الوحدة
5

العلاقاتُ في المُثلَّثاتِ والنسبُ المُثلَّثيةُ

Relationships in Triangles and Trigonometric Ratios

www.jnob-jo.com

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: الأجزاء المتناسبة في المثلثات	• تعرُّف الأجزاء المتناسبة في المثلث. • تعرُّف نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل. • تعرُّف عكس نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل. • تعرُّف نظرية القطعة المنصّفة في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.	القطعة المنصّفة في المثلث.	• أدوات هندسية للرسم. • أقلام ملوّنة.	4
معمل برمجية جيوجبرا: توسّع: مثلث القطع المنصّفة	• استكشاف العلاقة بين مساحة مثلث القطع المنصّفة ومساحة المثلث الأصلي باستعمال برمجية جيوجبرا.	مثلث القطع المنصّفة.	• مختبر الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	1
الدرس 2: منصّفات في المثلث	• تعرُّف المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة. • تعرُّف نظرية المنصّف العمودي وعكسها، واستعمالهما لإيجاد قياسات مجهولة. • إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها. • تعرّف نظرية المنصّفات العمودية للمثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة. • تعرُّف الدائرة الخارجية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي المنصّفات العمودية لأضلاع المثلث. • تعرُّف نظرية منصّف الزاوية وعكسها، واستعمالهما في إيجاد قياسات مجهولة. • تعرّف نظرية منصّفات زوايا المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة. • تعرُّف الدائرة الداخلية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي منصّفات زوايا المثلث.	المنصّف العمودي. مركز الدائرة الخارجية للمثلث. مركز الدائرة الداخلية للمثلث.	• أدوات هندسية للرسم. • أقلام ملوّنة. • ورقة المصادر 4	5
نشاط مفاهيمي: القطع المتوسطة في المثلث	• استكشاف العلاقة بين طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث ونقطة توازن المثلث، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة منتصف ضلع المثلث والرأس المقابل لها.		• مثلثات متنوعة من ورق مقوّى.	نصف حصة
الدرس 3: القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث	• تعرُّف القطعة المتوسطة في المثلث، ومركز المثلث. • تعرُّف نظرية مركز المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة. • إيجاد مركز المثلث في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه. • تعرُّف ارتفاع المثلث وملتقى ارتفاعاته. • إيجاد ملتقى ارتفاعات المثلّث في المستوى الإحداثيّ.	القطعة المتوسطة للمثلث. مركز المثلث. ارتفاع المثلث. ملتقى ارتفاعات المثلث.	• لوح رسم بياني. • ورقة المصادر 5	4
نشاط مفاهيمي: النسب المثلثية	• استقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلّثات ذات الزوايا القائمة.		• أدوات هندسية للرسم. • ورقة المصادر 3	نصف حصة
الدرس 4: النسب المثلثية	• تعرّف جيب الزاوية الحادة، وجيب تمامها، وظلّها، بوصفها نسبًا بين أضلاع مثلث قائم الزاوية. • إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة المرسومة في مثلث قائم الزاوية عُلم قياس اثنين من أضلاعه على الأقل. • استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لزوايا حادة عُلم قياسها. • استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية عُلمت إحدى نسبها باستعمال معكوس تلك النسبة. • استعمال متطابقة فيثاغورس لإيجاد جيب الزاوية أو جيب تمامها إذا عُلمت إحداهما. • استعمال العلاقة بين النسب المثلثية للزوايا المتتامة لإيجاد نسب مجهولة.	النسبة المثلثية. الجيب. جيب التمام. الظل. معكوس النسبة المثلثية. متطابقة فيثاغورس.	• آلة حاسبة علمية. • أقلام تلوين.	4
الدرس 5: تطبيقات النسب المثلثية	• استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية. • إيجاد قياسات زوايا مجهولة في المثلث قائم الزاوية باستعمال النسب المثلثية ومعكوساتها. • استعمال النسب المثلثية للزوايا الخاصة $60°, 45°, 30°$ لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية. • استعمال زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض لإيجاد قياسات مجهولة في مثلث قائم الزاوية.	زاوية الارتفاع. زاوية الانخفاض.	• آلة حاسبة علمية. • أقلام تلوين. • ورقة المصادر 6	4
عرض نتائج مشروع الوحدة				1
اختبار نهاية الوحدة				1
المجموع:				25 حصة

www.jnob-jo.com

الوحدة 5

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرّف الطلبة في هذه الوحدة نظريات هندسية تخصّ المثلثات وقطع مستقيمة خاصة فيها، وسيستعملون هذه النظريات لإيجاد قياسات مجهولة في المثلثات، وسيتعرّفون مركز الدائرة الخارجية، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، وملتقى القطع المتوسطة فيه وملتقى ارتفاعاته، ويحدّدون هذه النقاط يدويًّا وباستعمال التكنولوجيا.

إضافة إلى ما سبق، سيتعرّف الطلبة النسب المثلثية للزوايا الحادة (جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلّها) بوصفها نسبًا بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية، ويوظفون النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة وقياسات زوايا مجهولة في مثلثات قائمة الزاوية. وسيستعملون زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض لحل مسائل حياتية وإيجاد مسافات يصعب قياسها بصورة مباشرة.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف الثامن

- تعرُّف مفهوم تطابق المثلثات، وتحديد المثلثات المتطابقة باستعمال الحالات الآتية: SSS، وSAS، وAAS، وASA، وHL.
- تعرُّف تشابه المثلثات، وتحديد المثلثات المتشابهة باستعمال حالات التشابه: AA، و SSS، و SAS.
- استعمال تشابه المثلثات لإيجاد قياسات مجهولة.
- توظيف نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال مجهولة في المثلث القائم الزاوية.

الصف التاسع

- تطبيق النظريات الخاصة بالأجزاء المتناسبة في المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- استعمال منصّفات المثلث العمودية ومنصّفات زوايا المثلّث لإيجاد قياسات مجهولة.
- إيجاد مركز مثلّث، وملتقى ارتفاعاته، وتحديد إحداثيي كلّ منهما.
- تمييز جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلّها، بوصفها نسبًا بين أضلاع مثلّث قائم الزاوية، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة في المثلّث.
- حل مسائل حياتية تتضمن زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.

الصف العاشر

- ربط النسب المثلثية للزوايا بإحداثيي نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.
- إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا ضمن دورة واحدة: $0° \le \theta < 360°$
- تمثيل الاقترانات المثلثية الأساسية بيانيًّا يدويًّا، وباستعمال التكنولوجيا (ضمن دورة واحدة).
- حل معادلات مثلثية ضمن دورة واحدة.
- تعرّف قانون الجيوب، وقانون جيوب التمام واستعمالهما لحل المثلث، وحل مسائل رياضية وحياتية.
- استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.
- إيجاد أطوال وزوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد.

الوحدة 5

العلاقاتُ في المُثلَّثاتِ والنسبُ المُثلَّثيةُ

Relationships in Triangles and Trigonometric Ratios

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

المُثلَّثُ هوَ أبسطُ المُضلَّعاتِ، لكنَّ أضلاعَهُ وزواياهُ تمتازُ بخصائصَ فريدةٍ جعلتْهُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ الهندسيةِ استعمالًا في التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ. فمثلًا، يستعملُ المهندسونَ المُثلَّثاتِ لتصميمِ جسورٍ قويةٍ تتوزَّعُ فيها الأحمالُ على الأعمدةِ بالتساوي، ويستعملونَ النسبَ بينَ أطوالِ أضلاعِ المُثلَّثاتِ لتحديدِ المسافاتِ التي يصعبُ قياسُها بصورةٍ مباشرةٍ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تحديدَ المُثلَّثاتِ المُتشابهةِ باستعمالِ حالاتِ التشابهِ: SAS، وSSS، و AA.
- ✓ تحديدَ المُثلَّثاتِ المُتطابقةِ باستعمالِ الحالاتِ الآتيةِ: SSS، و SAS، و AAS، و ASA، و HL.
- ✓ توظيفَ نظريةِ فيثاغورس في إيجادِ أطوالِ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.
- ✓ استعمالَ تشابهِ المُثلَّثاتِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تطبيقَ النظرياتِ الخاصةِ بالأجزاءِ المُتناسبةِ في المُثلَّثِ، واستعمالَها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- استعمالَ مُنصَّفاتِ المُثلَّثِ العموديةِ ومُنصَّفاتِ زوايا المُثلَّثِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- إيجادَ مركزِ مُثلَّثٍ، وملتقى ارتفاعاتِهِ.
- تمييزَ جيبِ الزاويةِ، وجيبِ تمامِها، وظلِّها، بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، واستعمالَها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ.

6

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى توظيف مفاهيم هندسية وما يتعلّمه الطلبة من مهارات خلال دراسة هذه الوحدة في عمل لوحة فنية.

ويهدف مشروع الوحدة أيضًا إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلّم موضوعات الوحدة.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكّد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضّح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، وأؤكّد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أوّلًا بأوّل، وتعزيزها بالصور.
- أذكّر الطلبة بالعودة إلى المشروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبيّن للطلبة سلفًا معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبيّن للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة واحدًا منها؛ للوقوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعرض اللوحة والمسائل التي كتبها أفراد المجموعة مع حلولها (تتمثّل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذِكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلّب عليها؛ تعزيزًا لمهاراتهم في حل المشكلات.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	رسم مثلثات مختلفة متداخلة في ما بينها وتمتد على مساحة الورقة كلّها.			
2	اختيار مثلثين ورسم مثلث القطع المنصّفة لكل منهما.			
3	اختيار مثلثين آخرين، ورسم الدائرة الخارجية لكل منهما.			
4	اختيار مثلثين آخرين، ورسم الدائرة الداخلية لكل منهما.			
5	اختيار مثلث آخر، ورسم ارتفاعاته الثلاثة.			
6	اختيار ثلاثة مثلثات قائمة، وإيجاد النسب المثلثية لزواياها الحادة.			
7	كتابة مسألة لإيجاد طول ضلع مجهول في أحد المثلثات، وإيجاد ذلك الطول.			
8	كتابة مسألة لإيجاد قياس زاوية حادّة في أحد المثلثات، وإيجاد ذلك القياس.			
9	إعداد المشروع في الوقت المحدد، وعرضه بطريقة واضحة (مهارة التواصل).			
10	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

www.jnob-jo.com

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف الأجزاء المتناسبة في المثلث.
- تعرُّف نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.
- تعرُّف عكس نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.
- تعرُّف نظرية القطعة المنصّفة في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف علاقات الزوايا الناتجة عن مستقيمات متوازية وقاطع لها.
- تعرُّف المثلثات المتشابهة، وكتابة تناسب الأضلاع المتناظرة فيها.
- حل معادلات خطية وتربيعية بمتغيّر واحد.
- حل تناسبات.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

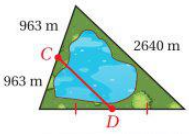
الدرس 1

الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثاتِ
Proportional Parts in Triangles

فكرةُ الدرس تعرُّفُ الأجزاءِ المُتناسِبةِ في المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

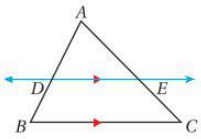
المصطلحاتُ القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ.

مسألةُ اليوم يُمثِّلُ الشكلُ المُجاورُ بحيرةً شُيِّدَ فوقَها الجسرُ $\overline{CD}$. أجدُ طولَ الجسرِ.



الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثِ

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ المُثلَّثَ ABC، حيثُ: $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$، و$\overleftrightarrow{DE}$ يقطعُ $\overline{AB}$ في D، ويقطعُ $\overline{AC}$ في E. ما العلاقةُ بينَ ΔABC و ΔADE؟



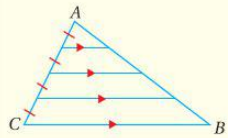
يُمكِنُ استكشافُ هذهِ العلاقةِ عنْ طريقِ تنفيذِ النشاطِ الهندسيِّ الآتي.

نشاطٌ هندسيٌّ
التناسبُ في المُثلَّثِ

الإجراءاتُ:

الخطوةُ 1: أرسمُ المُثلَّثَ ABC مُختلفَ الأضلاعِ كما في الشكلِ المجاورِ.

الخطوةُ 2: أُقسِّمُ أحدَ أضلاعِ المُثلَّثِ، وليكنْ $\overline{AC}$، إلى أربعةِ أجزاءٍ مُتطابقةٍ، ثمَّ أستعملُها لرسمِ قطعٍ مستقيمةٍ مُوازيةٍ للضلعِ $\overline{CB}$ كما في الشكلِ المُجاورِ.



2) طولُ القطعةِ الأولى من الأعلى $\frac{1}{4}\,CB$، طولُ القطعةِ الثانيةِ من الأعلى $\frac{1}{2}\,CB$، طولُ القطعةِ الثالثةِ من الأعلى $\frac{3}{4}\,CB$

أحلّلُ النتائجَ:

1) كمْ مُثلَّثًا في الشكلِ يُشابِهُ المُثلَّثَ ABC؟ أُبرِّرُ إجابتي. 3

2) ما علاقةُ طولِ كلِّ قطعةٍ منَ القطعِ المستقيمةِ المُتوازيةِ بطولِ $\overline{CB}$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتذكَّرُ

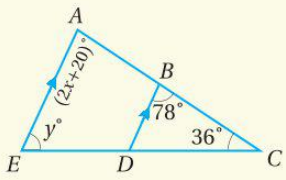
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ يُمكِنُ إثباتُ تشابهِ مُثلَّثينِ باستعمالِ عددٍ منَ المُسلَّماتِ والنظرياتِ، مثلِ: التشابهِ بزاويتينِ (AA)، والتشابهِ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)، والتشابهِ بضلعينِ وزاويةٍ محصورةٍ (SAS).

www.jnob-jo.com

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الأسئلة الآتية:

» أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل المجاور لأجيب عن كلّ مما يأتي:



a) أبيّن أن المثلثين CBD, CAE متشابهان، وأكتب التناسب الناتج عن ذلك.

حالة التشابه AA؛ الزاوية $C\angle$ مشتركة في المثلثين؛
و $\angle CAE \cong \angle CBD$ (زاويتان متناظرتان بين متوازيين وقاطعهما)

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{EC}{DC}$$

b) أجد قيمة كل من x، و y، وأبرر إجابتي. $x = 29, y = 66$، أنظر تبرير الطلبة.

» إذا كانت نسبة الطلبة إلى المعلمين في إحدى المدارس الثانوية هي 3 : 85 ، وكان عدد طلبة المدرسة 1615 طالبًا، فما عدد المعلمين في هذه المدرسة؟ 57 معلمًا.

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

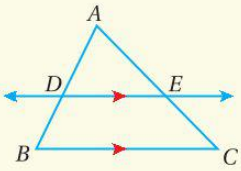
- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ماذا تمثّل النقطة C بالنسبة إلى الضلع الأيسر للمثلث الذي يحيط بالبحيرة؟ نقطة منتصف هذا الضلع.
  - » ماذا تمثّل النقطة D بالنسبة إلى الضلع السفلي للمثلث الذي يحيط بالبحيرة؟ نقطة منتصف هذا الضلع.
  - » كم مثلثًا يظهر في الرسم؟ مثلثان.
  - » ما العلاقة بين هذين المثلثين؟ ولماذا؟ متشابهان؛ لأنهما يشتركان في زاوية، والنسبة بين ضلعي هذه الزاوية المتناظرين في المثلثين ثابتة.
  - » ما النسبة بين الأضلاع المتناظرة في المثلث الكبير إلى المثلث الصغير؟ 2 : 1
  - » كيف يمكن إيجاد طول الجسر $\overline{CD}$؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
  - » أعزّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألّا أقول للطالب/ للطالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له/ لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه/ أعزّزها، ثم أطلب إلى الطالب الأوّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرّة أخرى، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت مَن أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

www.jnob-jo.com

3 التدريس

نشاط هندسي

- أرسم الشكل الآتي على اللوح، وأناقش مع الطلبة المعلومات المعطاة عليه، ثم أسألهم: ما العلاقة بين ΔADE و ΔABC؟



- أستمع لإجابات الطلبة عن السؤال السابق، ثم أبيّن لهم أنه يمكنهم استكشاف هذه العلاقة من خلال تنفيذ النشاط الهندسي الوارد في الصفحة 8 من كتاب الطالب.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأطلب إليهم تنفيذ النشاط الهندسي، وأسألهم عن العلاقة بين أجزاء الضلع $\overline{AB}$، وأطلب إليهم تسمية طرفي كلّ من القطع الموازية للضلع $\overline{CB}$، وكتابة التناسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة في كل مثلثين متشابهين.
- أوجّه المجموعات إلى الإجابة عن أسئلة بند (**أحلّل النتائج**) الواردة في النشاط الهندسي مع تبرير إجاباتهم.
- أناقش المجموعات في ما يتوصّلون إليه من نتائج، ثم أوضّح للطلبة أن هذا النشاط يقود إلى نظرية التناسب في المثلث، ثم أقدّم لهم النظرية بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق (**نظرية**) الوارد في كتاب الطالب. وأناقشهم في برهان النظرية، وأطلب إليهم تبرير خطوات البرهان.

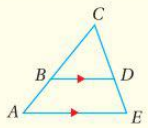
أتذكّرُ

تنصُّ مُسلَّمةُ التشابهِ بزاويتين (AA) على أنَّهُ إذا طابقَتْ زاويتانِ في مُثلَّثٍ زاويتينِ في مُثلَّثٍ آخرَ، فإنَّ المُثلَّثينِ مُتشابهانِ.

أستنتجُ منَ النشاطِ السابقِ أنَّهُ عندَ رسمِ مستقيمٍ يوازي أحدَ أضلاعِ المُثلَّثِ، ويقطعُ ضلعيْهِ الآخرين، فإنَّهُ يُمكنُ إثباتُ أنَّ المُثلَّثينِ الناتجينِ مُتشابهانِ، وذلكَ باستعمالِ مُسلَّمةِ التشابهِ AA. وبما أنَّ المُثلَّثينِ مُتشابهانِ، فإنَّ أطوالَ أضلاعِهما المُتناظرةِ مُتناسبةٌ، وهذا يقودُنا إلى النظريةِ الآتيةِ.

نظريةٌ **التناسبُ في المُثلَّثِ**

بالكلماتِ: إذا وازى مستقيمٌ ضلعًا منْ أضلاعِ مُثلَّثٍ، وقطعَ ضلعيْهِ الآخرينِ، فإنَّهُ يُقسِّمُهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظرةٍ أطوالُها مُتناسبةٌ.



بالرموزِ: إذا كانَ $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$، فإنَّ $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

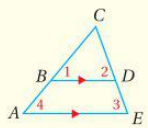
إثباتُ نظريةٍ

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ المعطياتِ والمطلوبَ.

المعطياتُ: $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

المطلوبُ: إثباتُ أنَّ $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

الخطوةُ 2: أُخطِّطُ للبرهانِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:



- أُسمِّي الزوايا كما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ المُجاورِ.
- أستعملُ مُسلَّمةَ التشابهِ AA لإثباتِ أنَّ $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.
- أستعملُ تشابهَ المُثلَّثاتِ وتناسبَ الأضلاعِ في المُثلَّثاتِ المُتشابهةِ لإثباتِ التناسبِ المطلوبِ.

www.jnob-jo.com

أتذكّرُ

تعلّمْتُ سابقًا أنّهُ إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمينِ مُتوازيينِ في المستوى نفسِهِ، فإنَّ هذا يقودُ إلى مجموعةٍ منَ النظرياتِ عنِ العلاقةِ بينَ أزواجِ الزوايا الناتجةِ منْ هذا التقاطعِ، مثلِ النظريةِ التي تنصُّ على أنَّ الزوايا المُتناظِرةَ مُتطابقةٌ.

نظريةٌ التناسبُ في المُثلّثِ (يتبعُ)

الخطوةُ 3: أُبرهِنُ.

- بما أنَّ $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$، فإنَّ $\angle 1 \cong \angle 4$، و $\angle 3 \cong \angle 2$، وَفقًا لمُسلَّمةِ الزاويتينِ المُتناظِرتينِ. وبذلكَ، فإنَّ $\Delta ACE \sim \Delta BCD$ بحسبِ مُسلَّمةِ التشابهِ (AA).
- بناءً على تعريفِ المُضلّعاتِ المُتشابهةِ، فإنَّ $\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$.
- بما أنَّ $CA = BA + CB$، و$CE = DE + CD$، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ التناسبِ المطلوبِ على النحوِ الآتي:

تعريفُ المُضلّعاتِ المُتشابهةِ	$\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$
بالتعويضِ	$\frac{BA + CB}{CB} = \frac{DE + CD}{CD}$
بتوزيعِ المقامِ على البسطِ	$\frac{BA}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{DE}{CD} + \frac{CD}{CD}$
$\frac{CB}{CB} = 1, \frac{CD}{CD} = 1$	$\frac{BA}{CB} + 1 = \frac{DE}{CD} + 1$
بطرحِ 1 منْ طرفي المعادلةِ	$\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$

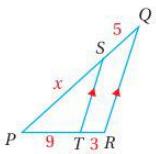
أتذكّرُ

إذا تشابهَ مُضلّعانِ، فإنَّ زواياهُما المُتناظِرةَ مُتطابقةٌ، وأطوالَ أضلاعِهما المُتناظِرةَ مُتناسِبةٌ.

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ التناسبِ في المُثلّثِ لإيجادِ أطوالِ قطعٍ مستقيمةٍ مجهولةٍ.

مثال 1

في ΔPQR، إذا كانَ $\overline{ST} \parallel \overline{QR}$، $SQ = 5, PT = 9, TR = 3$، فأجدُ PS.



نظريةُ الأجزاءِ المُتناسبةِ	$\frac{SQ}{PS} = \frac{TR}{PT}$
بالتعويضِ	$\frac{5}{x} = \frac{3}{9}$
بالتبسيطِ	$\frac{5}{x} = \frac{1}{3}$
باستعمالِ خاصيةِ الضربِ التبادليِّ	$x = 15$

أفكّرُ

هلْ يُمكِنُ كتابةُ التناسبِ بطريقةٍ أُخرى؟

مثال 1

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال نظرية التناسب في المثلث لإيجاد أطوال قطع مستقيمة مجهولة.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح بوصفه تطبيقًا على هذه النظرية، لإيجاد أطوال قطع مستقيمة مجهولة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

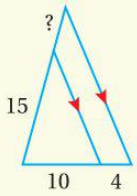
- عند مناقشة إثبات نظرية التناسب في المثلث مع الطلبة، أذكّرهم بنصّ مسلّمة (AA) التي سيستعملونها في إثبات تشابه المثلثين.
- أذكّر الطلبة بالعلاقات بين أزواج الزوايا الناتجة من قطْع مستقيم مستقيمين متوازيين في المستوى نفسه.
- أناقش الطلبة في الإجابة عن السؤال الوارد في صندوق (**أفكّر**) الوارد في هامش المثال 1، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن كتابة التناسب على الصورة الآتية:

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$$

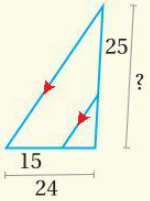
مثال إضافي:

أجد الطول المجهول في كل ممّا يأتي:

1) 6



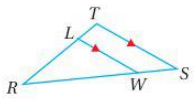
2) 40



www.jnob-jo.com

أتحقَّقُ منْ فهمي

في ΔRTS، إذا كانَ $RL = 5, RT = 9, WS = 6$، و $\overline{LW} \parallel \overline{TS}$، فأجدُ RW.



7.5

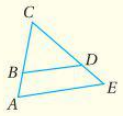
عكسُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ

إنَّ عكسَ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ صحيحٌ أيضًا، وهذا ما تنصُّ عليهِ النظريةُ الآتيةُ.

نظريةٌ عكسُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ

بالكلماتِ: إذا قطعَ مستقيمٌ ضلعينِ في مُثلَّثٍ، وقسَّمَهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظِرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ، فإنَّ المستقيمَ يوازي الضلعَ الثالثَ للمُثلَّثِ.

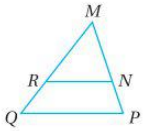
بالرموزِ: إذا كانَ $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$، فإنَّ $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 17.

مثال 2

في ΔQMP، إذا كانَ $MN = 12, NP = 3, MR = 16$ و $RQ = 4$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$، مُبرِّرًا إجابتي.



$\frac{RQ}{MR} = \frac{4}{16}$ بتعويضِ $MR = 16, RQ = 4$

$= \frac{1}{4}$ بالتبسيطِ

$\frac{NP}{MN} = \frac{3}{12}$ بتعويضِ $MN = 12, NP = 3$

$= \frac{1}{4}$ بالتبسيطِ

ومنْ ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{RQ}{MR} = \frac{NP}{MN} = \frac{1}{4}$$

إذنْ، وبحسبِ عكسِ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ، فإنَّ $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزيــة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أسـأل الطلبة عـن تصوّرهم لمفهوم عكـس نظرية ما، وأطلب إليهم ذكر أمثلة سـابقة لعكس نظرية ما، وعن توقّعهـم لنصّ عكس نظرية التناسـب فـي المثلث، ثم أقـدّم لهم نص النظرية بالكلمات والرموز بالاسـتعانة بصندوق (**نظرية**) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقـش الطلبـة في إثبـات تـوازي مسـتقيمين، بإثبات وجـود زوايا متناظرة متطابقـة، أو زوايا داخلية متبادلة متطابقـة، ثـم أبيّن لهم أنهم سـيبرهنون عكـس نظرية التناسـب في المثلث في السـؤال 17 مـن بند (**أتدرّب وأحل المسائل**).
- أناقش حل المثال 2 بوصفه تطبيقًا مباشرًا على عكس نظرية التناسب في المثلث.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشــاد: أوجّه الطلبة إلى تســجيل الأطوال المعلومــة على الرســم، إذ يســاعدهم على إيجاد بعض الأطوال البسيطة التي تحتاج إلى جمع طولين أو طرح أحدهما مــن الآخر، وتســهّل عليهم كتابة التناسب الصحيح المناســب الذي يُستعمَل لإيجاد الطول المجهول.

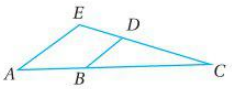
www.jnob-jo.com

نشاط هندسي

- أوضّح للطلبة مفهوم القطعة المنصّفة في المثلث، وأبيّن لهم أنه توجد ثلاث قطع منصّفة في أي مثلث بالاستعانة بشكل توضيحي، ثم أبيّن لهم أنهم سيستكشفون العلاقة بين أضلاع المثلث وقطعة منصّفة فيه عن طريق تنفيذ النشاط الهندسي الوارد في الصفحة 12 من كتاب الطالب.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم تنفيذ النشاط الهندسي.
- أوجّه المجموعات إلى الإجابة عن أسئلة بند **(أحلّل النتائج)** الواردة في النشاط الهندسي مع تبرير إجاباتهم، ومقارنتها مع إجابات المجموعات الأخرى.
- أناقش المجموعات في ما يتوصلون إليه من نتائج، ثم أوضّح للطلبة أن هذا النشاط يقود إلى نظرية القطعة المنصّفة في المثلث، ثم أقدّم لهم نص النظرية بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق **(نظرية)** الوارد في كتاب الطالب، وأبيّن أن برهان هذه النظرية متروك بوصفه تدريبًا لهم، وأطلب إليهم كتابة برهان النظرية مع تبرير كل خطوة من خطوات البرهان.

