَ 238.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تنظيم بيانات عددية متصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- تنظيم بيانات عددية منفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- حل مسائل حياتية على مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف البيانات العددية المتصلة والمنفصلة.
- تنظيم بيانات عددية متصلة ومنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- حساب مقاييس النزعة المركزية للجداول التكرارية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أسأل طلبة الصف عن أطوالهم بالسنتيمتر، وأسجلّها على اللوح.
- أسأل الطلبة:
  - » هل الأطوال بيانات عددية أم نوعية؟ عددية.
  - » هل الأطوال بيانات عددية متصلة أم منفصلة؟ عددية متصلة.
  - » ما أفضل طريقة لتنظيم البيانات على اللــوح: إبقاؤها على صورة بيانات مفردة، أم تنظيمها في جداول تكرارية، أم تنظيمها في جداول تكرارية ذات فئات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السـؤال السـابق، وأتوصّل معهم إلى أن أفضل طريقة لتنظيم البيانات هي الجـداول التكراريـة ذات الفئات، ثم أطلب إليهم تنظيمها في جـدول تكراري مُكوَّن من 4 إلى 6 فئات متساوية الطول -بحسب عدد طلبة الصف-، وأحدّد لهم فئات الجدول.

إرشــاد: تعلّم الطلبة في الصف الســادس تنظيم بيانات مُفرَدة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول معطاة، وسيتعلّمون في هذا الدرس تنظيم بيانات مُفرَدة في جداول تكرارية يحدّدون فئاتها بأنفسهم.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » هل الزمن بيانات عددية أم نوعية؟ عددية.
  - » هل الزمن بيانات عددية متصلة أم منفصلة؟ متصلة.
  - » كيف يمكن تنظيم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سـابقًا عن البيانات العددية المتصلة والمنفصلة، وأذكّرهم بشـكل الفئات التي تُستعمَل للتعبير عن كل نوع من أنواع هذه البيانات.
- أذكّر الطلبة بأن الجداول التكرارية ذات الفئات تُستعمَل لعرض البيانات العددية المتصلة والمنفصلة والمُجمَّعة في فئات، بحيث تقابل كل فئة عدد البيانات التي تحويها (**التكرار**)، ثم أذكّرهم بأنّهم تعلّموا تنظيـم البيانـات العدديـة في جداول تكراريـة ذات فئات معطاة، ثـم أبيّن لهم أنّهم سـيتعلّمون في هذا الدرس تنظيم البيانات العددية في جداول تكرارية ذات فئات متسـاوية الطول يحدّدون فئاتها بأنفسهم بما ينسجم مع البيانات.

الخطوةُ 2: أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

أختارُ فئاتٍ تتساوى في الطولِ، وتشملُ جميعَ البياناتِ، مثلَ اختيارِ 5 فئاتٍ متساويةٍ في الطولِ.
وبما أنَّ البياناتِ متصلةٌ، فإنَّني أستعملُ المتبايناتِ للتعبيرِ عنَ الفئاتِ كما في الجدولِ الآتي:

الزمنُ المُستغرَقُ لمبارياتِ التِّنِسِ (t)		
الزمنُ (min)	الإشاراتُ	التكرارُ
$40 \le t < 80$		
$80 \le t < 120$		
$120 \le t < 160$		
$160 \le t < 200$		
$200 \le t < 240$		

الخطوةُ 3: أضعُ إشاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ البياناتِ التي تحويها، ثمَّ أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

الزمنُ المُستغرَقُ لمبارياتِ التِّنِسِ (t)		
الزمنُ (min)	الإشاراتُ	التكرارُ
$40 \le t < 80$	卌	5
$80 \le t < 120$	卌 |||	8
$120 \le t < 160$	||||	4
$160 \le t < 200$	卌	5
$200 \le t < 240$	||	2

أتعلَّمُ

يُفضَّلُ ألّا يقلَّ عددُ الفئاتِ المختارةِ عنْ 4 فئاتٍ، وألّا يزيدَ عددُها على 8 فئاتٍ، و لا يُشترَطُ أنْ يكونَ الحدُّ الأدنى للفئةِ الأولى هوَ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وإنَّما يجبُ أنْ تحتويَ الفئةُ الأولى على أصغرِ قيمةٍ في البياناتِ، وكذا الحالُ بالنسبةِ إلى الفئةِ الأخيرةِ والقيمةِ الكبرى في البياناتِ.

أتذكَّرُ

يقعُ العددُ 40 ضمنَ الفئةِ: $40 \le t < 80$، في حينِ لا يقعُ العددُ 80 ضمنَ هذهِ الفئةِ.

2 **أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.**

ألاحِظُ منَ الجدولِ التكراريِّ أنَّ معظمَ المبارياتِ تستغرقُ زمنًا يتراوحُ بينَ 80 دقيقةً و200 دقيقةٍ، وأنَّ عددًا قليلًا منْها يستمرُّ أقلَّ منْ ذلكَ أوْ أكثرَ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

صِحَّةٌ: في ما يأتي كتلُ 27 مشتركًا في نادٍ رياضيٍّ، مُقرَّبةً إلى أقربِ كيلوغرامٍ: أنظر الهامش.

53	67	72	55	40	86	75	50	57
64	68	73	82	79	48	53	60	65
67	61	56	45	63	70	69	75	70

a) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

b) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

136

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 1):

a)

كتل المشتركين في النادي الرياضي (m)		
الكتلة (kg)	الإشارات	التكرار
$40 \le m < 50$	|||	3
$50 \le m < 60$	卌 |	6
$60 \le m < 70$	卌 ||||	9
$70 \le m < 80$	卌 ||	7
$80 \le m < 90$	||	2

b) تتراوح كتل 81% من المشتركين بين 50 kg وَ 80 kg، وعدد قليل من المشتركين كتلهم أقل من ذلك أو أكثر.

- أوضّح للطلبة أنه يمكن تلخيص خطوات تنظيم البيانات العددية في جداول تكرارية باتباع الآتي:
  - » تحديد نوع البيانات العددية إن كانت متصلة أم منفصلة.
  - » تحديد أصغر قيمة في البيانات، وأكبر قيمة فيها.
  - » اختيار فئات مناسبة تشمل البيانات المستهدفة، على ألّا يقل عدد الفئات المختارة عن 4 فئات، وألّا يزيد عددها على 8، بحيث تحتوي الفئة الأولى أصغر قيمة في البيانات، وتحتوي الفئة الأخيرة أكبر قيمة في البيانات، إضافة إلى اختيار المتباينات المتصلة للتعبير عن الفئات إذا كانت البيانات عددية متصلة، واختيار فئات بينها فجوات للتعبير عن الفئات إذا كانت البيانات عددية منفصلة.
  - » وضع إشارات عدّ مقابل كل فئة تمثّل عدد البيانات التي تحويها، وإيجاد مجموع الإشارات في عمود التكرار.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 1، ثم أكتب البيانات على اللوح، وأسأل الطلبة:
  - » ما نوع البيانات؟ لماذا؟ عددية متصلة؛ لأنها بيانات غير قابلة للعدّ ولكنها قابلة للقياس.
  - » ما أصغر قيمة في البيانات؟ 54
  - » ما أكبر قيمة في البيانات؟ 238
  - » ما عدد الفئات متساوية الطول المناسب لتنظيم البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم إلى الفئات المناسبة لتنظيم البيانات، ويمكنني توجيههم إلى الفئات المُستعمَلة في تنظيم البيانات في كتاب الطالب.
- أكتب الجدول التكراري على اللوح، وأنظّم البيانات فيه مع الطلبة، ثم أسألهم:
  - » كيف يمكن وصف البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش إجابات الطلبة عن السؤال السابق، وأعزّز الإجابات الصحيحة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ منفصلةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الفئاتِ تُستعمَلُ أيضًا لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا، وأنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ، بحيثُ تُقابِلُ كلُّ فئةٍ عددَ البياناتِ التي تحويها (التكرارُ). والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ منفصلةٍ.

أتذكَّرُ

البياناتُ المنفصلةُ هيَ بياناتٌ تأخذُ قِيَمًا مُحدَّدةً قابلةً للعَدِّ، مثلَ: عددِ الأخوةِ، وعددِ الكتبِ، وعددِ الأشجارِ.

مثال 2 : منَ الحياةِ

مكتباتٌ: في ما يأتي عددُ الكتبِ المُعارةِ منْ إحدى المكتباتِ العامّةِ في 18 يومًا:

23 45 31 37 63 54 36 60 49

50 32 45 40 38 37 41 53 57

1 **أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.**

الخطوةُ 1: أحدِّدُ أقلَّ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها.

أقلُّ قيمةٍ في البياناتِ هيَ: 23، وأكبرُ قيمةٍ فيها هيَ: 63

الخطوةُ 2: أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

أختارُ فئاتٍ تتساوى في الطولِ، وتشملُ جميعَ البياناتِ، مثلَ اختيارِ 5 فئاتٍ متساويةٍ في الطولِ.

وبما أنَّ البياناتِ منفصلةٌ، فإنَّني أعبِّرُ عنها كما في الجدولِ الآتي:

عددُ الكتبِ المُعارةِ في إحدى المكتباتِ

عددُ الكتبِ المُعارةِ	الإشاراتُ	التكرارُ
20 – 29		
30 – 39		
40 – 49		
50 – 59		
60 – 69		

أتذكَّرُ

عندَ تنظيمِ البياناتِ المنفصلةِ بالفئاتِ، أجعلُ فجواتٍ بينَ الفئاتِ. فمثلًا: تنتهي الفئةُ الأولى عندَ العددِ 29، وتبدأُ الفئةُ الثانيةُ عندَ العددِ 30

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتذكّر**) الوارد في هامش المثال 1؛ لما له من أهمية في تنظيم البيانات في الجدول التكراري، وتحديد إن كان العدد يقع ضمن الفئة أم لا.
- في المثال 1، ألفت انتباه الطلبة إلى كتابة المتباينات بصورة متصلة للتعبير عن الفئات؛ لأن البيانات في المثال متصلة.
- أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال باختيار فئات متساوية الطول مختلفة عن الفئات التي اعتُمدت في كتاب الطالب، وملاحظة تأثير ذلك في الحكم على وصف توزيع البيانات.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه يمكن وصف توزيع البيانات في الجدول التكراري ذي الفئات بأكثر من طريقة.
- أذكّر الطلبة بأن القيم الحقيقية للبيانات لا تظهر في الجداول التكرارية ذات الفئات.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند استعمال المتباينات للتعبير عن فئات البيانات العددية المتصلة بإغلاق طرفي الفئة باستعمال رمز المساواة؛ لذا أؤكّد وبشكل مستمر جعل أحد طرفي الفئة مغلقًا والآخر مفتوحًا.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

الخطوة 3: أضعُ إشاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ البياناتِ التي تحويها، ثُمَّ أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

عددُ الكتبِ المُعارةِ في إحدى المكتباتِ		
عددُ الكتبِ المُعارةِ	الإشاراتُ	التكرارُ
20 – 29	|	1
30 – 39	𝍸 |	6
40 – 49	𝍸	5
50 – 59	||||	4
60 – 69	||	2

2 **أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.**

أُلاحظُ منَ الجدولِ التكراريِّ أنَّ نسبةَ الأيامِ الّتي أعارَتِ المكتبةُ فيها ما يتراوحُ بينَ 30 إلى 59 كتابًا في اليومِ الواحدِ تزيدُ على 80% منْ أيامِ الإعارةِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

معلومةٌ

يهدفُ بنكُ الطعامِ الأردنيُّ إلى القضاءِ على الجوعِ في الأردنِّ عنْ طريقِ توفيرِ الطعامِ للأُسَرِ المحتاجةِ، ويهدفُ أيضًا إلى نشرِ الوعيِ حولَ كيفيةِ استغلالِ الفائضِ منَ الغذاءِ في المؤتمراتِ والأفراحِ والمناسباتِ وإيصالِهِ إلى الفقراءِ والمحرومينَ.

بنكُ الطعامِ الأردنيُّ: في ما يأتي عددُ الأُسَرِ المحتاجةِ التي حصلَتْ على وجباتٍ منْ بنكِ الطعامِ الأردنيِّ في 22 يومًا: أنظر الهامش.

41	24	13	14	15	16	30	17	56	18	19
24	22	12	20	27	17	34	10	18	72	16

a) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

b) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

تعلَّمْتُ سابقًا إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ، وهيَ: الوسطُ الحسابيُّ، والوسيطُ، والمنوالُ للبياناتِ المفردةِ. وبالرغمِ منْ أنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ لا تظهرُ فيها القِيَمُ الحقيقيةُ للبياناتِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُها لتقديرِ كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والوسيطِ، والمنوالِ؛ إذْ يُمكِنُ النظرُ إلى جميعِ القِيَمِ في فئةٍ مُعيَّنةٍ (سواءٌ كانَتِ البياناتُ متصلةً أوْ منفصلةً) على أساسِ أنَّ كُلًّا منْها تساوي منتصفَ الفئةِ (مركزُ الفئةِ).

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 2):

a)

عدد الأسر المحتاجة		
عدد الأسر	الإشارات	التكرار
0–19	𝍸 𝍸 ||	12
20–39	𝍸 ||	7
40–59	||	2
60–79	|	1

b) ألاحظ من الجدول التكراري أن أكثر من 85% من أيام التوزيع يكون عدد الأسر التي تحصل على معونات من بنك الطعام في اليوم الواحد أقل من أو يساوي 39 أسرة.

مثال 2: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنّهم تعلّموا في المثال 1 تنظيم بيانات عددية متصلة في جداول تكرارية، وأنّهم سيتعلّمون في المثال 2 تنظيم بيانات عددية منفصلة في جداول تكرارية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 2، ثم أكتب البيانات على اللوح، وأسأل الطلبة:
  » ما نوع البيانات؟ لماذا؟ عددية منفصلة؛ لأنها بيانات تأخذ قيمًا محدّدة قابلة للعدّ.
  » ما أصغر قيمة في البيانات؟ 23
  » ما أكبر قيمة في البيانات؟ 63
  » ما عدد الفئات متساوية الطول المناسب لتنظيم البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم إلى الفئات المناسبة لتنظيم البيانات، ويمكنني توجيههم إلى الفئات المُستعمَلة في تنظيم البيانات في كتاب الطالب.
- أكتب الجدول التكراري على اللوح، وأنظّم البيانات في الجدول مع الطلبة، ثم أسألهم:
  » كيف يمكن وصف البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش إجابات الطلبة عن السؤال السابق، وأعزّز الإجابات الصحيحة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

مفهومٌ أساسيٌّ

- لتقديرِ الوسطِ الحسابيِّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيثُ:

x: مركزُ الفئةِ.

f: التكرارُ المُقابِلُ لكلِّ فئةٍ.

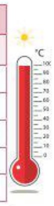
- لتقديرِ المنوالِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أجدُ مركزَ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا.
- لتقديرِ وسيطِ بياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أجدُ مركزَ الفئةِ التي تكرارُها التراكميُّ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي: $\frac{n+1}{2}$، حيثُ n مجموعُ التكراراتِ.

أتعلَّمُ

في هذا الدرس، أنظرُ إلى جميعِ البياناتِ بوصفِها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، يُرمَزُ إلى وسطِهِ الحسابيِّ بالرمزِ μ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

طقسٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأيامِ شهرِ آذارَ بحسبِ درجاتِ الحرارةِ (إلى أقربِ درجةٍ سلسيةٍ) في محافظةِ عجلونَ:



درجاتُ الحرارةِ (T)	
درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ
$10 \le T < 12$	3
$12 \le T < 14$	7
$14 \le T < 16$	12
$16 \le T < 18$	5
$18 \le T < 20$	3

1 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ.

أُنشِئُ جدولًا بإضافةِ عمودينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما مراكزَ الفئاتِ ونواتجَ ضربِ التكراراتِ في مراكزِ الفئاتِ على النحوِ الآتي:

درجاتُ الحرارةِ (°C)	f	x	$f \times x$
$10 \le T < 12$	3	11	33
$12 \le T < 14$	7	13	91
$14 \le T < 16$	12	15	180
$16 \le T < 18$	5	17	85
$18 \le T < 20$	3	19	57
المجموعُ	30		446

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوقي (**أتذكّر**) الواردين في هامش المثال 2؛ لما لهما من أهمية في كتابة الفئات في الجدول التكراري بصورة منفصلة؛ لأن البيانات في المثال منفصلة.
- أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال باختيار فئات متساوية الطول مختلفة عن الفئات التي اعتُمِدت في كتاب الطالب، وملاحظة تأثير ذلك في الحكم على وصف توزيع البيانات.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه يمكن وصف توزيع البيانات في الجدول التكراري ذي الفئات بأكثر من طريقة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي سؤال (**أتحقّق من فهمي**) الذي يلي المثال 2، أعزّز وعي الطلبة بالتنمية المستدامة التي تسعى إلى القضاء على الجوع وتوفير الطعام للأُسَر المحتاجة، ثم أطلب إليهم البحث في شبكة الإنترنت عن أهداف بنك الطعام الأردني، والأنشطة التي يقوم بها، وكتابة فقرة قصيرة توضّح كيف يمكن دعم عمله.

مثال 3: من الحياة

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا عن إيجاد الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال للبيانات المُفردَة، وأقدّم لهم مثالًا على ذلك.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن تقدير الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال للبيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية؛ لأن الفئات لا تُظهر القيم الحقيقية للبيانات، ولكن يمكن النظر إلى جميع القيم في فئة معينة على أساس أنها تساوي مركز الفئة.
- أوضّح للطلبة كيفية تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات، بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 3، ثم أكتب الجدول التكراري ذا الفئات الخاص بالمثال على اللوح، وأسأل الطلبة:
  - » ما نوع البيانات؟ لماذا؟ عددية متصلة؛ لأنها بيانات غير قابلة للعدّ ولكنها قابلة للقياس.
  - » ما الفئة الأكثر تكرارًا؟ $14 \leq T < 16$
- أطلب إلى أحد الطلبة أن يضيف عمودين إلى الجدول الذي على اللوح، ويكتب في أحدهما مراكز الفئات، ثم أطلب إلى طالب آخر/ طالبة أخرى كتابة نواتج ضرب التكرارات في مراكز الفئات في العمود الآخر.
- أطلب إلى أحد الطلبة تقدير قيمة الوسط الحسابي للبيانات المُنظَّمة في الجدول.
- أذكّر الطلبة أن منوال البيانات المُنظَّمة في جدول هو مركز الفئة الأكثر تكرارًا، ثم أطلب إلى أحد الطلبة تحديده، وأذكّرهم أن قيمته تقريبية.
- أوضّح للطلبة أننا نحتاج إلى إنشاء جدول تكرار تراكمي لتقدير وسيط البيانات المُنظَّمة في الجداول التكرارية ذات الفئات، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إنشاءه.
- أطلب إلى أحد الطلبة تحديد رتبة الوسيط، ثم أطلب إلى آخر تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط، والتي يمثّل مركزها تقديرًا للوسيط.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{446}{30}$$ بالتعويضِ

$$\approx 14.9$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ هوَ 14.9 °C تقريبًا.

2 **أُقدِّرُ منوالَ درجاتِ الحرارةِ.**

لتقديرِ المنوالِ، أبحثُ عنْ مركزِ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا. وبالرجوعِ إلى البياناتِ في الجدولِ أعلاهُ، أُلاحِظُ أنَّ الفئةَ: $14 \leq t < 16$ تُقابِلُ أعلى تكرارٍ، وهوَ 12. وبذلكَ، فإنَّ المنوالَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، منوالُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

3 **أُقدِّرُ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ.**

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ المجاورِ.

درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ التراكميُّ
$10 \leq T < 12$	3
$12 \leq T < 14$	$3 + 7 = 10$
$14 \leq T < 16$	$3 + 7 + 12 = 22$
$16 \leq T < 18$	$3 + 7 + 12 + 5 = 27$
$18 \leq T < 20$	$3 + 7 + 12 + 5 + 3 = 30$

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ رتبةَ الوسيطِ.

رتبةُ الوسيطِ هيَ: $\frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15.5$.

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ الفئةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ.

بما أنَّ رتبةَ الوسيطِ هيَ 15.5، فإنَّ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ يقعُ في الفئةِ: $14 \leq t < 16$؛ لأنَّ التكرارَ التراكميَّ لهذهِ الفئةِ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي 15.5

وبذلكَ، فإنَّ الوسيطَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، وسيطُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

أتعلّمُ

عندَ ترتيبِ المشاهداتِ تصاعديًّا بحسبِ قِيَمِها، فإنَّ رتبةَ المشاهدةِ هيَ ترتيبُ موقعِها في مجموعةِ البياناتِ. وبما أنَّ القِيَمَ الدقيقةَ للبياناتِ في هذا المثالِ غيرُ معلومةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحديدُ الفئةِ التي تقعُ فيها المشاهدةُ عنْ طريقِ رتبتِها، وإنشاءِ جدولِ تكرارٍ تراكميٍّ.

140

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتعلّم**) الوارد في هامش المفهوم الأساسي، وأؤكّد أن جميع البيانات الواردة في أمثلة أو أسئلة هذا الدرس سيُنظَر إليها على أنها تمثّل مجتمعًا إحصائيًا وليس عينة منه، وأذكّرهم بالرموز المُستعمَلة للوسط الحسابي بوصفه معلمة لمجتمع أو بوصفه معلمة لعيّنة من المجتمع الإحصائي.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتعلم**) الوارد في هامش المثال 3؛ لما له من أهمية في توضيح مفهوم رتبة المشاهدة، وعلاقته بتقدير قيمة الوسيط في الجداول التكرارية ذات الفئات.

تنويع التعليم:

في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة تحديد الفئة التي يقع فيها وسيط البيانات؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأوضّح لهم أهمية تحديد رتبة الوسيط أولًا، ثم البحث عن أول فئة تكرارها التراكمي أكبر من أو يساوي رتبة الوسيط.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (4 – 1) والمسائل (10 – 8) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (20 – 15).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 19 (**أكتشف الخطأ**)، أوجّه الطلبة إلى تحديد نوع البيانات أولًا؛ لمساعدتهم على تحديد الحل الصحيح.
- في السؤال 20 (**تبرير**)، أوجّه الطلبة إلى تقدير الوسط الحسابي للمسافات التي قطعها اللاعب، ومقارنته بثلث مسافة السباق.

أتحقّق من فهمي

حلوياتٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لكتلِ كعكاتٍ في أحدِ المخابزِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ غرامٍ:

a) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للكتلِ. 490 g

b) أُقدِّرُ منوالَ الكتلِ. 450

c) أُقدِّرُ وسيطَ الكتلِ. 450

كتلُ الكعكاتِ (m)	
الكتلُ (g)	التكرارُ
$300 \leq m < 400$	4
$400 \leq m < 500$	7
$500 \leq m < 600$	6
$600 \leq m < 700$	3

أتدرّبُ وأحلُّ المسائلَ

أوراقٌ: في ما يأتي أطوالُ مجموعةٍ منْ أوراقِ الشجرِ بالسنتيمترِ: (1, 2) أنظر الهامش.

11.4	6.3	9.8	13.2	8.5	16.3	5.4	7.9	10.2	11.5	8.6	7.0
8.7	12.1	9.9	8.7	10.7	8.5	11.2	14.8	17.2	12.6	10.4	8.7

1) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

2) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

مقالاتٌ: في ما يأتي عددُ الكلماتِ في مقالاتٍ كتبَها الطلبةُ المُتقدِّمونَ لمسابقةِ المقالةِ القصيرةِ: (3, 4) أنظر الهامش.