اتحقَّقْ من فهمي

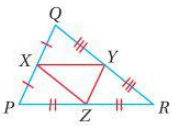
في ΔAEC، إذا كانَ $ED = 12, DC = 20, BC = 25, AB = 15$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{AE} \parallel \overline{DB}$، مُبرِّرًا إجابتي.



$\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ لأن $\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{3}{5}$

القطعةُ المُنصّفةُ في المُثلّثِ

القطعةُ المُنصّفةُ في المُثلّثِ (midsegment) هيَ قطعةٌ مستقيمةٌ طرفاها نقطتا منتصفِ ضلعينِ في المُثلّثِ، وفي كلِّ مُثلّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُنصّفةٍ. فمثلًا، القطعُ المُنصّفةُ في ΔPQR المُجاورِ هيَ: $\overline{XY}, \overline{YZ}, \overline{XZ}$.



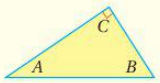
سأستكشفُ في النشاطِ الآتي العلاقةَ بينَ أضلاعِ المُثلّثِ وقطعةٍ مُنصّفةٍ فيهِ.

نشاطٌ هندسيٌّ

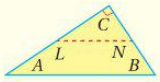
القطعةُ المُنصّفةُ في المُثلّثِ

الإجراءاتُ:

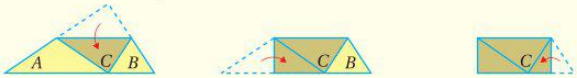
الخطوةُ 1: أرسمُ مُثلّثًا قائمَ الزاويةِ، ثمَّ أقصُّهُ، وأُسمّي رؤوسَهُ: A, B, C كما في الشكلِ المُجاورِ.



الخطوةُ 2: في المُثلّثِ ABC، أطوي A على C لإيجادِ نقطةِ منتصفِ $\overline{AC}$، وأُسمّيها L، ثمَّ أطوي B على C لإيجادِ نقطةِ منتصفِ $\overline{BC}$، وأُسمّيها N، ثمَّ أرسمُ $\overline{LN}$.



الخطوةُ 3: أطوي المُثلّثَ حولَ $\overline{LN}$، ثمَّ أطوي كُلًّا منْ A و B على C كما في الشكلِ الآتي.



الخطوةُ 4: أرسمُ مُثلّثًا حادَّ الزوايا، ومُثلّثًا مُنفرجَ الزاويةِ، وأُكرِّرُ ما فعلتُهُ في الخطواتِ السابقةِ.

أحلّلُ النتائجَ:

1. ما علاقةُ طولِ $\overline{LN}$ بطولِ $\overline{AB}$؟ أُبرِّرُ إجابتي. $LN = \frac{1}{2} AB$؛ تشابه المثلث $CLN\Delta$ والمثلث $CAB\Delta$ بنظرية التشابه SAS.
2. أُعطي تخمينًا يختصُّ بعلاقةِ القطعةِ المُنصّفةِ لضلعينِ في مُثلّثٍ بالضلعِ الثالثِ فيهِ، مُبرِّرًا إجابتي.
3. أُقارنُ إجابتي بإجاباتِ زملائي.

2) توازيه؛ لأنهما يصبحان ضلعين متقابلين في مستطيل. وطولها يساوي نصف طوله؛ لأن المثلثين الجانبيين متطابقا الضلعين والعمود الواصل بين الرأس والقاعدة ينصّفها، ومن ثمّ تتكوّن زاويتان قائمتان، ممّا يؤدي إلى توازي المستقيمين حسب نظرية عكس القاطع العمودي. وبذلك يكون طول المستطيل الناتج بعد الطيّ يساوي نصف طول قاعدة المثلث الكبير.

www.jnob-jo.com

توجـدُ علاقتانِ بينَ القطعةِ المُنصِّفـةِ في المُثلَّثِ والضلعِ المُقابِلِ لهـا، وهما مُوضَّحتانِ في النظريةِ الآتيةِ.

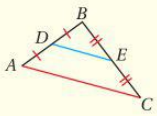
القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ

نظريةٌ

بالكلماتِ: القطعةُ المُنصِّفةُ فـي المُثلَّثِ توازي الضلعَ المُقابِلَ لها، وطولُها يسـاوي نصفَ طولِ ذلكَ الضلعِ.

بالرموزِ: إذا كانَـتِ النقطةُ D والنقطـةُ E هما نقطتَيْ منتصفِ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ على الترتيبِ، فإنَّ:

$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ و $DE = \frac{1}{2}AC$



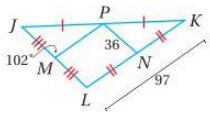
أتعلَّمُ

تُعَـدُّ نظريـةُ القطعـةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ حالةً خاصةً مـنْ عكسِ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ.

إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 18.

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ لإيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ.

مثال 3



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشـكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

1 طولُ $\overline{JL}$.

نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ	$PN = \frac{1}{2}JL$
بتعويضِ $PN = 36$	$36 = \frac{1}{2}JL$
بالتبسيطِ	$JL = 72$

2 طولُ $\overline{PM}$.

نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ	$PM = \frac{1}{2}LK$
بتعويضِ $LK = 97$	$= \frac{1}{2}(97)$
بالتبسيطِ	$= 48.5$

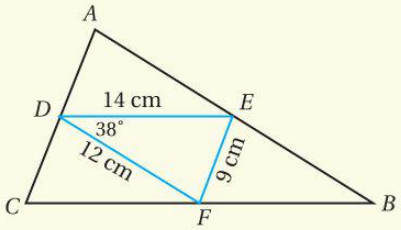
مثال 3

- أوضّـح للطلبـة أنـه يمكـن اسـتعمال نظريـة القطعـة المنصّفة في المثلث لإيجاد أطوال مجهولة.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 3، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أبيّن للطلبة أن نظرية القطعة المنصّفة في المثلث حالة خاصة من عكس نظرية التناسب في المثلث، ثم أطلب إليهم تفسير ذلك.

مثال إضافي:

في الشـكل المجـاور، إذا كانـت النقـاط D, E, F هي منتصفات الأضـلاع $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب، فأجد كلًّا مما يأتي:



1 محيط المثلث ABC. 70 cm

2 قياس $\angle DFC$. 38°

www.jnob-jo.com

3 قياسُ $\angle MPN$.

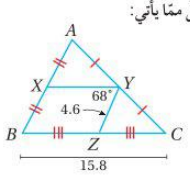
نظريةُ الزاويتينِ المُتبادلتينِ داخليًّا	$\angle MPN \cong \angle JMP$
تعريفُ تطابقِ الزوايا	$m\angle MPN = m\angle JMP$
بالتعويضِ	$= 102°$

أتذكَّرُ

بما أنَّ $\overline{JL} \parallel \overline{PN}$، فإنَّ $\angle MPN \cong \angle JMP$؛ لأنَّهما زاويتانِ مُتبادلتانِ داخليًّا.

أتحقَّقُ من فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



a) طولُ $\overline{XY}$. $XY = 7.9$

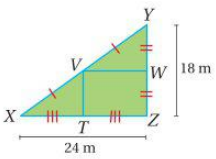
b) طولُ $\overline{AX}$. $AX = 4.6$

c) قياسُ $\angle YZC$. $m\angle YZC = 68°$

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ القطعةِ المُنصَّفةِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 4 : منَ الحياةِ

حديقةٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مُخطَّطًا لحديقةٍ عامةٍ على شكلِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، وفي داخلِها ممرّا مشاةٍ بحاجةٍ إلى إعادةِ تبليطٍ، هما: $\overline{VW}$، و $\overline{TV}$. أجدُ تكلفةَ تبليطِ الممرَّينِ التي ستدفعُها إدارةُ البلديةِ، علمًا بأنَّ تكلفةَ تبليطِ المترِ الطوليِّ الواحدِ للممرِّ هيَ 12 JD.



الخطوة 1: أجدُ طولَ كلٍّ منَ الممرَّينِ.

- أجدُ طولَ الممرِّ $\overline{VW}$:

نظريةُ القطعةِ المُنصَّفةِ في المُثلَّثِ	$VW = \frac{1}{2}XZ$
بتعويضِ $XZ = 24$	$= \frac{1}{2}(24)$
بالتبسيطِ	$= 12$

مثال 4: من الحياة

- أبيّـن للطلبة استعمالات نظريـة القطعـة المنصّفة في التطبيقـات الحياتية، مثل: اسـتعمالها في فن العمارة، ورسم مخططات الأبنية، وتطبيقات أخرى كثيرة.
- أطلـب إلـى أحد الطلبة قراءة المثـال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقـش الطلبـة في حل المثـال 4 على اللـوح، بتوجيه السؤالين الآتيين إليهم:
  - » كيـف يمكن حسـاب تكلفة تبليـط الممرّين؟ بإيجاد مجموع طوليهما وضرب الناتج في تكلفة تبليط المتر الواحد.
  - » ما طـول $\overline{WV}$؟ طوله يسـاوي نصف طول $\overline{XZ}$ وفق نظرية القطعة المنصّفة.
- أكلّف أحد الطلبة إيجاد طول كل من $\overline{WV}$، و $\overline{VT}$ على اللوح، ثم أكلّف آخـر إيجاد مجموع طولي الممرّين، وحساب تكلفة تبليطهما.

www.jnob-jo.com

- أجدُ طولَ الممرِّ $\overline{TV}$:

نظريةُ القطعةِ المُنصّفةِ في المُثلّثِ: $TV = \frac{1}{2} YZ$

بتعويضِ $YZ = 18$: $= \frac{1}{2}(18)$

بالتبسيطِ: $= 9$

إذنْ، مجموعُ طولِ الممرَّينِ معًا هوَ: $9\text{ m} + 12\text{ m} = 21\text{ m}$

الخطوة 2: أجدُ التكلفةَ.

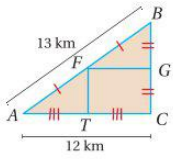
لإيجادِ تكلفةِ إعادةِ تبليطِ الممرَّينِ، أضربُ تكلفةَ تبليطِ المترِ الطوليِّ الواحدِ في مجموعِ طوليِ الممرَّينِ على النحوِ الآتي:

$12 \times 21 = 252$

إذنْ، تكلفةُ تبليطِ الممرَّينِ التي ستدفعُها إدارةُ البلديةِ هيَ: 252 JD

أتحقَّقُ منْ فهمي

مرورٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ مُخطَّطًا لمنطقةٍ منْ مدينةِ عمّانَ على شكلِ مُثلّثٍ قائمِ الزاويةِ. تقودُ غديرُ سيّارتَها في هذهِ المنطقةِ أثناءَ توجُّهِها إلى عملِها، وتسيرُ على الطريقِ $\overline{GF}$ والطريقِ $\overline{FT}$. أجدُ المسافةَ التي تقطعُها غديرُ بسيّارتِها يوميًّا.



$GF = 6\text{ km}, FT = \frac{1}{2} BC$

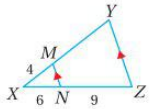
$BC = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$

$GF + FT = 6 + \frac{1}{2}(5) = 8.5$

إذن، المسافة التي تقطعها غدير هي: 8.5 km

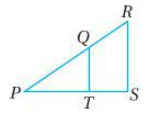
أتدرَّبُ وأحلُّ المسائلَ

1. في ΔXYZ، إذا كانَ $XM = 4, XN = 6, NZ = 9, \overline{NM} \parallel \overline{YZ}$، فأجدُ XY.



10

2. في ΔPRS، إذا كانَ $PR = 30, QR = 9, PT = 12, PS = 18$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$، مُبرِّرًا إجابتي.

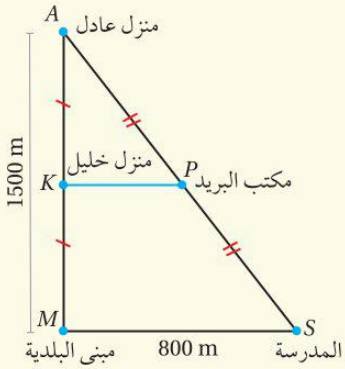


$\frac{ST}{PT} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\frac{QR}{PQ} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ $\frac{ST}{PT} \neq \frac{QR}{PQ}$

إذن، $\overline{RS} \nparallel \overline{QT}$؛ لعدم تحقّق عكس نظرية التناسب في المثلث.

مثال إضافي:

يبيّن الشكل المجاور جزءًا من مخطط طرق في إحدى البلدات على شكل مثلث قائم الزاوية. يغادر عادل منزله يوميًّا متوجهًا إلى المدرسة مرورًا بمنزل صديقه خليل ثم مكتب البريد. أجد المسافة التي يقطعها عادل يوميًّا عند ذهابه إلى المدرسة.



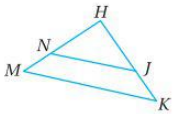
2000 m

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (12 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

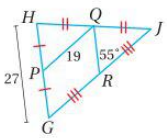
www.jnob-jo.com



3 في ΔHKM، إذا كان $HM = 15, HN = 10, HJ = 2JK$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$، مُبرِّرًا إجابتي.

$\overline{NJ} \parallel \overline{MK}$؛ لتحقّق عكس نظرية التناسب في المثلث؛ لأن $\frac{JK}{HJ} = \frac{MN}{HN} = \frac{1}{2}$

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



4 GJ 38

5 RQ 13.5

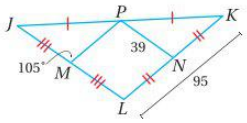
6 RJ 19

7 $m\angle PQR$ 55°

8 $m\angle HGJ$ 55°

9 $m\angle GPQ$ 125°

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



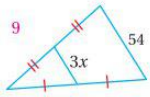
10 JL 78

11 PM 47.5

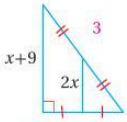
12 $m\angle MPN$ 105°

أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

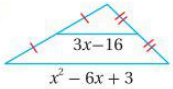
13 9



14



15



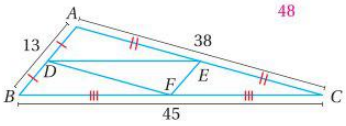
$x^2 - 6x + 3$

$x = 7$ or $x = 5$

لكن عند تعويض 5 في طول القطعة المنصفة يكون الناتج 1−، والطول لا يكون سالبًا، فيُرفَض الحل $x = 5$، ويكون الحل المقبول هو: $x = 7$

16 أجدُ محيطَ ΔDEF المُبيَّنِ في الشكلِ الآتي.

48



تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (21 – 24).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 22 (**تبرير**)، أسأل الطلبة عن نوع المثلث ABC، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 13, 14, 16, 20 كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 15, 17, 19, 21 كتاب التمارين: (4 – 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 18, (21 – 24) كتاب التمارين: (7 – 10)

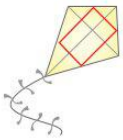
www.jnob-jo.com

أُثبتُ كُلًّا منَ النظريتينِ الآتيتينِ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودين:

17 إذا قطعَ مستقيمٌ ضلعينِ في مُثلَّثٍ، وقسَّمَهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ، فإنَّ المستقيمَ يوازي الضلعَ الثالثَ للمُثلَّثِ. (أنظر ملحق الإجابات)

18 القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ توازي أحدَ أضلاعِهِ، وطولُها يساوي نصفَ طولِ ذلكَ الضلعِ. (أنظر ملحق الإجابات)

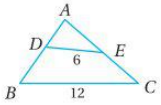
19 طائرةٌ ورقيةٌ: صنعَتْ هديلُ طائرةً ورقيةً، طولُ قُطرَيْها 80 cm و 60 cm، ثمَّ استعملَتْ شريطًا لربطِ نقاطِ منتصفِ أضلاعِ الطائرةِ. أجدُ طولَ الشريطِ. 140 cm



20 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 1320 m

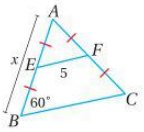
مهاراتُ التفكيرِ العليا

21 أكتشِفُ الخطأَ: قالَ خالدٌ: "بما أنَّ $DE = \frac{1}{2}BC$ في الشكلِ المُجاورِ، فإنَّ $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ بحسبِ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ". هلْ ما قالَهُ خالدٌ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



غير صحيح، يجب أن تكون E منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ لتطبيق النظرية.

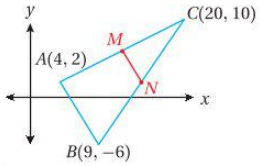
22 تبريرٌ: أجدُ قيمةَ x في الشكلِ المُجاورِ، مُبرِّرًا إجابتي.



الإجابة $x = 10$؛ لأن المثلث متطابق الأضلاع، طول قاعدته $\overline{BC}$ يساوي $2 \times 5 = 10$

23 تحدٍّ: إذا كانَتْ مساحةُ ΔABC هيَ $48\ cm^2$، وكانَتِ النقطةُ D والنقطةُ E هما نقطتَيْ منتصفِ $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ على الترتيبِ، فأجدُ مساحةَ ΔADE، مُبرِّرًا إجابتي. (أنظر الهامش)

24 تبريرٌ: في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانَتِ $\overline{MN}$ قطعةً مُنصِّفةً في ΔABC، فأجدُ ميلَ $\overline{MN}$ بطريقتينِ مختلفتينِ، مُبرِّرًا إجابتي. (أنظر الهامش)

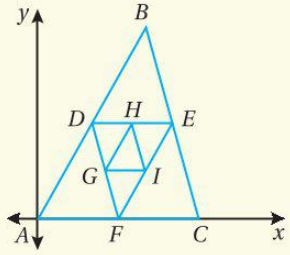


5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» في الشكل الآتي، إذا كانت $A(0,0)$, $G(5,4)$, $I(8,4)$، وكانت النقاط D,E,F هي منتصفات أضلاع المثلث ABC، والنقاط H, I, G هي منتصفات أضلاع المثلث DEF، فأجد إحداثيات كلّ من B,C,D,E,F,H.

(إرشاد: أكتب الإحداثيات المعلومة على الرسم، وأبحث فيها عن قطعة منصّفة، وأربطها بطول الضلع الذي يقابلها، وأكمل بتحديد الإحداثيات المطلوبة بالتتابع).



أنظر ملحق الإجابات.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 1، 2 من خطوات تنفيذ المشروع.

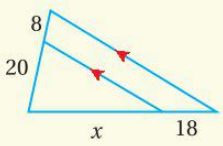
6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤالين الآتيين عليهم:

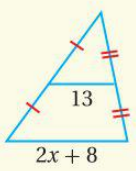
» إذا كان محيط المثلث ABC يساوي 34 cm، وكان طول إحدى القطع المنصّفة فيه 5 cm، فماذا يمكن أن تكون أطوال أضلاع هذا المثلث؟ 15, 9, 10؛ أو 4, 20, 10؛ (وغير ذلك كثير؛ بشرط أن يكون طول أحد الأضلاع 10 ومجموع طولي الضلعين الآخرين 24).

» أجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

1 $x = 45$

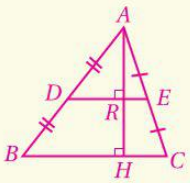


2 $x = 9$



إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

23) نُنزل عمودًا من A على كل من $\overline{ED}$ و $\overline{BC}$ كما في الشكل المجاور.



$\overline{ED} = \frac{1}{2}\ \overline{BC}$ (حسب نظرية القطعة المنصّفة في المثلث).

$\overline{AR} = \frac{1}{2}\overline{AH}$ (بحسب نظرية الأجزاء المتناسبة في المثلث ABH)

$$\text{Area}(\Delta AED) = \frac{1}{2}ED \times AR = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}BC \times \frac{1}{2}AH$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}BC \times AH\right) = \frac{1}{4}(48) = 12\ cm^2$$

24) 1) $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ (نظرية القطعة المنصّفة)

$$\text{slope } \overline{AB} = \frac{2+6}{4-9} = -\frac{8}{5},\ \text{slope } \overline{MN} = \text{slope } \overline{AB} = -\frac{8}{5}$$

2) $M(12, 6)$, $N(14.5, 2)$, $\text{slope } \overline{MN} = \frac{2-6}{14.5-12} = -\frac{4}{2.5} = -\frac{8}{5}$

www.jnob-jo.com

معمل برمجية جيوجبرا

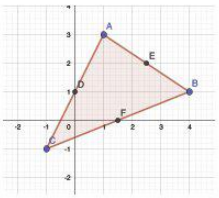
توسُّعٌ: مُثلَّثُ القطعِ المُنصِّفةِ
Extension: Midsegment Triangle

معمل برمجية جيوجبرا

مُثلَّثُ القطعِ المُنصِّفةِ هوَ مُثلَّثٌ ناتجٌ منَ القطعِ المُنصِّفةِ الثلاثِ في المُثلَّثِ.
يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ علاقةِ مساحةِ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ بمساحةِ المُثلَّثِ الأصليِّ.

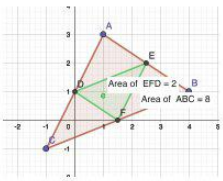
نشاط

1. أرسمُ المُثلَّثَ مختلفَ الأضلاعِ ABC في المستوى الإحداثيِّ، وذلكَ بتحديدِ ثلاثِ نقاطٍ في المستوى باستعمالِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ اختيارِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ بالمُؤشِّرِ على مواقعِ النقاطِ التي تُمثِّلُ رؤوسَ المُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ نقرِ الرأسِ الأوَّلِ لإغلاقِ الشكلِ.



2. أُحدِّدُ نقطةَ منتصفِ كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ باختيارِ أيقونةِ Midpoint or Center منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

3. أرسمُ مُثلَّثَ القطعِ المُنصِّفةِ، مُتَّبِعًا الإجراءاتِ نفسَها الواردةَ في الخطوةِ 1.



4. أجدُ مساحةَ ΔABC، ومساحةَ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ باختيارِ أيقونةِ Area منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ النقرِ داخلَ كلِّ مُثلَّثٍ.

5. أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجملةِ الآتيةِ:
تُعادِلُ مساحةُ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ ..... مساحةَ ΔABC.

6. أُكرِّرُ الخطواتِ السابقةَ، وأُطبِّقُها على مُثلَّثٍ حادِّ الزوايا، ومُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، ثمَّ أُدوِّنُ النتيجةَ التي أتوصَّلُ إليْها.

7. أُثبِتُ النتيجةَ باستعمالِ البرهانِ الإحداثيِّ. (أنظر ملحق الإجابات)

هدف النشاط

- استكشاف العلاقة بين مساحة مثلث القطع المنصّفة ومساحة المثلث الأصلي باستعمال برمجية جيوجبرا.

خطوات العمل:

- أرافق الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة فتح برمجية جيوجبرا من الرابط الآتي:

https://www.geogebra.org/classic

- توفيرًا للوقت، يمكنني تثبيت نسخة من هذه البرمجية المجانية على الحواسيب قبل بدء الحصة.
- أطلب إلى الطلبة اتباع التعليمات الواردة في الكتاب لتنفيذ الخطوات (5 – 1) من النشاط بالترتيب، والدقة اللازمة.
- أتابع عمل المجموعات وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أبيّن لهم كيف يمكنهم حفظ التمثيل البياني في ملف خاص بهم على الحاسوب بالنقر على أمر (print screen) في لوحة المفاتيح، ومن ثم لصق الصورة في المكان الذي يريدون حفظها فيه.
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (5 – 1) على مثلث حادّ الزوايا وآخر قائم الزاوية، وتدوين النتيجة التي يتوصلون إليها، ثم أطلب إليهم كتابة برهان إحداثي للنتيجة التي يتوصلون إليها.
- أناقش النتيجة التي تتوصل إليها المجموعات والبرهان الإحداثي لها مع الصف كاملًا.

www.jnob-jo.com

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تعرُّف المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة.
- تعرُّف نظرية المنصّف العمودي وعكسها، واستعمالهما لإيجاد قياسات مجهولة.
- إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها.
- تعرُّف نظرية المنصّفات العمودية للمثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- تعرُّف الدائرة الخارجية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي المنصّفات العمودية لأضلاع المثلث.
- تعرُّف نظرية منصّف الزاوية وعكسها، واستعمالهما في إيجاد قياسات مجهولة.
- تعرُّف نظرية منصّفات زوايا المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- تعرُّف الدائرة الداخلية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي منصّفات زوايا المثلث.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها.
- إيجاد معادلة مستقيم باستعمال صيغة الميل والمقطع أو صيغة الميل ونقطة.
- حل معادلات خطية بمتغيّر واحد.
- إنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة باستعمال المسطرة والفرجار.
- إنشاء منصّف الزاوية باستعمال المسطرة والفرجار.
- استخدام نظرية فيثاغورس في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية إذا عُلِم فيه طولا ضلعين.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 2

مُنصِّفاتٌ في المُثلَّثِ
Bisectors in Triangle

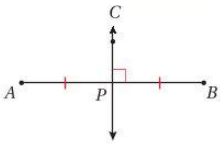
فكرة الدرس
- تعرُّفُ نظريةِ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- تعرُّفُ نظريةِ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

المصطلحات المُنصِّفُ العموديُّ، مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ، مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.

مسألةُ اليوم يظهرُ في الصورةِ المُجاورةِ جزءٌ منْ جسرِ كمالِ الشاعرِ في العاصمةِ عمّانَ. إذا كانَتْ حافةُ الجسرِ عموديةً على الدعامةِ $\overline{BD}$، وكانَ $AD = CD$، فما العلاقةُ بينَ $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$؟

المُنصِّفُ العموديُّ

المُنصِّفُ العموديُّ (perpendicular bisector) لقطعةٍ مستقيمةٍ هوَ مستقيمٌ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ عندَ نقطةِ منتصفِها.



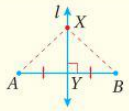
للمُنصِّفِ العموديِّ بعضُ الخصائصِ التي تُمثِّلُها النظريتانِ الآتيتانِ.

$\overleftrightarrow{CP}$ المُنصِّفُ العموديُّ لـ $\overline{AB}$.

نظريتان

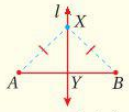
المُنصِّفُ العموديُّ

- **نظريةُ المُنصِّفِ العموديِّ:**
كلُّ نقطةٍ على المُنصِّفِ العموديِّ لقطعةٍ مستقيمةٍ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفي القطعةِ المستقيمةِ.



مثالٌ: إذا كانَ l مُنصِّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$، فإنَّ $AX = BX$، لأيِّ نقطةٍ X على l.

- **عكسُ نظريةِ المُنصِّفِ العموديِّ:**
كلُّ نقطةٍ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفيْ قطعةٍ مستقيمةٍ تقعُ على المُنصِّفِ العموديِّ لتلكَ القطعةِ.



مثالٌ: إذا كانَ $AX = BX$، وكانَ l مُنصِّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$، فإنَّ X تقعُ على l.

أتذكَّرُ
يشيرُ الرمزُ AB إلى طولِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$.

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إليهم حل الأسئلة الآتية:

» أجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ حيث $A(0, -6), B(4, 8)$.
$M(2, 1)$

» أجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة $C(2, 4)$ وميله يساوي 3 $y = 3x - 2$

» أجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $F(1, 5), G(-2, -1)$. $y = 2x + 3$

» أحل كلًّا من المعادلات الآتية:

a. $x - 5 = 3x - 13$ $x = 4$

b. $2x + 1 = 4(x - 3)$ $x = 6.5$

c. $\frac{5x-7}{3} = x - 3$ $x = -1$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

www.jnob-jo.com

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - « ما المضلّع الذي يظهر في واجهة الجسر؟ مثلث.
  - « ماذا تمثّل النقطة D بالنسبة إلى القطعة المستقيمة $\overline{AC}$؟ ولماذا؟ نقطة منتصفها؛ لأن $AD = CD$.
  - « ماذا تمثّل الدعامة $\overline{BD}$ بالنسبة إلى القطعة المستقيمة $\overline{AC}$؟ المنصّف العمودي لها.
  - « هل تتذكّرون طريقة إنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - « ما العلاقة بين $\overline{AB}$، و $\overline{CB}$؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - « ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - « مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
  - « أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

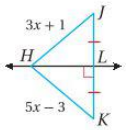
مثال 1

- أوضّح للطلبة مفهوم المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة، وأذكّرهم بطريقة إنشائه باستعمال المسطرة والفرجار، وأقدّم لهم خصائص المنصّف العمودي المتمثّلة بنظرية المنصّف العمودي وعكسها، بالاستعانة بصندوق (**نظريتان**) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 1، وأحاورهم في مضمون صندوق (**أتعلّم**) الموجود في هامش الفرع 2 من المثال، وأبيّن لهم أنه لا بد من تحقّق شرطين حتى يُعَدّ المستقيم منصّفًا عموديًّا للقطعة المستقيمة، هما: أن يكون عموديًّا عليها (يصنع معها زاوية قائمة)، وأن ينصّفها (يقسمها إلى قطعتين متطابقتين لهما الطول نفسه).
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال 1

أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 طولُ $\overline{HJ}$.



الخطوة 1: أجدُ قيمةَ x.

نظريةُ المُنصِّفِ العموديِّ: $HJ = HK$

بالتعويضِ: $3x + 1 = 5x - 3$

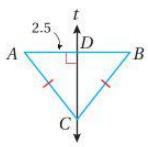
بحَلِّ المعادلةِ لـ x: $x = 2$

الخطوة 2: أجدُ طولَ $\overline{HJ}$.

بتعويضِ $x = 2$: $HJ = 3(2) + 1$

بالتبسيطِ: $= 7$

2 طولُ $\overline{AB}$.



بما أنَّ $AC = BC$، و t عموديٌّ على $\overline{AB}$، فإنَّ t مُنصِّفٌ عموديٌّ لـ $\overline{AB}$ بحسبِ عكسِ نظريةِ المُنصِّفِ العموديِّ:

تعريفُ المُنصِّفِ العموديِّ: $AB = 2AD$

بالتعويضِ: $= 2(2.5)$

بالتبسيطِ: $= 5$

أتعلَّمُ

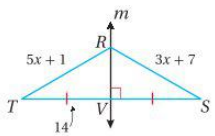
أنْ يكونَ $AC = BC$ لا يُعَدُّ شرطًا كافيًا للحكمِ على أنَّ t هوَ مُنصِّفٌ عموديٌّ لـ $\overline{AB}$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) طولُ $\overline{TS}$. 28

b) طولُ $\overline{RS}$. 16



www.jnob-jo.com

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ أيِّ مستقيمٍ إذا عُلِمَ ميلُهُ ونقطةٌ يمرُّ بها. ومنْ ثَمَّ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ المُنصِّفِ العموديِّ كما في المثالِ الآتي.

مثال 2

أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$، حيثُ: $P(-1, 4)$، و $Q(1, 2)$.

الخطوة 1: أجدُ نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$.

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

بتعويضِ $(x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2)$: $M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

بالتبسيطِ: $M(0, 3)$

إذنْ، إحداثيّا النقطةِ M الواقعةِ في منتصفِ $\overline{PQ}$، هما: $(0, 3)$.

الخطوة 2: أجدُ ميلَ المُنصِّفِ العموديِّ.

ميلُ المُنصِّفِ العموديِّ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ القطعةِ المستقيمةِ نفسِها؛ لذا أجدُ أوَّلًا ميلَ القطعةِ المستقيمةِ:

صيغةُ الميلِ: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

بتعويضِ $(x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2)$: $= \frac{2-4}{1-(-1)}$

بالتبسيطِ: $= \frac{-2}{2} = -1$

إذنْ، ميلُ المُنصِّفِ العموديِّ هوَ سالبُ مقلوبِ ميلِ $\overline{PQ}$، ويساوي 1.

الخطوة 3: أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بتعويضِ $(x_1, y_1) = (0, 3), m = 1$: $y - 3 = 1(x - 0)$

بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ: $y = x + 3$

إذنْ، معادلةُ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$ هيَ: $y = x + 3$.

أتذكَّرُ

إذا تعامدَ مستقيمانِ كلٌّ منْهُما ليسَ رأسيًّا، فإنَّ حاصلَ ضربِ ميليهِما هوَ -1؛ أيْ إنَّ ميلَ أحدِهِما يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ الآخرِ.

أتذكَّرُ

يُمكِنُ كتابةُ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ إذا عُلِمَ ميلُ المستقيمِ وإحداثيّاتُ نقطةٍ يمرُّ بها.

أخطاء شائعة:

قد يظنّ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط خطأً أنّ مستقيمًا ما هو المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة معطاة دون التحقق من وجود ما يؤكد ذلك من معطيات، فلا بد أن يمر ذلك المستقيم من نقطة منتصف القطعة (يمكن أن يدل على ذلك أطوال متساوية معطاة على الرسم أو إشارات متماثلة على القسمين اللذين انقسمت إليهما القطعة المستقيمة، أو نص صريح في متن السؤال)، وأن يكون متعامدًا مع تلك القطعة المستقيمة (يدل على ذلك وجود إشارة الزاوية القائمة عند نقطة التقاطع)، لذلك أوجّه الطلبة إلى ضرورة التحقّق من الشرطين حتى يُعَدّ المستقيم منصّفًا عموديًّا لقطعة مستقيمة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

www.jnob-jo.com

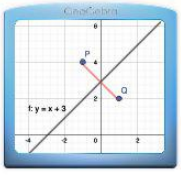
الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ معادلةِ المُنصِّفِ العموديِّ لقطعةٍ مستقيمةٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

1) أُحدِّدُ نقطتيْ نهايتيِ القطعةِ المستقيمةِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ A من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على موقعيِ النقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.

2) أرسمُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ النقطتينِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ Segment من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على النقطتينِ.

3) أختارُ أيقونةَ Perpendicular Bisector لإظهارِ المُنصِّفِ العموديِّ في المستوى الإحداثيِّ، وإظهارِ معادلتِهِ في شريطِ المعادلةِ.



أتحقَّقُ من فهمي

أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$، حيثُ: $P(-1, -5)$، و $Q(3, -1)$.

$y = -x - 2$

المُنصَّفاتُ العموديةُ للمُثلَّثِ، ومركزُ الدائرةِ الخارجيةِ

إذا تلاقَتْ ثلاثةُ مستقيماتٍ أوْ أكثرُ في نقطةٍ مُشتَرَكةٍ، فإنَّ هذهِ المستقيماتِ تُسمّى **مستقيماتٍ مُتلاقيةً**، وتُسمّى النقطةُ التي تلتقي فيها المستقيماتُ **نقطةَ التلاقي**.

بما أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثةَ أضلاعٍ، فإنَّ لهُ ثلاثةَ مُنصَّفاتٍ عموديةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

مثال 2

- أناقش الطلبة في إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها بطرح الأسئلة الآتية:

» ماذا يلزم لكتابة معادلة مستقيم؟ ستتعدّد إجابات الطلبة وتتنوّع، ومنها: ميله ونقطة يمرّ بها؛ المقطع y ونقطة يمرّ بها؛ إحداثيات نقطتين يمرّ بهما.

» إذا كانت $A(-2, 1)$, $B(4, 9)$، فما إحداثيّا إحدى النقاط التي يمرّ بها المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ أسهل إجابة هي: نقطة منتصف القطعة؛ أي: النقطة $(1, 5)$.

» ما ميل $\overline{AB}$؟ $\frac{4}{3}$

» ما ميل المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ $-\frac{3}{4}$

» هل يمكن الآن كتابة معادلة المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ ما معادلته؟ نعم؛ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4}$

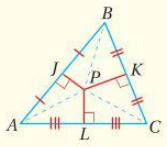
- أناقش الطلبة في خطوات حل المثال 2 على اللوح، وأطلب إليهم تبرير كل خطوة.

www.jnob-jo.com

المُنصّفاتُ العموديةُ للمُثلّثِ

نظريةٌ

تلتقي المُنصّفاتُ العموديـةُ لأضلاعِ مُثلّثٍ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِ المُثلّثِ.

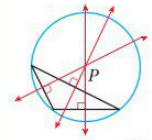


مثال: إذا كانَـتْ $\overline{PJ}, \overline{PL}, \overline{PK}$ هـيَ المُنصّفـاتِ العموديةَ لـ ΔABC، وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها، فإنَّ $PA = PB = PC$.

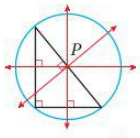
إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 14.

نقطةُ تلاقـي المُنصّفاتِ العموديـةِ لأضلاعِ مُثلّثٍ ما هـيَ **مركزُ الدائرةِ الخارجيـةِ للمُثلّثِ** (circumcenter of the triangle)؛ وهـيَ دائرةٌ تمرُّ برؤوسِ المُثلّثِ جميعِها؛ إذْ إنَّ نقطةَ تلاقي المُنصّفاتِ العموديةِ لأضلاعِ مُثلّثٍ ما تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ؛ لذا فهيَ مركزٌ للدائرةِ الخارجيةِ.

يعتمدُ موقعُ مركزِ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلّثِ على نوعِ المُثلّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:



مُثلّثٌ مُنفرجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلّثِ.

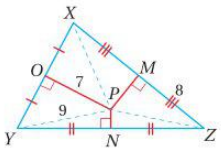


مُثلّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P على وترِ المُثلّثِ.

مُثلّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلّثِ.

مثال 3

إذا كانَـتِ النقطةُ P هـيَ مركزَ الدائـرةِ الخارجيةِ لـ ΔXYZ في الشكلِ المُجاورِ، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



1 طولُ $\overline{PX}$.

$PX = PY$	نظريةُ المُنصّفاتِ العموديةِ للمُثلّثِ
$= 9$	بتعويضِ $PY = 9$

أتعلّمُ

يوجدُ فرقٌ بيـنَ المُنصّفِ العموديِّ للمُثلّثِ والقطعةِ المُنصّفـةِ فـي المُثلّثِ. فالقطعـةُ المُنصّفةُ تُنصّفُ الضلعينِ اللذينِ يتقاطعانِ معها، ولا يكـونُ التقاطعُ عموديًّا بالضرورةِ.

أمّـا المُنصّـفُ العموديُّ فهوَ مُنصّـفٌ لضلعٍ واحدٍ في المُثلّثِ، وهوَ عموديٌّ بالضـرورةِ علـى ذلـكَ الضلعِ.

إرشاد:

إنّ تعيين النقطتين في المسـتوى الإحداثي ورسـم القطعة المسـتقيمة، وتحديد نقطة منتصفها، ورسم المنصّـف العمودي لها على المسـتوى الإحداثي، يسـاعد الطلبة ويسـهّل عليهم عملية إيجاد معادلة المنصّف العمودي.

نشاط التكنولوجيا

- أوضّح للطلبة طريقة إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعـة مسـتقيمة باسـتعمال برمجيـة جيوجبـرا باتباع الخطوات الـواردة في صندوق (**الدعم البياني**) الوارد فـي كتاب الطالـب صفحـة 22، ثم أطلـب إليهم حل المثـال 2 باسـتعمال البرمجيـة، ومقارنـة الإجابة التي يحصلون عليها مع الإجابة بالحل اليدوي الجبري.

مثال إضافي

أجد معادلـة المنصّف العمودي للقطعة المسـتقيمة التي أُعطيَ طرفاها في كلّ ممّا يأتي:

1. $F(2, 6), G(4, 6)$ — $x = 3$
2. $A(3, -5), B(3, 7)$ — $y = 1$
3. $R(8, 0), S(4, -2)$ — $y = -2x + 11$

www.jnob-jo.com

2 طولُ $\overline{PM}$.

أتذكّرُ
بالرجوعِ إلى تعريفِ المُنصّفِ العموديِّ، فإنَّ: $MX = ZM = 8$

نظريةُ فيثاغورس — $(PX)^2 = (MX)^2 + (PM)^2$

بتعويضِ $PX = 9, MX = 8$ — $(9)^2 = (8)^2 + (PM)^2$

بإيجادِ القوى — $81 = 64 + (PM)^2$

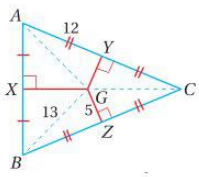
بطرحِ 64 منْ طرفي المعادلةِ — $(PM)^2 = 17$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ — $PM = \pm\sqrt{17}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $PM = \sqrt{17}$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ G هيَ مركزَ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔABC في الشكلِ المُجاورِ، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



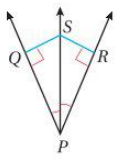
a) طولُ $\overline{AG}$. 13 b) طولُ $\overline{GY}$. 5

c) طولُ $\overline{CZ}$. 12

رموزٌ رياضيةٌ
يُستعمَلُ الرمزُ $\overrightarrow{PS}$ للدلالةِ على الشعاعِ الذي يبدأُ بالنقطةِ P، ويمرُّ بالنقطةِ S.

مُنصّفُ الزاويةِ

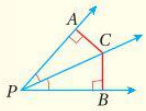
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مُنصّفَ الزاويةِ شعاعٌ يُقسِّمُ الزاويةَ إلى زاويتينِ مُتطابقتينِ، وتعلَّمْتُ أيضًا أنَّ البُعْدَ بينَ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليهِ هوَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ العموديةِ على المستقيمِ منْ تلكَ النقطةِ. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ $\overrightarrow{PS}$ في الشكلِ المُجاورِ مُنصّفٌ لـ $\angle QPR$، وإنَّ البُعْدَ بينَ النقطةِ S و $\overrightarrow{PQ}$ هوَ SQ.



نظريتان

مُنصّفُ الزاويةِ

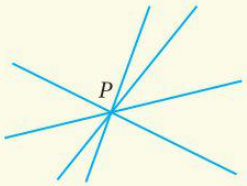
- نظريةُ مُنصّفِ الزاويةِ:
كلُّ نقطةٍ على مُنصّفِ الزاويةِ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها.



مثالٌ: إذا كانَ $\overrightarrow{PC}$ مُنصّفًا لـ $\angle APB$، وكانَ $\overline{CA} \perp \overrightarrow{PA}, \overline{CB} \perp \overrightarrow{PB}$، فإنَّ $CA = CB$.

مثال 3

- أوضّح للطلبة مفهوم المستقيمات المتلاقية ونقطة التلاقي، فالشكل الآتي يبيّن أربعة مستقيمات متلاقية، ونقطة تلاقيها هي P.

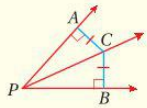


- أبيّن للطلبة أن للمثلث ثلاثة منصّفات عمودية لأضلاعه تلتقي في نقطة واحدة، وأوضّح لهم خاصية هذه النقطة كما وردت في نظرية المنصّفات العمودية للمثلث، ثم أبيّن لهم أن هذه النقطة تمثّل مركز الدائرة الخارجية التي تمرّ برؤوس المثلث، وأستعرض الحالات الثلاث لموقع هذا المركز تبعًا لنوع المثلث (حادّ الزوايا، منفرج الزاوية، قائم الزاوية) بالاستعانة **بورقة المصادر 4: مركز الدائرة الخارجية للمثلث.**
- أوضّح للطلبة كيفية استعمال نظرية المنصّفات العمودية للمثلث لحساب قياسات مجهولة عن طريق مناقشتهم في حل فرعي المثال 3، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد:
إذا توفّر جهاز عرض (Data Show) فيمكن عرض الأشكال التي توضّح موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث تبعًا لنوع المثلث من كتاب الطالب صفحة 23.

www.jnob-jo.com

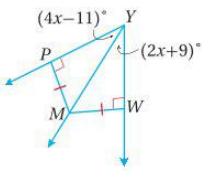
- عكسُ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ:



إذا وقعَتْ نقطةٌ داخلَ زاويةٍ، وكانَتْ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها، فإنَّها تقعُ على مُنصِّفِ الزاويةِ.

مثال: إذا كانَ $CA = CB$، $\overline{CA} \perp \overrightarrow{PA}$، $\overline{CB} \perp \overrightarrow{PB}$، فإنَّ $\overrightarrow{PC}$ مُنصِّفٌ لـ $\angle APB$.

مثال 4



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ $m\angle PYM$.

الخطوة 1: أجدُ قيمةَ x.

عكسُ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ	$\angle PYM \cong \angle WYM$
تعريفُ تطابُقِ الزوايا	$m\angle PYM = m\angle WYM$
بالتعويضِ	$4x - 11 = 2x + 9$
بحلِّ المعادلةِ لـ x	$x = 10$

الخطوة 2: أجدُ $m\angle PYM$.

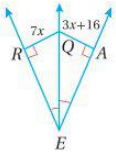
معطى	$m\angle PYM = (4x - 11)^\circ$
بتعويضِ $x = 10$	$= (4(10) - 11)^\circ$
بالتبسيطِ	$= 29^\circ$

أتحقَّقُ من فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ QA. 28

أتعلَّمُ

أنْ يكونَ $MP = MW$ لا يُعَدُّ شرطًا كافيًا للحكمِ على أنَّ $\overrightarrow{YM}$ هوَ مُنصِّفٌ لـ $\angle PYW$، وإنَّما يُشترَطُ أنْ يكونَ $\overline{MW} \perp \overline{YW}$، و $\overline{MP} \perp \overline{YP}$.



مَنصَّفاتُ زوايا المُثلَّثِ، ومركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ

بما أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثَ زوايا، فإنَّ لهُ ثلاثةَ مُنصَّفاتٍ للزوايا تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

مثال 4

- أذكّر الطلبة بمفهوم منصّف الزاوية الذي تعلّموه سابقًا في الصف السادس، وأذكّرهم أيضًا بطريقة إنشائه باستعمال المسطرة والفرجار فقط.
- أقدّم للطلبة نظرية منصّف الزاوية وعكس نظرية منصّف الزاوية الواردتين في صندوق (**نظريتان**) الوارد في كتاب الطالب، واللتين تبيّنان خصائص منصّف الزاوية.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4، وأحاورهم في محتويات صندوق (**أتعلّم**) الوارد في هامش المثال 4، وأبيّن لهم أنه لا بد من تحقّق شرطين حتى يُعَدّ المستقيم منصّفًا للزاوية، هما: أن تكون القطعتان المستقيمتان المرسومتان من أي نقطة عليه إلى ضلعي الزاوية متطابقتين، وأن تعامد كل منهما ضلع الزاوية المرسومة إليه (تصنع معه زاوية قائمة).
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

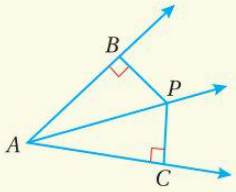
- في المثال 4، ألفت انتباه الطلبة إلى عدم وضع رمز الدرجة على قيمة x؛ لأنّها لا تمثّل قياس الزاوية.
- في سؤال (**أتحقّق من فهمي**) الذي يلي المثال 4، يُستدَل على أن الشعاع EQ مُنصِّف للزاوية AER من الإشارات الموضوعة على كل من الزاويتين AEQ و REQ.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة في أثناء حل أسئلة شبيهة بالمثال 4 بالتوقف عند إيجاد قيمة x، وينسون أن المطلوب في السؤال هو إيجاد قياس الزاوية؛ ولتجنُّب مثل هذا الخطأ ألفت نظر الطلبة إلى الانتباه جيدًا للمطلوب في كل سؤال يحلّونه؛ للتأكد من إجابتهم عن المطلوب فيه.

مثال إضافي

أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور للإجابة عن السؤالين الآتيين:

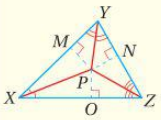


1. إذا كان: $PB = PC = 8$، وكان: $m\angle BAP = 39^\circ$، فما قياس $\angle BAC$؟ 78°
2. إذا كان $\overrightarrow{AP}$ منصّفًا للزاوية $\angle BAC$، وكان: $PB = 2x + 7$, $PC = 5x - 20$ ، فما طول $\overline{PC}$؟ 25

www.jnob-jo.com

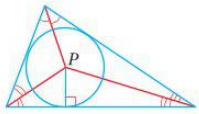
نظرية مُنصّفاتُ زوايا المُثلّثِ

تلتقي مُنصّفاتُ زوايا المُثلّثِ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلٍّ منْ أضلاعِ المُثلّثِ.



مثالٌ: إذا كانتْ $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}$ هيَ مُنصّفاتِ زوايا ΔXYZ، وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها، فإنَّ $PM = PN = PO$.

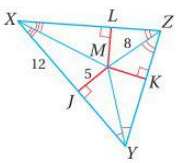
إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 15.



نقطةُ تلاقي مُنصّفاتِ زوايا المُثلّثِ هيَ **مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلّثِ** (incenter of the triangle)؛ وهيَ دائرةٌ تمسُّ أضلاعَ المُثلّثِ جميعَها؛ ذلكَ أنَّ نقطةَ تلاقي مُنصّفاتِ زوايا المُثلّثِ تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ أضلاعِهِ؛ ما يعني أنَّها مركزُ الدائرةِ الداخليةِ.

مثال 5

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ LZ.



نظريةُ فيثاغورس	$(MZ)^2 = (LM)^2 + (LZ)^2$
بتعويضِ $MZ = 8, LM = MJ = 5$	$(8)^2 = (5)^2 + (LZ)^2$
بإيجادِ القوى	$64 = 25 + (LZ)^2$
بطرحِ 25 منْ طرفي المعادلةِ	$(LZ)^2 = 39$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ	$LZ = \pm\sqrt{39}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $LZ = \sqrt{39}$.

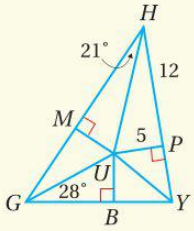
أتذكّرُ
$LM = MJ$ بحسبِ نظريةِ مُنصّفاتِ زوايا المُثلّثِ.

مثال 5

- أوضّح للطلبة أنه توجد للمثلث ثلاثة منصّفات لزواياه تلتقي في نقطة واحدة تبعد البُعد نفسه عن كل من أضلاعه الثلاثة، وهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث التي تمسّ أضلاعه الثلاثة.
- أناقش الطلبة في الشكل المجاور في المثال 5 بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - ماذا يظهر في هذا الشكل؟ مثلث وثلاثة منصّفات زواياه، وثلاثة أعمدة من نقطة تلاقي المنصّفات إلى كل من أضلاع المثلث.
  - كيف عرفت أن $\overline{XM}, \overline{ZM}, \overline{YM}$ هي منصّفات لزوايا المثلث؟ من الإشارات المتماثلة على قسمي كل من زوايا المثلث.
  - ماذا نستنتج من ذلك؟ أن النقطة M تبعد البُعد نفسه عن كل من أضلاع المثلث، وهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وأن $ML = MK = MJ$
- أناقش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح، وأؤكّد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي

إذا كانت U مركز الدائرة الداخلية للمثلث HGY، فأستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لإيجاد كل ممّا يأتي:



1. $m\angle UGM$ — $28°$
2. $m\angle UYB$ — $41°$
3. HU — 13
4. HM — 12

إرشاد: أوجّه الطلبة إلى ضرورة التحقّق من منصّفات المثلث دائمًا، ووجود ما يدل على أن مستقيمًا ما هو منصّف عمودي لأحد أضلاع المثلث، أو منصّف لإحدى زواياه، قبل البدء في الحل.

www.jnob-jo.com

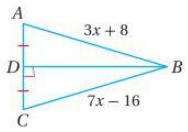
أتحقّقُ منْ فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الواردِ في المثالِ 5 لإيجادِ XL. 12

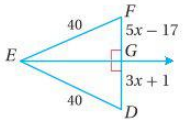
أتدرّبُ وأحلُّ المسائل

أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

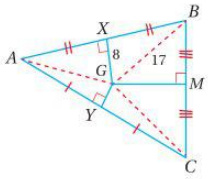
1 AB 26



2 FG 28



أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:



3 GA 17

4 AX 15

5 AB 30

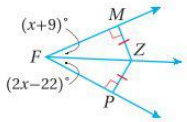
أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$ المعطى نهايتاها في كلٍّ ممّا يأتي:

6 $P(-2, 0), Q(6, 12)$
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{22}{3}$

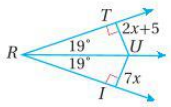
7 $P(-7, 5), Q(1, -1)$
$y = \frac{4}{3}x + 6$

أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

8 $m\angle MFZ$ 31°



9 TU 7



4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

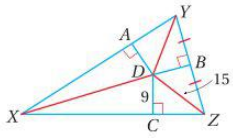
- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (13 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصة لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

www.jnob-jo.com

إذا كانَتِ النقطةُ D هيَ مركزَ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔXYZ، فأجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

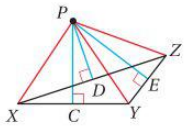


10 DB 9

11 CZ 12

12 YZ 24

13 إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔXYZ، فأستعملُ المعلومةَ المعطاةَ تاليًا لإيجادِ PY. 31



$PX = 4x + 3$

$PZ = 6x - 11$

أُثبِتُ كُلًّا منَ النظريتينِ الآتيتينِ:

14 نظريةُ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ. أنظر الهامش.

15 نظريةُ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ. أنظر ملحق الإجابات.

16 **اتصالاتٌ:** ترغبُ شركةُ اتصالاتٍ في بناءِ بُرْجٍ للبثِّ على أبعادٍ متساويةٍ منْ ثلاثةِ مبانٍ كبيرةٍ. أُوضِّحُ كيفَ يُمكِنُ استعمالُ الشكلِ الآتي لتحديدِ موقعِ البُرْجِ.

أرسم مثلثًا يقع كل رأس من رؤوسه عند مبنى من المباني ثم أنشئ أعمدة منصّفة لأضلاع المثلث فتلتقي الأعمدة في نقطة واحدة تكون مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث، فيوضع البرج عند نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

17 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

$\overline{AB} \cong \overline{CB}$؛ لأن B تقع على المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AC}$ فهي تبعد البُعد نفسه عن طرفيها.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (19 – 23).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 19 (**أكتشف الخطأ**)، أذكّر الطلبة بنظرية منصّف الزاوية وما يترتّب عليها؛ لمساعدتهم على تحديد الخطأ في ما قالته أحلام.

الواجب المنزلي:

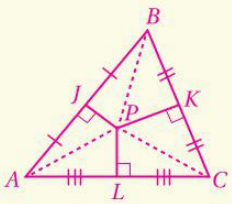
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 17, 19 كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 14, 18, 21 كتاب التمارين: (4 – 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 15, (21 – 23) كتاب التمارين: (7 – 9)

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

14) المعطيات: $\overline{PK}, \overline{PJ}, \overline{PL}$ هي المنصّفات العمودية لأضلاع المثلث ABC.