495	511	483	502	500	496	532	498	496
499	503	521	487	518	526	508	514	503

3) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

4) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

1)

أطوال أوراق الشجر (l)		
الأطوال	الإشارات	التكرار
$3 \leq l < 6$	|	1
$6 \leq l < 9$	卌 ||||	9
$9 \leq l < 12$	卌 |||	8
$12 \leq l < 15$	||||	4
$15 \leq l < 18$	||	2

2) أطوال 87.5% من أوراق الشجر أكبر من أو يساوي 6 وأقل من 15، وعدد قليل منها طوله أقل من ذلك أو أكثر.

3)

عدد كلمات مقالات الطلبة		
عدد الكلمات	الإشارات	التكرار
480–489	||	2
490–499	卌	5
500–509	卌	5
510–519	|||	3
520–529	||	2
530–539	|	1

4) ثُلثا المقالات تقريبًا عدد كلماتها من 490 كلمة إلى 519 كلمة، وعدد قليل من المقالات تتضمن كلمات أقل من ذلك أو أكبر.

عياداتٌ طبيةٌ: في ما يأتي أعمارُ المُراجِعينَ لعيادةٍ في أحدِ المستشفياتِ خلالَ أحدِ الأيامِ:

51	62	54	55	45	58	53	41	64	44
49	52	47	43	52	49	37	58	47	50
58	51	62	56	44	47	50	53	58	52

5) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ. (5–7) أنظر الهامش.

6) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

7) أُعيدُ تنظيمَ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ، بحيثُ أختارُ فئاتٍ ذاتَ أطوالٍ تختلفُ عنْ أطوالِ الفئاتِ في السؤالِ 5، ثمَّ أُحدِّدُ الجدولَ الذي تُعرَضُ فيهِ البياناتُ بصورةٍ أفضلَ.

أزهارٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأطوالِ مجموعةٍ منْ أزهارِ النرجسِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

أطوالُ أزهارِ النرجسِ (t)	
الطولُ (cm)	التكرارُ
$10 \le t < 14$	21
$14 \le t < 18$	57
$18 \le t < 22$	65
$22 \le t < 26$	52
$26 \le t < 30$	12

8) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ الأزهارِ. 19.6

9) أُقدِّرُ منوالَ أطوالِ الأزهارِ. 20

10) أُقدِّرُ وسيطَ أطوالِ الأزهارِ. 20

كتبٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأعدادِ الكتبِ التي اشتراها 25 شخصًا منْ مكتبةِ زيادٍ في أحدِ الأيامِ:

عددُ الكتبِ المَبيعةِ	
عددُ الكتبِ	التكرارُ
1 – 3	10
4 – 6	8
7 – 9	4
10 – 12	1
13 – 15	2

11) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ. 5.24

12) أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ. 2

13) أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. 5

14) أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. أنظر الهامش.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 11), 5, 6 كتاب التمارين: 2, 3, 5, 7
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 19 ,(13 – 11) ,(7 – 5) كتاب التمارين: 1, 3, 6, 8
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 15) كتاب التمارين: 1, 4, 6, 9

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

5)

أعمار المراجعين لعيادة طبية (n)		
الأعمار	الإشارات	التكرار
$34 \le n < 42$	||	2
$42 \le n < 50$	𝍸 ||||	9
$50 \le n < 58$	𝍸𝍸 ||	12
$58 \le n < 66$	𝍸 ||	7

6) حوالي 93% من المراجعين أعمارهم 42 عامًا أو أزيد.

7)

أعمار المراجعين لعيادة طبية (n)		
الأعمار	الإشارات	التكرار
$36 \le n < 41$	|	1
$41 \le n < 46$	𝍸	5
$46 \le n < 51$	𝍸 ||	7
$51 \le n < 56$	𝍸 ||||	9
$56 \le n < 61$	𝍸	5
$61 \le n < 66$	|||	3

عرض البيانات في هذا الجدول أفضل؛ لأن أغلب البيانات توزّعت على 6 فئات بدلًا من 4 فئات كما في السؤال 5 وهذا يجعل وصف البيانات وتقدير مقاييس النزعة المركزية لها باستعمال هذا الجدول أكثر دقة.

14) (1)

الزمن المُستغرَق لإنهاء لعبة تركيب (t)		
الزمن (min)	الإشارات	التكرار
$45 \le t < 75$	𝍸	5
$75 \le t < 105$	𝍸 ||||	9
$105 \le t < 135$	|||	3
$135 \le t < 165$	|	1
$165 \le t < 195$	||	2

(2) 70% من الأطفال يستغرقون أقل من 105 دقائق في تركيب اللعبة.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
  » **يبيّن الجدول الآتي توزيعًا للنقاط التي حقّقها مجموعة من اللاعبين/ اللاعبات في إحدى المسابقات:**

التكرار	النقاط
8	0 – 9
5	10 – 19
10	20 – 29
5	30 – 39
2	40 – 49

  » إذا علمتُ أن تبديلًا جرى بين موقعي تكرار فئتين في الجدول بالخطأ، وأدّى ذلك إلى زيادة في تقدير الوسط الحسابي للبيانات بمقدار 1.7 تقريبًا، فأي تكرارين بُدِّل بين موقعيهما؟ أبرّر إجابتي. الخطأ في موقع تكراري الفئتين 10–19 و 20–29؛ لأن الوسط الحسابي للبيانات في الوضع الحالي 20.5، والوسط الحسابي عند تبديل تكراري الفئتين 18.8 تقريبًا، وهذا يجعل الفارق بين الوسطين الحسابيين يساوي 1.7 تقريبًا.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 4 و 5 من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:
  » **أقدّر الوسط الحسابي والمنوال والوسيط للبيانات الواردة في الجدول الآتي:**

التكرار	z
9	1 – 20
13	21 – 40
21	41 – 60
34	61 – 80
17	81 – 100

الوسط الحسابي: 58.37 تقريبًا.

الوسيط: 70.5 تقريبًا.

المنوال: 70.5 تقريبًا.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: اختبرَ قسمُ الجودةِ في مصنعٍ لإنتاجِ المصابيحِ الكهربائيةِ 100 مصباحٍ لتعرُّفِ إذا كانَ مُتوسِّطُ العمرِ الافتراضيِّ للمصابيحِ أكثرَ منْ 200 ساعةٍ، ثمَّ نظَّمَ النتائجَ التي توصَّلَ إليْها في الجدولِ المجاورِ:

العمرُ الافتراضيُّ للمصابيحِ (h)

التكرارُ	العمرُ (h)
24	$150 \le h < 175$
45	$175 \le h < 200$
18	$200 \le h < 225$
10	$225 \le h < 250$
3	$250 \le h < 275$

15 أُقدِّرُ منوالَ أعمارِ المصابيحِ. 187.5

16 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لأعمارِ المصابيحِ. 193.25

17 أجدُ النسبةَ المئويةَ للمصابيحِ التي عمرُها الافتراضيُّ أكثرُ منْ أوْ يساوي 200 ساعةٍ، مُبرِّرًا إجابتي. 31%

18 هلْ يُمكِنُ استنتاجُ أنَّ مُتوسِّطَ العمرِ الافتراضيِّ للمصابيحِ هوَ أكثرُ منْ 200 ساعةٍ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
لا؛ لأن النسبة المئوية للمصابيح التي متوسط عمرها الافتراضي أكبر من 200 ساعة يساوي 31% وهو أقل من 50%

19 **أكتشفُ الخطأَ**: في ما يأتي عددُ الدقائقِ (مُقرَّبةً إلى أقربِ دقيقةٍ) التي استغرقَها بعضُ المُتسابِقينَ لإنهاءِ سباقٍ للجري:

54	57	55	59	52	53	58	59	61	60	55
57	59	60	57	58	54	58	57	58	61	54

نظَّمَ كلٌّ منْ رامي وفيصلٍ البياناتِ كما هوَ مُبيَّنٌ تاليًا. أيُّهما نظَّمَ البياناتِ بصورةٍ صحيحةٍ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

رامي	فيصلٌ
52 – 54	$52 \le t < 54$
55 – 57	$54 \le t < 56$
58 – 60	$56 \le t < 58$
61 – 63	$58 \le t < 60$
	$60 \le t < 62$

نظّم فيصل البيانات بصورة صحيحة؛ لأن البيانات متصلة ونظّمها باستعمال المتباينات، أما رامي فنظّمها بجعل فجوات بين الفئات المتتالية.

20 **تبريرٌ**: يتدرَّبُ لاعبٌ يوميًّا على سباقٍ طويلِ المسافةِ (الماراثونُ) طولُهُ 21 km. يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا للمسافةِ (إلى أقربِ كيلومترٍ) التي يقطعُها اللاعبُ كلَّ يومٍ خلالَ شهرٍ كاملٍ. إذا وجدَ اللاعبُ أنَّهُ منَ الأفضلِ أنْ يقطعَ مسافةً كلَّ يومٍ تُعادِلُ في مُتوسِّطِها ثلثَ مسافةِ السباقِ، فهلْ يعني ذلكَ أنَّهُ تدرَّبَ بصورةٍ كافيةٍ في هذا الشهرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

التكرارُ	المسافةُ (km)
3	$0 \le d < 5$
8	$5 \le d < 10$
13	$10 \le d < 15$
5	$15 \le d < 20$
2	$20 \le d < 25$

تدرّب بشكل كاف؛ لأن الوسط الحسابي للتدريب اليومي يساوي 11.7 km وهذا يزيد على ثُلث مسافة السباق التي تساوي 7 km والتي يهدف إلى أن يتدرّبها يوميًّا.

نتاجات الدرس

- تعرّف المُدرَّجات التكرارية.
- تمثيـل البيانات العددية المتصلـة المُنظَّمة في جداول تكراريـة ذات فئـات متسـاوية الطـول بمدرَّجـات تكرارية.
- تعرّف مفهـوم الكثافـة التكرارية، وتوظيفـه في تمثيل البيانات العددية المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية الطول بمُدرَّجات تكرارية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف البيانات العددية المتصلة والمنفصلة.
- تنظيـم بيانـات عدديـة متصلـة ومنفصلـة فـي جداول تكراريـة ذات فئـات متسـاوية الطـول، وتمثيلها باستعمال المخططات التكرارية.

مراجعـة التعلّـم القبلـي ومعالجـة الفاقـد التعليمـي:

- أوجّـه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطـة بمـا سـيقدَّم مـن موضوعـات الـدرس فـي الحصـة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) فـي كتـاب التمارين، ثـم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجـوّل بين الطلبـة؛ لمتابعتهـم أثناء الحـل، وتحديد نقـاط ضعفهـم، وأوجّههم إلى مراجعـة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 3

المُدرَّجاتُ التكراريةُ
Histograms

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ البياناتِ المتصلةِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ.

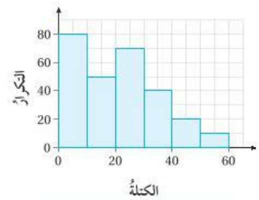
المصطلحاتُ المُدرَّجاتُ التكراريةُ، الكثافةُ التكراريةُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لمجموعةٍ منَ الشـقـقِ السـكنيةِ في إحدى المناطقِ تبعًا لمسـاحةِ كلٍّ منْها. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ مُخطَّطٍ تكراريٍّ.

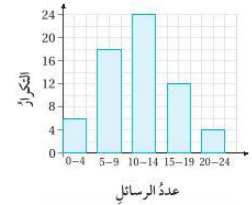
التكرارُ	المساحةُ (m^2)
15	$70 \le t < 100$
18	$100 \le t < 150$
12	$150 \le t < 250$
6	$250 \le t < 300$

المَدرَّجاتُ التكراريةُ

تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّ المُخطَّطاتِ التكراريةَ هيَ أكثرُ الطرائقِ شـيوعًا لتمثيـلِ البياناتِ المتصلةِ والمنفصلةِ والمُمثَّلةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.



أستعملُ تدريجًا متصلًا للبياناتِ المتصلةِ.



أستعملُ تدريجًا منفصلًا للبياناتِ المنفصلةِ.

أتعلَّمُ
تُستعمَلُ المُدرَّجاتُ التكراريةُ لتمثيلِ البياناتِ المتصلةِ أصلًا، حتى لو كانَتْ قِيَمُها مُقرَّبةً إلى أعدادٍ صحيحةٍ.

يُطلَقُ على المُخطَّطاتِ التكراريةِ المُسـتعمَلةِ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ اسـمُ **المُدرَّجاتِ التكراريةِ** (histograms). سأتعلَّمُ في هذا الدرسِ تمثيلَ نوعينِ منْها، هما: المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتسـاويةِ الطولِ، والمُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أذكّر الطلبة بأنواع التمثيلات البيانية التي تعلّموها سابقًا (التمثيل بالصور، الأعمدة البيانية، القطاعات الدائرية، التمثيل بالنقاط، الخطوط البيانية، الساق والورقة، الصندوق ذو العارضتين، المخطط التكراري)، وأسجّلها على اللوح.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأطلب إلى كل مجموعة تحديد نوع البيانات الذي يمكن تمثيله عن طريق هذه التمثيلات.
- أناقش الإجابات مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ماذا يمثّل الجدول؟ توزيعًا لمجموعة من الشقق السكنية في إحدى المناطق تبعًا لمساحة كلّ منها.
  - هل المساحة بيانات عددية متصلة أم منفصلة؟ متصلة.
  - هل الفئات في الجدول متساوية في الطول؟ لا.
  - كيف يمكن تمثيل بيانات متصلة مُنظَّمة في جدول تكراري ذي فئات غير متساوية الطول باستعمال مخطط تكراري؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا عن تمثيل البيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المخططات التكرارية، ثم أوجّههم إلى تأمّل المخططين التكراريين الواردين في الصفحة 144 من كتاب الطالب (أو أستعين **بورقة المصادر 8: المدرجات التكرارية**)؛ لتذكيرهم أنّنا نستعمل المخططات التكرارية المنفصلة (يوجد فراغات بين أعمدة المخطط) لتمثيل البيانات العددية المنفصلة، ونستعمل المخططات التكرارية المتصلة (لا يوجد فراغات بين أعمدة المخطط) لتمثيل البيانات العددية المتصلة.
- أبيّن للطلبة أنّه يُطلَق على المخططات التكرارية المُستعمَلة لتمثيل البيانات العددية المتصلة اسم (**المدرجات التكرارية**)، وأن لهذه المُدرَّجات نوعين، أولهما المُدرَّجات التكرارية ذات الفئات متساوية الطول (وهي التي تعلّموا تمثيلها سابقًا في الصف السادس)، وثانيهما المُدرَّجات التكرارية ذات الفئات غير متساوية الطول التي سيتعلّمون تمثيلها في هذا الدرس.

المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتساويةِ الطولِ

عنـدَ تمثيلِ البياناتِ العدديـةِ المتصلةِ والمُجمَّعـةِ في فئاتٍ بمُدرَّجـاتٍ تكراريةٍ عنْ طريقِ استعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ، يجبُ استعمالُ تدريجٍ متصلٍ على المحورِ الأفقيِّ، وهذا يعني عدمَ وجودِ فراغاتٍ بينَ أعمدةِ المُدرَّجِ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

أطوالٌ: في ما يأتي أطوالُ 50 طالبًا، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

145	157	160	148	160	177	156	155	166	166
170	162	160	142	152	155	159	172	152	162
180	152	175	155	170	163	144	173	150	154
136	162	154	164	155	182	147	168	155	170
160	175	163	175	144	160	160	142	158	180

1 أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.

الخطوةُ 1: أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

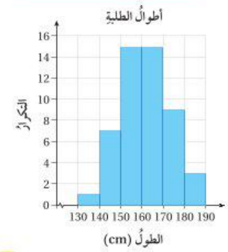
أُحدِّدُ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها. بعدَ ذلكَ أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

أطوالُ الطلبةِ (h)	
التكرارُ	الطولُ (cm)
1	$130 \le h < 140$
7	$140 \le h < 150$
15	$150 \le h < 160$
15	$160 \le h < 170$
9	$170 \le h < 180$
3	$180 \le h < 190$

الخطوةُ 2: أرسـمُ محورًا أفقيًّا وآخرَ عموديًّا، ثمَّ أكتبُ الفئاتِ أسـفلَ المحورِ الأفقـيِّ، ثمَّ أضعُ تدريجًا مناسبًا للمحورِ الرأسيِّ.

الخطوةُ 3: أُسمّي كُلًّا منَ المحورينِ، ثمَّ أكتبُ عنوانًا مناسبًا للمُدرَّجِ التكراريِّ.

الخطوةُ 4: أرسـمُ عمودًا يُمثِّـلُ ارتفاعُهُ تكرارَ كلِّ فئةٍ.



أتذكَّرُ

إذا بـدأتِ البياناتُ بعددٍ أكبـرَ منَ الصفـرِ، فإنَّني أبدأُ التدريجَ على المحورِ بعـددٍ أكبرَ مـنَ الصفرِ، مشـيرًا إلى ذلـكَ بخطٍّ مُتعرِّجٍ.

145

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 1، ثم أكتب البيانات على اللوح، وأسألهم:
  - » ما نوع البيانات؟ لماذا؟ عددية متصلة؛ لأنها بيانات غير قابلة للعدّ ولكنها قابلة للقياس.
  - » ما أصغر قيمة في البيانات؟ 136
  - » ما أكبر قيمة في البيانات؟ 182
  - » ما عدد الفئات متساوية الطول المناسب لتنظيم البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم إلى الفئات المناسبة لتنظيم البيانات، ويمكنني توجيههم إلى الفئات المُستعمَلة في تنظيم البيانات في كتاب الطالب.
- أرسم على اللوح محورًا أفقيًّا وآخر عموديًّا، ثم أسأل الطلبة:
  - » ما التدريج المناسب للمحور الأفقي؟ تدريجه بحسب الفئات في الجدول.
  - » ما التدريج المناسب للمحور العمودي؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش إجابات الطلبة عن السؤالين السابقين، وأتوصّل معهم إلى تدريج المحور الأفقي بحسب فئات الجدول مع الانتباه إلى بدء التدريج بالعدد 130 الذي يمثّل بداية الفئة الأولى، وضرورة وضع خط متعرج للإشارة إلى ذلك، ثم تدريج المحور العمودي اثنينات بداية من العدد 0 وصولًا إلى العدد 16؛ لأن هذا التدريج يناسب تكرارات البيانات، ثم أختار مع الطلبة اسمًا مناسبًا لكلّ من المحورين والتمثيل البياني.
- أطلب إلى أحد الطلبة تمثيل الأعمدة التي تمثّل تكرارات الفئات، ثم أطلب إلى الطلبة وصف البيانات.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

2 أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

تقعُ أطوالُ أكثرَ منْ نصفِ الطلبةِ بينَ 150 cm و 170 cm، في حينِ أنَّ طولَ عددٍ قليلٍ منْهُمْ يكونُ أكثرَ منْ 180 cm، أوْ أقلَّ منْ 140 cm.

أتعلَّمُ

ألاحِظُ أنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ في المثال 1 هيَ: 10:70:150:150:90:30، وأنَّ النسبةَ بينَ التكراراتِ هيَ: 1:7:15:15:9:3، وهذا يعني أنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ متناسبةٌ معَ النسبةِ بينَ التكراراتِ، وسألحظُ أهميةَ ذلكَ في المثالِ التالي.

أتحقَّقُ منْ فهمي

وقتٌ: في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي تستغرقُهُ 30 طالبةً للوصولِ إلى المدرسةِ:

أنظر الهامش.

6	18	29	55	7	34	28	56	33	4
2	41	33	23	7	43	26	53	4	41
32	46	16	17	3	26	17	47	22	17

a) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.

b) أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ

في بعضِ الأحيانِ، تُجمَّعُ البياناتُ المتصلةُ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ غيرِ متساويةٍ في الطولِ. وفي هذهِ الحالةِ، يتعيَّنُ تمثيلُ هذهِ البياناتِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ غيرِ مُتساويةِ الطولِ. ولكنْ، إذا مُثِّلَتِ البياناتُ باستعمالِ تكراراتِها، فإنَّ التمثيلَ الناتجَ يكونُ مُضلِّلًا؛ لأنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ لا تكونُ متناسبةً معَ النسبةِ بينَ التكراراتِ. وهنا تظهرُ الحاجةُ إلى إيجادِ **الكثافةِ التكراريةِ** (frequency density) لكلِّ فئةٍ، وذلكَ بقسمةِ تكرارِ الفئةِ على طولِها كما يأتي:

$$\text{(الكثافةُ التكراريةُ)} = \frac{\text{(تكرارُ الفئةِ)}}{\text{(طولِ الفئةِ)}}$$

عندَ تمثيلِ الجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ المتساويةِ في الطولِ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ، فإنَّ المحورَ y يُسمّى الكثافةَ التكراريةَ، وإنَّ ارتفاعَ كلِّ عمودٍ يُمثِّلُ الكثافةَ التكراريةَ لفئتِهِ.

146

إرشادات:

- في المثال 1، أذكّر الطلبة عند تمثيل البيانات بمُدرَّج تكراري بأنه يلزم استعمال تدريج متصل بالمحور الأفقي، وعدم جعل فراغات بين أعمدة المُدرَّج.
- يساعد استعمال لوح متنقّل خاص بالمستوى الإحداثي على تمثيل المُدرَّجات التكرارية، ويوفّر الوقت المُستنفَد في رسم المحورين الإحداثيين وتقسيمهما، ويمكن إعداده بسهولة برسم المستوى الإحداثي على طبق من الكرتون المقوّى، ثمّ تغطيته بلاصق شفاف.
- أوجّه الطلبة إلى استعمال أوراق المربعات المُرفَقة في كتاب التمارين عند تمثيل المُدرَّجات التكرارية.
- أذكّر الطلبة بأنه يمكن وصف توزيع البيانات في الجدول التكراري ذي الفئات بأكثر من طريقة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

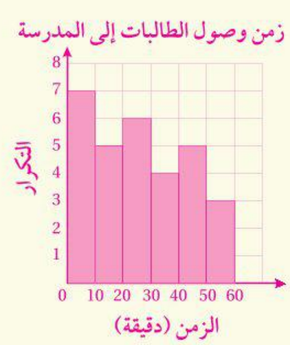
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 1):

a)

زمن وصول الطالبات إلى المدرسة (t)	
الزمن (دقيقة)	التكرار
$0 \le t < 10$	7
$10 \le t < 20$	5
$20 \le t < 30$	6
$30 \le t < 40$	4
$40 \le t < 50$	5
$50 \le t < 60$	3



b) 90% من الطالبات يصلن إلى المدرسة بزمن يقل عن 50 دقيقة.

مثال 2 : منَ الحياةِ

أحياءٌ: قاسَـتْ عالِمةُ أحياءٍ أطـوالَ **48** دودةَ أرضٍ، ثمَّ نظَّمَتِ البيانـاتِ التي توصَّلَـتْ إليْها في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باسـتعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	الطولُ (cm)
6	$15 \le t < 20$
14	$20 \le t < 30$
26	$30 \le t < 40$
2	$40 \le t < 60$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولًا بإضافةِ عمودينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما أطوالَ الفئاتِ والكثافةَ التكراريةَ على النحوِ الآتي:

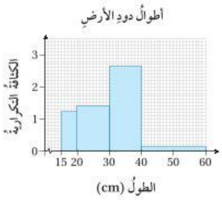
الكثافةُ التكراريةُ	طولُ الفئةِ	التكرارُ	الطولُ (cm)
1.2	5	6	$15 \le t < 20$
1.4	10	14	$20 \le t < 30$
2.6	10	26	$30 \le t < 40$
0.1	20	2	$40 \le t < 60$

أتعلَّمُ

طولُ الفئـةِ الأولى هوَ: $20 - 15 = 5$. وبالطريقةِ نفسِها يُمكِنُ إيجادُ أطوالِ بقيةِ الفئاتِ.