المطلوب: إثبات أنّ: $PA = PB = PC$

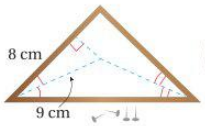


البرهان: بما أن النقطة P واقعة على المنصّف العمودي للضلع $\overline{AB}$، فإنها تبعد البُعد نفسه عن A، و B أي أنّ $PA = PB$.

وبما أن P تقع على المنصّف العمودي للضلع $\overline{AC}$، فإنها تبعد البُعد نفسه عن A، و C أي أنّ $PA = PC$ إذن، $PA = PB = PC$.

www.jnob-jo.com

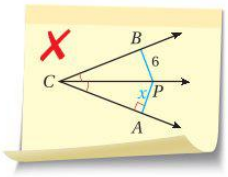
18 يريدُ فنّانٌ أنْ يضعَ قطعةً دائريـةً منَ الزجاجِ المُلوَّنِ داخلَ إطارٍ على شـكلِ مُثلَّثٍ أبعادُهُ مُبيَّنةٌ في الشكلِ المُجاورِ، وأنْ يجعلَ الزجاجَ يُلامِسُ كُلًّا مـنْ جوانبِ الإطارِ. أجدُ طولَ قُطْرِ قطعةِ الزجاجِ الدائريةِ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



أنظر ملحق الإجابات.

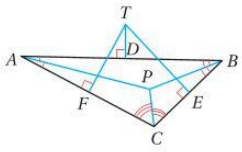
مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 أكتشـفُ الخطأَ: قالَتْ أحلامُ: "قيمةُ x في الشـكلِ الآتي هيَ 6 بحسبِ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ". أكتشفُ الخطأَ في قولِ أحلامَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.



الخطـأ أن $\overline{PB}$ لا يعامد $\overline{CB}$، وبالرغم من أنّ $\overline{CP}$ منصّـف للزاوية $\angle BCA$، فـلا يصـح تطبيـق نظريـة منصّف الزاوية؛ لأن $\overline{PB}$ لا يعامد $\overline{CB}$.

تبريرٌ: إذا كانَتِ النقاطُ: D، وE، وF هيَ مُنصَّفاتِ أضلاعِ ΔABC في الشكلِ المُجاورِ، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:



20 أيُّ نقاطِ الشكلِ هيَ مركزُ الدائرةِ المارَّةِ بالنقاطِ: A، وB، وC؟

T ؛ لأنّها ملتقى الأعمدةِ المنصّفةِ لأضلاعِ المثلثِ.

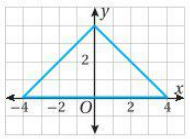
21 أيُّ نقاطِ الشكلِ هيَ مركزُ دائرةٍ تمسُّ كلَّ ضلعٍ منْ أضلاعِ ΔABC؟

P ؛ لأنّها ملتقى منصّفاتِ زوايا المثلثِ.

22 إذا كانَ $TA = 8.2$، فما طولُ $\overline{TC}$؟

8.2؛ لأن $\overline{TA}$، $\overline{TC}$ نصفا قطرين في الدائرةِ التي تمرّ برؤوسِ المثلثِ ABC.

23 تحدٍّ: أجدُ مركزَ الدائرةِ الخارجةِ للمُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ. أنظر الهامش.



5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

أجد إحداثيّـي مركز الدائرة الخارجيـة للمثلث ABC حيث: $A(0, 0), B(8, 0), C(2, 4)$. $(4, 0.5)$

أنظر ملحق الإجابات.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (6 – 3) من خطوات تنفيذ المشروع.

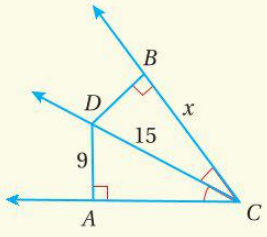
6 الختام

- أتحقّـق مـن فهـم الطلبـة موضـوع الـدرس، بتوجيـه السؤالين الآتيين إليهم:

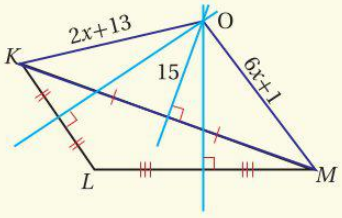
» ماذا تُسـمّى الدائرة التي تمرّ بـرؤوس المثلث ABC؟ ومـا هو مركزهـا؟ الدائـرة الخارجية للمثلث ABC، ومركزها هو نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

» أجد الطـول المطلـوب في كل من الشـكلين الآتيين:

1 BC 12



2 OM 19



إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

23) المحـور y هو المنصّف العمودي لقاعدة هذا المثلث، ويقسـمه إلى مثلثيـن قائمي الزاوية متطابقين، وكل منهمـا متطابق الضلعين، إذن، قياس الزاوية الحادة في كل منهما يساوي $45°$

إذن، قياس زاوية الرأس الواقع على المحور y في المثلث الكبير هو:

$$45° + 45° = 90°$$

أي أن المثلـث الكبير قائم الزاوية، ومن ثـم فمركز دائرته الخارجية الذي يمثّـل نقطة تلاقي المنصفـات العموديـة لأضلاعه هو نقطة منتصف وتره، وهي هنا نقطة الأصل: $(0, 0)$.

www.jnob-jo.com

نشاط مفاهيمي

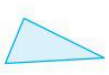
القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ
Medians of Triangle

نشاط مفاهيميٌّ

الهدفُ: استكشافُ العلاقةِ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ ونقطةِ توازنِ المُثلَّثِ، وطولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطةِ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والرأسِ المُقابِلِ لها.

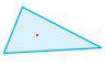
نشاط 1

الخطوةُ 1: أرسمُ مُثلَّثًا على قطعةٍ منَ الورقِ المُقوّى، ثمَّ أقصُّهُ.



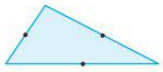
الخطوةُ 2: أضعُ المُثلَّثَ على قلمِ الرصاصِ، ثمَّ أُعدِّلُ موقعَهُ حتّى يتوازنَ.

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ نقطةَ توازنِ المُثلَّثِ، ثمَّ أضعُ علامةً عندَها.

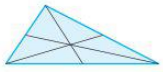


نشاط 2

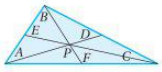
الخطوةُ 1: أستعملُ المسطرةَ لتحديدِ نقطةِ المنتصفِ لكلٍّ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ الذي رسمْتُهُ في النشاطِ 1.



الخطوةُ 2: أرسمُ قطعةً مستقيمةً تصلُ بينَ كلِّ منتصفِ ضلعٍ ورأسِ المُثلَّثِ المُقابِلِ لهُ.



الخطوةُ 3: أُسمّي المُثلَّثَ كما في الشكلِ الآتي.



أحلّلُ النتائجَ:

1. ما العلاقةُ بينَ النقطةِ P في النشاطِ 2 ونقطةِ توازنِ المُثلَّثِ في النشاطِ 1؟ هي نفسها.
2. أستعملُ المسطرةَ لأملأَ الفراغَ في الجدولِ الآتي:

$AD =$ ___	$BF =$ ___	$CE =$ ___
$AP =$ ___	$BP =$ ___	$CP =$ ___
$PD =$ ___	$PF =$ ___	$PE =$ ___

أنظرُ قياساتِ الطلبةِ.

3. ما النسبةُ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ والنقطةِ P، وطولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والنقطةِ P؟ النسبة 1 : 2
4. ما النسبةُ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ والنقطةِ P، وطولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والرأسِ المُقابِلِ لهُ؟ النسبة 2 : 3

هدف النشاط

استكشاف العلاقة بين طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث ونقطة توازن المثلث، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة منتصف ضلع المثلث والرأس المقابل لها.

خطوات العمل:

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأزوّد كل مجموعة بالمواد والأدوات اللازمة لتنفيذ النشاط.
- أطلب إلى المجموعات تنفيذ خطوات النشاط 1، وتحديد نقطة توازن المثلث.
- أطلب إلى المجموعات تنفيذ خطوات النشاط 2، وأسألهم عمّا يلاحظونه عند تنفيذ هذا النشاط.
- أتابع المجموعات أثناء تنفيذ النشاط؛ للتأكد من أنهم يقومون بالعمل بطريقة صحيحة ودقيقة، وأساعد من يحتاج إلى مساعدة.
- أطلب إلى المجموعات الإجابة عن الأسئلة في بند (**أحلّل النتائج**)، ثم أناقش إجابات هذه الأسئلة مع الصف كاملًا.
- أطلب إلى أحد الطلبة كتابة النتيجة النهائية للنشاط في مكان بارز على اللوح.

✓ إرشادات:

- يمكن تحضير مجموعة من مثلثات متنوّعة من الورق المقوّى قبل النشاط، يقصّها الطلبة في منازلهم.
- يمكن تخصيص 20 دقيقة من وقت الحصة لهذا النشاط، وبعد الانتهاء منه أتابع السير في مهام الدرس 3 (القطع المنصّفة والارتفاعات في المثلث).

www.jnob-jo.com

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تعرُّف القطعة المتوسطة في المثلث، ومركز المثلث.
- تعرُّف نظرية مركز المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- إيجاد مركز المثلث في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه.
- تعرُّف ارتفاع المثلث وملتقى ارتفاعاته.
- إيجاد ملتقى ارتفاعات المثلث في المستوى الإحداثيّ.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- كتابة معادلة المستقيم المارّ بنقطتين معلومتين.
- حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيّرين بالحذف أو التعويض.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

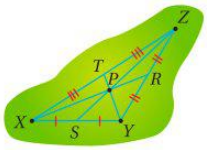
الدرسُ 3

القطعُ المُتوسِّطةُ والارتفاعاتُ في المُثَلَّثِ
Medians and Altitudes in Triangle

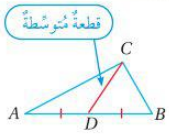
فكرةُ الدرسِ
- تعرُّفُ نظريةِ مركزِ المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- إيجادُ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ.

المصطلحاتُ القطعةُ المُتوسِّطةُ للمثلثِ، مركزُ المُثلَّثِ، ارتفاعُ المُثلَّثِ، ملتقى الارتفاعاتِ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ النقطةُ P في الشكلِ المُجاورِ موقعَ مستشفى حكوميٍّ في إحدى المحافظاتِ الأردنيةِ، وتُمثِّلُ النقاطُ الأُخرى في الشكلِ عددًا منَ المناطقِ السكنيةِ القريبةِ منْهُ. إذا كانَ بُعْدُ المنطقةِ S عنِ المنطقةِ Z هوَ 8 km، فما بُعْدُ المستشفى عنِ المنطقةِ Z؟



القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ



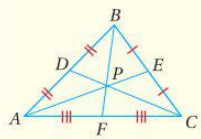
القطعةُ المُتوسِّطةُ للمُثلَّثِ (median of triangle) هيَ القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بينَ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.

أتعلَّمُ يقعُ مركزُ المُثلَّثِ دائمًا داخلَ المُثلَّثِ.

لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُتوسِّطةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى **مركزَ المُثلَّثِ** (centroid)، وكنْتُ قدْ توصَّلْتُ في النشاطِ المفاهيميِّ الذي يسبقُ هذا الدرسَ إلى أنَّها نقطةُ اتِّزانِ المُثلَّثِ.

مركزُ المُثلَّثِ

نظريةٌ



يبعدُ مركزُ المُثلَّثِ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ ثلثيْ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.

أتعلَّمُ نسبةُ بُعْدِ مركزِ المُثلَّثِ عنِ الرأسِ إلى بُعْدِهِ عنْ منتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ هيَ 2:1

مثالٌ: إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ ΔABC، فإنَّ:

$$AP = \frac{2}{3}AE,\ BP = \frac{2}{3}BF,\ CP = \frac{2}{3}CD$$

www.jnob-jo.com

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الأسئلة الآتية:

» **أجد المسافة بين كل نقطتين ممّا يأتي:**

a. $F(2, 7)$, $G(2,10)$ 3 **b.** $R(3, 11), S(-5, 5)$ 10

» **أجـد إحداثيّي نقطة منتصف القطعة المسـتقيمة $\overline{AB}$ التي أُعطيت إحداثيات طرفيها في كل ممّا يأتي:**

a. $A(0, -3), B(6, -7)$ $(3, -5)$ **b.** $A(5, 8), B(3, -10)$ $(4,-1)$

» أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $P(-2, 3), Q(0, 11)$ $y = 4x + 11$

» **أحل نظام المعادلات في كل ممّا يأتي:**

a. $2x - y = 7, -x + y = -3$ $x = 4, y = 1$

b. $y = 2x + 3,\ 5x - 2y = -8$ $x = -2, y = -1$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ماذا تمثّل النقطة S بالنسبة إلى $\overline{XY}$ في الشكل؟ نقطة منتصفها.

» ما القطع المسـتقيمة في الشـكل التي تصل بين أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل له؟ ZS, YT, XR

» ماذا يُلاحَظ على هذه القطع المستقيمة؟ أنها تتلاقى في نقطة واحدة هي النقطة P.

» ماذا تمثّل النقطة P بالنسـبة إلى المثلث XYZ تبعًا لما وجدناه في النشاط المفاهيمي الذي سبق هذا الدرس؟ نقطة التوازن.

» ما بُعد المستشفى عن المنطقة Z؟

- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:

» ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟

» مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

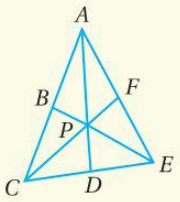
www.jnob-jo.com

3 التدريس

مثال 1

- أوضّح للطلبة أن القطعة المستقيمة التي تصل بين رأس مثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل له تُسمّى القطعة المتوسطة، وأنه يوجد لكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة واحدة تُسمّى "مركز المثلث" والتي سبق أن أُطلِق عليها في النشاط المفاهيمي الذي يسبق هذا الدرس اسم "نقطة توازن المثلث".
- أذكّر الطلبة بنتيجة النشاط المفاهيمي الذي سبق هذا الدرس، ثم أقدّم لهم نظرية مركز المثلث بالاستعانة بصندوق (**نظرية**) الوارد في كتاب الطالب، وأوجّه بعض الأمثلة البسيطة لإيجاد طولي جزأي القطعة المتوسطة.
- أقدّم للطلبة المثال الآتي:

إذا كانت النقطة P مركزَ المثلث المجاور، وكان $CF = 12$ cm، فأجد CP, PF.

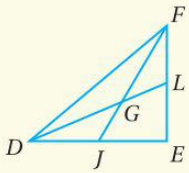


$PF = 4$ cm , $CP = 8$ cm

- أُعطي أطوال قطع أخرى في هذا المثلث، وأطلب إيجاد أطوال قطع مُرتبِطة بها.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 1، وأحاورهم في ما تتضمّنه الصناديق الهامشية؛ لما لها من أهمية في مساعدتهم على حلّ أفرع السؤال وأسئلة أخرى.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي

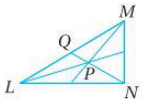
إذا كان G مركز المثلث FDE المجاور، وكان: $FJ = \frac{13x+1}{4}$، و $GJ = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$، فأجد FJ.



6.75

مثال 1

إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ ΔLMN، وكانَ $NQ = 30$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



1) طولُ $\overline{NP}$.

نظريةُ مركزِ المُثلَّثِ: $NP = \frac{2}{3} NQ$

بتعويضِ $NQ = 30$: $= \frac{2}{3}(30)$

بالتبسيطِ: $= 20$

2) طولُ $\overline{PQ}$.

مسلّمةُ جمعِ القطعِ المستقيمةِ: $NP + PQ = NQ$

بتعويضِ $NQ = 30, NP = 20$: $20 + PQ = 30$

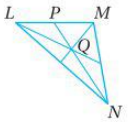
بطرحِ 20 منْ طرفي المعادلةِ: $PQ = 10$

أتعلَّمُ

$PQ = \frac{1}{3} NQ$

أتحقَّقُ منْ فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ Q هيَ مركزَ ΔLMN، وكانَ $NP = 20$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



a) طولُ $\overline{NQ}$. $NP = \frac{40}{3}$ $NQ = \frac{2}{3}$

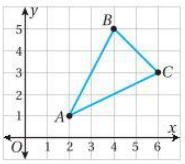
b) طولُ $\overline{QP}$. $\frac{20}{3}$

يُمكِنُ إيجادُ مركزِ أيِّ مُثلَّثٍ في المستوى الإحداثيِّ إذا عُلِمَتْ إحداثياتُ رؤوسِهِ.

www.jnob-jo.com

مثال 2

يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ.
أجدُ إحداثيَّ مركزِ هذا المُثلَّثِ.



الخطوة 1: أجدُ نقطةَ منتصفِ أحدِ أضلاعِ المُثلَّثِ.

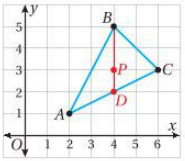
أستعملُ صيغةَ نقطةِ المنتصفِ لإيجادِ منتصفِ $\overline{AC}$، ولتكنْ D:

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ: $D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

بتعويضِ $(x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (6, 3)$: $D\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$

بالتبسيطِ: $D(4, 2)$

الخطوة 2: أجدُ مركزَ المُثلَّثِ.



- أُعيِّنُ النقطةَ D في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ $\overline{DB}$.
- أُلاحِظُ أنَّ $\overline{DB}$ رأسيةٌ، وأنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِها على النحوِ الآتي:

صيغةُ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ رأسيةٍ: $DB = |y_2 - y_1|$

بالتعويضِ $y_1 = 2, y_2 = 5$: $= |5 - 2|$

بالتبسيطِ، وإيجادِ القيمةِ المُطلَقةِ: $= 3$

إذنْ، طولُ $\overline{DB}$ هوَ 3 وحداتٍ.

- أفترضُ أنَّ النقطةَ P هيَ مركزُ ΔABC. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ $BP = \frac{2}{3} DB$؛ لذا يقعُ المركزُ على بُعْدِ $\frac{2}{3}(3) = 2$ وحدةٍ أسفلَ الرأسِ B.

إذنْ، إحداثيَّا مركزِ هذا المُثلَّثِ (إحداثيَّا النقطةِ P) هما: $(4, 3)$.

أتعلَّمُ

يُمكِنُ إيجادُ طولِ القطعةِ المُتوسِّطةِ $\overline{DB}$ بسهولةٍ؛ لأنَّها رأسيةٌ، ولأنَّ الضلعَ $\overline{AC}$ هوَ الذي اختيرَ في بادئِ الأمرِ؛ ما يعني أنَّ اختيارَ الضلعِ المناسبِ للمُثلَّثِ يُسهِّلُ أحيانًا إجراءاتِ الحَلِّ.

أتعلَّمُ

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ باستعمالِ قطعةٍ مُتوسِّطةٍ أُخرى لإيجادِ مركزِ المُثلَّثِ.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربيـة واللغة الإنجليزيـة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلـب إلى الطلبة حل التدريب الـوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد مركز المثلث في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه برسم المثلث، وتعيين نقطة منتصف أحد الأضلاع ورسم القطعة المتوسطة التي تصل نقطة المنتصف مع الرأس المقابل لها، وحساب طولها ثم تحديد المركز بحيث يبعد عن الرأس ثُلُثي طول تلك القطعة المتوسطة.
- أناقش الطلبة في حل المثال 2، بالخطوات المذكورة في الكتاب، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

إرشاد: أناقش الطلبة فيما تتضمّنه الصناديق الهامشية مقابل المثال 2؛ لما لها من أهمية في حل الأسئلة المشابهة.

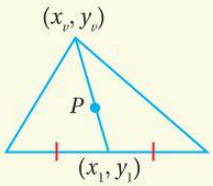
مثال إضافي

أجد إحداثيي مركز المثلث الذي رؤوسه هي: $A(5, 7), B(9, -3), C(13,2)$.

(9, 2)

www.jnob-jo.com

توسعة:



أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد مركز المثلث إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه بإيجاد نقطة منتصف أحد الأضلاع، ثم إيجاد النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة التي تصل نقطة المنتصف مع الرأس المقابل لها بنسبة 1 : 2، باستعمال الصيغة الآتية:

$$P\left(\frac{2x_1 + x_v}{3}, \frac{2y_1 + y_v}{3}\right)$$

حيث (x_v, y_v) هما إحداثيّا الرأس، و(x_1, y_1) هما إحداثيّا نقطة المنتصف.

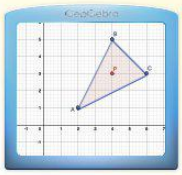
ويمكن تطبيق هذه الصيغة على المثال 2، فإذا أخذنا الرأس $A(2, 1)$، ونقطة منتصف الضلع $\overline{BC}$، وهي $(5, 4)$، فإن إحداثيي مركز المثلث هما:

$$P\left(\frac{2(5)+2}{3}, \frac{2(4)+1}{3}\right) = P\left(\frac{12}{3}, \frac{9}{3}\right)$$
$$= P(4, 3)$$

نشاط التكنولوجيا

أوضّح للطلبة أنه يمكنهم إيجاد مركز أي مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه باستعمال برمجية جيوجبرا باتباع الخطوات المُبيَّنة في صندوق (**الدعم البياني**) الوارد في كتاب الطالب صفحة 34، وأطلب إليهم اتباع تلك الخطوات لإعادة حل المثال 2 باستعمال البرمجية.

الدعمُ البيانيُّ:



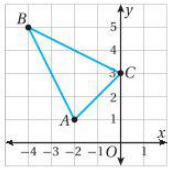
أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ مركزِ مُثلَّثٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

1) أرسمُ المُثلَّثَ في المستوى الإحداثيِّ، مُتَّبِعًا الخطواتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

2) أُحدِّدُ مركزَ المُثلَّثِ باختيارِ أيقونةِ Midpoint or Center من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ النقرِ في وسطِ المُثلَّثِ لإظهارِ إحداثيْ مركزِ المُثلَّثِ في شريطِ المعادلةِ.

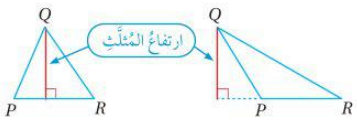
أتحقَّقُ منْ فهمي

يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ. أجدُ إحداثيْ مركزِ هذا المُثلَّثِ. $(-2, 3)$

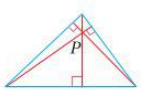


ارتفاعاتُ المُثلَّثِ

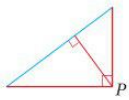
ارتفاعُ المُثلَّثِ (altitude of a triangle) هوَ القطعةُ المستقيمةُ العموديةُ النازلةُ منْ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ إلى الضلعِ المُقابِلِ لهُ، أوْ إلى المستقيمِ الذي يحوي الضلعَ المُقابِلَ لهُ.



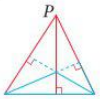
لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثةُ ارتفاعاتٍ تتقاطعُ في نقطةٍ مُشتركةٍ تُسمّى **ملتقى الارتفاعاتِ** (orthocenter)، ويعتمدُ موقعُها على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:



مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.



مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P عندَ رأسِ القائمةِ.



مُثلَّثٌ مُنفرجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

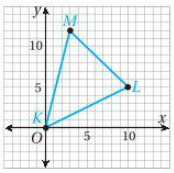
أتعلَّمُ

ألاحِظُ في الأشكالِ المُجاورةِ أنَّ ساقيِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ هما منْ ارتفاعاتِهِ، وأنَّ رأسَ الزاويةِ القائمةِ هوَ ملتقى ارتفاعاتِهِ.

www.jnob-jo.com

مثال 3

إذا كانَتْ: $K(0,0)$, $M(3,12)$, $L(10,5)$، فأجِدُ إحداثيَّ ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔKLM.



الخطوة 1: أُمثِّلُ ΔKLM بيانيًّا.

الخطوة 2: أجدُ ميلَيْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

ميلُ $\overline{KL}$: $m_{\overline{KL}} = \frac{5-0}{10-0} = \frac{1}{2}$

ميلُ $\overline{LM}$: $m_{\overline{LM}} = \frac{12-5}{3-10} = -1$

الخطوة 3: أجدُ معادلةَ الارتفاعِ العموديِّ على كلٍّ منَ الضلعينِ اللذينِ اخترْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ.

- معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$:

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (3, 12), m = -2$: $y - 12 = -2(x - 3)$

بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ: $y = -2x + 18$

- معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$:

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (0, 0), m = 1$: $y - 0 = 1(x - 0)$

بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ: $y = x$

الخطوة 4: أحُلُّ نظامَ المعادلتينِ الناتجَ لإيجادِ إحداثيَّ ملتقى الارتفاعاتِ.

بما أنَّ المعادلةَ الثانيةَ مكتوبةٌ بالنسبةِ إلى y، فإنَّني أُعوِّضُ x بدلًا منْ y في المعادلةِ الأولى:

المعادلةُ الأولى: $y = -2x + 18$

بالتعويضِ عنْ y بـ x: $x = -2x + 18$

بجمعِ $2x$ لطرفَيِ المعادلةِ: $3x = 18$

بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3: $x = 6$

بما أنَّ $x = 6$، فإنَّ $y = 6$، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ x في أيٍّ منَ المعادلتينِ.

إذنْ، إحداثيّا ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔKLM هما: $(6, 6)$.

رموزٌ رياضيةٌ

يشيرُ الرمزُ $m_{\overline{KL}}$ إلى ميلِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{KL}$.

أتعلَّمُ

- الرأسُ M هوَ الرأسُ المُقابِلُ لـ $\overline{KL}$؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$.
- ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ $\overline{KL}$؛ أيْ إنَّهُ يساوي -2.

أتعلَّمُ

- الرأسُ K هوَ الرأسُ المُقابِلُ لـ $\overline{ML}$؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$.
- ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ $\overline{ML}$؛ أيْ إنَّهُ يساوي 1.

مثال 3

- أوضّح للطلبة مفهوم ارتفاع المثلث، وأبيّن الأوضاع المختلفة للارتفاعات تبعًا لنوع المثلث (قائم الزاوية، منفرج الزاوية، حاد الزوايا) وموقع نقطة تلاقي الارتفاعات الثلاثة للمثلث التي تُسمّى (**ملتقى الارتفاعات**) بالاستعانة **بورقة المصادر 5: ملتقى الارتفاعات**.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبيّن خطوات إيجاد إحداثيات ملتقى الارتفاعات لمثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه الثلاثة، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم عما أوجّهه إليهم من أسئلة حول حل المثال.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أحاور الطلبة في مضامين الصناديق الهامشية المقابلة للمثال 3، وأطلب إليهم الإجابة عن سؤال (**أفكّر**) في هامش صفحة 36
- إذا توفّر جهاز عرض (Data Show) فيمكن عرض الأشكال التي توضّح موقع ملتقى الارتفاعات تبعًا لنوع المثلث من كتاب الطالب صفحة 34
- بعد الانتهاء من مناقشة الأمثلة كافّة، أستعرض مع الطلبة جدول ملخص المفهوم الذي يلخّص ما تمّت دراسته في الدرس السابق (الدرس 2)، والدرس الحالي (الدرس 3) بخصوص المنصّفات العمودية، ومنصّفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات. وأطلب إلى الطلبة التفكير بطريقة لإيجاد إحداثيّ ملتقى الأعمدة المنصّفة في مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه، مع تقديم مثال على ذلك.

www.jnob-jo.com

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد معادلة الارتفاع بعدم أخذ سالب مقلوب ميل الضلع الذي يُؤخَذ الارتفاع عنه، أو لا يعوّضون إحداثيات الرأس المقابل للضلع في صيغة الميل ونقطة لمعادلة الارتفاع؛ لذا أنبّه إلى حساب ميل الضلع ثم إيجاد سالب مقلوب الميل الذي هو ميل الارتفاع، وتعويض إحداثيات الرأس المقابل لذلك الضلع في الصيغة $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ حيث m هو ميل الضلع (المستقيم الذي يحوي الضلع) المقابل للرأس (x_1, y_1).

مثال إضافي

أجد إحداثيّي ملتقى ارتفاعات رؤوس المثلث PQR، حيث: $P(-3, 5), Q(0, 2), R(3, 8)$. $S(-1, 4)$

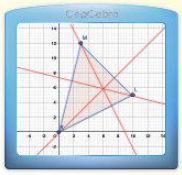
نشاط التكنولوجيا

أوضّح للطلبة أنه يمكنهم إيجاد ملتقى ارتفاعات رؤوس أي مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه باستعمال برمجية جيوجبرا باتباع الخطوات المُبيَّنة في صندوق (**الدعم البياني**) الوارد في كتاب الطالب صفحة 36. وأطلب إليهم اتباع تلك الخطوات لإعادة حل المثال 3 باستعمال البرمجية، والتحقّق من أنها تعطي النتيجة نفسها التي تم التوصل إليها بالحل اليدوي الجبري.

أفكّر

لماذا يُعَدُّ إيجادُ إحداثيْ نقطةِ التقاءِ ارتفاعيْنِ منَ الارتفاعاتِ الثلاثةِ كافيًا لتحديدِ ملتقى الارتفاعاتِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الدعمُ البيانيُّ:



أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ ملتقى ارتفاعاتِ مُثلَّثٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

1) أرسمُ المُثلَّثَ في المستوى الإحداثيِّ، مُتَّبِعًا الخطواتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

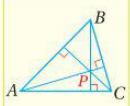
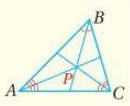
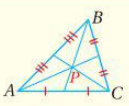
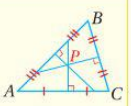
2) أرسمُ جميعَ الارتفاعاتِ في المُثلَّثِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ Perpendicular Line منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على رأسِ كلِّ زاويةٍ والضلعِ المُقابلِ لها.

أتحقَّقُ منْ فهمي

إذا كانَتْ: $A(-5, -1), B(-2, 4), C(3, -1)$، فأجدُ إحداثيْ ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔABC. $(-2, 2)$

مُلخَّصُ المفهومِ

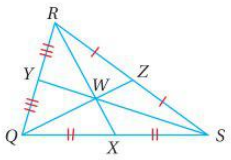
قطعٌ مستقيمةٌ ونقاطٌ خاصةٌ في المُثلَّثِ

	المُنصَّفاتُ العموديةُ	مُنصَّفاتُ الزوايا	القطعُ المُتوسِّطةُ	الارتفاعاتُ
نقطةُ التلاقي	مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ المُثلَّثِ.	ملتقى الارتفاعاتِ.
الخاصيةُ	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ رؤوسِهِ.	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ أضلاعِهِ.	النقطةُ P مركزُ ΔABC، وهيَ تبعدُ عنْ كلِّ رأسٍ ثلثيْ طولِ القطعةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابلِ لهُ.	النقطةُ P هيَ ملتقى ارتفاعاتِ ΔABC.
مثالٌ				

www.jnob-jo.com

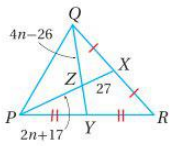
أتدرّبُ وأحلُّ المسائل

إذا كانَتِ النقطةُ W هيَ مركزَ ΔQRS، وكانَ $QW = 30$ ، $RX = 48$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

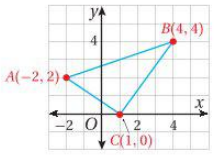


1. RW 32
2. WX 16
3. QZ 45
4. WZ 15

أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



5. PZ 54
6. PX 81
7. QZ 48
8. YZ 24



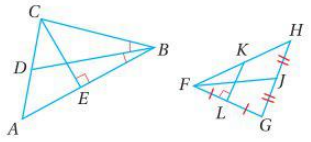
9. يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ. أجدُ إحداثيَّ مركزِ هذا المُثلَّثِ.

نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي: $(1, 3)$. نقطة مركز المثلث هي: $(1, 2)$.

أجدُ إحداثيَّ مركزِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

10. $F(1, 5), G(-2, 7), H(-6, 3)$ $\left(-\frac{7}{3}, 5\right)$
11. $A(5, 5), B(11, -3), C(-1, 1)$ $(5, 1)$

يظهرُ ΔABC و ΔGFH في الشكلِ المُجاورِ. أُحدِّدُ إذا كانَتْ كلُّ قطعةٍ مستقيمةٍ في ما يأتي تُمثِّلُ ارتفاعًا، أوْ عمودًا مُنصِّفًا، أوْ قطعةً مُتوسِّطةً، أوْ مُنصِّفَ زاويةٍ:



12. BD منصّف زاوية.
13. FJ قطعة متوسطة.
14. CE ارتفاع.
15. KL عمود منصّف.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 18, (12– 15) كتاب التمارين: (1 – 5)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 20) كتاب التمارين: (6 – 10)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (17 – 22) كتاب التمارين: (9 – 13)

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 11) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّنْ تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (19 – 22).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد:

في السؤالين (21) و(22) (**تحد**)، أذكّر الطلبة بصيغة حساب مساحة المثلث، وأطلب إليهم كتابة استنتاجهم على صورة قاعدة عامة بخصوص القطعة المتوسطة في مثلث. (القطعة المتوسطة في أي مثلث تقسمه إلى مثلثين لهما المساحة نفسها).

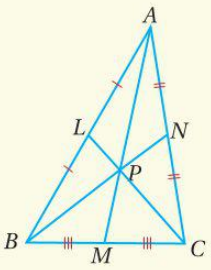
www.jnob-jo.com

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الإثرائيين الآتيين:

» إذا كان P مركز المثلث ABC المجاور، وكان $AM = 1.5\,BC$ فأُثبت أنّ $\overline{BN} \perp \overline{CL}$

إرشاد: أُثبت أنّ: $m\angle BPC = 90°$



أنظر ملحق الإجابات.

» أجد إحداثيّي مركز المثلث ABC حيث: $A(3, 4), B(-5, 6), C(-4, -1)$، بطريقة أخرى غير الّتي تعلّمتها في هذا الدرس.

$P(-2, 3)$؛ أنظر طريقة حل الطلبة. يمكن أن تقوم إحدى الطرائق على إيجاد معادلتي قطعتين متوسطتين، ثم إيجاد إحداثيّي نقطة تقاطعهما بحل المعادلتين بالحذف أو التعويض.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 7 و8 من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:

» أين يقع ملتقى ارتفاعات مثلث قائم الزاوية؟ عند رأس الزاوية القائمة.

» أين يقع ملتقى ارتفاعات مثلث منفرج الزاوية؟ في نقطة خارج المثلث.

أجدُ إحداثيْ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $X(-2, -2), Y(6, 10), Z(6, 6)$ $(18, -2)$

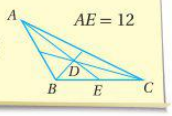
17 $A(4, -3), B(8, 5), C(8, -8)$ $(-2, -3)$

18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. $\frac{16}{3}$ km

مهاراتُ التفكيرِ العليا

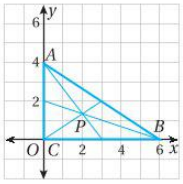
19 **أكتشفُ الخطأَ:** يُمثِّلُ الشكلُ المُجاورُ حَلَّ خالدٍ لإيجادِ طولِ $\overline{DE}$ في ΔABC، حيثُ D مركزُ المُثلَّثِ. أكتشفُ الخطأَ في حَلِّ خالدٍ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$DE = \frac{2}{3} AE$
$DE = \frac{2}{3}(12)$
$DE = 8$



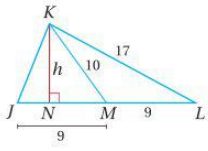
DE يساوي $\frac{1}{3} AE = 4$ وليس $\frac{2}{3} AE$

20 **تبريرٌ:** يظهرُ في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ ΔABC الذي مركزُهُ النقطةُ P. إذا حُرِّكَتِ النقطةُ B إلى اليمينِ على المحورِ x، وظلَّتْ كلٌّ منَ النقطةِ A والنقطةِ C في موقعِها، فما تأثيرُ ذلكَ في موقعِ كلٍّ منْ مركزِ ΔABC وملتقى ارتفاعاتِهِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



ملتقى الارتفاعات لا يتأثر؛ لأنه في النقطة O (رأس القائمة) . مركز المثلث سيتحرّك إلى اليمين ؛ لأن منتصف كل من $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ سيتحرك إلى اليمين.

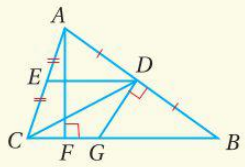
تحدٍّ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ ΔJKL. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ للإجابةِ عنِ السؤالينِ الآتيينِ:



21 أجدُ مساحةَ كلٍّ منَ ΔJKM، و ΔKML بدلالةِ h، مُقارِنًا بينَ مساحتيِ المُثلَّثينِ. المساحتان متساويتان، ومساحة كل منهما: $\frac{1}{2} \times 9 \times h$

22 في السؤالِ السابقِ، هلْ تختلفُ العلاقةُ بينَ مساحتيِ المُثلَّثينِ الناتجينِ منَ القطعةِ المُتوسِّطةِ للمُثلَّثِ تبعًا لاختلافِ نوعِ المُثلَّثِ، مُبرِّرًا إجابتي؟ لا تختلف؛ لأن طول القاعدة والارتفاع هما أنفسهما لكلا المثلثين بصرف النظر عن نوع المثلث.

» **أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لأصنّف كل قطعة مما يأتي إلى: قطعة منصّفة، قطعة متوسطة، ارتفاع، منصّف عمودي، منصّف زاوية في المثلث ABC.**



1 $\overline{DG}$ مُنصِّف عمودي

2 $\overline{AF}$ ارتفاع المثلث

3 $\overline{CD}$ قطعة متوسطة

4 $\overline{DE}$ قطعة مُنصِّفة

www.jnob-jo.com

نشاط مفاهيمي

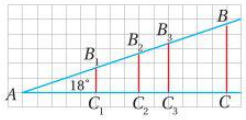
النسبُ المُثلَّثيةُ
Trigonometric Ratios

نشاطٌ مفاهيميٌّ

الهدفُ: استقصاءُ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المُثلَّثاتِ ذاتِ الزوايا القائمةِ.

نشاط

الخطوة 1: أرسمُ الشكلَ المُجاورَ على ورقةٍ مُربَّعاتٍ.



الخطوة 2: في كلٍّ مـنْ مُثلَّثاتِ الشـكلِ، أجدُ طولَ الضلـعِ المُقابلِ للزاويةِ، وطـولَ الضلعِ المُجاورِ لها، وطـولَ الوترِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ (إنْ لَزِمَ)، ثمَّ أُدوِّنُ ما أتوصَّلُ إليْهِ في الجدولِ التالي.

الخطوة 3: أجدُ النسبَ المطلوبةَ في الجدولِ الآتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ.

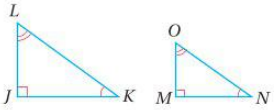
المُثلَّثُ	طولُ الضلعِ المُقابلِ للزاويةِ A	طولُ الضلعِ المُجاورِ للزاويةِ A	طولُ الوترِ	النسبُ		
				(المُقابلُ)/(الوترِ)	(المُجاورُ)/(الوترِ)	(المُقابلُ)/(المُجاورِ)
ΔAB_1C_1						
ΔAB_2C_2						
ΔAB_3C_3						
ΔABC						

أحلّلُ النتائجَ:

1. ما قياسُ الزاويةِ A لكلِّ مُثلَّثٍ في الشكلِ؟ $18°$
2. ما العلاقةُ بينَ المُثلَّثاتِ جميعِها في الشكلِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.
3. أدرسُ النسبَ بينَ أطوالِ الأضلاعِ في الجدولِ، ثمَّ أكتبُ ثلاثَ جملٍ لوصفِ النمطِ الذي يظهرُ. أنظر الهامش.

أفكّرُ:

أكتبُ ثلاثةَ تناسباتٍ باستعمالِ أطوالِ ساقَيِ المُثلَّثيْنِ المُجاورينِ.



إجابة ممكنة: $\frac{JL}{JK}=\frac{OM}{MN}$, $\frac{JK}{JL}=\frac{MN}{OM}$, $\frac{JL}{OM}=\frac{JK}{MN}$

هدف النشاط

- استقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلثات ذات الزاوية القائمة.

الأدوات اللازمة

ورقة المصادر 3: شبكة مربعات.

خطوات العمل:

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأزوّد كل مجموعة بالمواد والأدوات اللازمة لتنفيذ النشاط.
- أوضّح للطلبة المطلوب إليهم تنفيذه في هذا النشاط بعرض لوحة تحمل الشكل المرسوم في الكتاب، ومناقشة الخطوات (3 – 1).
- أطلب إلى المجموعات تنفيذ الخطوات (3 – 1) على دفاترهم.
- أتابع المجموعات أثناء تنفيذ النشاط؛ للتأكّد من أنهم يقومون بالعمل بطريقة صحيحة ودقيقة، وأساعد من يحتاج إلى مساعدة.
- بعد الانتهاء من تعبئة الجدول، أطلب إلى الطلبة الإجابة عن أسئلة بند (**أحلّل النتائج**)، ثم أناقش إجابات هذه الأسئلة مع الصف كاملًا.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن سؤال بند (**أفكّر**).

إرشادات:

- يمكن تخصيص 20 دقيقة من وقت الحصة لتنفيذ هذا النشاط، وبعد الانتهاء منه أتابع السير في مهام الدرس 4 (**النسب المثلثية**).
- أطلب إلى الطلبة أن يُحضر كل منهم آلة حاسبة علمية في الحصص التالية من هذه الوحدة.

إجابة التدريب في بند (أحلل النتائج):

2) متشابهة؛ لأن زوايا كل مثلث تطابق الزوايا المناظرة لها في أي مثلث آخر.

3) النسبة: $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ هي نفسها لجميع المثلثات.

النسبة: $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ هي نفسها لجميع المثلثات.

النسبة: $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ هي نفسها لجميع المثلثات.

www.jnob-jo.com

الدرس 4

نتاجات الدرس

- تعرُّف جيب الزاوية الحادة، وجيب تمامها، وظلّها، بوصفها نسبًا بين أضلاع مثلث قائم الزاوية.
- تعرُّف أسماء النسب المثلثية ورموزها.
- إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة المرسومة في مثلث قائم الزاوية عُلم قياسا اثنين على الأقل من أضلاعه.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لزوايا حادة عُلم قياسها.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية عُلمت إحدى نسبها باستعمال معكوس تلك النسبة.
- استعمال متطابقة فيثاغورس لإيجاد جيب الزاوية أو جيب تمامها إذا عُلمت إحداهما.
- استعمال العلاقة بين النسب المثلثية للزوايا المتتامّة لإيجاد نسب مجهولة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل المعادلة التربيعية باستعمال الجذر التربيعي.
- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال مجهولة في مثلث قائم الزاوية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 4

النسبُ المُثلَّثيةُ
Trigonometric Ratios

فكرة الدرس تعرُّفُ جيبِ الزاويةِ الحادَّةِ، وجيبِ تمامِها، وظلِّها، بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاوية.

المصطلحات النسبُ المُثلَّثيةُ، الجيبُ، جيبُ التمامِ، الظلُّ، معكوسُ النسبةِ المُثلَّثيةِ، مُتطابقةُ فيثاغورس.

مسألة اليوم تُبيِّنُ الصورةُ المُجاوِرةُ آلةً حاسبةً علميةً. فيمَ يُستعمَلُ كلٌّ منَ المفاتيحِ الثلاثةِ المشارِ إليها؟

النسبُ المُثلَّثيةُ

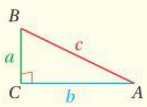
النسبةُ المُثلَّثيةُ (trigonometric ratio) هيَ نسبةٌ بينَ طوليْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

تتضمَّنُ النظريةُ الآتيةُ ثلاثَ نسبٍ مُثلَّثيةٍ مشهورةٍ، لها أسماءٌ ورموزٌ خاصةٌ بها.

النسبُ المُثلَّثيةُ

نظرية

إذا كانَ ΔABC قائمَ الزاويةِ، وكانَ $\angle A$ زاويةً حادَّةً فيهِ، فإنَّ نسبَ المُثلَّثِ التي هيَ أكثرُ شيوعًا تُعرَفُ بدلالةِ الوترِ، والضلعِ المُقابِلِ، والضلعِ المُجاوِرِ كما يأتي:



- الجيبُ (sine): $\sin A = \frac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{الوترُ})} = \frac{a}{c}$
- جيبُ التمامِ (cosine): $\cos A = \frac{(\text{المُجاوِرُ})}{(\text{الوترُ})} = \frac{b}{c}$
- الظلُّ (tangent): $\tan A = \frac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{المُجاوِرُ})} = \frac{a}{b}$

رموزٌ رياضيةٌ

تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ (A, B, C) إلى رؤوسِ المُثلَّثِ، في حينِ تشيرُ الأحرفُ الصغيرةُ (a, b, c) إلى الأطوالِ المُقابِلةِ لتلكَ الرؤوسِ. فمثلًا، يشارُ إلى طولِ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ A بالحرفِ a، وهكذا.

www.jnob-jo.com

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الفقرات الآتية:

» **أحل كلًّا من المعادلات الآتية:**

a. $x^2 = 81$ ± 9

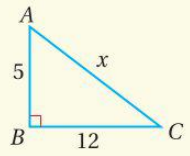
b. $3x^2 = 48$ ± 4

c. $x^2 = \frac{36}{49}$ $\pm \frac{6}{7}$

d. $(x-2)^2 = 169$ $-11 \text{ or } 15$

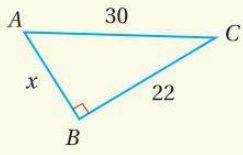
» **أجد طول الضلع المجهول في كلّ مما يأتي:**

a.



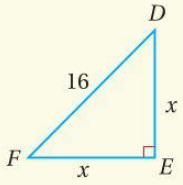
$x = 13$

b.



$x = \sqrt{416}$

c.



$x = 8\sqrt{2}$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ماذا تشاهدون في الصورة؟ آلة حاسبة علمية، أُبرزت منها صورة ثلاثة مفاتيح (أزرار).

» بماذا تختلف الآلة الحاسبة العلمية عن الآلة الحاسبة البسيطة؟ لها وظائف أكثر، ويمكن إجراء حسابات مُعقَّدة بواسطتها.

» فيم تُستعمَل المفاتيح الثلاثة الظاهرة في الصورة؟

- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:

» ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟

» مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

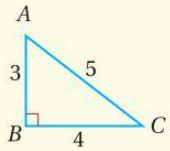
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

www.jnob-jo.com

3 التدريس

مثال 1

- أعرّف الطلبة مفهوم النسبة المثلثية، وأقدّم تعريفات النسب المثلثية الأكثر شيوعًا، وهي: الجيب، وجيب التمام، والظلّ.
- أرسم على اللوح المثلث قائم الزاوية المجاور، ثم أسأل الطلبة:



  - « ما قيمة $\sin A$؟ $\frac{4}{5}$
  - « ما قيمة $\cos A$؟ $\frac{3}{5}$
  - « ما قيمة $\tan A$؟ $\frac{4}{3}$
- أسأل كذلك عن قيمة النسب المثلثية الثلاث للزاوية C.
- أناقش الطلبة في المثال 1، وأسألهم عن الاختلاف بين المثال 1 والمثال الذي عُرض عليهم قبل لحظات.
- أناقش الطلبة في طريقة إيجاد الطول المجهول باستعمال نظرية فيثاغورس.
- أحاورهم في مضمون صندوق (**أفكّر**) مقابل المثال 1، وأسألهم عن سبب عدم إمكانية استعمال وصف النسب المثلثية لإيجاد النسب المثلثية للزاوية القائمة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

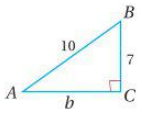
أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

أفكّرُ

هل يُمكنُ استعمالُ وصفِ النسبِ المثلّثيةِ لإيجادِ النسبِ المثلّثيةِ للزاويةِ القائمةِ في المثلّثِ قائمِ الزاويةِ؟ أُبرّرُ إجابتي.

مثال 1

أجدُ قِيَمَ النسبِ المثلّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في المثلّثِ المُجاورِ، وأتركُ إجابتي في صورةِ كسرٍ.



الخطوة 1: أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ b.

نظريةُ فيثاغورس: $a^2 + b^2 = c^2$

بتعويضِ $a = 7, c = 10$: $7^2 + b^2 = 10^2$

بالتبسيط: $49 + b^2 = 100$

بطرحِ 49 منْ طرفي المعادلةِ: $b^2 = 51$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ: $b = \pm\sqrt{51}$

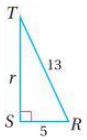
بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $b = \sqrt{51}$.

الخطوة 2: أجدُ النسبَ المثلّثيةَ الثلاثَ.

$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$ | $\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ | $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}}$

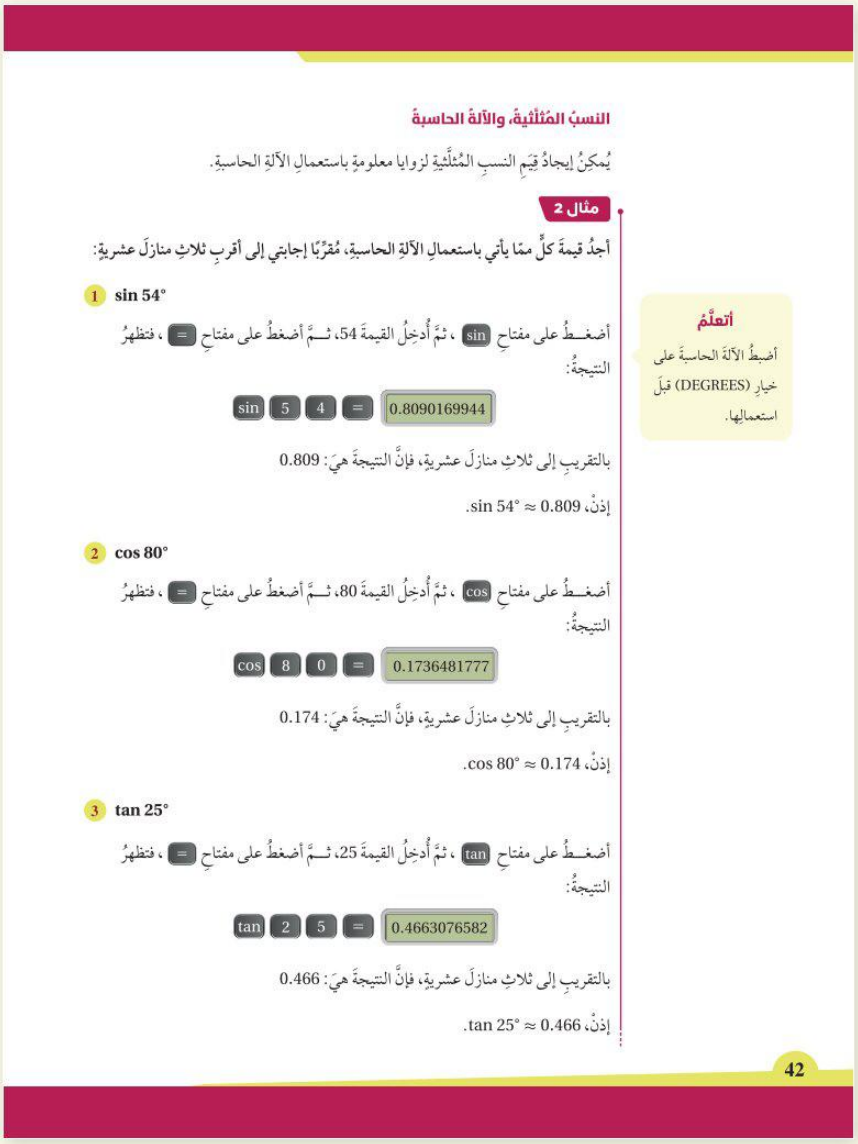
أتحقّقُ منْ فهمي

أجدُ قِيَمَ النسبِ المثلّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ T في المثلّثِ المُجاورِ، وأتركُ إجابتي في صورةِ كسرٍ.



$\sin T = \frac{5}{13}$, $\cos T = \frac{12}{13}$, $\tan T = \frac{5}{12}$

www.jnob-jo.com



النسبُ المُثلّثية، والآلةُ الحاسبة

يُمكِنُ إيجادُ قِيَمِ النسبِ المُثلّثية لزوايا معلومةٍ باستعمالِ الآلةِ الحاسبة.

مثال 2

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشرية:

1 sin 54°

أضغطُ على مفتاحِ sin ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 54، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 5 4 = 0.8090169944

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشرية، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.809

إذنْ، $\sin 54° \approx 0.809$.

2 cos 80°

أضغطُ على مفتاحِ cos ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 80، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

cos 8 0 = 0.1736481777

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشرية، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.174

إذنْ، $\cos 80° \approx 0.174$.

3 tan 25°

أضغطُ على مفتاحِ tan ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 25، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 2 5 = 0.4663076582

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشرية، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.466

إذنْ، $\tan 25° \approx 0.466$.

أتعلَّمُ

أضبطُ الآلةَ الحاسبةَ على خيارِ (DEGREES) قبلَ استعمالِها.

42

مثال 2

- أوضّح للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد النسب المثلثية لزاوية عُلم قياسها، وأبيّن لهم ضرورة ضبط الآلة الحاسبة على خيار (DEGREES) قبل البدء باستعمالها لإيجاد النسب المثلثية.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 2، وأطلب تبرير إجاباتهم.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن التدريب في بند (**أتحقّق من فهمي**)، وأتابع أعمالهم، وأساعد من يحتاج إلى مزيد من التدريب على استعمال الآلة الحاسبة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أبيّن للطلبة أنه في بعض الآلات الحاسبة تُدخَل الزاوية أولًا، ثم يُضغَط على مفتاح النسبة المثلثية (tan, cos, sin).

www.jnob-jo.com

أتحقّقُ منْ فهمي

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

a) $\sin 36°$ — 0.588

b) $\cos 70°$ — 0.342

c) $\tan 82°$ — 7.115

لغةُ الرياضياتِ

- يُقرَأُ معكوسُ الجيبِ: sine inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\sin^{-1}$.
- يُقرَأُ معكوسُ جيبِ التمامِ: cosine inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\cos^{-1}$.
- يُقرَأُ معكوسُ الظلِّ: tan inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\tan^{-1}$.

يُمكنُ استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ إذا عُلِمَتْ إحدى نسبِها، وذلكَ باستعمالِ **معكوسِ النسبةِ المُثلَّثيةِ** (inverse trigonometric ratio). فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الجيبِ ($\sin^{-1}$)، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامِ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ جيبِ التمامِ ($\cos^{-1}$)، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الظلِّ ($\tan^{-1}$).

مثال 3

أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1) $\sin A = \frac{3}{8}$

$\sin A = \frac{3}{8}$ — النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ — معكوسُ الجيبِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT | sin | (| 3 | ÷ | 8 |) | = | 22.024312837

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $22.0°$

إذنْ، $m\angle A \approx 22.0°$.