الخطوةُ 2: أرسـمُ محورًا أفقيًّا وآخرَ عموديًّا، ثمَّ أكتبُ الفئاتِ أسـفلَ المحورِ الأفقيِّ، ثمَّ أضـعُ تدريجًـا مناسـبًا للمحورِ الرأسيِّ.

الخطوةُ 3: أُسـمّي كُلًّا منَ المحورينِ، ثمَّ أكتبُ عنوانًا مناسبًا للمُدرَّجِ التكراريِّ.



الخطوةُ 4: أرسمُ عمودًا يُمثِّلُ ارتفاعُهُ الكثافةَ التكراريةَ لكلِّ فئةٍ.

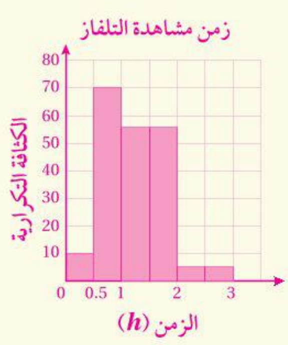
أتحقَّقُ منْ فهمي

تلفازٌ: يُبيِّـنُ الجـدولُ التكراريُّ المجـاورُ الزمنَ (بالساعاتِ) الذي يسـتغرقُهُ **100** شخصٍ يوميًّا في مشـاهدةِ التلفازِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باسـتعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ. أنظر الهامش.

التكرارُ	الزمنُ (h)
5	$0 \le h < 0.5$
35	$0.5 \le h < 1$
56	$1 \le h < 2$
4	$2 \le h < 3$

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 2):

زمن مشاهدة التلفاز			
الكثافة التكرارية	**طول الفئة**	**التكرار**	**الزمن (h)**
10	0.5	5	$0 \le h < 0.5$
70	0.5	35	$0.5 \le h < 1$
56	1	56	$1 \le h < 2$
4	1	4	$2 \le h < 3$



مثال 2: من الحياة

- أطلـب إلى الطلبة إيجاد مسـاحة كل عمود من أعمدة المُـدرَّج التكـراري فـي المثال 1، ثم كتابة النسـبة بين هذه المساحات على النحو الآتي:

$$10 : 70 : 150 : 150 : 90 : 30$$

- ثم أطلب إليهم كتابة النسبة بين التكرارات على النحو الآتي:

$$1 : 7 : 15 : 15 : 9 : 3$$

- أسـأل الطلبـة: مـا العلاقـة بين النسـبة بين مسـاحات الأعمدة والنسبة بين التكرارات؟ النسبتان متناسبتان.
- أوضّـح للطلبـة أن النسبة بيـن مسـاحات الأعمـدة والتكرارات تكون متناسبة فـي المُدرَّجات التكرارية المُمثَّلة للبيانات المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات الفئـات متسـاوية الطول، وهذا يعنـي بالضرورة أن المُـدرَّج التكـراري حقيقـي وغيـر مضلّـل، ولكن في بعض الحـالات الإحصائية يلـزم تجميع البيانات المتصلـة في جداول تكرارية ذات فئات فئات غير متسـاوية فـي الطول، والتـي إذا مُثِّلت فـي مُدرَّج تكـراري ذي فئـات غير متسـاوية في الطـول باسـتعمال تكراراتها، فإن المُـدرَّج التكراري الناتج يكـون مضلّلًا، لذا يلزم إيجاد ما يُسـمّى **(الكثافة التكرارية لكل فئة)** التي تنتج من قسـمة تكـرار الفئة علـى طولها، والتي تسـهم في ضمان أن يكـون المُدرَّج التكـراري المُمثِّل للجدول التكراري ذي الفئات غير المتساوية غير مضلّل.
- أطلـب إلى أحد الطلبة قراءة نـص المثال 2، ثم أكتب الجـدول التكـراري ذا الفئـات الخـاص بالمثال على اللـوح، ثم أضيـف عمودين إلى الجـدول أنظّم فيهما أطوال الفئات والكثافة التكرارية بمساعدة الطلبة.
- أرسم على اللوح محورًا أفقيًّا وآخر عموديًّا، ثم أسأل الطلبة:
  - » ما التدريـج المناسـب للمحور الأفقي؟ تدريجه بحسب الفئات في الجدول.
  - » مـا التدريـج المناسـب للمحـور العمودي؟ ستختلف إجابات الطلبة.

- أناقـش إجابـات الطلبـة عـن السـؤالين السـابقين، وأتوصّـل معهـم إلى تدريـج المحور الأفقي بحسـب فئـات الجدول مـع الانتبـاه إلى بـدء التدريـج بالعدد 15 الـذي يمثّـل بدايـة الفئـة الأولى، وضـرورة وضع خـط متعرج للإشـارة إلـى ذلك، ثـم تدريـج المحور العمـودي واحـدات بدايـة مـن العـدد 0 وصـولًا إلى العـدد 3؛ لأن هذا التدريج يناسـب الكثافـة التكرارية للبيانـات، ثم أختـار مع الطلبة اسـمًا مناسـبًا لكل من المحورين والتمثيل البياني.
- أطلـب إلـى أحـد الطلبـة تمثيـل الأعمـدة التـي تمثّل الكثافة التكرارية للفئات.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة في مزيـد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشـاد: ألفـت انتبـاه الطلبـة عنـد تمثيـل الجـداول التكراريـة ذات الفئـات غيـر متسـاوية الطـول بمُدرَّجـات تكراريـة، إلـى أن المحـور y يُسـمّى (**الكثافـة التكراريـة**).

مثال إضافي:

» **يبيّن الجدول الآتي أطـوال مجموعة من الطلبة بالسـنتيمتر. أمثّل الجدول باسـتعمال المُدرَّج التكراري.**

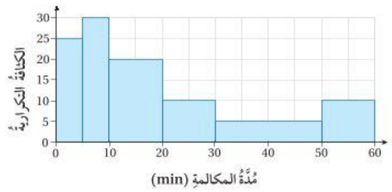
الطول (h)	التكرار (f)
$151 \le h < 153$	64
$153 \le h < 154$	43
$154 \le h < 155$	47
$155 \le h < 159$	96
$159 \le h < 160$	12

الحل:

يُمكِنُ اســتعمالُ المُدرَّجاتِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ مُتســاويةِ الطولِ لتفسيرِ البياناتِ التي يُمثِّلُها المُدرَّجُ التكراريُّ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

مكالماتٌ: **أُجرِيَ مسحٌ على مجموعةٍ منَ الأشخاصِ لتحديدِ مُدَدِ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ الأخيرةِ، ثمَّ مُثِّلَتِ البياناتُ التي خَلُصَ إليْها المسحُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ الآتي:**



1 **كمْ شخصًا شاركَ في عمليةِ المسحِ؟**

بما أنَّ ارتفاعاتِ الأعمدةِ لا تُمثِّلُ التكراراتِ، وإنَّمـا تُمثِّلُ الكثافةَ التكراريةَ للفئةِ، فإنَّهُ يتعيَّنُ إيجادُ تكرارِ كلِّ فئةٍ، وذلكَ بإيجادِ مســاحةِ كلِّ عمودٍ، علمًا بأنَّ مجموعَ هذهِ المساحاتِ يُمثِّلُ عددَ الأشخاصِ الذينَ شاركوا في عمليةِ المسحِ:

$$A = (25 \times 5) + (30 \times 5) + (20 \times 10) + (10 \times 10) + (5 \times 20) + (10 \times 10)$$ مجموعُ مساحاتِ الأعمدةِ

$$= 775$$ بالتبسيطِ

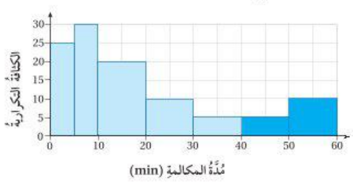
إذنْ، شاركَ في عمليةِ المسحِ 775 شخصًا.

أتعلَّمُ

بما أنَّ الكثافـةَ التكراريةَ تُمثِّلُ ناتجَ قسـمةِ تكرارِ الفئـةِ على طولِهـا، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجـادُ تكرارِ الفئةِ بضربِ الكثافةِ التكراريةِ للفئةِ في طولِ الفئةِ، وهذا يُمثِّـلُ مسـاحةَ العمودِ المُمثِّلِ للفئةِ.

2 **أجدُ عددَ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً.**

لإيجـادِ عددِ الأشـخاصِ الذينَ تزيدُ مُـدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً، أجدُ مساحةَ العمودينِ المُظلَّلينِ باللـونِ الأزرقِ الغامـقِ في الشكلِ المجاورِ:



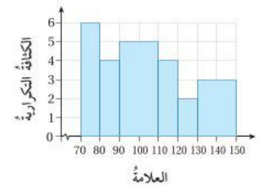
مجموعُ مساحتَي العمودينِ $A = (10 \times 5) + (10 \times 10)$

بالتبسيطِ $= 150$

إذنْ، عددُ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً هوَ 150 شخصًا.

أتحقَّقُ منْ فهمي

علاماتٌ: يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ المجاورُ علاماتِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في اختبارٍ نهايتُهُ العظمى هيَ 150:



a) كمْ طالبًا تقدَّمَ للاختبارِ؟ 320

b) أجدُ عددَ الطلبةِ الذينَ تزيدُ علاماتُهُمْ على 124. 72

c) أجدُ عددَ الطلبةِ الذينَ تقعُ علاماتُهُمْ بينَ 100 و130. 110

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

سباقاتٌ: في ما يأتي الزمنُ (بالثواني) الذي تستغرقُهُ مجموعةٌ منَ الطلبةِ لإنهاءِ سباقٍ للجري:

52 63 81 66 75 59 77 66 80 64 72 78 58 61 68 72 76 66

74 79 65 82 87 91 68 77 75 86 81 70 93 68 74 80 68 84

1) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ. أنظر الهامش.

2) أكتبُ وصفًا للبياناتِ. 86% من الطلبة استغرقوا وقتًا يزيد على 60 ثانية ويقل عن 90 ثانية لإنهاء السباق، وعدد قليل من الطلبة أنهوا السباق بزمن أقل من ذلك أو أكثر.

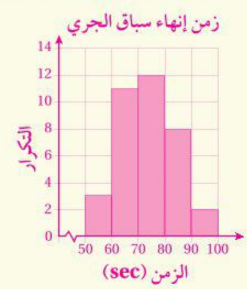
3) **أطوالٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ أطوالَ مجموعةٍ منَ الطالباتِ بالسنتيمترِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ. أنظر الهامش.

التكرارُ	الطولُ (h)
8	$120 \le h < 130$
12	$130 \le h < 140$
10	$140 \le h < 150$
7	$150 \le h < 160$

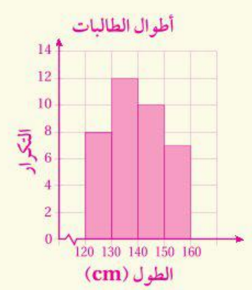
إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

1)

زمن انهاء سباق جري (t)	
التكرار	الزمن (sec)
3	$50 \le t < 60$
11	$60 \le t < 70$
12	$70 \le t < 80$
8	$80 \le t < 90$
2	$90 \le t < 100$



3)



مثال 3: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال المُدرَّجات التكرارية ذات الفئات غير متساوية الطول لتفسير البيانات.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3، ثم أرسم المُدرَّج التكراري الوارد في المثال على اللوح، ثم أناقش معهم حل الفرع 1 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  » ماذا يمثّل عرض كل عمود؟ طول الفئة.
  » ماذا يمثّل ارتفاع كل عمود؟ الكثافة التكرارية للفئة.
  » كيف يمكن إيجاد تكرار كل فئة؟ بضرب طول كل فئة في كثافتها التكرارية.
  » ماذا يمثّل تكرار كل فئة؟ عدد الأشخاص في كل فئة.
  » كيف يمكن إيجاد عدد الأشخاص الذين شاركوا في عملية المسح؟ بإيجاد تكرار كل فئة، ثم جمع هذه التكرارات.
- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد تكرار كل فئة، ثم جمع التكرارات لإيجاد عدد الأشخاص الذين شاركوا في عملية المسح.
- أناقش مع الطلبة حل الفرع 2 من المثال بتوجيه السؤال الآتي إليهم:
  » أي أعمدة المُدرَّج يمكن بها إيجاد عدد الأشخاص الذين تزيد مُدَدُ مكالماتهم على 40 دقيقة؟ العمود الذي يقابل الفئة $40 \le m < 50$، والعمود الذي يقابل الفئة $50 \le m < 60$
- أظلّل العمودين اللذين أشار إليهما الطلبة للإجابة عن السؤال السابق، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد تكرار كلّ من الفئتين، ثم جمع التكرارين.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- في المثال 3، أوضّح للطلبة أن تكرار كل فئة يمثّل مساحة كل عمود.
- إذا توفّر في المدرسة جهاز عرض (Data Show)، فيمكن استعماله للمساعدة في عرض المُدرَّجات التكرارية عن طريق نسخة إلكترونية من كتاب الطالب، ما يسهم في توفير الوقت والجهد المستغرقَين في رسمها على اللوح.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (3 – 1) والمسائل (10 – 7) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصة لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (18 – 16).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 16 (تبرير)، أوجّه الطلبة إلى إيجاد عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 90، وإيجاد عدد الطلبة الذين تقدموا للاختبار؛ وذلك لإيجاد النسبة المطلوبة.

---

4) **درجاتُ حرارةٍ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ توزيعَ درجاتِ الحرارةِ (بالسلسيوس) خلالَ 50 يومًا في إحدى المناطقِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	درجةُ الحرارةِ (t)
6	$8 \le t < 10$
13	$10 \le t < 12$
18	$12 \le t < 15$
4	$15 \le t < 17$
3	$17 \le t < 20$
6	$20 \le t < 24$

أنظر الهامش.

أُمثِّلُ البياناتِ في كلٍّ منَ الجدولينِ التكراريينِ الآتيينِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

5)

الزمنُ	$0 \le t < 8$	$8 \le t < 12$	$12 \le t < 16$	$16 \le t < 20$
التكرارُ	72	84	54	36

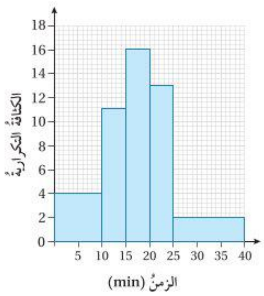
أنظر ملحق الإجابات.

6)

العمرُ (بالعام)	$11 \le a < 14$	$14 \le a < 16$	$16 \le a < 17$	$17 \le a < 20$
التكرارُ	51	36	12	20

أنظر ملحق الإجابات.

شركاتٌ: يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ (بالدقائقِ) الذي يستغرِقُهُ موظفو إحدى الشركاتِ للوصولِ إلى مكانِ العملِ:



7) أجدُ عددَ موظفي الشركةِ. 270

8) أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يصلونَ إلى مكانِ العملِ بأقلَّ منْ 15 دقيقةً. 95

9) أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يستغرِقُ وصولُهُمْ إلى مكانِ العملِ زمنًا يتراوحُ بينَ 20 دقيقةً و 30 دقيقةً. 75

10) أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يصلونَ إلى مكانِ العملِ بزمنٍ أكثرَ منْ 30 دقيقةً. 20

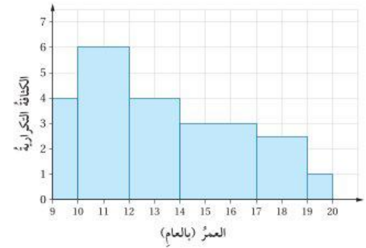
إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

4)

درجة الحرارة (t)	التكرار	طول الفئة	الكثافة التكرارية
$8 \le t < 10$	6	2	3
$10 \le t < 12$	13	2	6.5
$12 \le t < 15$	18	3	6
$15 \le t < 17$	4	2	2
$17 \le t < 20$	3	3	1
$20 \le t < 24$	6	4	1.5

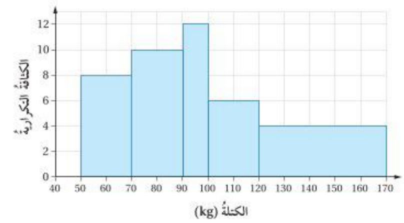
أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا لكلٍّ منَ المُدرَّجاتِ التكراريةِ الآتيةِ:

11



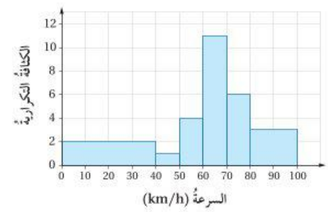
التكرار	العمر (عام)
4	$9 \le x < 10$
12	$10 \le x < 12$
8	$12 \le x < 14$
9	$14 \le x < 17$
5	$17 \le x < 19$
1	$19 \le x < 20$

12



التكرار	الكتلة (kg)
160	$50 \le t < 70$
200	$70 \le t < 90$
120	$90 \le t < 100$
120	$100 \le t < 120$
200	$120 \le t < 170$

سرعةٌ: أُجرِيَ مسحٌ لتعرُّفِ سرعةِ السيّاراتِ التي تمرُّ منْ نقطةٍ مُعيَّنةٍ على إحدى الطرقِ السريعةِ، ثمَّ مُثِّلَتِ البياناتُ التي خَلُصَ إليها المسحُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ.



13 أملأُ الفراغَ في الجدولِ الآتي بناءً على التمثيلِ بالمُدرَّجِ التكراريِّ أعلاهُ.

السرعةُ	$0 \le y < 40$	$40 \le y < 50$	$50 \le y < 60$	$60 \le y < 70$	$70 \le y < 80$	$80 \le y < 100$
التكرارُ	80	10	40	110	60	60

14 أجدُ عددَ السيّاراتِ التي أُجرِيَ عليْها المسحُ. 360

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

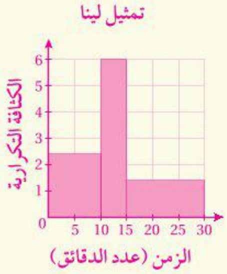
» **جمعت كل من سمر ولينا البيانات نفسها حول عدد الدقائق التي تستغرقها مجموعة من الطالبات للوصول إلى المدرسة، ولكن نظّمت كل منهما البيانات بطريقة مختلفة كالآتي:**

تنظيم سمر للبيانات	
التكرار (f)	عدد الدقائق (min)
10	$0 \le h < 5$
15	$5 \le h < 10$
30	$10 \le h < 15$
12	$15 \le h < 20$
6	$20 \le h < 25$
3	$25 \le h < 30$

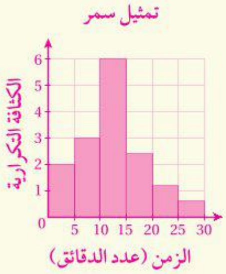
تنظيم لينا للبيانات	
التكرار (f)	عدد الدقائق (min)
25	$0 \le h < 10$
30	$10 \le h < 15$
21	$15 \le h < 30$

1 أمثّل كلًّا من الجدولين بمُدرَّج تكراري.

تمثيل لينا



تمثيل سمر



2 أصف أوجه التشابه والاختلاف بين المُدرَّجين التكراريين. أنظر إجابات الطلبة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 4, 6, 13, 14 كتاب التمارين: 1, 2
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 5, 11, (13 – 15) كتاب التمارين: 2, 3
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 12, (16 – 18) كتاب التمارين: (4 – 6)

تعليمات المشروع:

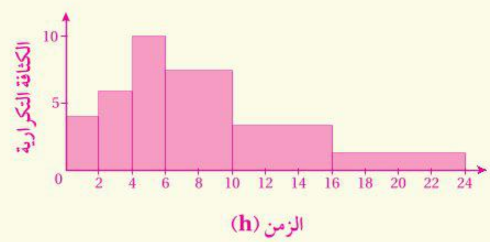
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة 6 من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

» **أمثّل البيانات في الجدول الآتي باستعمال الجدول التكراري:**

تنظيم سمر للبيانات	
الزمن (h)	التكرار (f)
$0 \le h < 2$	8
$2 \le h < 4$	12
$4 \le h < 6$	20
$6 \le h < 10$	30
$10 \le h < 16$	20
$16 \le h < 24$	10



15 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. أنظر الهامش.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

16 تبريرٌ: يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ الآتي علاماتِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في أحدِ الاختباراتِ. إذا كانَتْ علامةُ النجاحِ في الاختبارِ هيَ 90، فأجدُ نسبةَ الطلبةِ الذينَ أخفقوا في الاختبارِ، مُبرِّرًا إجابتي.

عدد الطلبة الذين حصلوا على أقل من 90 هو 100 طالب، والعدد الكلي للطلبة هو 320

نسبة الذين أخفقوا 31% تقريبًا.

الكثافة التكرارية — العلامةُ (70، 80، 90، 100، 110، 120، 130، 140، 150)

تحدٍّ: يُسجِّلُ برنامجُ حاسوبٍ في إحدى المؤسساتِ الزمنَ (بالدقائقِ) الذي ينتظرُهُ المتصلونَ قبلَ الردِّ على مكالماتِهِمْ في الفترةِ الصباحيةِ والفترةِ المسائيةِ. وقدْ مُثِّلَتِ البياناتُ التي سجلَّها البرنامجُ في أحدِ الأيامِ بالمُدرَّجينِ التكراريينِ الآتيينِ:

الفترةُ الصباحيةُ — الفترةُ المسائيةُ — عددُ المكالماتِ — الزمنُ (min)

17 أجدُ عددَ المكالماتِ التي انتظرَ فيها المتصلونَ أكثرَ منْ 4 دقائقَ قبلَ الردِّ عليهِمْ في الفترةِ الصباحيةِ منْ ذلكَ اليومِ. 9

18 أجدُ نسبةَ المكالماتِ التي رُدَّ فيها على المتصلينَ خلالَ ما لا يزيدُ على دقيقتينِ في ذلكَ اليومِ. 56%

152

إجابة التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

15)

المساحة (m^2)	$70 \le t < 100$	$100 \le t < 150$	$150 \le t < 250$	$250 \le t < 300$
التكرار	15	18	12	6
طول الفئة	30	50	100	50
الكثافة التكرارية	0.5	0.36	0.12	0.12

الدرس 4

الاحتمالاتُ وأشكالُ ڤِنْ
Probabilities and Venn Diagrams

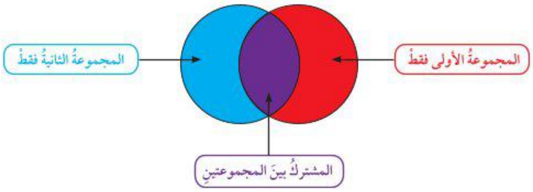
فكرةُ الدرسِ إيجادُ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ.

المصطلحاتُ الحادثُ المُتمِّمُ، الحوادثُ المتنافيةُ، الحوادثُ الشاملةُ.

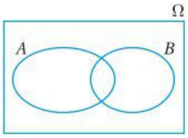
مسألةُ اليومِ يدرسُ 120 طالبًا في معهدٍ لغاتٍ، منْهُمْ 75 طالبًا يدرسونَ اللغةَ الكوريةَ، و35 طالبًا يدرسونَ اللغةَ الإسبانيةَ، و10 طلبةٍ يدرسونَ اللغتينِ معًا. إذا اختيرَ طالبٌ منَ المعهدِ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ ممَّنْ يدرسونَ اللغةَ الكوريةَ فقطْ؟

التعبيرُ بالرموزِ عنْ حوادثَ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ

تعلَّمْتُ سابقًا أشكالَ ڤِنْ، واستعملْتُها لتمثيلِ البياناتِ؛ وذلكَ بتنظيمِها في مجموعتينِ أوْ أكثرَ باستعمالِ منحنياتٍ مُغلَقةٍ مُتداخِلةٍ (متقاطعةٌ)؛ إذْ يُشكِّلُ كلُّ منحنٍ مجموعةً مستقلةً منَ البياناتِ، ويُمثِّلُ الجزءُ المُتداخِلُ بينَ المنحنيينِ البياناتِ المشتركةَ بينَ المجموعتينِ.