أتعلَّمُ

تحتوي بعضُ الآلاتِ الحاسبةِ على مفاتيحَ خاصةٍ بمعكوسِ كلٍّ منَ النسبِ المُثلَّثيةِ، ويُمكنُ استعمالُ هذهِ المفاتيحِ مباشرةً منْ دونِ استعمالِ مفتاحِ SHIFT.

2) $\cos A = \frac{10}{13}$

$\cos A = \frac{10}{13}$ — النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ — معكوسُ جيبِ التمامِ

مثال 3

- أوضّحُ للطلبةِ كيفيةَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ العلميةِ لإيجادِ الزاويةِ إذا عُلِمتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ، باستعمالِ معكوسِ النسبةِ، ومفتاحِ (shift) أو (second) أو (INV) تبعًا لنوعِ الآلةِ الحاسبةِ.
- أناقشُ الطلبةَ في حلِّ أفرعِ المثالِ 3، وأطلبُ تبريرَ إجاباتِهم.
- أطلبُ إلى الطلبةِ الإجابةَ عنِ التدريبِ في بندِ (**أتحقّقُ منْ فهمي**)، وأتابعُ أعمالَهم، وأساعدُ منْ يحتاجُ إلى مزيدٍ منَ التدريبِ على استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.
- إنْ لزمَ الأمرُ، أناقشُ الطلبةَ في مزيدٍ منَ الأمثلةِ؛ للتحقّقِ منْ إتقانِهم هذهِ المهارةَ.

إرشاد: أبيّنُ للطلبةِ أنهُ في بعضِ الآلاتِ الحاسبةِ تُدخَلُ قيمةُ النسبةِ المثلثيةِ أولًا، ثمَّ يُضغَطُ على مفتاحِ SHIFT ثمَّ معكوسُ النسبةِ المثلثيةِ ($\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$).

أخطاءٌ شائعةٌ:

قدْ ينسى بعضُ الطلبةِ ضبطَ آلاتِهم الحاسبةِ على خيارِ (DEGREES) فيحصلونَ على إجاباتٍ غيرِ صحيحةٍ؛ لذا أتأكّدُ منْ ضبطِ الآلاتِ، ومنْ أنّهم كلّهم يمكنُهم التحقّقُ منَ الخيارِ المضبوطةِ عليهِ آلاتُهم الحاسبةُ، وأنْ بإمكانِهم ضبطُها على الخيارِ الصحيحِ.

www.jnob-jo.com

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ كما يأتي:

SHIFT cos (10 ÷ 13) = 39.7151372318

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $39.7°$

إذنْ، $m\angle A \approx 39.7°$.

3 $\tan A = \frac{12}{5}$

$\tan A = \frac{12}{5}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ معكوسُ الجيبِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ كما يأتي:

SHIFT tan (12 ÷ 5) = 67.380135052

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $67.4°$

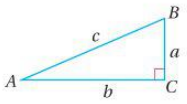
إذنْ، $m\angle A \approx 67.4°$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

a) $\sin A = \frac{4}{9}$ $26.4°$ b) $\cos A = 0.64$ $50.2°$ c) $\tan A = 0.707$ $35.3°$

العلاقةُ بينَ الجيبِ وجيبِ التمامِ



في المُثلَّثِ المُجاورِ، إذا كانَ $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$،

فما قيمةُ $\sin^2 A + \cos^2 A$؟

يُمكِنُ إيجادُ قيمةِ $\sin^2 A + \cos^2 A$ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ بالتعويضِ

$= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

$\sin^2 A$ تعني $(\sin A)^2$،

و $\cos^2 A$ تعني $(\cos A)^2$.

مثال إضافي

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي مع تقريب النسبة المثلثية إلى ثلاث منازل عشـــرية، وتقريب الزوايا إلى أقرب عُشر درجة (إن لزم):

1. $\sin 72°$ 0.951
2. $\cos 48°$ 0.669
3. $\tan 30°$ 0.577
4. $\frac{16}{\cos 25°}$ 17.654
5. $3 \sin 73° + 2 \cos 60°$ 3.869
6. $\sin^{-1}(0.754)$ $48.9°$
7. $\tan^{-1}(3.567)$ $74.3°$
8. $\cos^{-1}(0)$ $90°$

www.jnob-jo.com

بجمعِ الكسورِ $= \frac{a^2+b^2}{c^2}$

باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس $= \frac{c^2}{c^2}$

بالتبسيطِ $= 1$

إذنْ، $\sin^2 A+\cos^2 A=1$، وتُسمّى هذهِ العلاقةُ **مُتطابِقةَ فيثاغورس** (Pythagorean identity).

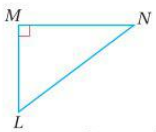
نظريةٌ — **مُتطابِقةُ فيثاغورس**

في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، حيثُ A زاويةٌ حادَّةٌ فيهِ، فإنَّ:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

مثال 4

في المُثلَّثِ المُجاورِ، إذا كانَ $\sin N = \frac{2}{3}$، فأجدُ $\cos N$.



مُتطابِقةُ فيثاغورس $\sin^2 N + \cos^2 N = 1$

بتعويضِ $\sin N = \frac{2}{3}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 N = 1$

بالتربيعِ $\frac{4}{9} + \cos^2 N = 1$

بطرحِ $\frac{4}{9}$ منْ طرفي المعادلةِ $\cos^2 N = \frac{5}{9}$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ $\cos N = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

بما أنَّ جيبَ التمامِ للزاويةِ N في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ LMN هوَ ناتجُ قسمةِ طولِ الضلعِ المُجاورِ على الوترِ، وبما أنَّ الأطوالَ لا يُمكنُ أنْ تكونَ سالبةً، فإنَّ $\cos N$ قيمةٌ موجبةٌ؛ أيْ إنَّ $\cos N = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

أتعلَّمُ

قيمةُ كلٍّ منَ الجيبِ، وجيبِ التمامِ، والظلِّ موجبةٌ لأيِّ زاويةٍ حادَّةٍ.

مثال 4

- أناقش الطلبة في العلاقة بين الجيب وجيب التمام باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب، وأتوصّل معهم إلى أن مربع جيب أي زاوية مضافًا إليه مربع جيب تمامها يساوي 1 دائمًا، ثم أبيّن لهم أن هذه العلاقة تُسمّى (**متطابقة فيثاغورس**).
- أبيّن للطلبة أنه يمكن استعمال هذه العلاقة لإيجاد قيمة إحدى النسبتين إذا عُلمت الأخرى.
- أطرح على الطلبة المثال الآتي: إذا كانت B زاوية حادة، وكان $\sin B = \frac{3}{5}$، فما قيمة $\cos B$؟ (أستمع لإجابات الطلبة دون تعليق).
- أوضّح للطلبة أنه يمكن الإجابة عن السؤال السابق باتباع الخطوتين الآتيتين:
  - **الخطوة 1**: كتابة متطابقة فيثاغورس للزاوية B.
  - **الخطوة 2**: تعويض قيمة $\sin B$ أي $\frac{3}{5}$ في المتطابقة، وإكمال الحل لإيجاد قيمة $\cos B$.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4، وأبيّن لهم أنّ الجيب وجيب التمام والظلّ للزوايا الحادة قيم موجبة، وأطلب إليهم تبرير ذلك.
- إن لزم الأمر، أعرض على الطلبة مزيدًا من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

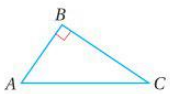
مثال إضافي

إذا كانت X زاوية حادة، وكان $\cos X = \frac{8}{17}$، فما قيمة $\sin X$؟ $\frac{15}{17}$

www.jnob-jo.com

أتحقَّقُ من فهمي

في المُثلَّثِ المُجاورِ، إذا كانَ $\cos A = \frac{4}{5}$، فأجدُ $\sin A$.

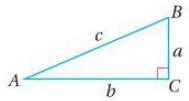


$\frac{3}{5}$

أتذكَّرُ

الزاويتانِ المُتتامَّتانِ هما زاويتانِ مجموعُ قياسيْهِما $90°$.

تُعَدُّ الزاويتانِ الحادَّتانِ في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ مُتتامَّتَينِ. ولكنْ، ما العلاقةُ بينَ نسبِهما المُثلَّثيةِ؟



في المُثلَّثِ المُجاورِ، أُلاحِظُ أنَّ:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \sin B = \frac{b}{c}, \cos B = \frac{a}{c}$$

ومنْ ثَمَّ، يُمكِنُ استنتاجُ أنَّ جيبَ الزاويةِ الحادَّةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ يساوي جيبَ تمامِ مُتمِّمتِها، وأنَّ جيبَ تمامِ الزاويةِ الحادَّةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ يساوي جيبَ مُتمِّمتِها.

مفهومٌ أساسيٌّ الجيبُ وجيبُ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ

إذا كانَ A وB زاويتينِ مُتتامَّتَينِ في مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، فإنَّ:

$\sin A = \cos(90°-A) = \cos B$ $\quad$ $\sin B = \cos(90°-B) = \cos A$

$\cos A = \sin(90°-A) = \sin B$ $\quad$ $\cos B = \sin(90°-B) = \sin A$

مثال 5

إذا كانَ $\cos 34° = 0.829$، فأجدُ $\sin 56°$.

$\cos A = \sin(90°-A)$	تعريفُ الجيبِ وجيبِ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ
$\cos 34° = \sin(90°-34°)$	بتعويضِ $A = 34°$
$\cos 34° = \sin 56°$	بالتبسيطِ
$\sin 56° = 0.829$	بتعويضِ $\cos 34° = 0.829$

أتحقَّقُ من فهمي

إذا كانَ $\sin 70° = 0.9397$، فأجدُ $\cos 20°$. 0.9397

مثال 5

- أوجّه الأسئلة الآتية إلى الطلبة:
  - ما العلاقة بين الزاويتين الحادتين في المثلث القائم الزاوية؟ مجموعهما يساوي $90°$
  - ماذا تُسمّى الزاويتان اللتان يكون مجموعهما $90°$؟ زاويتين متتامّتين.
  - أُعطي أمثلة على قياس زاويتين متتامّتين. إجابات ممكنة: $(15°, 75°), (20°, 70°), (30°, 60°), (38°, 52°)$
- أطلب إلى كل طالب/ طالبة رسم مثلث قائم الزاوية وتسجيل قياسات مناسبة لضلعين اثنين من أضلاعه، ثم حساب طول الضلع الثالث، وكتابة نسبتَي الجيب، وجيب التمام لكل من الزاويتين الحادتين، وكتابة استنتاج عمّا يلاحظونه على النسب التي كتبوها.
- قد يصل معظم الطلبة إلى العلاقة الصحيحة بين نسب الزاويتين المتتامّتين كما هي معروضة في صندوق (مفهوم أساسي) الوارد في الصفحة 46 من كتاب الطالب.
- أسأل الطلبة: ماذا يمكن أن نستنتج من كل مما يأتي؟

1. $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos(90°-30°) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$

2. $\sin 65° \approx 0.906$

$\cos(90°-65°) \approx 0.906 \Rightarrow \cos 25° \approx 0.906$

3. $\cos 15° \approx 0.966$

$\sin(90°-15°) \approx 0.966 \Rightarrow \sin 75° \approx 0.966$

4. $\cos 73° \approx 0.292$

$\sin(90°-73°) \approx 0.292 \Rightarrow \sin 17° \approx 0.292$

- أناقش الطلبة في حل المثال 5، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.
- إن لزم الأمر، أعرض على الطلبة مزيدًا من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي

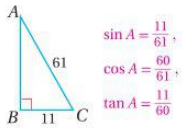
إذا كان $\cos 68° \approx 0.375$، فما قيمة $\sin 22°$؟

0.375 تقريبًا.

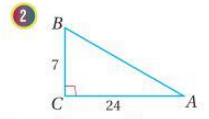
www.jnob-jo.com

أتدرّبُ وأحلُّ المسائل

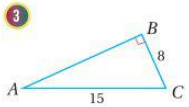
أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثِيةِ الثلاثِ للزاوية A في كلٍّ ممّا يأتي، تاركًا إجابتي في صورةِ كسرٍ:

1) 

$\sin A = \frac{11}{61}$ ، $\cos A = \frac{60}{61}$ ، $\tan A = \frac{11}{60}$

2) 

$\sin A = \frac{7}{25}$ ، $\cos A = \frac{24}{25}$ ، $\tan A = \frac{7}{24}$

3) 

$\sin A = \frac{8}{15}$ ، $\cos A = \frac{\sqrt{161}}{15}$ ، $\tan A = \frac{8}{\sqrt{161}}$

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

4) $\sin 43°$ 0.682
5) $\sin 67.2°$ 0.922
6) $\sin 90°$ 1
7) $\cos 80°$ 0.174
8) $\cos 22°$ 0.927
9) $\cos 90°$ 0
10) $\tan 20°$ 0.364
11) $\tan 45°$ 1
12) $\tan 30°$ 0.577
13) $4 \sin 63°$ 3.564
14) $7 \tan 52°$ 8.960
15) $9 \cos 8°$ 8.912
16) $\frac{5}{\sin 31°}$ 9.708
17) $\frac{3}{\tan 64°}$ 1.463
18) $\frac{7}{\cos 60°}$ 14

أجدُ قياسَ $\angle B$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

19) $\sin B = 0.5$ $30°$
20) $\sin B = 0.999$ $87.4°$
21) $\sin B = 0.877$ $61.3°$

أجدُ قياسَ $\angle N$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

22) $\cos N = 0.2$ $78.5°$
23) $\cos N = 0.5$ $60°$
24) $\cos N = 0.999$ $2.6°$

أجدُ قياسَ $\angle M$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

25) $\tan M = 0.6$ $31.0°$
26) $\tan M = 2.67$ $69.5°$
27) $\tan M = 4.38$ $77.1°$

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (27 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّنْ تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (36 – 31).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

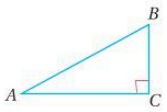
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (30– 28) كتاب التمارين: (18 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (33 – 31) كتاب التمارين: (18 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (36 – 33) كتاب التمارين: (20 – 13)

www.jnob-jo.com

28 في المُثلَّثِ المُجاورِ، إذا كانَ $\sin A = \frac{8}{17}$، فأجدُ $\cos A$.



$\frac{15}{17}$

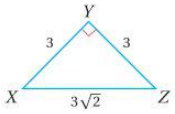
29 إذا كانَ $\cos 55° = 0.57358$، فأجدُ $\sin 35°$. 0.57358

30 إذا كانَ $\sin 78° = 0.9781$، فأجدُ $\cos 12°$، و $\sin 12°$.

$\cos 12° = 0.9781; \sin 12° = \sqrt{1-(0.9781)^2} \approx 0.2081$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:



31 أُحدِّدُ النسبَ المُثلَّثيةَ المتساويةَ في الشكلِ. أنظر ملحق الإجابات.

32 ما قياسُ كلٍّ منَ الزاويةِ X، والزاويةِ Z؟ $45°$

33 أكتبُ استنتاجًا بناءً على إجابتي عنِ السؤالينِ السابقينِ.

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 45° = 1$

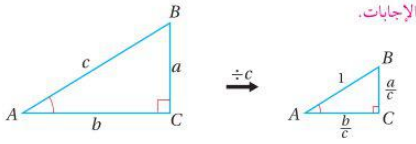
تبريرٌ: إذا كانَ ΔLMN قائمَ الزاويةِ في M، فأُثبِتُ صحَّةَ كلِّ متباينةٍ ممّا يأتي: (34, 35) أنظر ملحق الإجابات.

35 $\cos L < 1$

34 $\sin L < 1$

36 تحدٍّ: مُعتمِدًا الشكلَ الآتيَ، أُثبِتُ أنَّ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

أنظر ملحق الإجابات.



» أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد كلّ مما يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية (إن لزم):

1 $\sin 35°$ 0.574

2 $\cos 15°$ 0.966

3 $\sin 90°$ 1

4 $\cos 0°$ 1

5 $4 \tan 45°$ 4

6 $\frac{8}{\sin 40°}$ 12.446

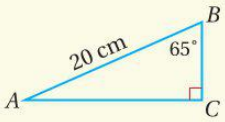
» أجد قياس الزاوية A، وأقرّب إجابتي إلى أقرب عُشر درجة إذا كان $m\angle A = \cos^{-1}(0.67)$ 47.9°

» أجد قيمة $(\sin^{-1}(0.65) + \cos^{-1}(0.65))$. 90°

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الإثرائيين الآتيين:

» في المثلث ABC المجاور، $m\angle B = 65°$، و $AB = 20$ cm.



أجد كلًّا من BC، و AC، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

$BC \approx 8.45$ cm, $AC \approx 18.13$ cm

» كيف يمكن إيجاد النسب المثلثية لزاوية قياسها $50°$ من دون استعمال الآلة الحاسبة؟ أشرح طريقتي مع تقريب إجابتي إلى ثلاث منازل عشرية.

(إرشاد: أرسم بالمنقلة زاوية قياسها $50°$، وأقيم عمودًا من نقطة على أحد ضلعيها، وأمدّه حتى يقطع ضلعها الآخر فأحصل على مثلث قائم الزاوية، ثم أتابع إيجاد النسب المثلثية من المثلث الذي رسمته).

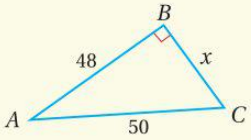
تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (9) من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:

» أستعمل المثلث المجاور لأجد كلًّا ممّا يأتي:



1 قيمة x. 14

2 $\sin A$ $\frac{7}{25}$

3 $\cos A$ $\frac{24}{25}$

4 $\tan A$ $\frac{7}{24}$

www.jnob-jo.com

الدرس 5

نتاجات الدرس

- استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية.
- إيجاد قياسات زوايا مجهولة في المثلث قائم الزاوية باستعمال النسب المثلثية ومعكوسها.
- استعمال النسب المثلثية للزوايا الخاصة $30°, 45°, 60°$ لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية.
- استعمال زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض لإيجاد قياسات مجهولة في مثلث قائم الزاوية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قياس الزاوية الحادة إذا عُلمت قيمة إحدى نسبها المثلثية.
- حل التناسب.
- حل معادلات خطية بمتغيّر واحد.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

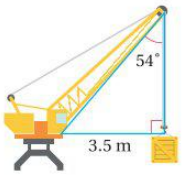
الدرس 5

تطبيقاتُ النسبِ المُثَلَّثِيةِ
Applications of Trigonometric Ratios

فكرة الدرس استعمالُ النسبِ المُثَلَّثِيةِ لإيجادِ قياساتِ مجهولةٍ في المُثَلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

المصطلحات زاويةُ الارتفاعِ، زاويةُ الانخفاضِ.

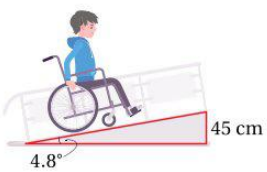
مسألةُ اليوم يُبَيِّنُ الشكلُ المُجاورُ رافعةً، في نهايةِ ذراعِها حبلٌ متينٌ يرفعُ حاويةً كبيرةً. إذا كانَتِ الزاويةُ بينَ الحبلِ والذراعِ 54°، وكانَ بُعْدُ الحاويةِ عنْ بدايةِ الذراعِ 3.5 m، فأجدُ طولَ ذراعِ الرافعةِ.



استعمالُ النسبِ المُثَلَّثِيةِ لإيجادِ قياساتِ مجهولةٍ في المُثَلَّثِ قائمِ الزاويةِ

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المُثَلَّثِيةِ لإيجادِ أطوالِ أضلاعٍ مجهولةٍ في المُثَلَّثِ قائمِ الزاويةِ في كثيرٍ منَ السياقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ.

مثال 1: منَ الحياةِ



بناءً: يُبَيِّنُ الشكلُ المُجاورُ الممرَّ المُنحدِرَ الخاصَّ بذوي الإعاقةِ الحركيةِ في أحدِ الأبنيةِ. إذا كانَ ارتفاعُ نهايةِ هذا الممرِّ عنْ سطحِ الأرضِ هوَ 45 cm، وكانَتِ الزاويةُ التي يصنعُها الممرُّ معَ الأرضِ هيَ 4.8°، فأجدُ طولَهُ، مُقَرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ.

أُلاحِظُ منَ الشكلِ أنَّ الزاويةَ المَقيسةَ هيَ 4.8°، ولتكنْ A، وأنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ لها هوَ 45 cm، وأنَّ الضلعَ المجهولَ هوَ الوترُ، وليكنْ d؛ لذا أستعملُ نسبةَ الجيبِ لإيجادِ طولِ الممرِّ المُنحدِرِ.

www.jnob-jo.com

ملاحظاتي

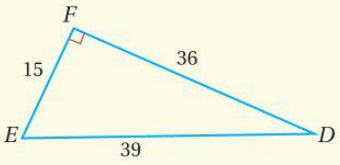
1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الفقرات الآتية:

» **أحل كلًّا من المعادلات الآتية:**

a. $4x + 5 = 61$ $x = 14$ **b.** $\frac{3x}{7} = \frac{12}{5}$ $x = 5.6$ **c.** $\frac{x-4}{2x+1} = \frac{4}{5}$ $x = -8$

» **أجد النسب المثلثية الثلاث لكل من الزاويتين الحادتين في المثلث *DEF* المجاور.**



$\sin E = \frac{36}{36}$, $\cos E = \frac{15}{39}$, $\tan E = \frac{36}{15}$

$\sin D = \frac{15}{39}$, $\cos D = \frac{36}{39}$, $\tan D = \frac{15}{36}$

» **أجد قياس الزاوية الحادة في كل ممّا يأتي:**

a. $\sin A = 0.4357$ $A = 25.8°$ **b.** $\cos G = 0.6483$ $G = 49.6°$ **c.** $\tan Y = \frac{12}{7}$ $Y = 59.7°$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ما نوع المثلث المُكوَّن من ذراع الرافعة والحبل والبُعد الأفقي للحاوية عن بداية الذراع؟ مثلث قائم الزاوية.

» ماذا تمثّل ذراع الرافعة في هذا المثلث؟ الوتر.

» كيف يمكن إيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية؟ باستعمال نظرية فيثاغورس.

» ما المعلومات الضرورية الواجب توفرها لتطبيق نظرية فيثاغورس؟ طولا ضلعين اثنين من أضلاع المثلث القائم الزاوية.

» كم ضلعًا عُلم طوله في الشكل؟ واحد.

» كيف يمكن الاستفادة من الزاوية المُعطى قياسها في المثلث؟ يمكن ربط نسبها بأطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية الظاهر في الشكل.

» ما النسب المثلثية للزاوية المُعطى قياسها بدلالة أطوال أضلاع المثلث؟

$\sin 54° = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3.5}{x}$, $\cos 54° = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{x}$, $\tan 54° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3.5}{y}$

» هل يمكن استعمال الزاوية الحادة الثانية؟ نعم.

» كيف يمكن إيجاد طول ذراع الرافعة؟

- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:

» ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟

» مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

www.jnob-jo.com

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال النسب المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية لإيجاد طول ضلع مجهول فيه، بكتابة النسب المثلثية للزاوية المعلومة بدلالة أطوال الأضلاع، ثم اختيار النسبة التي تؤدّي إلى المطلوب بأيسر الطرق وأقصرها، ثم إيجاد النسبة باستعمال الآلة الحاسبة، وحل المعادلة البسيطة الناتجة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المسألة في المثال 1، وأطلب إلى آخر كتابة المعطيات، والمطلوب.
- أطلب إلى الطلبة تسمية رؤوس المثلث، وإعطاء رموز لأطوال الأضلاع المجهولة.
- أسأل الطلبة عن النسبة التي تقود إلى معرفة طول المنحدر بأيسر الطرق وأقصرها. نسبة جيب الزاوية $4.8°$ ($\sin 4.8°$)
- أناقش الطلبة في الخطوات المُتبقيّة من الحل.
- أسأل الطلبة: هل يمكن استعمال نسبة جيب التمام (cos) لإيجاد طول المنحدر؟ نعم؛ باستعمال جيب تمام متممة $4.8°$
- أكلّف الطلبة إيجاد طول المنحدر باستعمال نسبة جيب التمام، والتأكّد من حصولهم على الإجابة نفسها.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أناقش الطلبة في إجابة السؤال الوارد في صندوق (**أفكّر**) الموجود في هامش المثال 1، وأطلب إليهم تجريب نسبة مثلثية أخرى.

نسبةُ الجيبِ $\sin A = \frac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{الوترُ})}$

بالتعويضِ $\sin 4.8° = \frac{45}{d}$

بضربِ طرفي المعادلةِ في d $d(\sin 4.8°) = 45$

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على $\sin 4.8°$ $d = \frac{45}{\sin 4.8°}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $d \approx 538$

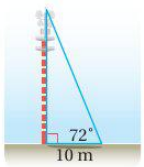
إذنْ، طولُ الممرِّ المُنحدِرِ هوَ 538 cm تقريبًا.

أفكّرُ

هلْ يُمكِنُ استعمالُ نسبةٍ مُثلّثيةٍ أُخرى لإيجادِ طولِ الممرِّ المُنحدِرِ؟ أُبرّرُ إجابتي.

أتحقّقُ من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ برجَ اتصالاتٍ، طولُ ظلِّهِ **10 m**. إذا كانَتِ الزاويةُ التي تصنعُها أشعةُ الشمسِ معَ نهايةِ الظلِّ على سطحِ الأرضِ هيَ $72°$، فأجدُ ارتفاعَ البرجِ. 30.8 m تقريبًا.

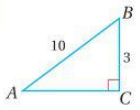


تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ استعمالَ النسبِ المُثلّثيةِ لإيجادِ أطوالِ مجهولةٍ في المُثلّثِ قائمِ الزاويةِ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ في المُثلّثِ قائمِ الزاويةِ باستعمالِ النسبِ المُثلّثيةِ ومعكوسِ النسبِ المُثلّثيةِ.

مثال 2

أجدُ قياسَ $\angle A$ في كلِّ مُثلّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1



بما أنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ لـ $\angle A$ وطولَ الوترِ معلومانِ، فإنّني أستعملُ الجيبَ:

تعريفُ الجيبِ $\sin A = \frac{3}{10}$

معكوسُ الجيبِ $m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$

www.jnob-jo.com

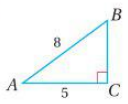
والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$ كما يأتي:

SHIFT | sin | (| 3 | ÷ | 10 |) | = | 17.4576031237

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $17.5°$

إذنْ، $m\angle A \approx 17.5°$.

2



بما أنَّ طولَ الضلعِ المُجاورِ لـ $\angle A$ وطولَ الوترِ معلومانِ، فإنَّني أستعملُ جيبَ التمامِ:

تعريفُ جيبِ التمامِ $\cos A = \frac{5}{8}$

معكوسُ جيبِ التمامِ $m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT | cos | (| 5 | ÷ | 8 |) | = | 51.3178125465

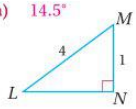
بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $51.3°$

إذنْ، $m\angle A \approx 51.3°$.

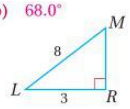
أتحقَّقُ من فهمي

أجدُ قياسَ $\angle L$ في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

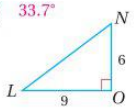
a) $14.5°$



b) $68.0°$



c) $33.7°$



تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزيــة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلــب إلى الطلبة حل التدريب الــوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال إضافي

أبحرت سفينة من الميناء P، وكان خط سيرها يصنع زاوية قياســها $40°$ مع شــاطئ مســتقيم. أجد أقصر مسافة بين السفينة والشاطئ عندما يكون بُعدها عن الميناء 20 km

12.9 km تقريبًا.