يُمكِنُ استعمالُ أشكالِ ڤِنْ للتعبيرِ عنْ حوادثِ تجربةٍ عشوائيةٍ بيانيًّا، وذلكَ لتسهيلِ إيجادِ احتمالاتِ هذهِ الحوادثِ. فمثلًا، إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُهُما باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ، وذلكَ برسمِ مستطيلٍ يُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ، ثمَّ رسمِ منحنى مُغلَقٍ يُمثِّلُ الحادثَ A، ورسمِ منحنى آخرَ مُغلَقٍ يُمثِّلُ الحادثَ B.



رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الحرفُ اليونانيُّ Ω للدلالةِ على الفضاءِ العينيِّ لتجربةٍ عشوائيةٍ، وهوَ مجموعةُ النواتجِ التي يُتوقَّعُ حدوثُها عندَ إجراءِ تجربةٍ عشوائيةٍ ما، ويُقرَأُ: أوميجا.

الدرس 4

نتاجات الدرس

- التعبير بالرموز عن حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية مُمثَّلة بأشكال ڤن.
- استعمال أشكال ڤن لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن.
- تعرّف مفهوم الاحتمالات المتنافية الشاملة، واستعمالها في حلّ المسائل.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حساب احتمالات وقوع حوادث لتجارب عشوائية متساوية الاحتمال.
- حساب احتمال عدم وقوع حادث ما.
- تمثيل البيانات باستعمال أشكال ڤن.

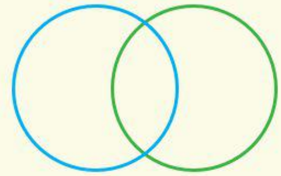
مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظاتي

1 التهيئة

» **أرسم شكل ڤن الآتي على اللوح:**



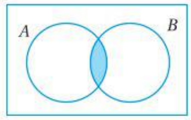
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة رسم شكل ڤن المرسوم على اللوح على دفاترهم، وتمثيل كل مجموعة مما يأتي فيه:
  » مضاعفات العدد 3 حتى العدد 21
  » الأعداد الزوجية حتى العدد 18
- أتابع عمل المجموعات وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » كم طالبًا يدرس في معهد اللغات؟ 120 طالبًا.
  » كم طالبًا يدرس اللغة الكورية؟ 75 طالبًا.
  » كم طالبًا يدرس اللغة الإسبانية؟ 35 طالبًا.
  » كم طالبًا يدرس اللغتين الكورية والإسبانية؟ 10 طلبة.
  » إذا اختير أحد طلبة المعهد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون ممّن يدرسون اللغة الكورية؟ $\frac{75}{120}$
  » إذا اختير أحد طلبة المعهد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون ممّن يدرسون اللغتين الكورية والإسبانية معًا؟ $\frac{10}{120}$
  » إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون ممّن يدرسون اللغة الكورية فقط؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق باستعمال أشكال ڤن في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

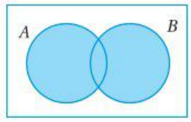
أتعلَّمُ
تقاطعُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعَهُما معًا.

تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في شكلِ فِنْ المجاورِ تقاطعَ الحادثِ A والحادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْها بالرمزِ $A \cap B$.



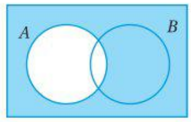
أتعلَّمُ
اتحادُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعَ الحادثِ A، أوْ وقوعَ الحادثِ B، أوْ وقوعَ الحادثينِ معًا.

أمّا المنطقةُ المُظلَّلةُ في شكلِ فِنْ المجاورِ فتُمثِّلُ اتحادَ الحادثِ A والحادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْها بالرمزِ $A \cup B$.



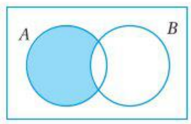
أتعلَّمُ
لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ $\overline{A}$ يعني عدمَ وقوعِ الحادثِ A.

في حينِ تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في الشكلِ المجاورِ **الحادثَ المُتمِّمَ** (complement event) للحادثِ A، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْهُ بالرمزِ $\overline{A}$.



أتعلَّمُ
يُمكِنُ أيضًا التعبيرُ عنِ الحادثِ A-B بالرمزِ $A \cap \overline{B}$.

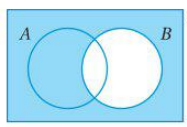
وأمّا الحادثُ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في الشكلِ المجاورِ فهوَ وقوعُ الحادثِ A فقط، وعدمُ وقوعِ الحادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $A-B$.



مثال 1

أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ أشكالِ فِنْ الآتيةِ:

1

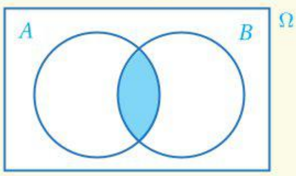


أُلاحِظُ أنَّ المنطقةَ المُظلَّلةَ تُعبِّرُ عنْ مُتمِّمةِ الحادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\overline{B}$.

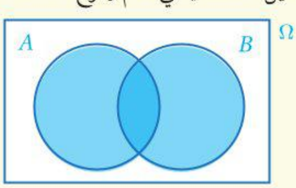
3 التدريس

مثال 1

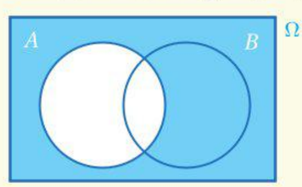
- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا عن تمثيل البيانات باستعمال أشكال ڤن، ثم أوضّح لهم أنه يمكن أيضًا استعمال أشكال ڤن للتعبير عن حوادث تجربة عشوائية، وذلك برسم مستطيل يمثّل الفضاء العيني للتجربة، ورسم منحنيات مغلقة لتمثّل كل حادث من حوادث التجربة العشوائية.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في **ورقة المصادر 9: أشكال ڤن**)، وأُخبر الطلبة أنّه يمثل تجربة عشوائية فضاؤها العيني Ω، و A و B حادثان في هذه التجربة العشوائية، ثم أبيّن لهم أن تظليل المنطقة يعني وقوع الحادث، وأن عدم تظليل المنطقة يعني عدم وقوع الحادث.



- أسأل الطلبة:
  - » ماذا تمثّل المنطقة المُظلَّلة؟ منطقة تقاطع الحادث A والحادث B.
  - » ماذا يعني تقاطع الحادث A مع الحادث B؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - » كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟
- أُخبر الطلبة أن تقاطع الحادثين A و B يعني وقوعهما معًا، وأنه يمكن التعبير عن منطقة تقاطع الحادثين بالرمز $A \cap B$.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح للتجربة العشوائية نفسها، وأذكّر الطلبة أن تظليل المنطقة يعني وقوع الحادث، وأن عدم تظليل المنطقة يعني عدم وقوع الحادث، ثم أسألهم:

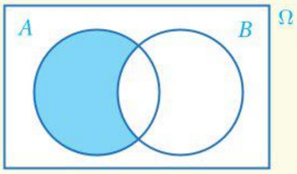


  - » هل يدل الشكل على وقوع الحادث A؟ لماذا؟ نعم؛ لأن المنطقة A مُظلَّلة بالكامل.
  - » هل يدل الشكل على وقوع الحادث B؟ لماذا؟ نعم؛ لأن المنطقة B مُظلَّلة بالكامل.
  - » هل يدل الشكل على وقوع الحادثين A و B معًا؟ لماذا؟ نعم؛ لأن منطقة تقاطع الحادثين مُظلَّلة.
  - » ماذا تمثّل المنطقة المُظلَّلة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - » كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟
- أوضّح للطلبة أن المنطقة المُظلَّلة تمثّل اتحاد الحادثين A و B، وأن ذلك يعني وقوع الحادث A، أو وقوع الحادث B، أو وقوع الحادثين معًا، وأنه يمكن التعبير عن منطقة اتحاد الحادثين بالرمز $A \cup B$.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح للتجربة العشوائية نفسها، ثم أسأل الطلبة:



- هل يدل الشـــكل على وقوع الحادث A؟ لماذا؟
لا؛ لأن المنطقة A غير مُظلَّلة.
- ماذا تمثّـل المنطقة المُظلَّلة؟ إجابة ممكنة: ظُلِّل الفضاء العيني كاملًا ما عدا الحادث A.
- كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟

- أوضّـح للطلبـة أن المنطقـة المُظلَّلـة تمثّـل الحـادث المُتمِّم للحادث A وأن ذلك يعني عدم وقوع الحادث A، وأنه يمكن التعبير عنه بالرمز $\overline{A}$.
- أرسـم الشـكل الآتي على اللـوح للتجربة العشـوائية نفسها، ثم أسأل الطلبة:

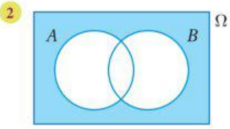


- هل يدل الشـــكل على وقوع الحادث A؟ لماذا؟
لا؛ لأن المنطقـــة A غير مُظلَّلـــة بالكامل؛ إذ إن منطقة تقاطع الحادثين A و B غير مُظلَّلة.
- ماذا تمثّل المنطقة المُظلَّلة؟ ســتختلف إجابات الطلبة.
- كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟

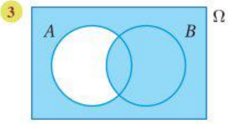
- أوضّح للطلبة أن المنطقة المُظلَّلة تمثّل وقوع الحادث A فقط وعدم وقوع الحادث B، وأنه يمكن التعبير عنه بالرمز $A-B$، أو الرمز $A\cap\overline{B}$.
- أناقـش حل أفرع المثال 1 مع الطلبة باتباع الإجراءات نفسها التي اتبعتها في مناقشة الأشكال السابقة.

إرشادات:

- أناقـش مـع الطلبة حل سـؤال (**أفكّـر**) الوارد في هامـش الفرع 2 مـن المثـال 1، وأتوصّـل معهم إلـى أنه يمكن التعبير عن المنطقة المُظلَّلة بالرمز $\overline{A}\cap\overline{B}$.
- أطلـب إلـى الطلبة التعبير عـن المنطقـة المُظلَّلة فـي الفـرع a مـن بند (**أتحقّـق من فهمـي**) التابع للمثال 1 بأكثر من رمز.



ألاحِظُ أنَّ المنطقـةَ المُظلَّلةَ تُعبِّـرُ عنْ عدمِ وقوعِ اتحـادِ الحادثِ A والحـادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\overline{A\cup B}$.

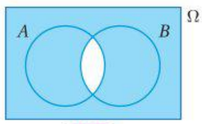


ألاحِـظُ أنَّ المنطقةَ المُظلَّلـةَ تُعبِّرُ عنِ اتحادِ الحادثِ المُتمِّمِ للحادثِ A والحادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\overline{A}\cup B$.

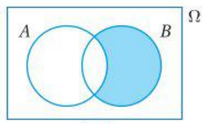
أُفكِّرُ
هـلْ يُمكِنُ التعبيـرُ عنِ الحـادثِ الـذي تُمثِّلُـهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ بالرموزِ بطريقـةٍ أُخـرى؟ أُبـرِّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ شكليْ ڤِنْ الآتيينِ:

a) 

$\overline{A\cap B}$

b) 

$B-A$

إيجادُ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَتِ التجربةُ العشوائيةُ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ فيها يساوي نسبةَ عددِ عناصرِ الحادثِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ.

$$P(A)=\frac{\text{(عددُ عناصرِ الحادثِ } A\text{)}}{\text{(عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ)}}$$

بمـا أنَّ الفضاءَ العينيَّ Ω هوَ مجموعـةٌ تحوي جميعَ النواتجِ التي يُتوقَّـعُ حدوثُها عندَ إجراءِ تجربةٍ عشـوائيةٍ ما، فإنَّ احتمالَ الفضاءِ العينيِّ هوَ 1؛ أيْ إنَّ $P(\Omega)=1$. ولهذا، فإنَّ احتمالَ الحادثِ المُتمِّمِ لأيِّ حادثٍ في الفضاءِ العينيِّ، مثلَ A، هوَ 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.

رموزٌ رياضيةٌ
يشـيرُ الرمـزُ $P(A)$ إلى احتمالِ وقـوعِ الحادثِ A، علمًـا بـأنَّ الحرفَ P هـوَ اختصـارٌ لكلمـةِ (Probability) التـي تعني الاحتمالَ.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلـب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بنـد (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مفهومٌ أساسيٌّ احتمالُ الحادثِ المُتمِّم

بالكلماتِ: احتمــالُ وقوعِ الحادثِ المُتمِّــمِ للحادثِ A هوَ 1 ناقــصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.

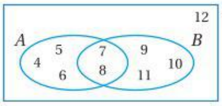
بالرموزِ: لأيِّ حادثٍ (A) في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

يُمكِنُ استعمالُ المفاهيمِ السابقةِ لإيجادِ احتمالاتِ حوادثَ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ.

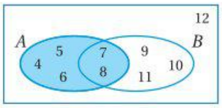
مثال 2

كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ مِـنْ 4 إلى 12 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشـوائيًّا، ومُثِّـلَ الفضـاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ ڤِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



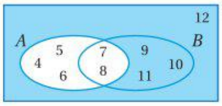
1 $P(A)$

بما أنَّ عـددَ عناصرِ الفضـاءِ العينيِّ هوَ 9، وعددَ عناصرِ الحادثِ A هوَ 5 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:



$$P(A) = \frac{5}{9}$$

2 $P(\overline{A})$



صيغةُ احتمالِ المُتمِّمة $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

بالتعويضِ $= 1 - \frac{5}{9}$

بالتبسيطِ $= \frac{4}{9}$

أُفكِّرُ

أَصِـفُ الحــادثَ A بالكلماتِ.

أتعلَّمُ

يظهـرُ فـي الشـكلِ المجـاورِ أنَّ مُتمِّمـةَ A تحوي 4 عناصـرَ، هيَ: $\{9, 10, 11, 12\}$؛ لـذا، فإنَّ احتمالَها هوَ $\frac{4}{9}$

مثال 2

- أذكّـر الطلبـة بكيفية إيجـاد احتمال وقـوع حادث في تجربة عشوائية متساوية الاحتمال بالكلمات والرموز.
- أوضّـح للطلبـة أن احتمـال وقـوع الفضـاء العينـي يسـاوي 1، وأن احتمال الحـادث المُتمِّم هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث A.
- أوضّـح للطلبـة أنـه يمكنهم اسـتعمال المفاهيـم التي تعلّموهـا فـي المثـال 1 لإيجاد احتمـالات حـوادث مُمثَّلة بأشـكال ڤـن، ثم أطلـب إلى أحد الطلبـة قراءة نـص المثـال 2، وأطلـب إلـى الطلبـة تأمّل شـكل ڤن المجـاور له، ثم أناقش معهم حل الفـرع 1 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:
  » ما الفضاء العينـي لهذه التجربة؟ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
  » ما عدد عناصر الفضاء العيني؟ 9
  » ماذا نعني بـ $P(A)$؟ احتمال وقوع الحادث A.
  » مـا عناصر الحادث A؟ أظلّلهـا. 4, 5, 6, 7, 8 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  » ما عدد عناصر الحادث A؟ 5
  » كيف يمكن وصف الحادث A بالكلمات؟ إجابة ممكنة: مجموعة الأعـداد الصحيحة التي تزيد على أو تساوي 4، وتقل عن أو تساوي 8
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 1 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 2 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  » ماذا نعني بــ $P(\overline{A})$؟ احتمال وقـوع الحادث المُتمِّم للحادث A.
  » ما عناصر الحــادث $\overline{A}$؟ أظلّلها. 9, 10, 11, 12 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  » ما عدد عناصر الحادث $\overline{A}$؟ 4
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 2 على اللوح.
- أناقـش مـع الطلبـة حـل الفـرع 3 مـن المثـال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  » ماذا نعني بـ $P(A \cap B)$؟ احتمال وقوع الحادث A والحادث B معًا.

» ما عناصر الحادث $A\cap B$؟ أظلّلها. 7, 8 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).

» ما عدد عناصر الحادث $A\cap B$؟ 2

- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 3 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 4 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:

» ماذا نعني بـ $P(A\cup B)$؟ احتمال اتحاد الحادث A، والحادث B.

» ما عناصر الحادث $A\cup B$؟ أظلّلها. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).

» ما عدد عناصر الحادث $A\cup B$؟ 8

- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 4 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 5 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:

» ماذا نعني بـ $P(\overline{A}\cup B)$؟ احتمال اتحاد الحادث المُتمِّم للحادث A والحادث B معًا.

» ما عناصر الحادث $\overline{A}\cup B$؟ أظلّلها. 7, 8, 9, 10, 11, 12 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).

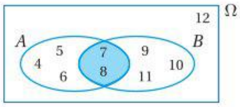
» ما عدد عناصر الحادث $\overline{A}\cup B$؟ 6

- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 5 على اللوح.

إرشادات:

- أناقش مع الطلبة حل سؤال (**أفكّر**) الوارد في هامش الفرع 3 من المثال 2، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن وصف الحادث بأكثر من طريقة، إحداها الحادث B وهو مجموعة الأعداد الصحيحة التي تزيد على أو تساوي 7، وتقل عن أو تساوي 11
- أوجّه الطلبة عند إيجاد احتمالات حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن إلى تظليل المنطقة التي تعبّر عن الحادث؛ لمساعدتهم على تحديد عدد عناصر الحادث.

3 $P(A\cap B)$



بما أنَّ $A\cap B$ يعني وقوعَ الحادثِ A والحادثِ B معًا، فـإنَّ عددَ عناصرِ هـذا الحادثِ هوَ 2 كما يظهرُ فـي المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشـكلِ المجاورِ.

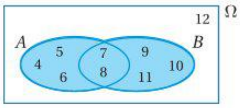
إذنْ:

$$P(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

أفكِّرُ

أَصِـفُ الحـادثَ B بالكلماتِ.

4 $P(A\cup B)$

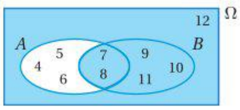


بمـا أنَّ $A\cup B$ يعني وقوعَ الحادثِ A، أوْ وقوعَ الحـادثِ B، أوْ وقوعَ الحادثيـنِ معًا، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 8 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A\cup B)=\frac{8}{9}$$

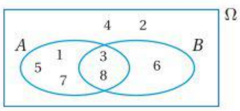
5 $P(\overline{A}\cup B)$



بما أنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 6 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(\overline{A}\cup B)=\frac{6}{9}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي



كُتِبَتِ الأعـدادُ الصحيحةُ مـنْ 1 إلى 8 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشـوائيًّا، ومُثِّـلَ الفضـاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ ڤِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

a) $P(B)$ $\frac{3}{8}$ b) $P(\overline{B})$ $\frac{5}{8}$ c) $P(A\cap B)$ $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ d) $P(A-B)$ $\frac{3}{8}$

أخطاء شائعة:

قـد يخطئ بعض الطلبة عند تحديد عناصر حوادث مُمثَّلة بأشـكال ڤن؛ لذا أوجّههم وبشـكل مسـتمر إلى وصف الحـادث بالكلمات ومطابقة الوصف مع المنطقة المُظلَّلة.

استعمالُ أشكالِ ڤِنْ لإيجادِ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ

يُمكِنُ استعمالُ أشكالِ ڤِنْ لتسهيلِ إيجادِ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ تُمثِّلُ مواقفَ حياتيةً.

مثال 3 : منَ الحياةِ

اختباراتٌ: تقدَّمَ 200 طالبٍ منْ طلبةِ الصفِّ التاسعِ في إحدى المدارسِ لامتحانٍ وطنيٍّ يقيسُ قدراتِهِمْ في مادتَيِ اللغةِ العربيةِ والرياضياتِ. نجحَ منْ هؤلاءِ الطلبةِ 162 طالبًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ، و137 طالبًا في مادةِ الرياضياتِ. أمّا عددُ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا فبلغَ 121 طالبًا:

1 أُمثِّلُ البياناتِ بشكلِ ڤِنْ.

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ الحوادثَ المذكورةَ في التجربةِ العشوائيةِ.
أفترضُ أنَّ A هوَ حادثُ اختيارِ طالبٍ ناجحٍ في مادةِ اللغةِ العربيةِ، وأنَّ M هوَ حادثُ اختيارِ طالبٍ ناجحٍ في مادةِ الرياضياتِ.

الخطوةُ 2: أُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ والحوادثَ بشكلِ ڤِنْ.

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا منْ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ (A):

$$162 - 121 = 41$$

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ فقطْ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا منْ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ (M):

$$137 - 121 = 16$$

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الذينَ لمْ ينجحوا في أيٍّ منَ المادتينِ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ، وعددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ فقطْ، وعددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا، منَ العددِ الكليِّ للطلبةِ:

$$200 - (41 + 16 + 121) = 200 - 178 = 22$$

مثال 3: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال أشكال ڤن للتمكّن من إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 3، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقش حل الفرع 1 مع الطلبة بتوجيه الأسئلة الآتية:

» ما الحوادث المذكورة في التجربة العشوائية؟ **حادث اختيار طالب ناجح في مادة اللغة العربية، وحادث اختيار طالب ناجح في مادة الرياضيات.**

» ما عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية فقط؟ كيف أوجدتم/ أوجدتنّ ذلك؟ **41؛ بطرح عدد الطلبة الناجحين في المادتين معًا من عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية.**

» ما عدد الطلبة الناجحين في مادة الرياضيات فقط؟ كيف أوجدتم/ أوجدتنّ ذلك؟ **16؛ بطرح عدد الطلبة الناجحين في المادتين معًا من عدد الطلبة الناجحين في مادة الرياضيات.**

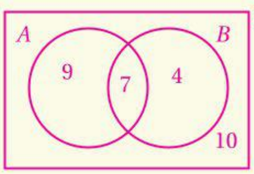
» ما عدد الطلبة الذين لم ينجحوا في أي من المادتين؟ كيف أوجدتم/ أوجدتنّ ذلك؟ **22؛ بطرح عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية فقط، وعدد الناجحين في مادة الرياضيات فقط، وعدد الطلبة الناجحين في المادتين معًا من العدد الكلي للطلبة.**

- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة أوجّههم إلى افتراض أن حادث اختيار طالب ناجح في مادة اللغة العربية هو A، وافتراض أن حادث اختيار طالب ناجح في مادة الرياضيات هو M، ثم أطلب إلى أحد الطلبة تمثيل البيانات بشكل ڤن، وأوجّه إلى ضرورة الانتباه إلى وضع عناصر الفضاء العيني التي لا ينتمي أيّ منها إلى الحادثين A وM خارج الدائرتين المُمثِّلتين للحادثين.

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص الفرع 2 من المثال، ثم أناقشهم في حله بتوجيه الأسئلة الآتية إليه:
  - ماذا يعني أن يكون الطالب ناجحًا في إحدى المادتين على الأقل؟ أن يكون ناجحًا في مادة اللغة العربية، أو أن يكون ناجحًا في مادة الرياضيات، أو أن يكون ناجحًا في المادتين معًا.
  - إذن، ما الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ أظلّله. اتحاد الحادث A والحادث M (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - كيف يمكن التعبير بالرموز عن الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ $A \cup M$
  - ما عدد عناصر هذا الحادث؟ 178
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 2 على اللوح.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص الفرع 3 من المثال، ثم أناقش الطلبة في حلّه بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - ماذا يعني أن يكون الطالب ناجحًا في اللغة العربية فقط؟ يعني نجاحه في مادة اللغة العربية وعدم نجاحه في مادة الرياضيات.
  - إذن، ما الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ أظلّله. وقوع الحادث A وعدم وقوع الحادث M (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - كيف يمكن التعبير بالرموز عن الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ $A-M$
  - ما عدد عناصر هذا الحادث؟ 41
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 3 على اللوح.

إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 3):

a)



A: لون الشعر أسود

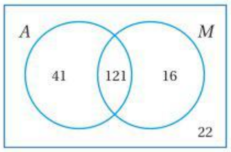
B: لون العيون بني

b) $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

d) $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

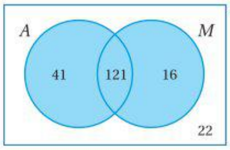
- أمثّلُ هذهِ البياناتِ بشكلِ فِنْ كالآتي:



أتعلَّمُ

ألاحِظُ أنَّ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ التـي لا ينتمي أيٌّ منهـا إلـى الحادثينِ تقعُ خارجَ الدائرتينِ.

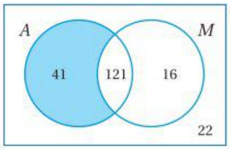
2 **إذا اختيرَ أحدُ الطلبةِ المُتقدِّمينَ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ هذا الطالبُ ناجحًا في إحدى المادتينِ على الأقلِّ.**



إنَّ كلمتيْ (على الأقلِّ) في السؤالِ تشيرانِ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ اتحادُ الحادثِ A والحادثِ M كما في الشكلِ المجاورِ. إذنْ:

$$P(A \cup M) = \frac{178}{200}$$

3 **إذا اختيرَ أحدُ الطلبةِ المُتقدِّمينَ عشـوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ هذا الطالبُ ناجحًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ.**



إنَّ احتمـالَ أنْ يكونَ الطالـبُ ناجحًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقـطْ يعني إيجادَ احتمالِ المنطقةِ المُظلَّلةِ في شكلِ فِنْ المجاورِ. إذنْ:

$$P(A-M) = \frac{41}{200}$$

أتذكَّرُ

إنَّ حادثَ نجاحِ الطالبِ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ يعني عدمَ نجاحِهِ في مادةِ الرياضياتِ، وهوَ ما يُعبَّرُ عنْـهُ بالرمـزِ $A-M$ أوِ الرمزِ $A \cap \overline{M}$.

أتحقّقُ منْ فهمي أنظر الهامش.

صفاتٌ وراثيةٌ: **يوجدُ في أحدِ الصفوفِ 30 طالبةً، منْهُنَّ 16 طالبةً منْ ذواتِ الشعرِ الأسودِ، و11 طالبةً لونُ أعينِهِنَّ بُنِّيٌّ، و7 طالباتٍ لونُ أعينِهِنَّ بُنِّيٌّ وشعرُهُنَّ أسودُ:**

a) أُمثِّلُ البياناتِ بشكلِ فِنْ.

b) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ شعرُها أسودَ، أوْ لونُ عينيها بُنيًّا.

c) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ لونُ عينيها بُنيًّا، وشعرُها ليسَ أسودَ.

d) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ ألّا يكونَ لونُ عينيها بُنيًّا، وشعرُها ليسَ أسودَ.

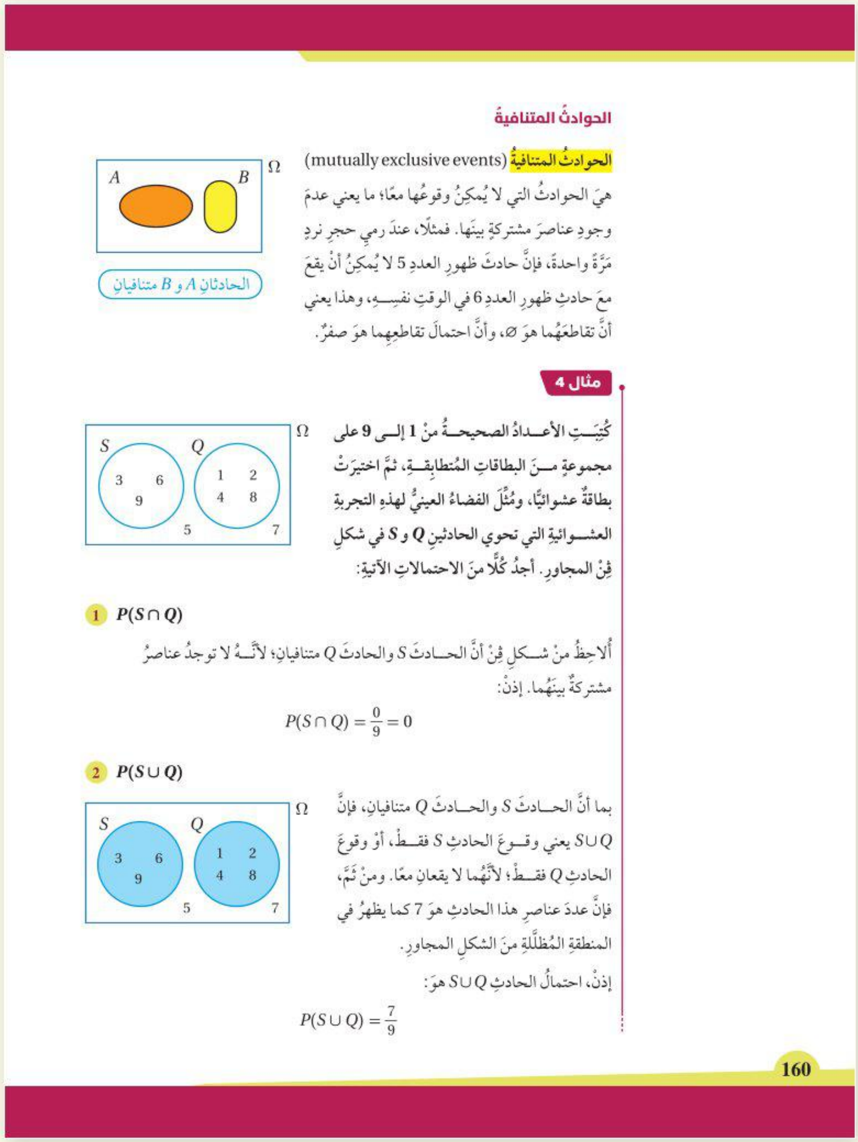
مثال إضافي

» **في دراسة شملت 100 شخص، تبيّن أن 60 شخصًا منهم زاروا طبيب الأسنان خلال العام الماضي، وأن 35 شخصًا منهم زاروا طبيبًا مختصًّا خلال العام الماضي، وأن 18 شخصًا منهم زاروا طبيب الأسنان وطبيبًا مختصًّا خلال العام الماضي. إذا اختير أحد هؤلاء الأشخاص عشوائيًّا، فأجد احتمال كل حادث مما يأتي باستعمال أشكال فن:**

1 أن يكون الشخص ممّن زاروا طبيب الأسنان ولم يزوروا طبيبًا مختصًّا. $\frac{42}{100}$

2 أن يكون الشخص ممّن زاروا طبيبًا مختصًّا، ولم يزوروا طبيب أسنان. $\frac{17}{100}$

3 أن يكون الشخص ممّن لم يزوروا طبيب الأسنان، ولا طبيبًا مختصًّا. $\frac{23}{100}$



الحوادثُ المتنافيةُ

الحوادثُ المتنافيةُ (mutually exclusive events) هيَ الحوادثُ التي لا يُمكِنُ وقوعُها معًا؛ ما يعني عدمَ وجودِ عناصرَ مشتركةٍ بينَها. فمثلًا، عندَ رمي حجرِ نردٍ مَرَّةً واحدةً، فإنَّ حادثَ ظهورِ العددِ 5 لا يُمكِنُ أنْ يقعَ معَ حادثِ ظهورِ العددِ 6 في الوقتِ نفسِهِ، وهذا يعني أنَّ تقاطعَهُما هوَ $\varnothing$، وأنَّ احتمالَ تقاطعِهِما هوَ صفرٌ.

الحادثانِ A و B متنافيانِ

مثال 4

كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ Q و S في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

1) $P(S \cap Q)$

ألاحِظُ منْ شكلِ فِنْ أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا توجدُ عناصرُ مشتركةٌ بينَهُما. إذنْ:

$$P(S \cap Q) = \frac{0}{9} = 0$$

2) $P(S \cup Q)$

بما أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ، فإنَّ $S \cup Q$ يعني وقوعَ الحادثِ S فقط، أوْ وقوعَ الحادثِ Q فقط؛ لأنَّهُما لا يقعانِ معًا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 7 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

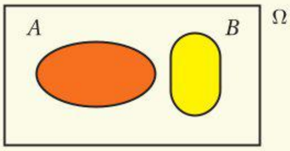
إذنْ، احتمالُ الحادثِ $S \cup Q$ هوَ:

$$P(S \cup Q) = \frac{7}{9}$$

160

مثال 4

- أرسم شكل فِن الآتي على اللوح، ثم أطلب إلى الطلبة تأمّله.

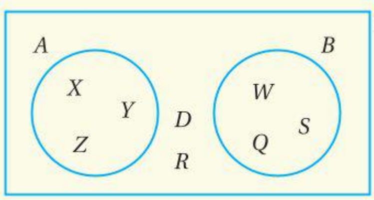


- أسأل الطلبة:
  - » هل يمكن أن يقع الحادثان A و B معًا؟ لماذا؟ لا؛ لأنه يظهر من شكل فِن عدم وجود منطقة تقاطع بين الحادثين.
  - » كيف يمكن التعبير عن تقاطع الحادثين بالرموز؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- بعد مناقشة إجابات الطلبة عن السؤالين السابقين، أوضّح لهم أن الحادثين A و B يُسمَّيان (**حادثين متنافيين**)؛ أي أنه لا يمكن أن يقعا معًا؛ ما يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما؛ لذا يمكن التعبير عن حادث تقاطعهما بالرمز $\varnothing$، والذي يُعَدّ حادثًا مستحيلًا، لذا فإن احتمال وقوعه يساوي صفرًا.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 4، ثم أرسم شكل فِن المرافق للمثال على اللوح، ثم أسأل الطلبة:
  - » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
  - » ما عدد عناصر الفضاء العيني؟ 9
  - » ما عناصر الحادث S؟ 3, 6, 9
  - » ما عناصر الحادث Q؟ 1, 2, 4, 8
  - » هل يوجد تقاطع بين الحادثين S و Q؟ لا.
  - » إذن، ما العلاقة بين الحادثين S و Q؟ حادثان متنافيان.
  - » كيف يمكن التعبير عن ناتج تقاطع الحادثين S و Q بالرموز؟ $\varnothing$.
- أناقش حل الفرع 1 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـ $P(S \cap Q)$؟ إيجاد احتمال وقوع الحادث S والحادث Q معًا.
  - » ما عدد عناصر الحادث $S \cap Q$؟ 0؛ لأن الحادثين متنافيان.
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 1 على اللوح.

- أناقش حل الفرع 2 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـ $P(S \cup Q)$؟ احتمال اتحاد الحادث S والحادث Q.
  - » ما عناصر الحـــادث $S \cup Q$؟ أظلّلها. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - » ما عدد عناصر الحادث $S \cup Q$؟ 7
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 2 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 3 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـــ $P(Q-S)$؟ إيجــاد احتمال وقوع الحادث Q فقط وعدم وقوع الحادث S.
  - » بمـــا أن الحادثين S و Q متنافيـــان، فكيف يمكن التعبير عن الحادث $Q-S$؟ لماذا؟ يمكن التعبير عنه بالحادث Q فقط؛ لأن الحادثين لا يمكن أن يقعا معًا؛ لأنهما متنافيان.
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 3 على اللوح، وأتوصّل معهـم إلى أن الحادث $Q - S$ في هذا الفرع يساوي الحادث Q، وأن لهما الاحتمال نفسه.

مثال إضافي

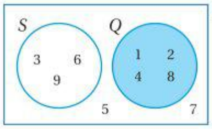
- كُتِبت الأحـرف X, Y, Z, W, S, Q, D, R علـى مجموعة مـن البطاقات المتطابقة، ثـم اختيرت بطاقة عشـوائيًّا، ومُثِّل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التـي تحـوي الحادثين A و B في شـكل ڤِن أدناه. أجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:



1) $P(A \cup B)$ $\frac{3}{4}$
2) $P(A \cap B)$ 0
3) $P(A \cap \overline{B})$ $\frac{3}{8}$
4) $P(\overline{A})$ $\frac{5}{8}$

3) $P(Q-S)$

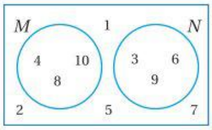
بمـا أنَّ الحـادثَ S والحادثَ Q متنافيـانِ، فإنَّ $Q-S$ يعني وقـوعَ الحادثِ Q فقـطْ؛ لأنَّهُما لا يقعـانِ معًا كما يظهـرُ في المنطقـةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ. إذنْ:



$$P(Q-S) = \frac{4}{9}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

كُتِبَتِ الأعـدادُ الصحيحةُ مـنْ 1 إلى 10 على مجموعـةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقـةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذِهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ M و N في شكلِ ڤِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



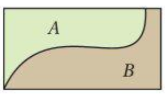
a) $P(M \cap N)$ 0
b) $P(M \cup N)$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
c) $P(M-N)$ $\frac{3}{10}$

الحوادثُ المتنافيةُ الشاملةُ

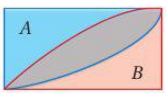
الحوادثُ الشـاملةُ (exhaustive events) هيَ الحوادثُ التي يُشـكِّلُ اتحادُ نواتجِها المُحتمَلةِ الفضاءَ العينيَّ كاملًا. فمثلًا، عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ، فإنَّ حادثَ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 3 وحادثَ ظهورِ عددٍ أقلَّ منْ 5 يُمثِّلانِ حادثينِ شاملينِ.

قدْ تكونُ بعضُ الحوادثِ متنافيةً وشاملةً. فمثلًا، عندَ رمي حجرِ نردٍ، فإنَّ حادثَ ظهورِ عددٍ فرديٍّ وحادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ يُمثِّلانِ حادثينِ متنافيينِ؛ لأنَّهُ لا يُمكِنُ أنْ يقعا معًا. وهما أيضًا حادثانِ شاملانِ؛ لأنَّ نواتجَهُما المُحتمَلةَ تُشكِّلُ الفضاءَ العينيَّ كاملًا.

يُظهِرُ شكلا ڤِنْ الآتيانِ كُلًّا منَ الحوادثِ الشاملةِ، والحوادثِ المتنافيةِ والشاملةِ:



الحادثُ A والحادثُ B متنافيانِ وشاملانِ.



الحادثُ A والحادثُ B شـاملانِ، لكنَّهُما ليسا متنافيينِ.

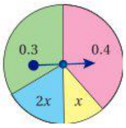
إذا كانَتِ الحوادثُ متنافيةً وشاملةً، فإنَّ مجموعَ احتمالاتِها هوَ 1.

مثال 5

أتعلَّمُ

مجموعُ احتمالاتِ الحوادثِ المتنافيةِ والشاملةِ هوَ 1، أمّا الحوادثُ الشاملةُ غيرُ المتنافيةِ فيكونُ مجموعُ احتمالاتِها أكبرَ منْ 1.

قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 4 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابِقةٍ، ومُلوَّنةٍ بالأخضرِ والزهريِّ والأزرقِ والأصفرِ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ الجدولُ الآتي يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ لونٍ منْ هذهِ الألوانِ، فأجدُ قيمةَ x.



الأزرقُ	الأصفرُ	الزهريُّ	الأخضرُ	اللونُ
$2x$	x	0.4	0.3	الاحتمالُ

بما أنَّ حوادثَ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ على الألوانِ الأربعةِ هيَ حوادثُ متنافيةٌ وشاملةٌ، فإنَّ مجموعَ احتمالاتِها هوَ 1:

$0.3 + 0.4 + x + 2x = 1$ مجموعُ الحوادثِ الشاملةِ

$0.7 + 3x = 1$ بجمعِ الثوابتِ، وجمعِ المُتغيِّراتِ

$3x = 0.3$ بطرحِ 0.7 منَ الطرفينِ

$x = 0.1$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

أتحقَّقُ من فهمي

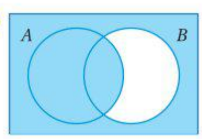
قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 3 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابِقةٍ، ومُلوَّنةٍ بالأحمرِ والأصفرِ والأزرقِ. إذا كانَ الجدولُ المجاورُ يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ لونٍ منْ هذهِ الألوانِ، فأجدُ قيمةَ x.

الأصفرُ	الأحمرُ	الأزرقُ	اللونُ
x	0.4	0.3	الاحتمالُ

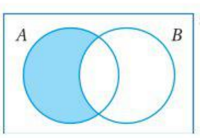
$x = 0.3$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ أشكالِ فِنْ الآتيةِ:

1 

$\overline{B-A}$

2 

$A-B$

162

مثال 5

- أقدّم للطلبة مفهوم الحوادث الشاملة، وأعطي لهم أمثلة على حوادث شاملة لتجارب عشوائية مختلفة.
- أوضّح للطلبة أن بعض الحوادث تكون متنافية وشاملة؛ لذا فإن مجموع احتمالاتها هو 1، وأقدّم لهم أمثلة على ذلك، ثم أوجّههم إلى تأمّل شكلَي فِن الواردين في الصفحة 161؛ لمعرفة الفرق بين الحوادث الشاملة، والحوادث المتنافية الشاملة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، وأكتب جدول الاحتمال الوارد في المسألة على اللوح.
- أوضّح للطلبة أن حوادث توقُّف مؤشّر القرص على الألوان الأربعة هي حوادث متنافية وشاملة، وهذا يعني أن مجموع احتمالاتها هو 1، ويمكن الاستفادة من هذه المعلومة في إيجاد قيمة x.
- أناقش مع الطلبة كيفية إيجاد قيمة x على اللوح، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (17 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (31 – 26).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

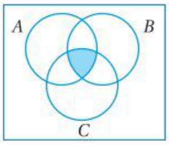
إرشادات:

- في السؤال 27 (**تبرير**)، أوجّه الطلبة إلى تمثيل المستقيمين $y = x$ و $y = 4 - x$ بيانيًا لتحديد النقاط التي تقع على المستقيمين معًا.
- في المسائل (30 – 28) (**تحدٍّ**)، ألفت انتباه الطلبة إلى أن جميع عناصر الحادث B هي من عناصر الحادث A.

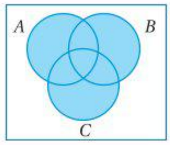
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 25 ,(23 – 21) كتاب التمارين: (15 – 7) ,(4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 24 ,(20 – 18) كتاب التمارين: ,(15 – 13) ,(6–3) (27 – 21)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (31 – 26) ,24 كتاب التمارين: ,(31–28) ,(20–16) (24 – 21)

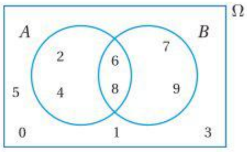
3 

$A \cap B \cap C$

4 

$A \cup B \cup C$

كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 0 إلى 9 على مجموعةٍ مِنَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ **A** و **B** في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



5) $P(A)\ \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 6) $P(B)\ \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 7) $P(A \cap B)\ \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

8) $P(A \cup B)\ \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 9) $P(\bar{A})\ \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 10) $P(\bar{B})\ \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

11) $P(\overline{A \cap B})\ \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 12) $P(\overline{A \cup B})\ \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 13) $P(B - A)\ \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

يحتوي صندوقٌ على بطاقاتٍ مُتطابِقةٍ، ومُرقَّمةٍ منْ 1 إلى 100. إذا سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيًا، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممّا يأتي باستعمالِ أشكالِ فِنْ: (17–14) أنظر الهامش.

14) أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 15، ومضاعفاتِ العددِ 10.

15) أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 15 أوْ مضاعفاتِ العددِ 10.

16) أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 10، وليسَ منْ مضاعفاتِ العددِ 15.

17) ألّا يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 10، ولا منْ مضاعفاتِ العددِ 15.

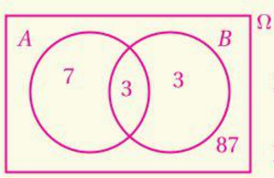
تغذيةٌ: في دراسةٍ شملَتْ 320 شخصًا يعانونَ السمنةَ، تبيَّنَ أنَّ 130 شخصًا منْهُمْ يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ، وأنَّ 147 شخصًا يمارسونَ الرياضةَ، وأنَّ 64 شخصًا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ ويمارسونَ الرياضةَ معًا. إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الأشخاصِ عشوائيًا، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممّا يأتي باستعمالِ أشكالِ فِنْ: (20–18) أنظر الهامش.

18) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ الرياضةَ، ويراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

19) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ الرياضةَ، ولا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

20) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ لا يمارسونَ الرياضةَ، ولا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):



A: العدد من مضاعفات 10

B: العدد من مضاعفات 15

14) $P(A \cap B) = \frac{3}{100}$

15) $P(A \cup B) = \frac{13}{100}$

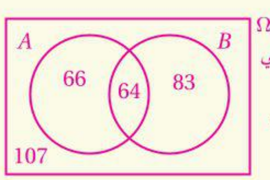
16) $P(A - B) = \frac{7}{100}$

17) $P(\overline{A \cup B}) = \frac{87}{100}$

$A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$, $n(A) = 10$

$B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$, $n(B) = 6$

$n(A \text{ and } B) = 3$



A: يراجع اختصاصي التغذية

B: يمارس الرياضة

18) $P(A \cap B) = \frac{64}{320} = \frac{1}{5}$

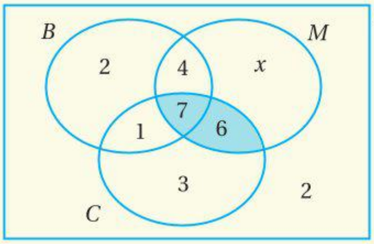
19) $P(B - A) = \frac{83}{320}$

20) $P(\overline{A \cup B}) = \frac{107}{320}$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» **سُئل 30 طالبًا عمّا إذا كانوا يملكون دراجة (B)، وهاتفًا نقّالًا (M)، وجهاز حاسوب (C)، ومُثِّلت النتائج في شكل ڤن الآتي:**

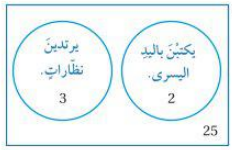


1. أجد قيمة المتغيّر x. 5
2. أعبّر عن المنطقة المُظلَّلة بالرموز. $C\cap M$
3. أجد عدد عناصر الحادث $C\cap(\overline{M\cup B})$. 3
4. إذا اختير أحد الطلبة عشوائيًّا، فأجد احتمال كل حادث ممّا يأتي:

a. أن يكون الطالب/ الطالبة ممّن لا يملكون هاتفًا نقّالًا. $\frac{8}{30}$

b. أن يكون الطالب/ الطالبة ممّن يملكون دراجة وجهاز حاسوب ولا يملكون هاتفًا نقّالًا. $\frac{1}{30}$

صفاتٌ وراثيةٌ: سألَتِ المُعلِّمةُ الطالباتِ في أحدِ الصفوفِ عمَّنْ ترتدي منْهُنَّ نظّارةً، أوْ تكتبُ بيدِها اليسرى، ثمَّ لخَّصَتِ البياناتِ في شكلِ ڤِنْ المجاورِ. إذا اختيرَتْ طالبةٌ منْهُنَّ عشوائيًّا، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



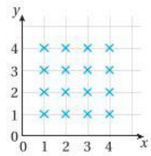
21. أنْ تكونَ الطالبةُ ترتدي نظّارةً، وتكتبُ بيدِها اليسرى. 0
22. أنْ تكونَ الطالبةُ ترتدي نظّارةً، أوْ تكتبُ بيدِها اليسرى. $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$
23. أنْ تكونَ الطالبةُ لا ترتدي نظّارةً. $\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$
24. قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 6 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابِقةٍ، وهيَ مُرقَّمةٌ بالأرقامِ: 1, 2, 3, 4, 5, 6. إذا كانَ الجدولُ المجاورُ يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ رقمٍ منْ هذهِ الأرقامِ، فأجدُ قيمةَ x. $x=0.15$

الرقمُ	1	2	3	4	5	6
الاحتمالُ	0.2	0.25	0.15	x	0.15	0.1

25. أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. أنظر الهامش.

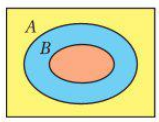
مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: يُبيِّنُ مُخطَّطُ الاحتمالِ المجاورُ الفضاءَ العينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ. إذا كانَ الحادثُ A يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y=x$، وكانَ الحادثُ B يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y=4-x$، فأُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:



26. أُمثِّلُ التجربةَ بأشكالِ ڤِنْ. أنظر الهامش.
27. إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ تقعَ على المستقيمِ $y=x$، والمستقيمِ $y=4-x$، مُبرِّرًا إجابتي.
توجد نقطة واحدة تقع على المستقيمين معًا، هي: $(2,2)$ $P(A\cap B)=\frac{1}{16}$

تبريرٌ: أستعملُ شكلَ ڤِنْ المجاورَ لكتابةِ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، مُبرِّرًا إجابتي:



28. $A\cap B$ — B؛ لأن B محتواه في A.
29. $A\cup B$ — A؛ لأن B محتواه في A.
30. $B-A$ — $\varnothing$ لا توجد عناصر في B وليست في A.
31. **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَصِفُ 3 حوداثَ متنافيةٍ وشاملةٍ في تجربةٍ عشوائيةٍ.
إجابة ممكنة: التجربة العشوائية: رمي حجر نرد.
A: ظهور عدد زوجي أكبر من 3،
B: ظهور عدد فردي، C: ظهور العدد 2

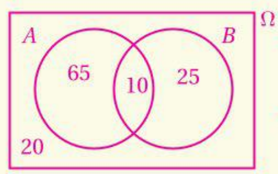
164

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 7 و 8 من خطوات تنفيذ المشروع.

إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

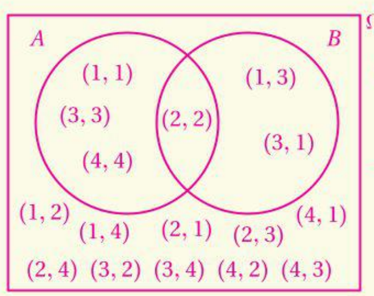
25) $P(A-B)=\frac{65}{120}=\frac{13}{24}$



A: يدرسون اللغة الكورية

B: يدرسون اللغة الإسبانية

26)



A: النقطة تقع على $y=x$

B: النقطة تقع على $y=4-x$

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب/ طالبة كتابة 3 معلومات أساسية مُتعلَّمة في هذا الدرس على ورقة، ثم أجمع الأوراق، وأُعِدّ قائمة تحوي المعلومات الأساسية المُشترَكة التي كتبها الطلبة؛ بُغْيَة تقييم تعلّمهم، ومعالجة مواطن الضعف لديهم.

الدرس 5

نتاجات الدرس

- تعرُّف الاحتمال الهندسي.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الأطوال.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال المساحات.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الزوايا.

الدرسُ 5

الاحتمالُ الهندسيُّ
Geometric Probability

فكرةُ الدرسِ إيجادُ احتمالاتٍ هندسيةٍ باستعمالِ الأطوالِ والمساحاتِ والزوايا.

المصطلحاتُ الاحتمالاتُ الهندسيةُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ لوحةَ إعلاناتٍ مضيئةً على شكلِ مُربَّعٍ أخضرَ، طولُ ضلعِهِ 3 m، وفي داخلِهِ مستطيلٌ أزرقُ، طولُهُ 2.83 m، وعرضُهُ 1.41 m. إذا كانَتِ اللوحةُ تضاءُ بآلافٍ منْ وحداتِ البكسلِ الصغيرةِ، ورُصِدَتْ وحدةٌ محروقةٌ منْ هذهِ الوحداتِ، فأجدُ احتمالَ أنْ تكونَ منْ وحداتِ اللوحِ الأزرقِ.

الاحتمالُ الهندسيُّ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَتِ التجربةُ العشوائيةُ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ فيها يساوي نسبةَ عددِ عناصرِ الحادثِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ احتمالَ تجاربَ عشوائيةٍ ترتبطُ بهذا المفهومِ، لكنَّها تتضمَّنُ مقاييسَ هندسيةً، مثلَ: الأطوالِ، والمساحاتِ، والزوايا، وتُسمّى **الاحتمالاتِ الهندسيةَ** (geometric probabilities).

الاحتمالُ الهندسيُّ: الأطوالُ

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{AB}$ التي تحوي القطعةَ المستقيمةَ $\overline{CD}$. إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$، ولتكنْ K، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K على $\overline{CD}$ يساوي نسبةَ طولِ $\overline{CD}$ إلى طولِ $\overline{AB}$؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ العشوائيةِ، وجميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{CD}$ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{وقوعُ } K \text{ على } \overline{CD}) = \frac{CD}{AB}$$

أتعلَّمُ
يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ على $\overline{AB}$.

165

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حساب احتمالات وقوع حوادث لتجارب عشوائية متساوية الاحتمال.
- حساب احتمال عدم وقوع حادث ما.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أكتب المصطلحات الآتية على اللوح:
  - » التجربة العشوائية.
  - » الفضاء العيني.
  - » الحادث.
  - » الحادث المُؤكَّد.
  - » الحادث المستحيل.
  - » الحادث الممكِن.
  - » التجربة متساوية الاحتمال.
  - » التجربة غير متساوية الاحتمال.
  - » مقياس الاحتمال.
  - » الاحتمال النظري.
  - » الاحتمال التجريبي.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأطلب إلى كل مجموعة ذكر تعريف لكل من المصطلحات المكتوبة عل اللوح، ومثال توضيحي لكل منها.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

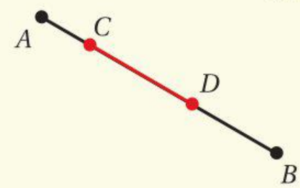
2 الاستكشاف

- أوجّـه الطلبـة إلى قراءة المسـألة الواردة في بند (**مسـألة اليوم**)، وتأمّل الشـكل المجـاور لها، ثم أسألهم:
  - » ما طول ضلع المربع الأخضر؟ 3 m
  - » ما أبعاد المستطيل الأزرق؟ طوله 2.83 m، وعرضه 1.41 m
  - » بماذا تضاء الوحدة؟ بآلاف من وحدات البكسل الصغيرة.
  - » هل يمكن عَدُّ أنّ كل وحدة بكسل تعبّر عن نقطة داخل لوحة الإعلانات؟ نعم.
  - » إذا رُصِدت وحــدة محروقة من هذه الوحدات، فكيف يمكن إيجــاد احتمال أن تكون من وحدات اللوح الأزرق؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكنّ؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

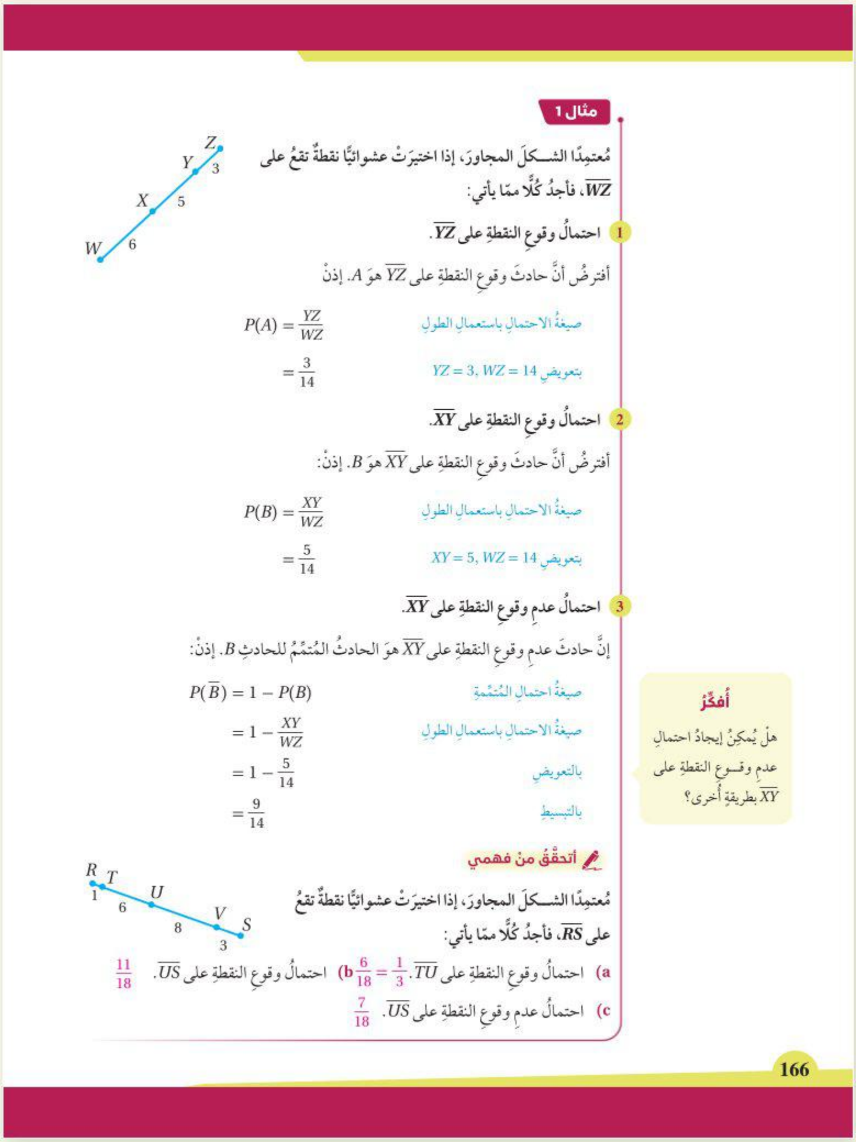
3 التدريس

مثال 1

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا عن التجارب العشوائية متساوية الاحتمال، وأبيّن لهم أنه من غير الممكن تطبيق قانون الاحتمال لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية غير متساوية الاحتمال، وأنه يمكن الاستفادة من هذا المفهوم لإيجاد ما يُسمّى **(الاحتمالات الهندسية)**، وهي احتمالات لتجارب عشوائية تتضمن مقاييس هندسية، مثل: الأطوال، والمساحات، والزوايا.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في **ورقة المصادر 10: الاحتمال الهندسي (الأطوال)**):



- أسأل الطلبة:
  » هل تُعَدّ تجربة اختيار نقطة من النقاط الواقعة على $\overline{AB}$ عشوائيًّا تجربة متساوية الاحتمال؟ لماذا؟ نعم؛ لأن فرصة اختيار أي نقطة على $\overline{AB}$ هي نفسها.
  » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ جميع النقاط الواقعة على $\overline{AB}$.
  » إذا اختيرت النقطة K عشوائيًّا، فما احتمال وقوع هذه النقطة على $\overline{CD}$؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابات الأسئلة السابقة، وأتوصّل معهم إلى أن النقاط الواقعة على $\overline{CD}$ تمثّل عناصر حادث اختيار النقطة K عشوائيًّا، وأن عناصر الفضاء العيني تمثّل جميع النقاط الواقعة على $\overline{AB}$، وبما أن القطعة المستقيمة هي مسار مستقيم من النقاط له نقطة بداية ونقطة نهاية؛ فإن احتمال وقوع النقطة K على $\overline{CD}$ يساوي نسبة طول $\overline{CD}$ إلى طول $\overline{AB}$.
- أناقش حل المثال 1 مع الطلبة، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.



مثال 1

مُعتمِدًا الشكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{WZ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

W 6 X 5 Y 3 Z

1) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{YZ}$.

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ النقطةِ على $\overline{YZ}$ هوَ A. إذنْ

$P(A) = \frac{YZ}{WZ}$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

$= \frac{3}{14}$ بتعويضِ $YZ = 3, WZ = 14$

2) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ هوَ B. إذنْ:

$P(B) = \frac{XY}{WZ}$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

$= \frac{5}{14}$ بتعويضِ $XY = 5, WZ = 14$

3) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.

إنَّ حادثَ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ هوَ الحادثُ المُتمِّمُ للحادثِ B. إذنْ:

$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ صيغةُ احتمالِ المُتمِّمةِ

$= 1 - \frac{XY}{WZ}$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

$= 1 - \frac{5}{14}$ بالتعويضِ

$= \frac{9}{14}$ بالتبسيطِ

أفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ إيجادُ احتمالِ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ بطريقةٍ أُخرى؟

أتحقَّقُ منْ فهمي

مُعتمِدًا الشكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{RS}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

R 1 T 6 U 8 V 3 S

a) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{TU}$. $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

b) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{US}$. $\frac{11}{18}$

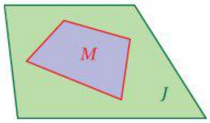
c) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{US}$. $\frac{7}{18}$

166

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بأن الرمز AB يشير إلى طول القطعة المستقيمة، في حين يشير الرمز $\overline{AB}$ إلى القطعة المستقيمة نفسها.
- في الفرع 3 من المثال 1، ألفت انتباه الطلبة إلى أنه لو افتُرِض أن حادث وقوع النقطة على $\overline{XY}$ هو B؛ فإن هذا يعني أن حادث عدم وقوع النقطة على $\overline{XY}$ هو $\overline{B}$.
- أناقش مع الطلبة حل سؤال **(أفكّر)** الوارد في هامش الفرع 3 من المثال 1، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن إيجاد الاحتمال بإيجاد نسبة مجموع طولي $\overline{YZ}$ و $\overline{WX}$ إلى طول $\overline{WZ}$.
- أطلب إلى الطلبة حل الفرع c من بند **(أتحقّق من فهمي)** التابع للمثال 1 بأكثر من طريقة.

الاحتمالُ الهندسيُّ: المساحاتُ



يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المنطقةَ J التي تحوي المنطقةَ M. إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ في المنطقةِ J، ولتكنْ K، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K في المنطقةِ M يساوي نسبةَ مساحةِ المنطقةِ M إلى مساحةِ المنطقةِ J؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ في المنطقةِ J تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ، وجميعَ النقاطِ في المنطقةِ M تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

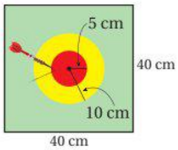
$$P(\text{وقوعُ } K \text{ في المنطقةِ } M) = \frac{(\text{مساحةَ المنطقةِ } M)}{(\text{مساحةِ المنطقةِ } J)}$$

أتعلَّمُ

يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ في المنطقةِ J.

مثال 2 : منَ الحياةِ

لوحةُ أسهمٍ: أطلقَ وليدٌ سهمًا على لوحةِ الأسهمِ المجاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ الحمراءِ.



أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ السهمِ على المنطقةِ الحمراءِ هوَ A. إذنْ:

$$P(A) = \frac{\text{مساحةَ المنطقةِ الحمراءِ}}{\text{مساحةِ لوحةِ السهامِ}}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ المساحةِ

$$= \frac{\pi r^2}{s^2}$$ صيغةُ مساحةِ الدائرةِ، وصيغةُ مساحةِ المُربَّعِ

$$= \frac{\pi(5)^2}{(40)^2}$$ بتعويضِ $r = 5, s = 40$

$$\approx 0.05$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

مُعتمِدًا المعلوماتِ المعطاةَ في المثالِ 2، أجدُ احتمالَ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ الصفراءِ. 0.15 تقريبًا.

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بصيغة مساحة كل من الدائرة والمربع.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أن احتمال وقوع السهم في المنطقة الحمراء قليل؛ لأن مساحة الدائرة الحمراء صغيرة بالمقارنة بالمساحة الكلية للوحة السهام.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أن مساحة المنطقة الصفراء ليست مساحة دائرة، وإنما هي مساحة الدائرة الكبيرة مطروحًا منها مساحة الدائرة الصغيرة الحمراء.

تعزيز اللغة ودعمها:

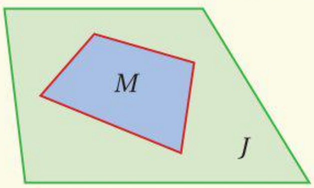
أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2: من الحياة

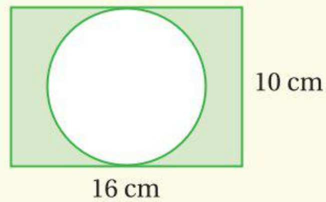
- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في **ورقة المصادر 11: الاحتمال الهندسي (المساحات)**):



- أسأل الطلبة:
  - » هل تُعَدّ تجربة اختيار نقطة من النقاط الواقعة في المنطقة J عشوائيًّا تجربة متساوية الاحتمال؟ لماذا؟ نعم؛ لأن فرصة اختيار أي نقطة في المنطقة J هي نفسها.
  - » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ جميع النقاط الواقعة في المنطقة J.
  - » إذا اختيرت النقطة K عشوائيًّا، فما احتمال وقوع هذه النقطة في المنطقة M؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابات الأسئلة السابقة، وأتوصّل معهم إلى أن النقاط الواقعة في المنطقة M تمثّل عناصر حادث اختيار النقطة K عشوائيًّا، وأن عناصر الفضاء العيني تمثّل جميع النقاط الواقعة في المنطقة J؛ لذا فإن احتمال وقوع النقطة K في المنطقة M يساوي نسبة مساحة المنطقة M إلى مساحة المنطقة J.
- أناقش حل المثال 2 مع الطلبة، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي

إذا اختيرت نقطة عشـوائيًّا داخل المسـتطيل في الشـكل الآتي، فما احتمال أن تقع في المنطقة المُظلَّلة؟



احتمال أن تقـع النقطة في المنطقـة المُظلَّلة (الخضراء) يساوي 0.51 تقريبًا.

مثال 3

- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في ورقة المصادر 12: الاحتمال الهندسي (الزوايا)):

- أسأل الطلبة:
  » هل تُعَدّ تجربة توقّف المؤشّـر عشوائيًّا عند أيّ نقطة فـي الدائـرة تجربة متسـاوية الاحتمال؟ لماذا؟ نعم؛ لأن فرصة وقوف المؤشّـر عند أي نقطة في الدائرة هي نفسها.
  » مـا الفضاء العيني لهذه التجربـة؟ جميع النقاط الواقعة داخل الدائرة.
  » إذا اختيرت النقطة K عشوائيًّا، فما احتمال وقوع هـذه النقطة فـي القطاع الأخضر؟ سـتختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابات الأسـئلة السـابقة، وأتوصّل معهم إلـى أن النقاط الواقعة في القطاع الأخضر تمثّل عناصـر حادث اختيار النقطة K عشـوائيًّا، وأن عناصر الفضاء العيني تمثّـل جميع النقاط الواقعة في الدائرة، وأبيّـن لهـم أن احتمـال وقـوع k في القطـاع الأخضر يساوي نسبة قياس زاوية القطاع الأخضر إلى مجموع الزوايا حول مركز الدائرة.
- أناقـش حل المثـال 3 مع الطلبـة، وأبيّن لهـم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

الاحتمالُ الهندسيُّ: الزوايا

إذا دُوِّرَ المُؤشِّرُ في القرصِ المجاورِ عشوائيًّا، فإنَّ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّـرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ يساوي نسـبةَ قياسِ زاويةِ القطاعِ الأخضرِ إلى مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ في الدائرةِ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينـيِّ للتجربةِ، وجميعَ النقاطِ في القطاعِ الأخضرِ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{توقُّفُ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ}) = \frac{(\text{زاويةَ القطاعِ الأخضرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})}$$

أتعلَّمُ

يتسـاوى الاحتمـالُ في تجربةِ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ أيِّ نقطةٍ في الدائرةِ؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُـها لأيِّ نقطةٍ يتوقَّفُ عندَهُ المُؤشِّرُ.

مثال 3

مُعتمِدًا زوايا القطاعاتِ الظاهـرةَ على القرصِ المجاورِ، أجدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:

1 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ.

أفترِضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأصفرِ هوَ A. إذنْ:

$$P(A) = \frac{(\text{زاويةَ القطاعِ الأصفرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})} \quad \text{صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الزوايا}$$

$$= \frac{140^\circ}{360^\circ} \quad \text{بالتعويضِ}$$

$$= \frac{7}{18} \quad \text{بالتبسيطِ}$$

2 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أوِ القطاعِ الأحمرِ.

أفترِضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أوِ القطاعِ الأحمرِ هوَ B. إذنْ:

$$P(B) = \frac{(\text{مجموعَ زاويتي القطاعينِ الأزرقِ والأحمرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})} \quad \text{صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الزوايا}$$

$$= \frac{60^\circ + 52^\circ}{360^\circ} \quad \text{بالتعويضِ}$$

$$= \frac{112^\circ}{360^\circ} = \frac{14}{45} \quad \text{بالتبسيطِ}$$

168

أتحقّقُ من فهمي

مُعتمِدًا زوايـا القطاعاتِ الظاهرةَ على القرصِ المجاورِ، أجدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:

a) احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ. $\frac{1}{6}$

b) احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ أوِ القطاعِ الأحمرِ. $\frac{1}{2}$

أتذكّرُ

في الاحتمـالِ، يـدلُّ حرفُ العطفِ (أوْ) على الاتحادِ.

أتدرّبُ وأحُلُّ المسائلَ

مُعتمِدًا الشـكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشـوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{WZ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XZ}$. $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

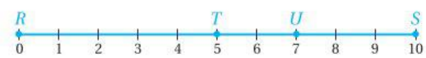
2) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

3) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WX}$ أوْ $\overline{YZ}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

4) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WY}$. $\frac{7}{10}$

5) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

مُعتمِدًا الشكلَ الآتي، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{RS}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



6) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

7) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{TS}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

8) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$ أوْ $\overline{US}$. $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

9) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{UR}$. $\frac{7}{10}$

10) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على UR. $\frac{3}{10}$

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بصيغة مساحة كل من الدائرة والمربع.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه كلّما كانت زاوية القطاع أكبر، كانت فرصة توقُّف مؤشّر القرص عند نقطة في القطاع أكبر.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق **(أتذكّر)** الوارد في هامش المثال 3؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بأن حرف العطف (أو) يدل على اتحاد الحادثين، وهذا بدوره يساعدهم على حل الفرع b من بند **(أتحقّق من فهمي)** التابع للمثال 3

4 التدريب

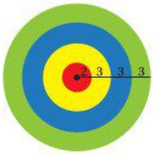
أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند **(أتدرّب وأحل المسائل)**، ثم أطلب إليهم حل المسائل (5 – 1) والمسائل (14 – 11) والمسائل (23 – 21) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند **(أتدرَّب وأحل المسائل)**، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

لوحةُ أسهمٍ: أطلقَتْ دلالُ سهمًا على لوحةِ الأسهمِ المجاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحةِ، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



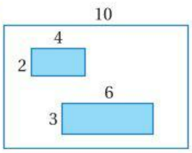
11) وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الحمراءِ. $\frac{4}{121}$

12) وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الصفراءِ. $\frac{21}{121}$

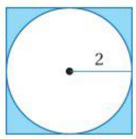
13) عدمُ وقوعِ السهمِ على المنطقةِ الزرقاءِ. $\frac{82}{121}$

14) وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الخضراءِ أوِ المنطقةِ الصفراءِ. $\frac{78}{121}$

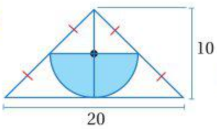
إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الأشكالِ الآتيةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ باللونِ الأزرقِ:

15) 

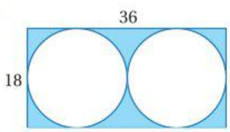
$\frac{13}{45}$ تقريبًا.