مثال 2

- أوضّح للطلبة أنه في بعض المسائل يكون معلومًا طولا ضلعين على الأقل من عناصر مثلث قائم الزاوية، ففي هذه الحالة يمكن استعمال معكوس النسبة المثلثية لإيجاد قياس إحدى الزوايا الحادة في المثلث. وأسألهم: كيف يمكن إيجاد قياس الزاوية الحادة الثانية؟
- أناقش الطلبة في حل فرعي المثال 2، وأطلب تبرير إجاباتهم.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

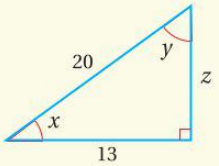
www.jnob-jo.com

أخطاء شائعة:

قد يجد بعض الطلبة صعوبة في اختيار النسبة المثلثية المناسبة لحل المسألة؛ لذا أنبّه إلى تحديد ما يمثّله الضلعان المعلومان بالنسبة إلى الزاوية ثم اختيار النسبة التي ترتبط بهذين الضلعين، وأذكّرهم بالتعريف الصحيح لكل من: جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلّها.

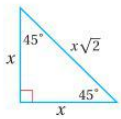
مثال إضافي

أجد قيمة كل من x، و y، و z في المثلث المجاور.



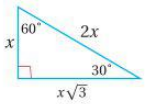
$x \approx 49.5°, \quad y \approx 40.5°, \quad z \approx 15.2$

استعمالُ النسبِ المُثلّثيةِ في المُثلّثاتِ القائمةِ الزاويةِ الخاصةِ



يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ المُثلَّثَ $90° - 45° - 45°$؛ وهوَ مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، ومُتطابِقُ الضلعَينِ.

يمتازُ هذا المُثلَّثُ بأنَّ طولَ وترِهِ يساوي $\sqrt{2}$ مَرَّةً طولَ كلِّ ساقٍ منْ ساقيْهِ.



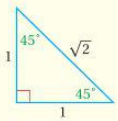
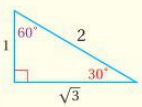
أمّا الشكلُ المُجاورُ فيُبيِّنُ المُثلَّثَ $30° - 60° - 90°$ الذي يمتازُ بأنَّ طولَ وترِهِ يساوي مثليْ طولِ الساقِ المُقابلةِ للزاويةِ $30°$، وبأنَّ طولَ الساقِ المُقابلةِ للزاويةِ $60°$ يساوي $\sqrt{3}$ مَرَّةً طولَ الساقِ المُقابلةِ للزاويةِ $30°$.

أتعلَّمُ

بكلماتٍ أُخرى، فإنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ $30°$ في المُثلَّثِ $30° - 60° - 90°$ يساوي نصفَ طولِ الوترِ.

تُستعمَلُ النسبُ المُثلَّثيةُ للزوايا الخاصةِ: $30°, 60°, 45°$ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ. وفي ما يأتي تلخيصٌ لهذهِ النسبِ.

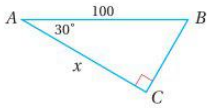
مفهومٌ أساسيٌّ **النسبُ المُثلّثيةُ للزوايا الخاصةِ**

المُثلَّثُ	الجيبُ	جيبُ التمامِ	الظلُّ
	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan 45° = 1$
	$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$

www.jnob-jo.com

مثال 3

أجدُ قيمةَ x في المُثلَّثِ المُجاورِ.



نسبةُ جيبِ التمامِ $\cos A = \frac{\text{(المُجاورُ)}}{\text{(الوترُ)}}$

بالتعويضِ $\cos 30° = \frac{x}{100}$

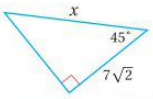
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{100}$

بضربِ طرفي المعادلةِ في 100 $\frac{100\sqrt{3}}{2} = x$

بالتبسيطِ $x = 50\sqrt{3}$

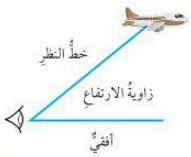
أتحقَّقُ من فهمي

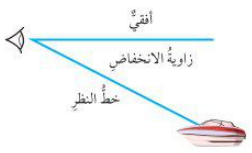
أجدُ قيمةَ x في المُثلَّثِ المُجاورِ. 14



زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ

يُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأعلى والخطِّ الأفقيِّ اسمُ **زاويةِ الارتفاعِ** (angle of elevation)، مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ منْ سطحِ الأرضِ إلى طائرةٍ في السماءِ والخطِّ الأفقيِّ. ويُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأسفلِ والخطِّ الأفقيِّ اسمُ **زاويةِ الانخفاضِ** (angle of depression)، مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ منْ منارةٍ إلى سفينةٍ في البحرِ والخطِّ الأفقيِّ.





مثال 3

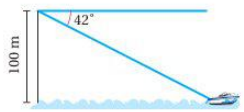
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لزوايا محددة من دون استعمال الآلة الحاسبة، وذلك برسم مثلث قائم الزاوية تكون تلك الزاوية إحدى زواياه الحادة، ثم إيجاد أطوال الأضلاع، ومن ثم إيجاد النسب المثلثية. وقياسات هذه الزوايا الخاصة هي: $30°, 45°, 60°$
- أناقش الطلبة في خصائص المثلث الذي قياسات زواياه $45°, 45°, 90°$، وأسألهم عن النسب المثلثية للزاوية $45°$
- أناقش الطلبة في خصائص المثلث الذي قياسات زواياه $30°, 60°, 90°$، وأسأل عن النسب المثلثية للزاويتين $30°$، و$60°$، وأوجّه الطلبة إلى تأمّل صندوق (**مفهوم أساسي**) الموجود في صفحة 52 من كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3، وهو لا يختلف في فكرته عن المثال 1 سوى أن الزاوية المعلومة هي من الزوايا الخاصة التي لا تحتاج إلى الآلة الحاسبة لإيجاد نسبها، ويمكن للطلبة تذكّرها عن ظهر قلب أو بربطها بالمثلثات الخاصة التي عُرِضت عليهم آنفًا.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

www.jnob-jo.com

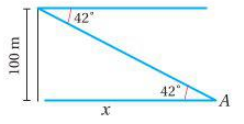
يُمكِنُ استعمالُ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

قارِبٌ: ينظرُ عليٌّ منْ أعلى جُرْفٍ إلى قاربٍ في البحرِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها 42°. إذا كانَ ارتفاعُ الجُرْفِ عنْ سطحِ البحرِ هوَ 100 m، فأجدُ بُعْدَ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ.



بما أنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الأفقيِّ (زاويةُ الانخفاضِ) هوَ 42°، فإنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ وسطحِ البحرِ هوَ 42°؛ لأنَّهُما زاويتانِ مُتبادِلتانِ داخليًّا.



أفترضُ أنَّ زاويةَ الانخفاضِ هيَ A، وأنَّ بُعْدَ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ x:

نسبةُ الظلِّ: $\tan A = \frac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{المُجاوِرُ})}$

بالتعويضِ: $\tan 42^\circ = \frac{100}{x}$

بضربِ طرفي المعادلةِ في x: $x \tan 42^\circ = 100$

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على $\tan 42^\circ$: $x = \frac{100}{\tan 42^\circ}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ: $x \approx 111$

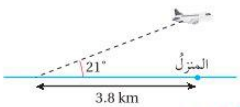
إذنْ، بُعْدُ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ 111 m تقريبًا.

أتعلَّمُ

الخطُّ الأفقيُّ ومستوى سطحِ البحرِ مُتوازِيانِ؛ لذا فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الأفقيِّ والزاويةَ المحصورةَ بينَ خطِّ النظرِ وسطحِ البحرِ مُتبادِلتانِ داخليًّا، إذنْ، فَهُما متطابقتانِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

طائرةٌ: رصدَتْ ليلى طائرةً في السماءِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها 21° لحظةَ مرورِها فوقَ سطحِ أحدِ المنازلِ. إذا كانَ بُعْدُ ليلى عنِ المنزلِ هوَ 3.8 km، فأجدُ ارتفاعَ الطائرةِ عنِ المنزلِ. 1.5 km تقريبًا.



مثال 4: من الحياة

- أوضّح للطلبة مفهوم زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض، وأقدّم أمثلة عليهما (يمكنني الاستعانة **بورقة المصادر 6: زوايا الارتفاع والانخفاض**).
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المسألة في المثال 4، وأطلب إلى آخر كتابة المعطيات والمطلوب.
- أسأل الطلبة:
  - « ما النسبة المثلثية التي يمكن استعمالها هنا لإيجاد بُعد القارب عن قاعدة الجرف؟ نسبة ظل الزاوية A.
  - « ما النسبة المثلثية التي تُستعمَل لإيجاد بُعد القارب عن قمّة الجرف؟ نسبة جيب الزاوية A، أو جيب تمام متممة A وهي 48°.
- أناقش الطلبة في خطوات حل المثال 4، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.
- إن لزم الأمر، أعرض على الطلبة مزيدًا من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أناقش الطلبة في مضمون صندوق (**أتعلّم**) مقابل المثال 4، وأذكّرهم بالمستقيمات المتوازية وقاطعها وأنواع الزوايا الناتجة بينهما.

تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في كتابة المعادلة المناسبة لحل المسألة اللفظية؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة برويّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

مثال إضافي:

يقف رجل على بعد 50 m عن قاعدة برج إرسال تلفزيوني، وينظر إلى قمة البرج بزاوية ارتفاع مقدارها 49°، أجد ارتفاع البرج. 57.5 m تقريبًا.

www.jnob-jo.com

أتدرّبُ وأحلُّ المسائل

أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ:

1) 5.29 cm — 13 cm, 24°, x

2) 100.38 cm — 59 cm, 36°, x

3) 15.53 cm — 75°, x, 15 cm

4) 8 cm, 48°, x — 5.35 cm

5) 6.5 cm, 49°, x — 9.91 cm

6) x, 52°, 14 cm — 8.62 cm

7) x, 63°, 7 cm — 13.74 cm

8) 6 cm, 34°, x — 8.90 cm

9) 11 cm, 33°, x — 7.14 cm

أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

10) 8 cm, x, 3 cm — 22.0°

11) 8 cm, x, 15 cm — 32.2°

12) 4 cm, x, 1 cm — 75.5°

13) x, 13 cm, 17 cm — 40.1°

14) 4 cm, x, 3.5 cm — 41.2°

15) 56, x, 168 — 71.6°

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّنْ تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسألتين (25 و 26).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

www.jnob-jo.com

الواجب المنزلي:

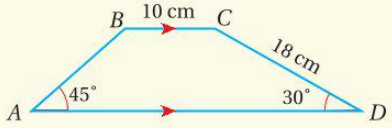
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 17, 22, 24 كتاب التمارين: (1 – 9) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (18 – 21) كتاب التمارين: (1 – 10) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (23 – 26) كتاب التمارين: (7 – 11)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الإثرائيين الآتيين:

» أجد محيط شبه المنحرف $ABCD$ في الشكل المجاور، مع تقريب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.



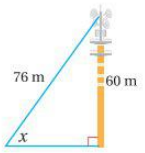
$(47 + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{3}) \approx 75.32$ cm

» رصد سالم قمة عمارة فكانت زاوية ارتفاعها 42°، ثم تقدم نحوها بمقدار 30 m، ورصد قمتها ثانية فوجدها 65°، أجد ارتفاع العمارة مع تقريب إجابتي إلى أقرب متر. 47 m

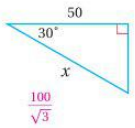
تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين (10) و(11) من خطوات تنفيذ المشروع.
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصره كافّة متوافرة يوم العرض.

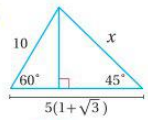
16 وُضِعَ هوائيُّ بثٍّ فوقَ بُرجٍ محطَّةٍ إذاعيةٍ، واستُعمِلَ سلكٌ داعمٌ طولُهُ 76 m لتثبيتِ طرفِ الهوائيِّ بسطحِ الأرضِ كما في الشكلِ المُجاورِ. إذا كانَ ارتفاعُ البُرجِ والهوائيِّ هوَ 60 m، فأجدُ قياسَ الزاويةِ بينَ السلكِ وسطحِ الأرضِ مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ. 52.1°



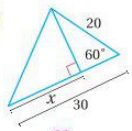
أستعملُ النسبَ المُثلَّثيةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي:

17


$\frac{100}{\sqrt{3}}$

18


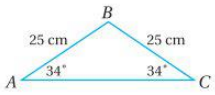
$5\sqrt{6}$

19


20

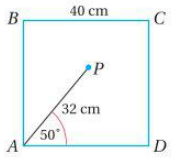
20 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي ΔABC. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ أقصرِ مسافةٍ بينَ النقطةِ B و $\overline{AC}$.

13.98 cm ≈ 14 cm

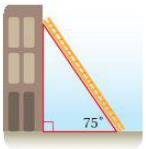


21 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي المُربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 40 cm. إذا كانَتِ النقطةُ P تقعُ داخلَ المُربَّعِ كما في الشكلِ، فأجدُ بُعْدَ هذهِ النقطةِ عنْ كلٍّ منْ $\overline{AD}$، و $\overline{AB}$، و $\overline{CD}$.

بُعد P عن $\overline{AD}$ يساوي 24.5 cm، بُعد P عن $\overline{AB}$ يساوي 20.6 cm، بُعد P عن $\overline{DC}$ يساوي 19.4 cm



www.jnob-jo.com



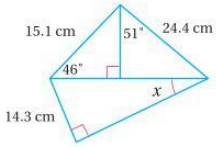
22 وُضِعَ سُلَّمٌ على أحدِ أطرافِ مبنًى كما في الشكلِ المُجاورِ، وكانَتِ الزاويةُ التي يصنعُها السُّلَّمُ معَ الأرضِ هيَ 75°؛ لتجنُّبِ السقوطِ عنهُ. أجدُ ارتفاعَ طرفِ السُّلَّمِ عنْ سطحِ الأرضِ في هذهِ الحالةِ إذا كانَ طولُهُ 6 m.
5.8 m تقريبًا.

23 وقفَ عصفورٌ على شجرةٍ ارتفاعُها 12 m، مُراقِبًا دودةً على سطحِ الأرضِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها 34°. أجدُ المسافةَ بينَ الدودةِ والعصفورِ. 21.5 m تقريبًا.

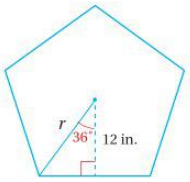
24 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 4.3 m تقريبًا.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

25 تبريرٌ: أجدُ قيمةَ x في الشكلِ الآتي، مُبرِّرًا إجابتي.
أنظر الهامش.



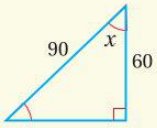
26 تحدٍّ: يُبيِّنُ الشكلُ الآتي خماسيًّا مُنتظَمًا، طولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ التي تمرُّ برؤوسِهِ r. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ مساحةِ الخماسيِّ.
أنظر الهامش.



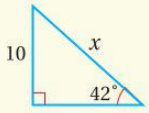
6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:

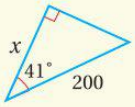
» **أجد قيمة x في كل مثلث مما يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:**

1


$x \approx 48.2°$

2


$x \approx 14.9$

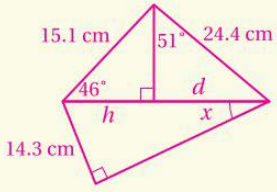
3


$x \approx 150.9$

» إذا نظرت فوز إلى قمّة مئذنة مسجد عندما كانت تقف على بعد 20 m من قاعدتها، فكانت زاوية ارتفاعها 55°، فما ارتفاع المئذنة؟
28.6 m تقريبًا.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

25)



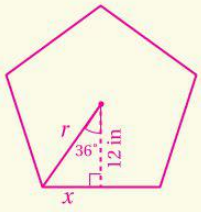
$\sin 51° = \frac{d}{24.4}$, $d \approx 19$ cm

$\cos 46° = \frac{h}{15.1}$, $h \approx 10.5$ cm

$d + h = 29.5$ cm

$\sin x = \frac{14.3}{29.5}$, $x \approx 29°$

26)



$\tan 36° = \frac{x}{12} \Rightarrow x \approx 8.7$ in

مساحة المثلث الذي في الشكل: $\frac{1}{2} \times 12 \times 8.7 = 52.2$ in^2

ينقسم الخماسي المنتظم إلى عشرة مثلثات صغيرة لها المساحة نفسها 52.2 in^2

إذن، مساحة هذا الخماسي تساوي: $10 \times 52.2 = 522$ in^2

www.jnob-jo.com

الوحدة 5

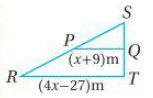
اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (1 – 14) فرديًّا، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أناقشهم جميعًا في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أطلب إليهم حلّ المسائل (15– 24)، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

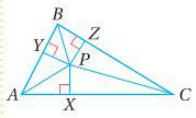
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانَتْ $\overline{PQ}$ قطعةً مُنصّفةً فـي المُثلَّثِ RST، فإنَّ طولَ $\overline{RT}$ بالأمتارِ هوَ:



a) 9 b) 21 c) 45 d) 63

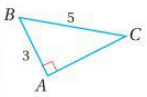
2 في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC، فإنَّ الجملةَ الصحيحةَ ممّا يأتي هيَ:



a) $PA = PB$ b) $YA = YB$

c) $PX = PY$ d) $AX = BZ$

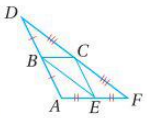
3 جيبُ تمامِ الزاويةِ C في الشكلِ المُجاورِ يساوي:



a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$

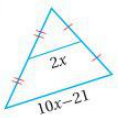
4 في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانَ: $DF = 24$, $BC = 6$, $DB = 8$، فأجدُ محيطَ المُثلَّثِ ADF.



52

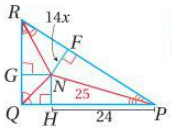
أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

5



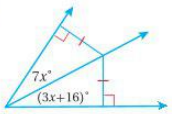
3.5

6



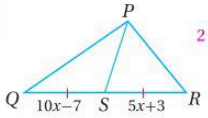
$\frac{1}{2}$

7



4

8



2

أجدُ إحداثيَّ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

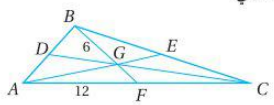
9 $L(0, 5), M(3, 1), N(8, 1)$ $(0, -5)$

10 $A(-4, 0), B(1, 0), C(-1, 3)$ $(-1, 2)$

www.jnob-jo.com

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

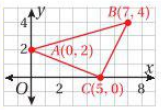
إذا كانَتِ النقطةُ G هيَ مركزَ ΔABC المُبيَّنِ في الشكلِ الآتي، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ كلِّ قياسٍ ممّا يلي:



11) FC 12

12) BF 9

13) يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ. أجدُ إحداثيَّ مركزِ هذا المُثلَّثِ.



(4, 2)

14) إذا كانَتْ $\angle A$ زاويةً حادَّةً في مُثلَّثٍ، وكانَ $\cos A = \frac{4}{7}$، فأجدُ $\sin A$. $\frac{\sqrt{33}}{7}$

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

15) $\sin 5^\circ$ 0.087

16) $\sin 81^\circ$ 0.988

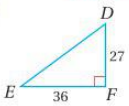
17) $\cos 33^\circ$ 0.839

18) $\tan 70^\circ$ 2.747

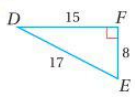
أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ E في كلٍّ ممّا يأتي:

(19, 20) أنظر الهامش.

19)

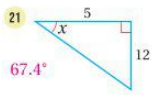


20)

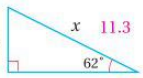


أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ:

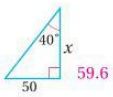
21)



22)

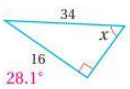


23)



59.6

24)



28.1°

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

25) إذا كانَتْ $A(1, 3)$، وكانَتْ $B(1, 9)$، فإنَّ النقطةَ التي تقعُ على المُنصِّفِ العموديِّ لـ $\overline{AB}$ هيَ:

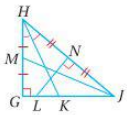
a) $(3, 3)$

b) $(1, 5)$

c) $(6, 6)$

d) $(3, 12)$

26) الوصفُ الصحيحُ لـ $\overline{LN}$ في الشكلِ المُجاورِ هوَ:



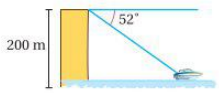
a) مُنصِّفٌ عموديٌّ.

b) قطعةٌ مُتوسِّطةٌ.

c) مُنصِّفُ زاويةٍ.

d) ارتفاعٌ.

27) رُصِدَ قاربٌ في البحرِ منْ أعلى قِمَّةِ جُرُفٍ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها 52°. إذا كانَ ارتفاعُ الجُرُفِ عنْ سطحِ البحرِ 200 m، فأجدُ بُعْدَ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرُفِ. 156.3 m تقريبًا.



تدريب على الاختبارات الدولية:

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حلّ الأسئلة في بند (**تدريب على الاختبارات الدولية**) فرديًّا، ثمّ أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجّع الطلبة على الاهتمام بحلّ مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكلّ جدّيّة، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

19) $\sin E = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$, $\cos E = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$,
$\tan E = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

20) $\sin E = \frac{15}{17}$, $\cos E = \frac{8}{17}$, $\tan E = \frac{15}{8}$

www.jnob-jo.com

كتاب التمارين

أختبرُ معلوماتي بحَلِّ التدريباتِ الآتية. وفي حالِ عدمِ تأكُّدي مِنَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المعطى.

تحديدُ المُثلّثاتِ المُتشابهةِ باستعمالِ حالاتِ التشابه: SAS، و SSS، و AA (الدرسُ 1)

أُحدِّدُ إذا كانَ كلُّ مُثلّثينِ ممّا يأتي مُتشابهينِ أمْ لا، وإذا كانا كذلكَ، فأكتبُ عبارةَ التشابه، مُبرِّرًا إجابتي:

1 $\frac{AB}{EF}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$، $\frac{BC}{FG}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$، $\frac{AC}{EG}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.
المثلثان متشابهان؛ لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\Delta ABC\sim\Delta EFG$ (حالة التشابه SSS)

2 $\frac{SP}{SR}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$، $\frac{SQ}{ST}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$
الزاويةُ S مشتركةٌ؛
فالمثلثان متشابهان بحالة التشابه SAS
$\Delta PSQ\sim\Delta RST$

3 $\frac{11}{6}\neq\frac{6}{3.3}$
غير متشابهين؛ لأن

4 المثلثان متشابهان؛ لأن الزوايا المتناظرة فيهما متطابقة، حالة التشابه AA
$\Delta TQS\sim\Delta PRS$

مثالٌ: أُحدِّدُ إذا كانَ كلُّ مُثلّثينِ ممّا يأتي مُتشابهينِ أمْ لا، وإذا كانا كذلكَ، فأكتبُ عبارةَ التشابه، مُبرِّرًا إجابتي:

a)
$\angle B\cong\angle E$؛ لأنَّهما زاويتانِ قائمتانِ.
باستعمالِ مجموعِ قياساتِ زوايا المُثلّثِ، فإنَّ:
$m\angle C=180^\circ-(90^\circ+43^\circ)=47^\circ$
بما أنَّ $m\angle F=47^\circ$، فإنَّ $\angle F\cong\angle C$، إذنْ: $\Delta ABC\sim\Delta DFE$ وَفقَ مُسلَّمةِ التشابه (AA).

b)
أستعملُ أطوالَ الأضلاعِ لتمييزِ الأضلاعِ المُتقابلةِ، ثمَّ أجدُ النسبةَ بينَ طولِ كلِّ زوجٍ مِنْ أزواجِ الأضلاعِ المُتقابلةِ في المُثلّثينِ.

الضلعانِ المُتناظِران	أطولُ ضلعين	أقصرُ ضلعين
$\frac{BC}{EF}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$	$\frac{CA}{FD}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$	$\frac{AB}{DE}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

بما أنَّ النسبَ جميعَها متساويةٌ، فإنَّ $\Delta ABC\sim\Delta DEF$ وَفقَ نظريةِ التشابه (SSS).

e)
بما أنَّ $\angle K$ مشتركةٌ بينَ المُثلّثينِ، فإنَّني أجدُ النسبةَ بينَ طولَيْ زوجَي الأضلاعِ المُتقابلةِ اللذينِ يحصرانِ $\angle K$ في المُثلّثينِ.

أطولُ ضلعين	أقصرُ ضلعين
$\frac{KP}{KN}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$	$\frac{KL}{KM}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

بما أنَّ طولَي الضلعينِ اللذينِ يحصرانِ $\angle K$ في ΔKLP مُتناسبانِ معَ طولَي الضلعينِ المُناظرينِ لهُما في ΔKMN، فإنَّ $\Delta KMN\sim\Delta KLP$ وَفقَ نظريةِ التشابه (SAS).

حَلُّ التناسباتِ (الدرسُ 1)

أحُلُّ كُلًّا مِنَ التناسباتِ الآتيةِ:

5 $\frac{x}{2}=\frac{15}{10}$ $x=3$

6 $\frac{7}{x}=\frac{14}{8}$ $x=4$

7 $\frac{2}{12}=\frac{y}{y+8}$ $y=1.6$

مثالٌ: أحُلُّ التناسبَ: $\frac{4}{3}=\frac{20}{x}$

بالضربِ التباديليِّ	$4\times x=20\times 3$
بالضرب	$4x=60$
بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 4	$\frac{4x}{4}=\frac{60}{4}$
بالتبسيط	$x=15$

استعمالُ تشابهِ المُثلّثاتِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ (الدرسُ 1)

أُثبتُ أنَّ كلَّ مُثلّثينِ ممّا يأتي مُتشابهانِ، ثمَّ أجدُ الطولَ المطلوبَ:

8 AB
المثلثان ADC, AEB متشابهان؛ لأن زواياهما المتناظرة متطابقة وفقًا لمسلَّمة الزوايا المتناظرتين (حالة التشابه AA)
$\frac{8}{3}=\frac{x+8}{x+2}\Rightarrow x=1.6$
$AB=x+2=1.6+2=3.6$

9 HG
المثلثان EFG, FGH متشابهان؛ لأن زواياهما المتناظرة متطابقة (حالة التشابه AA)
$\frac{39}{36}=\frac{15}{x}\Rightarrow x\approx 13.8$
$HG\approx 13.8$

10 إذا كانَ المُثلّثانِ في الشكلِ المُجاورِ مُتشابهينِ، فأجدُ قيمةَ x.
$\frac{3}{5}=\frac{x-4}{x}\Rightarrow x=10$

مثالٌ: إذا كانَ المُثلّثانِ في الشكلِ المُجاورِ مُتشابهينِ، فأجدُ قيمةَ x.