16) 

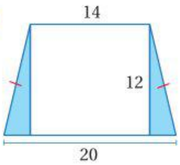
0.21 تقريبًا.

17) 

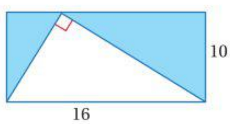
0.39 تقريبًا.

18) 

0.21 تقريبًا.

19) 

$\frac{3}{17}$

20) 

$\frac{1}{2}$

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (27 – 25).
- أرصد أيّة أفكار غيـــر تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السـؤال 24 (**تبرير**)، أوضّح للطلبة أنه بما أن طـول $\overline{BZ}$ معلـوم، واحتمـال وقـوع النقطة على $\overline{MN}$ معلوم أيضًا، فإنه يمكن التعويض في قاعدة احتمال المساحة لإيجاد طول $\overline{MN}$.
- فـي السـؤال 25 (**تبرير**)، أوجّه الطلبـة إلى إيجاد مسـاحة المثلـث والدائـرة ومتـوازي الأضلاع؛ لمساعدتهم على إيجاد الاحتمال المطلوب.

الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16 ,15 ,9 ,7 ,6 كتاب التمارين: 7 ,6 ,(4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 24 ,20 ,18 ,(10 – 8) كتاب التمارين: 11 ,10 ,8 ,5
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (26 – 24) ,19 ,17 كتاب التمارين: (14 – 11) ,9

مُعتمِدًا زوايا القطاعـاتِ الظاهرةَ على القرصِ المجاورِ، أجـدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:

21 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ البنفسجيِّ. $\frac{1}{12}$

22 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ أوِ القطاعِ الأخضرِ. 0.6 تقريبًا.

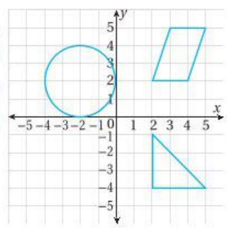
23 احتمالُ عدمِ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأحمرِ. 0.85 تقريبًا.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 0.44 تقريبًا.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

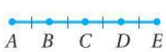
25 **تبريرٌ**: إذا كانَتِ $\overline{BZ}$ تحوي $\overline{MN}$، وكانَ $BZ = 20$، واختيرَتْ نقطةٌ عشـوائيًا على $\overline{BZ}$، وكانَ احتمالُ وقوعِها على $\overline{MN}$ هوَ 0.3، فأجدُ طولَ $\overline{MN}$، مُبرِّرًا إجابتي. $0.3 = \frac{MN}{20}, MN = 6$

26 **تبريـرٌ**: في المسـتوى الإحداثـيِّ الآتي، إذا اختيـرَ الـزوجُ المُرتَّبُ (x, y) عشـوائيًا، حيـثُ: $-5 \leq x \leq 5$، و$-5 \leq y \leq 5$، فأجـدُ احتمالَ ألّا يقعَ الـزوجُ المُرتَّبُ في أيٍّ منَ المُثلَّثِ، والدائـرةِ، ومتوازي الأضلاعِ، مُبرِّرًا إجابتي.



مسـاحة متـوازي الأضـلاع 6 وحدات مربعة، ومساحة الدائرة 4π وحدة مربعة، ومساحة المثلث 4.5 وحدات مربعة.
الاحتمال المطلوب يساوي:
$$\frac{100-(6+4\pi+4.5)}{100} \approx 0.77$$

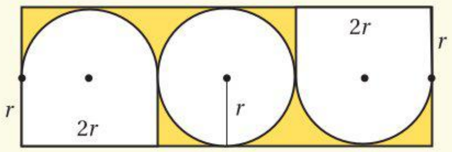
27 **مسـألةٌ مفتوحةٌ**: مُعتمِدًا $\overline{AE}$، أَصِفُ حادثًا احتمالُهُ أكبرُ منْ $\frac{1}{2}$ (أكتبُ ثلاثةَ حلولٍ مُمكِنةٍ).



الحادث A: وقوع النقطة على $\overline{AD}$
الحادث B: وقوع النقطة على $\overline{BE}$
الحادث C: وقوع النقطة على $\overline{DE}$ أو $\overline{AC}$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
  » **إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا من كل شكل من الآتية، فأجد احتمال وقوعها في المنطقة المُظلَّلة.**



0.14 تقريبًا.

تعليمات المشروع:

- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصره كافّة متوافرة يوم العرض.

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب/ طالبة اختيار فكرة فهمها/ فهمتها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها/ تفهمها جيدًا، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- أطلب إلى الطلبة تسليمي الأوراق.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، أخطّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي أرصدها.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلِّ ممّا يأتي:

1) تبايـنُ مجموعةِ البياناتِ الآتيةِ مُقرَّبًـا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ هوَ:

11, 13, 14, 16, 18

a) 5.8 b) 2.4

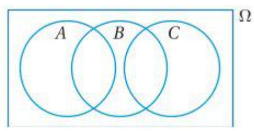
c) 14.4 d) 3.8

2) استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = 2x - 15$ لتعديلِ مجموعةٍ منَ البيانـاتِ. إذا كانَ الانحرافُ المعيـاريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ هوَ 3، فـإنَّ الانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ هوَ:

a) -9 b) 21

c) 3 d) 6

3) الحادثُ A والحادثُ C في شكلِ فِنْ الآتي هما:



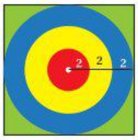
a) حادثانِ شاملانِ.

b) حادثانِ متنافيانِ.

c) حادثانِ متنافيانِ وشاملانِ.

d) حادثانِ متقاطعانِ.

4) أُطلِقَ سـهمٌ علـى لوحةِ الأسـهمِ المجـاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحـةِ، فـإنَّ احتمـالَ وقوعِـهِ علـى المنطقـةِ الصفراءِ هوَ:



a) $\frac{\pi}{36}$ b) $\frac{\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{9}$ d) $\frac{\pi}{4}$

يُبيِّنُ الجدولُ الآتي قياساتِ أحذيةٍ لمجموعةٍ منَ الطلبةِ:

المقاسُ	33	34	35	36	37	38	39
التكرارُ	1	3	8	14	6	2	1

5) أجدُ تباينَ قياساتِ الأحذيةِ. 1.47 تقريبًا.

6) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لقياساتِ الأحذيةِ. $\sigma \approx 1.21$

حُوِّلَتْ مجموعةٌ منَ البياناتِ، عددُها 50، باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 70$، حيثُ y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ، و x المشاهدةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ:

$\sum y = -135, \sum y^2 = 2567$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

7) الوسطُ الحسابيُّ للمشاهداتِ قبلَ التحويلِ. $\mu = 67.3$

8) الانحرافُ المعياريُّ للمشاهداتِ قبلَ التحويلِ. $\sigma \approx 6.6$

172

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (10 – 1) فرديًّا، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أناقشهم جميعًا في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أطلب إليهم حلّ المسائل (28 – 11)، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

الوحدة 8

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

في ما يأتي أسعارُ مجموعةٍ منَ السيّاراتِ المُستعمَلةِ بالدينارِ:

2590	2650	2650	2790	2850	2925
3090	3125	3125	3420	3595	3740
3750	3920	3945	4050	4150	4200

9) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ. (9, 10) أنظر الهامش.

10) أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

يُبيِّنُ الجدولُ الآتي توزيعًا لعددِ الجرائدِ المَبيعةِ في إحدى المكتباتِ خلالَ 15 يومًا:

التكرارُ	عددُ الجرائدِ
4	81 – 85
5	86 – 90
4	91 – 95
2	96 – 100
15	المجموعُ

11) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ. $\mu_x \approx 89.3$

12) أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ. المنوال 88

13) أُحدِّدُ الفئةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ. فئة الوسيط 90 – 86

14) يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ التالي كمّيةَ الماءِ (باللترِ) التي استهلكَتْها مجموعةٌ منَ الأشخاصِ في أحدِ الأيامِ. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	كمّيةُ الماءِ (L)
45	$75 \le s < 125$
50	$125 \le s < 150$
70	$150 \le s < 175$
90	$175 \le s < 225$
45	$225 \le s < 300$

أنظر الهامش.

في مجموعةٍ تضمُّ 25 شخصًا منْ منتسبي أحدِ النوادي الرياضيةِ، كانَ 13 شخصًا منْهُمْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ، و11 شخصًا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، و6 أشخاصٍ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ ولعبةَ كرةِ القدمِ معًا. إذا اختيرَ شخصٌ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ: (15–17) أنظر الهامش.

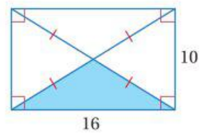
15) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ أو لعبةَ كرةِ القدمِ.

16) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ.

17) أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ لا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ.

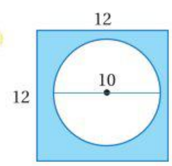
إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الشكلينِ الآتيينِ، فأجِدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ باللونِ الأزرقِ.

18)



$\frac{40}{160} = \frac{1}{4}$

19)



0.45 تقريبًا.

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

9)

أسعار سيارات مستعملة (p)	
السعر (JD)	التكرار
$2580 \le p < 2880$	5
$2880 \le p < 3180$	4
$3180 \le p < 3480$	1
$3480 \le p < 3780$	3
$3780 \le p < 4080$	3
$4080 \le p < 4380$	2

10) أغلب أسعار السيارات تقل عن JD 3180 أو تزيد على JD 3780، وعدد قليل منها يختلف عن ذلك.

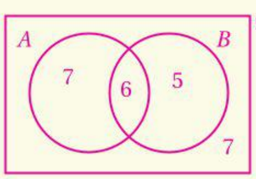
14)

استهلاك المياه			
الكمية (لتر)	التكرار	طول الفئة	الكثافة التكرارية
$75 \le s < 125$	45	50	0.9
$125 \le s < 150$	50	25	2
$150 \le s < 175$	70	25	2.8
$175 \le s < 225$	90	50	1.8
$225 \le s < 300$	45	75	0.6

15) $P(A \cup B) = \frac{18}{25}$

16) $P(B - A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

17) $P(\overline{A \cup B}) = \frac{7}{25}$



A: يمارسون لعبة كرة السلة

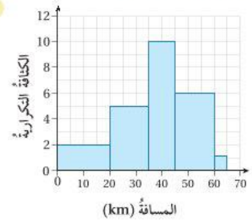
B: يمارسون لعبة كرة القدم

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

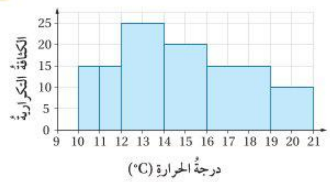
أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا لكلِّ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ممّا يأتي:

(20, 21) أنظر الهامش.

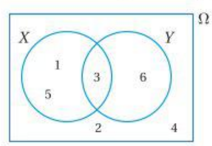
20



21



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 6 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ X و Y في شكلِ فِنْ الآتي. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



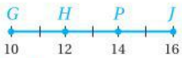
22 $P(X \cap Y)$ $\frac{1}{6}$

23 $P(X \cup Y)$ $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

24 $P(\overline{X \cup Y})$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

25 $P(X - Y)$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مُعتمِدًا الشكلَ الآتيَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{GJ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يلي:



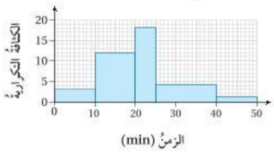
26 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{HP}$. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

27 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{GP}$. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

28 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{HJ}$. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ الآتي الزمنَ (بالدقائقِ) الذي استغرقَهُ عددٌ منَ المرضى في الانتظارِ قبلَ دخولِهِمْ عندَ طبيبِ الأسنانِ خلالَ أسبوعٍ:



29 أجدُ عددَ المرضى الذينَ انتظروا أكثرَ منْ 30 دقيقةً قبلَ الدخولِ عندَ الطبيبِ. 50

30 أجدُ عددَ المرضى الذينَ انتظروا منْ 10 دقائقَ إلى 40 دقيقةً قبلَ الدخولِ عندَ الطبيبِ. 270

قيسَتْ أطوالُ 8 أشخاصٍ بوحدةِ السنتيمتر، وكانَتِ النتائجُ كالآتي:

165	170	190	180
175	185	176	184

31 أجدُ تباينَ أطوالِ الأشخاصِ الثمانيةِ. $\sigma^2 \approx 59.9$

32 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ الأشخاصِ الثمانيةِ. $\sigma \approx 7.7$

تدريب على الاختبارات الدولية:

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حلّ الأسئلة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثمّ أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجّع الطلبة على الاهتمام بحلّ مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكلّ جدّيّة، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

20)

المسافة (km)	$0 \le x < 20$	$20 \le x < 35$	$35 \le x < 45$	$45 \le x < 60$	$60 \le x < 65$
التكرار	40	75	100	90	5

21)

درجة الحرارة (°C)	$10 \le x < 11$	$11 \le x < 12$	$12 \le x < 14$	$14 \le x < 16$	$16 \le x < 19$	$19 \le x < 21$
التكرار	15	15	50	40	45	20

كتاب التمارين

أختبرُ معلوماتي بحَلِّ التدريباتِ أوّلًا. وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المعطى.

المدى والمدى الربيعيُّ (الدرسُ 1)

أجدُ المدى والربيعياتِ والمدى الربيعيَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

1) 85, 77, 58, 69, 62, 73, 55, 82, 67, 77, 59, 92, 75

المدى 37 ، $Q_1 = 60.5$ ، $Q_2 = 73$ ، $Q_3 = 79.5$ ، $IQR = 19$

2) 28, 42, 37, 31, 34, 29, 44, 28, 38, 40, 39, 42, 30

المدى 16 ، $Q_1 = 29.5$ ، $Q_2 = 37$ ، $Q_1 = 41$ ، $IQR = 11.5$

3)

الساقُ	الورقةُ
19	3 5 5
20	2 2 5 8
21	5 8 8 9 9 9
22	0 1 7 8 9
23	2

المفتاحُ: 19|3 = 193

المدى 39 ، $Q_1 = 202$ ، $Q_2 = 218$ ، $Q_3 = 221$ ، $IQR = 19$

4)

الساقُ	الورقةُ
5	0 3 7 9
6	1 3 4 5 5 6
7	1 5 6 6 9
8	1 2 3 5 8
9	2 5 6 9
11	7

المفتاحُ: 5|0 = 5.0

المدى 6.7 ، $Q_1 = 6.35$ ، $Q_2 = 7.6$ ، $Q_3 = 8.65$ ، $IQR = 2.3$

سرعةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي سرعةَ مجموعةٍ منَ الحيواناتِ بالكيلومترِ لكلِّ ساعةٍ:

الحيوانُ	السرعةُ (km/h)
الفهدُ الصيّادُ	100
النَّمِرُ	58
القِطّةُ	48
الفيلُ	40
الفأرُ	13
العنكبوتُ	2

5) أجدُ المدى الربيعيَّ للبياناتِ. $IQR = 45$

6) أصِفُ توزيعَ البياناتِ. ربع هذه الحيوانات سرعتها 13 km/h أو أقل، وربعها سرعتها 58 km/h أو أكثر. تتراوح سرعات النصف الأوسط من هذه الحيوانات بين 13 km/h و 58 km/h ولا يتجاوز الفرق بين سرعاتها 45 km/h

مثالٌ:

محافظاتٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المُجاوِرُ مساحاتِ المحافظاتِ الأردنيةِ مُقرَّبةً إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.

مساحاتُ المحافظاتِ الأردنيةِ	
المحافظةُ	المساحةُ (بآلافِ الكيلومتراتِ المُربَّعةِ)
عجلونُ	0.4
عمّانُ	7.5
العقبةُ	6.9
البلقاءُ	1.1
إربدُ	1.5
جرشُ	0.4
الكركُ	3.4
معانُ	32.8
مأدبا	0.9
المفرقُ	26.5
الطفيلةُ	2.2
الزرقاءُ	4.7

a) أجدُ المدى.

الخطوةُ 1 أُرتِّبُ البياناتِ تصاعديًّا.

0.4, 0.4, 0.9, 1.1, 1.5, 2.2, 3.4, 4.7, 6.9, 7.5, 26.5, 32.8

الخطوةُ 2 أجدُ المدى.

أكبرُ قِيَمِ البياناتِ هيَ 32.8، وأصغرُها هيَ 0.4، إذنْ، المدى هوَ:

$$R = 32.8 - 0.4 = 32.4$$

b) أجدُ المدى الربيعيَّ (IQR).

$$Q_2 = \frac{2.2 + 3.4}{2} = 2.8$$

$$\overbrace{0.4 \quad 0.4 \quad \underbrace{0.9 \quad 1.1}_{Q_1 = \frac{0.9 + 1.1}{2} = 1} \quad 1.5 \quad 2.2}^{\text{النصفُ الأدنى}} \quad \downarrow \quad \overbrace{3.4 \quad 4.7 \quad \underbrace{6.9 \quad 7.5}_{Q_3 = \frac{6.9 + 7.5}{2} = 7.2} \quad 26.5 \quad 32.8}^{\text{النصفُ الأعلى}}$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 7.2 - 1 = 6.2$$

إذنْ، المدى الربيعيُّ (IQR) للبياناتِ هوَ 6.2

c) أستعملُ المدى والمدى الربيعيَّ لوصفِ البياناتِ.

مدى هذهِ البياناتِ هوَ 32.4 ألفَ كيلومترٍ مُربَّعٍ، وربعُ محافظاتِ المملكةِ مساحاتُها ألفُ كيلومترٍ مُربَّعٍ أوْ أقلُّ، وربعُ المحافظاتِ أيضًا مساحاتُها 7.2 آلافِ كيلومترٍ مُربَّعٍ أوْ أكثرُ. أمّا مساحاتُ النصفِ الأوسطِ منَ المحافظاتِ فتتراوحُ بينَ ألفِ كيلومترٍ مُربَّعٍ و 7.2 آلافِ كيلومترٍ مُربَّعٍ، ولا تتجاوزُ الفروقُ بينَ مساحاتِها 6.2 آلافِ كيلومترٍ مُربَّعٍ.

تنظيمُ البياناتِ المتصلةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ معطاةٍ (الدرسُ 2)

في ما يأتي أطوالُ 20 خنفساءً بالسنتيمترِ:

0.7 1.3 3.2 2.7 0.9 3.1 2.5 1.8 2.3 4.4

0.6 2.6 3.9 2.1 1.7 2.6 3.5 2.8 3.2 1.6

7) أُنظِّمُ أطوالَ الخنافسِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاوِرِ.

أطوالُ الخنافسِ (l)		
الطولُ (cm)	الإشاراتُ	التكرارُ
$0 \le l < 1$	|||	3
$1 \le l < 2$	||||	4
$2 \le l < 3$	卌 ||	7
$3 \le l < 4$	卌	5
$4 \le l < 5$	|	1

8) ما عددُ الخنافسِ التي لا يقلُّ طولُها عنْ 2 cm؟ 13

مثالٌ: في ما يأتي كتلُ 20 حبّةَ تفّاحٍ بالغرامِ:

94 103 113 89 94 102 99 111 97 103

114 116 101 95 88 107 102 113 95 104

a) أُنظِّمُ كتلَ حبّاتِ التفّاحِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاوِرِ.

تُمثِّلُ كتلُ حبّاتِ التفّاحِ بياناتٍ عدديةً متصلةً؛ لذا لا توجدُ فجواتٌ بينَ الفئاتِ، وتشملُ هذهِ الفئاتُ جميعَ كتلِ حبّاتِ التفّاحِ، وتكونُ أطوالُها (الفئاتُ) في الجدولِ متساويةً.

كتلُ حبّاتِ التفّاحِ (m)		
الكتلةُ (g)	الإشاراتُ	التكرارُ
$80 \le m < 90$		
$90 \le m < 100$		
$100 \le m < 110$		
$110 \le m < 120$		

أملأُ الفراغَ في الجدولِ السابقِ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

الخطوةُ 1 أضعُ إشاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ حبّاتِ التفّاحِ التي تحويها.

كتلُ حبّاتِ التفّاحِ (m)		
الكتلةُ (g)	الإشاراتُ	التكرارُ
$80 \le m < 90$	||	
$90 \le m < 100$	卌 |	
$100 \le m < 110$	卌 ||	
$110 \le m < 120$	卌	

الخطوةُ 2 أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

كتلُ حبّاتِ التفّاحِ (m)		
الكتلةُ (g)	الإشاراتُ	التكرارُ
$80 \le m < 90$	||	2
$90 \le m < 100$	卌 |	6
$100 \le m < 110$	卌 ||	7
$110 \le m < 120$	卌	5

b) ما عددُ حبّاتِ التفّاحِ التي تقلُّ كتلةُ كلٍّ منْها عنْ 100 g؟

تقعُ حبّاتُ التفّاحِ التي تقلُّ كتلةُ كلٍّ منْها عنْ 100 g في أوّلِ فئتينِ. ولإيجادِ عددِها، أجمعُ تكراراتِ هاتينِ الفئتينِ:

$$2 + 6 = 8$$

إذنْ، عددُ حبّاتِ التفّاحِ التي تقلُّ كتلةُ كلٍّ منْها عنْ 100 g هوَ 8

تنظيمُ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ معطاةٍ (الدرسُ 2)

في ما يأتي عددُ الأحاديثِ النبويةِ الشريفةِ التي حفظَتْها مجموعةٌ منَ الطلبةِ:

23 29 31 36 20 35

19 27 15 33 18 24

10 25 17 14 39 31

9) أُنظِّمُ هذهِ البياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاوِرِ.

عددُ الأحاديثِ المحفوظةِ		
العددُ	الإشاراتُ	التكرارُ
10 – 15	|||	3
16 – 21	||||	4
22 – 27	||||	4
28 – 33	||||	4
34 – 39	|||	3

10) ما عددُ الطلبةِ الذينَ حفظوا 28 حديثًا أوْ أكثرَ؟ 7

كتاب التمارين

مثالٌ: في ما يأتي عددُ أقلامِ التلوينِ لدى كلِّ طالبٍ وطالبةٍ في أحدِ صفوفِ روضةِ أطفالٍ:

18 12 9 15 4 0 11 10 2

7 14 16 12 6 13 12 5 17

a) أُنظِّمُ هذهِ البياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاوِرِ.

يُمثِّلُ عددُ الأقلامِ بياناتٍ عدديةً منفصلةً؛ لذا توجدُ فجواتٌ بينَ الفئاتِ، وتكونُ أطوالُ الفئاتِ في الجدولِ متساويةً.

عددُ أقلامِ التلوينِ		
العددُ	الإشاراتُ	التكرارُ
0 – 3		
4 – 7		
8 – 11		
12 – 15		
16 – 19		

أملأُ الفراغَ في الجدولِ السابقِ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

الخطوةُ 1 أضعُ إشاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ أقلامِ التلوينِ التي تحويها.

عددُ أقلامِ التلوينِ		
العددُ	الإشاراتُ	التكرارُ
0 – 3	II	
4 – 7	IIII	
8 – 11	IIII	
12 – 15	~~IIII~~	
16 – 19	III	

الخطوةُ 2 أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

عددُ أقلامِ التلوينِ		
العددُ	الإشاراتُ	التكرارُ
0 – 3	II	2
4 – 7	IIII	4
8 – 11	IIII	4
12 – 15	~~IIII~~	5
16 – 19	III	3

b) ما عددُ الطلبةِ الذينَ لدى كلٍّ منْهُمْ 12 قلمَ تلوينٍ أوْ أكثرَ؟

$5 + 3 = 8$

عددُ الطلبةِ الذينَ لدى كلٍّ منْهُمْ 12 قلمَ تلوينٍ أوْ أكثرَ هو 8

إيجادُ احتمالاتِ وقوعِ الحوادثِ (الدرسُ 4)

دُوِّرَ مُؤشِّرُ القرصِ المُجاوِرِ المُقسَّمِ إلى 10 قطاعاتٍ مُتطابِقةٍ:

11 أجدُ الفضاءَ العينيَّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ. $\Omega = \{4, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

12 أجدُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ فرديٍّ. $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

13 أجدُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ أكبرَ منْ 20 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

اختارَتْ ليلى بطاقةً عشوائيًّا منْ بينِ البطاقاتِ المُجاوِرةِ. أجدُ احتمالَ اختيارِ:

14 بطاقةٍ تحملُ دائرةً. $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

15 بطاقةٍ تحملُ مستطيلًا والعددَ 3 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

16 بطاقةٍ تحملُ العددَ 1 $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

17 بطاقةٍ تحملُ شكلًا لهُ أضلاعٌ. $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

مثالٌ: دُوِّرَ مُؤشِّرُ القرصِ المُجاوِرِ المُقسَّمِ إلى 4 قطاعاتٍ مُتطابِقةٍ:

أجدُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ أكبرَ منْ 3

أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ أكبرَ منْ 3 هوَ A.

بما أنَّهُ يوجدُ عددٌ واحدٌ أكبرُ منْ 3، هوَ 5، فإنَّ:

$P(A) = \frac{1}{4}$

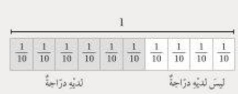
احتمالُ عدمِ وقوعِ الحادثِ (الدرسُ 4)

18 إذا كانَ احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ القدمِ الذي تُشجِّعُهُ سلمى هوَ $\frac{3}{7}$، فما احتمالُ ألّا يفوزَ الفريقُ؟ $\frac{4}{7}$

19 إذا كانَ احتمالُ أنْ تصلَ الحافلةُ في موعدِها هوَ $\frac{8}{11}$، فما احتمالُ أنْ تتأخّرَ الحافلةُ؟ $\frac{3}{11}$

مثالٌ:

إذا كانَ احتمالُ اختيارِ طالبٍ منَ الصفِّ السابعِ لديْهِ درّاجةٌ هوائيةٌ هوَ $\frac{6}{10}$، فما احتمالُ اختيارِ طالبٍ ليسَ لديْهِ درّاجةٌ هوائيةٌ؟



P (ليسَ لديْهِ درّاجةٌ) $= 1 - P$ (لديْهِ درّاجةٌ)

$= 1 - \frac{6}{10}$

$= \frac{4}{10}$

$= \frac{2}{5}$

أتذكّرُ

احتمالُ عدمِ وقوعِ الحادثِ A هوَ: $1 - P(A)$

الدرسُ 1

مقاييسُ التشتُّتِ
Measures of Variation

شاركَ 200 عَدّاءٍ في سباقِ الضاحيةِ، وسُجِّلَ الزمنُ (إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي استغرقَهُ كلُّ عَدّاءٍ لقطعِ مسافةِ السباقِ، ثمَّ نُظِّمَتِ البياناتُ في الجدولِ الآتي:

الزمنُ (min)	28	29	31	32	35	39	40	42	43
عددُ العدّائينَ	2	8	30	54	48	39	12	4	3

1 أجدُ تباينَ البياناتِ أعلاهُ. $\sigma^2 \approx 13.18$

2 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ أعلاهُ. $\sigma \approx 3.6$

تعبئةٌ: تُعبَّأُ زجاجاتُ عصيرِ الفاكهةِ في أحدِ المصانعِ بصورةٍ آليّةٍ. اختيرَتْ 12 زجاجةً عشوائيًّا لقياسِ حجمِ العصيرِ داخلَ كلٍّ منْها بوحدةِ (cm^3)، وكانَتِ النتائجُ كالآتي:

330.2 332.0 328.5 335.2 338.7 329.1

331.7 328.5 334.2 329.9 336.4 330.7

ثُمَّ حُوِّلَتْ هذهِ البياناتُ باستعمالِ العلاقةِ: $y = 10x - 3300$، حيثُ y الحجمُ بعدَ التحويلِ، وx الحجمُ قبلَ التحويلِ.

3 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لحجمِ العصيرِ داخلَ الزجاجاتِ بعدَ التحويلِ. $\sigma_y^2 \approx 1013.1, \sigma_y \approx 31.8$

4 أجدُ تباينَ حجمِ العصيرِ داخلَ الزجاجاتِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_x \approx 3.18, \sigma_x^2 \approx 10.1$

سجَّلَ باحثٌ المُدَّةَ (إلى أقربِ دقيقةٍ) التي استغرقَها 50 مُراجِعًا لإنجازِ معاملاتِهِمْ في إحدى الدوائرِ الحكوميةِ، وكانَتِ البياناتُ كالآتي:

8	9	6	11	8	5	6	6	6	10
8	7	6	12	5	6	6	7	9	11
5	6	10	7	7	6	6	6	10	8
8	7	7	11	6	4	7	6	6	9
8	8	6	7	10	12	5	6	7	9

5)

الزمن (min)	التكرار
4	1
5	4
6	16
7	9
8	7
9	4
10	4
11	3
12	2

5 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ.

6 أجدُ تباينَ البياناتِ أعلاهُ. $\sigma_t^2 \approx 3.8$

7 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ أعلاهُ. $\sigma_t \approx 1.95$

كتاب التمارين

الدرسُ 1 — مقاييسُ التشتُّتِ — Measures of Variation

يتبعُ

إذا كانَتِ انحرافاتُ 8 مشـاهداتٍ عنْ وسطِها الحسابيِّ كما يأتي: $-1, 1, -2, 1, 1, 2b+1, -4, 3, 2$، فأُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:

8 أجدُ قيمةَ الثابتِ b. $b = -\frac{1}{2}$

9 أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ المشاهداتِ. $\sigma^2 = 4.5, \sigma \approx 2.12$

10 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ، عددُها 20، علمًا بأنَّ مجموعَ هذهِ المشاهداتِ هوَ 208، ومجموعُ مُربَّعاتِها هوَ 2200. $\sigma \approx 1.36$

في ما يأتي مجموعةُ بياناتٍ:

24 17 80 38 73 31 73 52

ثمَّ استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = \frac{x-3}{7}$ لتحويلِ البياناتِ، حيثُ x القيمةُ قبلَ التحويلِ، وy القيمةُ بعدَ التحويلِ:

11 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ. $\mu_y = 6.5, \sigma_y \approx 3.3$

12 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ. $\mu_x \approx 48.5, \sigma_x \approx 23.1$

حُوِّلَتْ مجموعةٌ منَ البياناتِ، عددُها 20، باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 25$، حيثُ y القيمةُ بعدَ التحويلِ، وx القيمةُ قبلَ التحويلِ.

إذا كانَ: $\sum y = 124, \sum y^2 = 3531$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

13 الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ. $\mu_y = 6.2, \mu_x = 31.2$

14 الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_y \approx 11.8, \sigma_x \approx 11.8$

(15–18) أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الجدولُ المُجاوِرُ علاماتِ الطلبةِ في شعبتينِ منَ الصفِّ التاسعِ في اختبارِ الرياضياتِ في إحدى المدارسِ:

15 أجدُ مجموعَ علاماتِ الطلبةِ في كلِّ شعبةٍ.

16 أجدُ مجموعَ مُربَّعاتِ علاماتِ الطلبةِ في كلِّ شعبةٍ.

17 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ طلبةِ الشعبتينِ معًا.

18 أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ طلبةِ الشعبتينِ معًا.

	الشعبةُ (أ)	الشعبةُ (ب)
عددُ الطلبةِ	20	15
الوسطُ الحسابيُّ	14	18
التباينُ	10	6

الدرسُ 2 — الجداولُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ — Frequency Tables with Class Intervals

في كلٍّ ممّا يأتي، أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ: (1–4) أنظر ملحق الإجابات.

1 كتلُ أكياسِ اللحومِ (g).

28.4	27.5	29.1	26.3	27.8
28.6	27.2	27.5	28.3	25.7
29.3	26.2	27.3	26.9	28.5

2 أعدادُ الطلبةِ.

81	75	66	62	72	78
68	74	64	82	70	64
72	79	77	76	72	69

3 أعدادُ طلباتِ التوصيلِ الأسبوعيةِ.

381	291	652	335	376	618
407	525	493	380	671	428
576	493	465	266	526	398
673	552	518	470	601	374

4 درجاتُ الحرارةِ (°C).

27.3	28.4	32.4	11.4	32.4	14.2	19.6
17.4	32.7	29.0	13.2	17.4	37.8	29.1
26.1	22.2	14.5	19.7	33.1	27.3	15.2
20.7	31.2	29.3	30.2	26.0	17.1	29.3

أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والمنوالَ والوسيطَ لكلٍّ منَ البياناتِ الآتيةِ:

5

x	$0 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$	$40 \le x < 50$
التكرارُ	4	6	11	17	9

الوسط الحسابي 29.5 تقريبًا، المنوال 35، الوسيط 35

6

y	$0 \le y < 100$	$100 \le y < 200$	$200 \le y < 300$	$300 \le y < 400$	$400 \le y < 500$	$500 \le y < 600$
التكرارُ	95	56	32	21	9	3

الوسط الحسابي 158.3 تقريبًا، المنوال 50، الوسيط 150

7

z	$0 \le z < 5$	$5 \le z < 10$	$10 \le z < 15$	$15 \le z < 20$
التكرارُ	16	27	19	13

الوسط الحسابي 9.4 تقريبًا، المنوال 7.5، الوسيط 7.5

8

m	1–3	4–6	7–9	10–12	13–15
التكرارُ	5	8	14	10	7

الوسط الحسابي 8.4 تقريبًا، المنوال 8، الوسيط 8

9

n	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70
التكرارُ	1	12	24	15	13	9	5

الوسط الحسابي 34.9 تقريبًا، المنوال 25.5، الوسيط 35.5

الدرسُ 3 — المُدرَّجاتُ التكراريةُ — Histograms

1 **واجباتٌ منزليةٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ الزمنَ (بالدقائقِ) الذي استغرقَتْهُ مجموعةٌ منْ طالباتِ الصفِّ التاسعِ في حَلِّ واجبٍ منزليٍّ لمادةِ الرياضياتِ. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	الزمنُ (min)
3	$10 \le t < 20$
9	$20 \le t < 30$
28	$30 \le t < 40$
6	$40 \le t < 50$

أنظر ملحق الإجابات.

2 **تسـوُّقٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ زمـنَ انتظارِ مجموعةٍ منْ زبائنِ أحدِ المحالِّ التجاريةِ لحينِ دفعِ ثمنِ الحاجياتِ التي اشتروها. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	الزمنُ (min)
15	$0 \le t < 2$
7	$2 \le t < 4$
12	$4 \le t < 6$
15	$6 \le t < 8$
12	$8 \le t < 10$

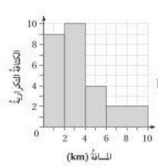
أنظر ملحق الإجابات.

3 **مساجدُ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ أعمارَ المُصلّينَ لصلاةِ الفجرِ في أحدِ المساجدِ. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	العمرُ (بالعامِ)
35	$0 \le x < 20$
85	$20 \le x < 30$
120	$30 \le x < 60$

أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ المسافةَ (بالكيلومترِ) بينَ موقعِ شركةٍ ومنازلِ موظفيها:



4 أجدُ عددَ موظفي الشركةِ. 54

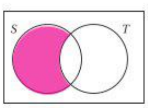
5 أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ تزيدُ المسافةُ بينَ منازلِهِمْ وموقعِ الشركةِ على 5 km. 12

6 أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ تقلُّ المسافةُ بينَ منازلِهِمْ وموقعِ الشركةِ عنْ 7 km. 48

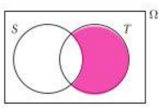
الدرسُ 4 — الاحتمالاتُ وأشكالُ ڤِنْ — Probabilities and Venn Diagrams

أُظلِّلُ المنطقةَ التي تُمثِّلُ الحادثَ المعطى في كلٍّ منْ أشكالِ ڤِنْ الآتيةِ:

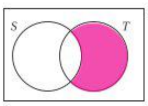
1 $S - T$



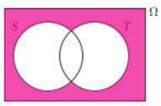
2 $T - S$



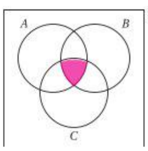
3 $\bar{S} \cap T$



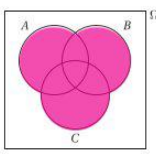
4 $\overline{S \cup T}$



5 $A \cap B \cap C$

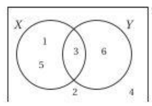


6 $A \cup B \cup C$



كتاب التمارين

يُبيِّنُ شكلُ ڤِنْ المُجاوِرُ الحادثَ X والحادثَ Y في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ.



أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

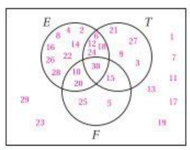
7) $P(X)$ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 8) $P(Y)$ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 9) $P(X\cap Y)$ $\frac{1}{6}$

10) $P(X\cup Y)$ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 11) $P(\overline{X})$ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 12) $P(\overline{Y})$ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

13) $P(\overline{X\cap Y})$ $\frac{5}{6}$ 14) $P(\overline{X\cup Y})$ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 15) $P(Y-X)$ $\frac{1}{6}$

سُحِبَتْ كرةٌ عشوائيًّا منْ صندوقٍ يحوي كراتٍ مُتماثِلةً، ومُرقَّمةً منْ 1 إلى 30. إذا كانَ E هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ، وكانَ T هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، وكانَ F هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 5، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ الخمسةِ الآتيةِ تباعًا:

16) أُمثِّلُ في شكلِ ڤِنْ الآتي الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ العشوائيةِ، وكُلًّا منَ الحادثِ E، والحادثِ T، والحادثِ F.



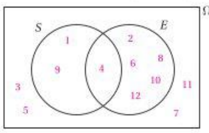
17) أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ العددُ على الكرةِ التي سُحِبَتْ منْ مضاعفاتِ العددِ 3. $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

18) أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ العددُ على الكرةِ التي سُحِبَتْ منْ مضاعفاتِ العددِ 3 والعددِ 5. $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

19) أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ العددُ على الكرةِ التي سُحِبَتْ منْ مضاعفاتِ العددِ 5، أوْ عددًا زوجيًّا. $\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$

20) أجدُ احتمالَ ألّا يكونَ العددُ زوجيًّا على الكرةِ التي سُحِبَتْ. $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$

21) إذا كانَ الفضاءُ العينيُّ لتجربةٍ عشوائيةٍ هوَ: $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$، وكانَ الحادثُ S يُمثِّلُ المُربَّعاتِ الكاملةَ منْ بينِ هذهِ الأعدادِ، وكانَ الحادثُ E يُمثِّلُ الأعدادَ الزوجيةَ، فأُمثِّلُ في شكلِ ڤِنْ الآتي الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ العشوائيةِ، وكُلًّا منَ الحادثِ S، والحادثِ E.



أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ بناءً على شكلِ ڤِنْ أعلاهُ:

22) $P(\overline{E})$ $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ 23) $P(S\cap\overline{E})$ $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ 24) $P(\overline{S\cup E})$ $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

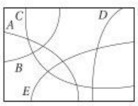
يعملُ في أحدِ المصانعِ 35 عاملًا، منْهُمْ 20 عاملًا يُفضِّلونَ شربَ الشاي، و17 عاملًا يُفضِّلونَ شربَ القهوةِ، و5 عُمّالٍ يُفضِّلونَ شربَ الشاي والقهوةِ. إذا اختيرَ عاملٌ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ:

25) أنْ يكونَ العاملُ ممَّنْ يُفضِّلونَ شربَ الشاي فقطْ. $\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$

26) أنْ يكونَ العاملُ ممَّنْ لا يُفضِّلونَ شربَ القهوةِ. $\frac{18}{35}$

27) أنْ يكونَ العاملُ ممَّنْ لا يُفضِّلونَ شربَ الشاي، ولا يُفضِّلونَ شربَ القهوةِ. $\frac{3}{35}$

مُعتمِدًا شكلَ ڤِنْ المُجاوِرَ الذي يُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ تحوي الحوادثَ: A، وB، وC، وD، وE. أُحدِّدُ الجملَ الصحيحةَ والجملَ غيرَ الصحيحةِ في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:



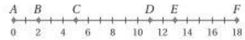
28) A وB حادثانِ متنافيانِ.
غيرُ صحيحةٍ؛ توجدُ منطقةٌ مشتركةٌ بينهما.

29) A وD حادثانِ متنافيانِ.
صحيحةٌ، لا توجدُ منطقةٌ مشتركةٌ بينهما.

30) B وC حادثانِ شاملانِ.
غيرُ صحيحةٍ؛ اتحادهما لا يساوي Ω.

31) A، وB، وC، وD، وE حوادثُ شاملةٌ.
صحيحةٌ؛ اتحادُ هذهِ الحوادثِ يساوي Ω.

مُعتمِدًا الشكلَ المُجاوِرَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{AF}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



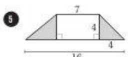
1) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{CD}$. $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

2) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{BE}$. $\frac{11}{18}$

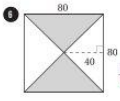
3) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{EF}$ أوْ $\overline{AB}$. $\frac{7}{18}$

4) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{DE}$. $\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

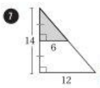
إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الأشكالِ الآتيةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ:

5)


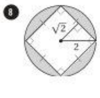
$\frac{9}{23}$

6)


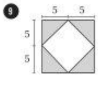
$\frac{1}{2}$

7)


$\frac{1}{4}$

8)


$\frac{\pi-2}{\pi}$

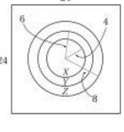
9)


$\frac{1}{2}$

10)


$\frac{3}{8}$

إذا وقعَ سهمٌ رُمِيَ عشوائيًّا داخلَ لوحةِ الأسهمِ المُجاوِرةِ، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



11) وقوعُ السهمِ في المنطقةِ X. 0.09 تقريبًا.

12) وقوعُ السهمِ في المنطقةِ Y. 0.11 تقريبًا.

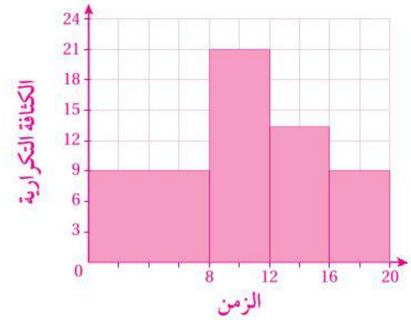
13) عدمُ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ Z. 0.85 تقريبًا.

14) عدمُ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ X. 0.91 تقريبًا.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

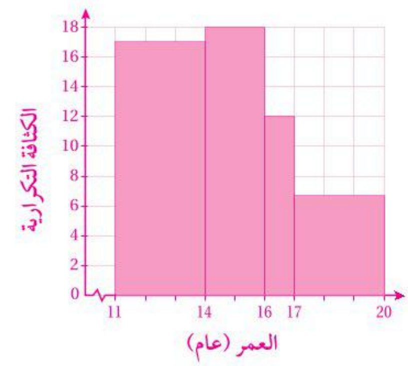
5)

الزمن	$0 \le t < 8$	$8 \le t < 12$	$12 \le t < 16$	$16 \le t < 20$
التكرار	72	84	54	36
طول الفئة	8	4	4	4
الكثافة التكرارية	9	21	13.5	9



6)

العمر (عام)	$11 \le a < 14$	$14 \le a < 16$	$16 \le a < 17$	$17 \le a < 20$
التكرار	51	36	12	20
طول الفئة	3	2	1	3
الكثافة التكرارية	17	18	12	$6\frac{2}{3}$



إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

15) x : علامات الشعبة أ ، y : علامات الشعبة ب

$$\sum x = 20 \times 14 = 280 \,,\, \sum y = 15 \times 18 = 270$$

16) $$10 = \frac{\sum x^2}{20} - 14^2 \,,\, \sum x^2 = 4120$$

$$6 = \frac{\sum y^2}{15} - 18^2 \,,\, \sum y^2 = 4950$$

17) $$\mu = \frac{280 + 270}{20 + 15} \approx 15.7$$

18) $$\sigma^2 = \frac{4120+4950}{20 + 15} - (15.7)^2 \approx 12.7, \sigma \approx 3.6$$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

1)

كتل أكياس اللحم (m)		
الكتلة (g)	الإشارات	التكرار
$25 \le m < 26$	|	1
$26 \le m < 27$	|||	3
$27 \le m < 28$	$\cancel{||||}$	5
$28 \le m < 29$	||||	4
$29 \le m < 30$	||	2

2)

أعداد الطلبة		
العدد	الإشارات	التكرار
60−64	|||	3
65−69	|||	3
70−74	$\cancel{||||}$	5
75−79	$\cancel{||||}$	5
80−84	||	2

3)

طلبات التوصيل الأسبوعية		
التكرار	الإشارات	العدد
3	|||	265−350
7	𝍸||	351−436
5	𝍸	437−522
5	𝍸	523−608
4	||||	609−694

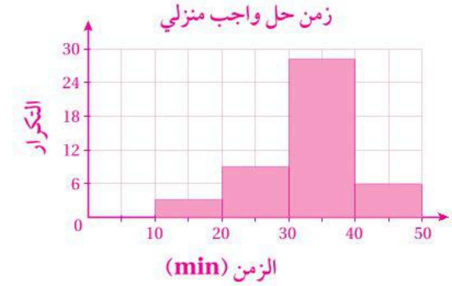
4)

درجات الحرارة (t)		
التكرار	الإشارات	الدرجة (°C)
5	𝍸	$11 \leq t < 17$
7	𝍸||	$17 \leq t < 23$
5	𝍸	$23 \leq t < 29$
10	𝍸 𝍸	$29 \leq t < 35$
1	|	$35 \leq t < 41$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

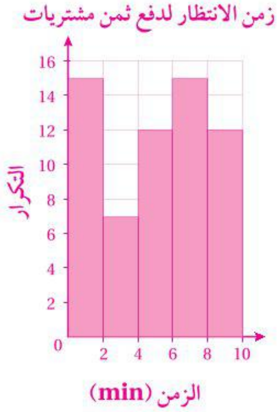
1)

زمن حل واجب منزلي



2)

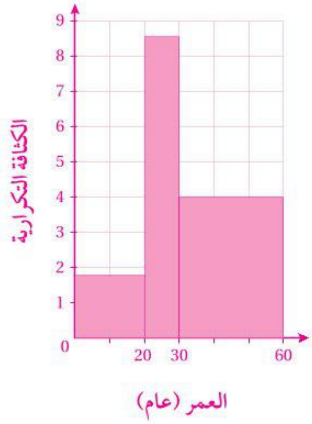
زمن الانتظار لدفع ثمن مشتريات



3)

الكثافة التكرارية	طول الفئة	التكرار	العمر (بالعام)
1.75	20	35	$0 \leq t < 20$
8.5	10	85	$20 \leq t < 30$
4	30	120	$30 \leq t < 60$

أعمار المصلين لصلاة الفجر



منتديات صقر الجنوب

المملكة الأردنية الهاشمية