بكتابةِ التناسبِ	$\frac{AB}{DC}=\frac{AE}{DE}$
بالتعويضِ	$\frac{2}{5}=\frac{x-1}{x+5}$
بالضربِ التباديليِّ	$2(x+5)=5(x-1)$
خاصيةُ التوزيعِ	$2x+10=5x-5$
بطرحِ 10 منْ طرفَي المعادلةِ	$2x=5x-15$
بطرحِ $5x$ منْ طرفَي المعادلةِ	$-3x=-15$
بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على -3	$x=5$

www.jnob-jo.com

كتاب التمارين

إيجادُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا (الدرسُ 1)

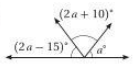
أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلِّ ممّا يأتي:

11 $m\angle 1$ 63°

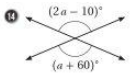
12 $m\angle 2$ 117°

13 $m\angle 3$ 117°

أجدُ قيمةَ a في كلٍّ ممّا يأتي:

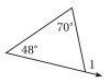
15 

$a =$ 37

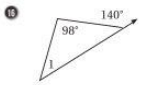
14 

$a =$ 70

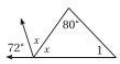
أجدُ $m\angle 1$ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ:

17 

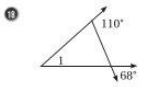
$m\angle 1 =$ 118°

16 

$m\angle 1 =$ 42°

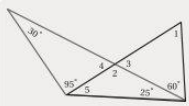
19 

$m\angle 1 =$ 46°

18 

$m\angle 1 =$ 42°

مثالٌ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلِّ ممّا يأتي:



a) $m\angle 4$

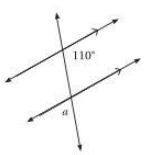
زوايا داخليةٌ في مُثَلَّثٍ	$30° + 95° + m\angle 4 = 180°$
بالجمعِ	$125° + m\angle 4 = 180°$
بطرحِ 125°	$m\angle 4 = 55°$

b) $m\angle 2$

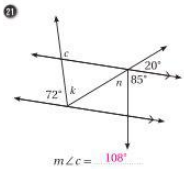
زاويتانِ مُتجاورتانِ على مستقيمٍ	$m\angle 2 + m\angle 4 = 180°$
بتعويضِ $m\angle 4 = 55°$	$m\angle 2 + 55° = 180°$
بطرحِ 55° منْ طرفَيِ المعادلةِ	$m\angle 2 = 125°$

إيجادُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ باستعمالِ المستقيماتِ المتوازيةِ والقاطعِ (الدرسُ 1)

أجدُ قياساتِ الزوايا المجهولةِ في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي، مُبَرِّرًا إجابتي:

20 

$m\angle a =$ 70°

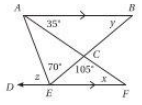
21 

$m\angle c =$ 108°

$m\angle n =$ 75°

$m\angle k =$ 88°

22 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلِّ ممّا يأتي، مُبَرِّرًا إجابتي:

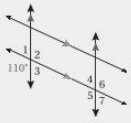


$x =$ 35°
التبريرُ: $\angle BAF$ متبادلةٌ داخليًّا مع الزاويةِ (نظريةُ الزاويتينِ المتبادلتينِ داخليًّا)

$y =$ 40°
التبريرُ: $m\angle CEF = 180° - (105° + 35°) = 40°$
$\angle CEF$ و $\angle ABE$ متبادلةٌ داخليًّا مع $\angle ABE$ (نظريةُ الزاويتينِ المتبادلتينِ داخليًّا)، إذنْ، $m\angle ABE = 40°$

$z =$ 70°
التبريرُ: قياسُ الزاويةِ الخارجيةِ $\angle CED$
يساوي مجموعَ قياسَيِ الزاويتينِ الداخليتينِ البعيدتينِ.
$m\angle CED = z + 70° = 105° + 35°$ إذنْ، $z = 70°$

مثالٌ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلِّ ممّا يأتي:



a) $m\angle 2$

تُقابِلُ بالرأسِ الزاويةَ التي قياسُها 110°	$m\angle 2 = 110°$

b) $m\angle 5$

تُناظِرُ الزاويةَ التي قياسُها 110°	$m\angle 5 = 110°$

c) $m\angle 3$

زاويتانِ مُتحالِفتانِ	$m\angle 3 + m\angle 5 = 180°$
بتعويضِ $m\angle 5 = 110°$	$m\angle 3 + 110° = 180°$
بطرحِ 110° منْ طرفَيِ المعادلةِ	$m\angle 3 = 70°$

إيجادُ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ (الدرسُ 2)

أجدُ إحداثيَّ نقطةِ منتصفِ $\overline{HK}$ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

23 $H(7, 3), K(-4, -1)$ (1.5, 1)

24 $H(-4, -5), K(2, 9)$ (−1, 2)

25 $H(-6, 10), K(8, -2)$ (1, 4)

أجدُ إحداثيَّ نقطةِ نهايةِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{CD}$ المجهولةِ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ M نقطةُ منتصفِ $\overline{CD}$:

26 $C(-5, 4), M(-2, 5)$ (1, 6)

27 $D(1, 7), M(-3, 1)$ (−7, −5)

28 $D(-4, 2), M(6, -1)$ (16, −4)

مثالٌ: أجدُ إحداثيَّ النقطةِ M التي تُمثِّلُ منتصفَ $\overline{KL}$، حيثُ: $L(8, -1)$، و $K(-4, 1)$.

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ	$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (-4, 1), (x_2, y_2) = (8, -1)$	$M\left(\frac{-4 + 8}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}\right)$
بالتبسيطِ	$M(2, 0)$

معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ (الدرسُ 2)

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

29 $(3, 7), (-3, 5)$ $y - 7 = \frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 6$

30 $(-1, 8), (9, -6)$ $y - 8 = -1.4(x + 1) \Rightarrow y = -1.4x + 6.6$

31 $(-1, 6), (-3, 10)$ $y - 6 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x + 4$

32 $(-3, 2), (1, 6)$ $y - 2 = 1(x + 3) \Rightarrow y = x + 5$

33 $(-2, 5), (8, 6)$ $y - 5 = 0.1(x + 2) \Rightarrow y = 0.1x + 5.2$

34 $(0, 3), (-1, -4)$ $y - 3 = 7(x - 0) \Rightarrow y = 7x + 3$

مثالٌ: أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-3, 5)$ و $(9, 21)$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

الخطوةُ 1 أستعملُ النقطتينِ لإيجادِ الميلِ.

صيغةُ الميلِ	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بالتعويضِ عنْ (x_1, y_1) بـ $(-3, 5)$ والتعويضِ عنْ (x_2, y_2) بـ $(9, 21)$	$= \frac{21 - 5}{9 - (-3)}$
بالتبسيطِ	$= \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

إذنْ، الميلُ هوَ: $\frac{4}{3}$

www.jnob-jo.com

كتاب التمارين

الخطوة 2 أعوِّضُ الميلَ وإحداثيَّاتِ إحدى النقطتينِ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بتعويضِ $m = \frac{4}{3}$, $(x_1, y_1) = (9, 21)$	$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$
بالتبسيطِ	$y = \frac{4}{3}x + 9$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = \frac{4}{3}x + 9$

إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ (الدرسُ 3)

أجدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتينِ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

35. $P(2, 3), Q(-1, 4)$ — $\sqrt{10}$

36. $P(-5, 2), Q(1, 8)$ — $6\sqrt{2}$

مثالٌ: أجدُ المسافةَ بينَ النقطةِ $P(-1, 7)$ والنقطةِ $Q(5, -1)$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

صيغةُ المسافةِ في المستوى الإحداثيِّ	$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
بتعويضِ $(x_1, y_1) = (5, -1), (x_2, y_2) = (-1, 7)$	$= \sqrt{(5-(-1))^2 + ((-1)-7)^2}$
بالتبسيطِ	$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$
بإيجادِ مُربَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعُ	$= \sqrt{100}$
بإيجادِ الجذرِ التربيعيِّ	$= 10$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ:

عندما $x = \frac{1}{6}$	عندما $x = -\frac{1}{6}$
$(\frac{1}{6})^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$	$(-\frac{1}{6})^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$
$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓	$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

إيجادُ طولِ ضلعٍ مجهولٍ في مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس (الدرسُ 4)

أجدُ طولَ الضلعِ المجهولِ في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

43. $x = 34$

44. $x = \sqrt{105} \approx 10.2$

45. $x = \sqrt{33} \approx 5.7$

مثالٌ: أجدُ طولَ الضلعِ المجهولِ في المُثلَّثِ المُجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.

نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويضِ $a = x, b = 8, c = 20$	$x^2 + 8^2 = 20^2$
بإيجادِ القوى	$x^2 + 64 = 400$
بطرحِ 64 منْ طرفي المعادلةِ	$x^2 = 336$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$x = \pm\sqrt{336}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$x \approx \pm 18.3$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $x = 18.3$

حَلُّ المعادلاتِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيِّ (الدرسُ 4)

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ:

37. $324 = b^2$ — $b = \pm 18$

38. $x^2 = \frac{9}{36}$ — $x = \pm\frac{1}{2}$

39. $y^2 = 1.96$ — $y = \pm 1.3$

40. $0.0169 = d^2$ — $d = \pm 0.13$

41. $t^2 = \frac{64}{100}$ — $t = \pm 0.8$

42. $y^2 = 0.0144$ — $y = \pm 0.12$

مثالٌ: أحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ:

a) $x^2 = 144$

المعادلةُ الأصليةُ	$x^2 = 144$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$x = \pm\sqrt{144}$
بإيجادِ قيمةِ الجذرِ	$= \pm 12$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ:

عندما $x = 12$	عندما $x = -12$
$(12)^2 \stackrel{?}{=} 144$	$(-12)^2 \stackrel{?}{=} 144$
$144 = 144$ ✓	$144 = 144$ ✓

b) $t^2 = \frac{1}{36}$

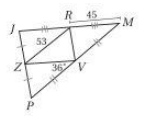
المعادلةُ الأصليةُ	$t^2 = \frac{1}{36}$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$
بإيجادِ قيمةِ الجذرِ	$= \pm\frac{1}{6}$

الوحدة 5: العلاقاتُ في المُثلَّثاتِ والنسبُ المُثلَّثيةُ

الدرسُ 1

الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثاتِ
Proportional Parts in Triangles

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

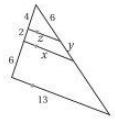


1. ZV — 45
2. PM — 106
3. $m\angle RZV$ — 36°

أجدُ قيمةَ n في كلٍّ ممّا يأتي:

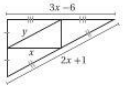
4. $n-9$, 35 — 26.5
5. $14n$, $4n+9$ — 3
6. $n+12$, $6n$ — 6
7. 39, n^2-3 — ± 9

8. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ قيمةِ كلٍّ منْ x، وy، وz.



$y = 3, z = \frac{13}{3}, x = 6.5$

9. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لإيجادِ قيمةِ كلٍّ منْ x، وy.



$x = 6, y = 6.5$

10. إذا كانَتْ إحداثياتُ رؤوسِ المُثلَّثِ ABC هيَ: $A(-5, 6), B(3, 8), C(1, 4)$، فأجدُ أطوالَ جميعِ القطعِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ ABC.

طولُ منصِّفةِ $\overline{AB}$ و$\overline{AC}$ يساوي $\sqrt{5}$
طولُ منصِّفةِ $\overline{CB}$ و$\overline{AB}$ يساوي $\sqrt{10}$
طولُ منصِّفةِ $\overline{AC}$ و$\overline{BC}$ يساوي $\sqrt{17}$

www.jnob-jo.com

كتاب التمارين

الدرسُ 2
مُنصّفاتٌ في المُثلّثِ
Bisectors in Triangle

الوحدة 3: العلاقاتُ في المُثلّثاتِ والنسبُ المُثلّثيّةُ

أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1. JK — 17
2. UW — 55
3. $m\angle KJL$ — $28°$
4. OM — 8

أستعملُ الشكلَ المُجاورَ لملءِ الفراغِ في كلٍّ منَ العباراتِ الآتيةِ:

5. $\overline{DA} \cong$ ____ $\cong \overline{EF}$ — $\overline{DB}$
6. $\overline{BF} \cong$ ____ $\cong \overline{DE}$ — $\overline{CF}$
7. $\angle AED \cong$ ____ — $\angle C$
8. $\overline{FE} \cong$ ____ $\cong \overline{DA}$ — $\overline{BD}$

9. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لإيجادِ قياسِ كلٍّ منْ y، وx، وw، وm، وk، وh، وz.

$y = 10$, $x = 30$, $w = 10$, $z = 26$, $h = 10\sqrt{3}$, $k = 23$, $m = 37$

الدرسُ 3
القطعُ المُتوسّطةُ والارتفاعاتُ في المُثلّثِ
Medians and Altitudes in Triangle

الوحدة 3: العلاقاتُ في المُثلّثاتِ والنسبُ المُثلّثيّةُ

أُحدّدُ مركزَ كلِّ مُثلّثٍ ممّا يأتي:

1. H
2. M

إذا كانَتِ النقطةُ B هيَ مركزَ ΔHJK، وكانَ: $HD = 21$, $BK = 18$، فأجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

3. HB — 14
4. BD — 7
5. CK — 27
6. CB — 9

أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

7. BP — $x = 11$, $BP = 10$
8. BD — 15
9. CP — $y = 5$, $CP = 18$
10. PE — 9

11. يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ. أجدُ إحداثيَّ مركزِ هذا المُثلّثِ. $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$

أجدُ إحداثيَّ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

12. $X(2, -2), Y(4, 6), Z(8, -2)$ — $(4, -1)$
13. $A(-5, 8), B(4, 5), C(-2, 5)$ — $(-5, -4)$

الدرسُ 4
النسبُ المُثلّثيةُ
Trigonometric Ratios

الوحدة 3: العلاقاتُ في المُثلّثاتِ والنسبُ المُثلّثيّةُ

أجدُ قيَمَ النسبِ المُثلّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ E في كلٍّ ممّا يأتي، تاركًا إجابتي في صورةِ كسرٍ:

1. $DF = 9$, $\sin E = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, $\cos E = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, $\tan E = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
2. $ED = 37$, $\sin E = \frac{12}{37}$, $\cos E = \frac{35}{37}$, $\tan E = \frac{12}{35}$
3. $FE = 13\sqrt{3}$, $\sin E = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$, $\cos E = \frac{13\sqrt{3}}{26} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan E = \frac{13}{13\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

4. $\sin 10°$ — 0.174
5. $\sin 17°$ — 0.292
6. $\sin 72°$ — 0.951
7. $\cos 7°$ — 0.993
8. $\cos 82°$ — 0.139
9. $\cos 29°$ — 0.875
10. $\tan 15°$ — 0.268
11. $\tan 59°$ — 1.664
12. $\tan 78°$ — 4.705
13. $5 \tan 80°$ — 28.356
14. $\frac{7}{\cos 32°}$ — 8.254
15. $7 \cos 52°$ — 4.310

أجدُ قياسَ الزاويةِ الحادةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشرِ درجةٍ:

16. $\sin B = 0.7245$ — $46.4°$
17. $\cos C = 0.2493$ — $75.6°$
18. $\tan E = 9.4618$ — $84.0°$

19. مُعتمِدًا المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ، أُحدّدُ النسبَ المُثلّثيةَ التي تساوي $\frac{1}{2}$ ممّا يأتي (أُحدّدُ جميعَ الخياراتِ المُمكنةِ):

$\sin L$, $\cos J$

$\sin L$ | $\cos L$ | $\sin J$ | $\cos J$

20. **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحلِّ المُجاورِ، ثمَّ أُصحّحُهُ.

$\tan D = \frac{35}{37}$ ✗

الخطأ هو عدّ طول الزاوية يساوي المقابل مقسومًا على الوتر. والصحيح أن طول الزاوية يساوي المقابل مقسومًا على المجاور، أي أن: $\tan D = \frac{35}{12}$

الدرسُ 5
تطبيقاتُ النسبِ المُثلّثيةِ
Applications of Trigonometric Ratios

الوحدة 3: العلاقاتُ في المُثلّثاتِ والنسبُ المُثلّثيّةُ

أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلّثٍ ممّا يأتي، مُقرّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ:

1. $x = 74.7$
2. $x = 16.0$
3. $x = 20.1$
4. $x = 138.2$
5. $x = 50.2$
6. $x = 44.4$

أستعملُ النسبَ المُثلّثيةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلِّ مُثلّثٍ ممّا يأتي:

7. $15\sqrt{2}$
8. 10
9. $\frac{250}{\sqrt{3}} = \frac{250\sqrt{3}}{3}$

10. رصدَ أحمدُ قمّةَ منارةٍ بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُها $37°$. إذا كانَ بُعدُ أحمدَ عنْ قاعدةِ المنارةِ هوَ 280 m، فأجدُ ارتفاعَ المنارةِ. $h \approx 211$ m

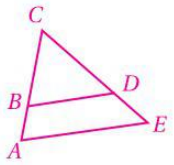
11. يظهرُ في الشكلِ المُجاورِ المبنى A والمبنى C. إذا كانَ ارتفاعُ المبنى A هوَ 30 m، وكانَتِ المسافةُ بينَ المبنيينِ هيَ 40 m، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ ارتفاعِ المبنى C. 53.1 m

www.jnob-jo.com

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 1:

17) المعطيات: قطع المستقيم $\overline{BD}$ ضلعين في المثلث ACE بحيث كان:

$$\frac{BA}{CB}=\frac{DE}{CD}$$



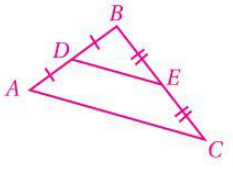
المطلوب: إثبات أنّ: $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

البرهان:

التبرير	العبارة
1) معطى	1) $\frac{BA}{CB}=\frac{DE}{CD}$
2) بإضافة 1 إلى الطرفين.	2) $\frac{BA}{CB}+\frac{CB}{CB}=\frac{DE}{CD}+\frac{CD}{CD}$
3) بجمع النسبتين.	3) $\frac{BA+CB}{CB}=\frac{DE+CD}{CD}$
4) مسلّمة جمع القطع المستقيمة.	4) $\frac{AC}{CB}=\frac{CE}{CD}$
5) زاوية مشتركة.	5) $\angle C \cong \angle C$
6) حالة التشابه SAS	6) $\Delta ACE \sim \Delta BCD$
7) زاويتان متناظرتان في مثلثين متشابهين.	7) $\angle CBD \cong \angle CAE$
8) عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.	8) $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

18) المعطيات: النقطتان D,E هما نقطتا منتصف الضلعين $\overline{BA}, \overline{BC}$ على الترتيب في المثلث ABC.

المطلوب: إثبات أنّ: $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$، و $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

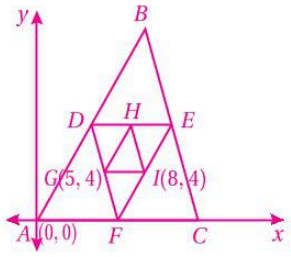


البرهان:

التبرير	العبارة
1) D هي منتصف $\overline{BA}$	1) $BD=AD$
2) بالقسمة على AD	2) $\frac{BD}{AD}=1$
3) E هي منتصف $\overline{BC}$	3) $BE=EC$
4) بالقسمة على EC	4) $\frac{BE}{EC}=1$
5) كل منهما يساوي 1	5) $\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EC}$
6) عكس نظرية التناسب في المثلث.	6) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
(وهذا هو المطلوب الأول)	

1) زاوية مشتركة.	7) $\angle B \cong \angle B$
2) زاويتان متناظرتان بين متوازيين وقاطع.	8) $\angle BDE \cong \angle BAC$
3) حالة التشابه AA	9) $\Delta BDE \sim \Delta BAC$
4) أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين متناسبة.	10) $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$
5) D نقطة منتصف $\overline{AB}$	11) $DB=\frac{1}{2}AB$
6) بالقسمة على AB	12) $\frac{DB}{AB}=\frac{1}{2}$
7) من (4)، و(6).	13) $\frac{DE}{AC}=\frac{1}{2}$
8) بالضرب في AC.	14) $DE=\frac{1}{2}AC$
(وهذا هو المطلوب الثاني)	

إجابة سؤال الإثراء، الدرس 1:



$$GI=8-5=3 \Rightarrow DE=6$$

لكن $\overline{DE}$ قطعة مُنصَّفة في المثلث ABC؛ أي أن طولها يساوي نصف طول $\overline{AC}$، إذن، $AC=12$، وهذا يعني أن إحداثيي C هما $(12, 0)$.

www.jnob-jo.com

إذن، إحداثيا F هما: $(6, 0)$؛ لأنها نقطة منتصف $\overline{AC}$.

وبما أن G منتصف $\overline{FD}$، فإن:

$$(5, 4) = \left(\frac{6 + x_D}{2}, \frac{0 + y_D}{2}\right) \Rightarrow x_D = 4, y_D = 8$$

إذن، إحداثيا D هما: $(4, 8)$.

وبما أن D منتصف $\overline{AB}$، فإن:

$$(4, 8) = \left(\frac{0 + x_B}{2}, \frac{0 + y_B}{2}\right) \Rightarrow x_B = 8, y_B = 16$$

إذن، إحداثيا B هما: $(8, 16)$.

وبما أن E منتصف $\overline{BC}$، فإن إحداثيي E هما:

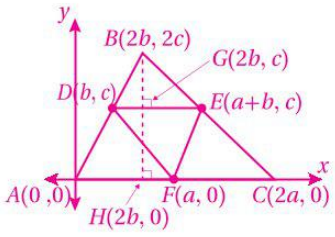
$$\left(\frac{8 + 12}{2}, \frac{0 + 16}{2}\right) = (10, 8)$$

ولأن H منتصف $\overline{DE}$، فإن إحداثيي H هما:

$$\left(\frac{4 + 10}{2}, \frac{8 + 8}{2}\right) = (7, 8)$$

إجابة الأسئلة في بند (توسّع: مثلث القطع المنصفة):

7) أرسم المثلث ABC في المستوى الإحداثي وأعيّن رؤوسه، وأعيّن منتصفات الأضلاع وأحدّد إحداثياتها، وأرسم ارتفاع المثلث، وأحدّد إحداثيات مسقطه على المحور x كما تظهر على الرسم.



أجد مساحة المثلث ABC.

$$\text{Area}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times AC \times BH$$

$$= \frac{1}{2} \times 2a \times 2c$$

$$= 2ac$$

أجد مساحة المثلث DEF.

$$\text{Area}(\Delta DEF) = \frac{1}{2} \times DE \times GH$$

$$= \frac{1}{2} \times (a+b-b) \times c$$

$$= \frac{1}{2} ac$$

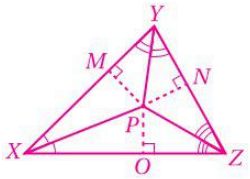
$$\frac{\text{Area}(\Delta DEF)}{\text{Area}(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2} ac}{2ac} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Area}(\Delta DEF) = \frac{1}{4} \text{Area}(\Delta ABC)$$

إذن، مساحة مثلث القطع المنصّفة تساوي رُبع مساحة المثلث الأصلي.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 2:

15)



المعطيات: $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}$ هي منصفات زوايا المثلث XYZ،

$$\overline{PM} \perp \overline{XY}, \overline{PN} \perp \overline{YZ}, \overline{PO} \perp \overline{XZ}$$

المطلوب: إثبات أنّ: $PM = PN = PO$

البرهان: بما أن P تقع على منصف الزاوية $\angle XYZ$، فإنها تبعد البُعد نفسه عن $\overline{XY}$، و $\overline{YZ}$ أي $PM = PN$

وبما أنّ P تقع على منصف الزاوية $\angle YXZ$، فإنها تبعد البُعد نفسه عن $\overline{XY}$، و $\overline{XZ}$ أي $PM = PO$

إذن، $PM = PN = PO$

18) ليكن طول نصف قطر الدائرة الداخلية r، فإنّ:

$$r^2 = 9^2 - 8^2 = 17$$

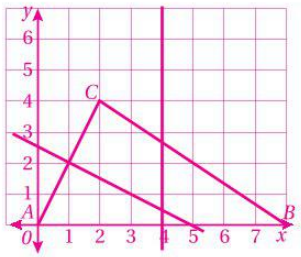
$$r = \pm\sqrt{17}$$

$r = \sqrt{17}$؛ لأن الطول لا يكون سالبًا.

طول قطر الزجاج يساوي: $2\sqrt{17} \approx 8.2$

www.jnob-jo.com

إجابة سؤال الإثراء، الدرس 2:



$A(0, 0), B(8, 0), C(2, 4)$

أولًا: أجد معادلة المنصّف العمودي للضلع $\overline{AB}$.

نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $(4, 0)$، وميل $\overline{AB}$ يساوي صفرًا، إذن، منصّفه العمودي هو المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $(4, 0)$ ومعادلته هي: $x = 4$

ثانيًا: أجد معادلة المنصّف العمودي للضلع $\overline{AC}$.

نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي $(1, 2)$، وميل $\overline{AC}$ يساوي 2، إذن، ميل منصّفه العمودي -0.5

ومعادلة هذا المنصف العمودي هي:

$$y-2 = -0.5(x-1) \Rightarrow y = -0.5x + 2.5$$

ثالثًا: أجد إحداثيي نقطة تقاطع المنصّفين العموديين، فتكون هي مركز الدائرة الخارجية للمثلث ABC.

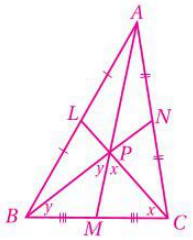
أحل المعادلتين: $y = -0.5x + 2.5, x = 4$ بتعويض $x = 4$ في المعادلة الثانية، ومنه:

$$y = -0.5(4) + 2.5$$

$$y = -2 + 2.5 = 0.5$$

إذن، مركز الدائرة الخارجية للمثلث ABC هو: $(4, 0.5)$

إجابة سؤال الإثراء، الدرس 3:



$AM = 1.5BC$ (معطى)

$PM = \frac{1}{3}AM \Rightarrow PM = 0.5BC$

(AM قطعة متوسطة في المثلث ABC).

$PM = BM = MC$ (كل منها يساوي نصف طول $\overline{BC}$).

إذن، المثلثان MCP، وMPB متطابقا الضلعين، وزوايا القاعدة فيهما متطابقة.

فإذا كان $m\angle MCP = x$، فإن $m\angle MPC = x$ (زاويتا قاعدة في مثلث متطابق الضلعين).

وإذا كان $m\angle MBP = y$، فإن $m\angle MPB = y$ (زاويتا قاعدة في مثلث متطابق الضلعين).

إذن $m\angle BPC = x + y$

إذن، مجموع قياسات زوايا المثلثين MCP، و MPB يساوي $360°$

أي أنّ: $x + x + y + y + m\angle BMC = 360°$

لكن $m\angle BMC = 180°$

إذن، $x+x+y+y+180° = 360°$

$2x + 2y = 180°$

$x + y = 90°$

إذن، $m\angle BPC = 90°$

أي أن: $BN \perp CL$

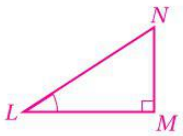
إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 4:

31)

1) $\sin X = \cos X = \sin Z = \cos Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

لأن الضلع المقابل يطابق الضلع المجاور لكلا الزاويتين X وَ Z

2) $\tan X = \tan Z = 1$؛ لأن الضلع المقابل يطابق الضلع المجاور لكلا الزاويتين X وَ Z.



34) $\sin L = \frac{NM}{NL}$

نعلم أنّ: $NM < NL$

وبالقسمة على NL ينتج أنّ: $\frac{NM}{NL} < 1$

وبتعويض $\sin L$ بدل $\frac{NM}{NL}$ ينتج أنّ: $\sin L < 1$

35) $\cos L = \frac{ML}{NL}$

نعلم أنّ: $ML < NL$

وبالقسمة على NL ينتج أنّ: $\frac{ML}{NL} < 1$

وبتعويض $\cos L$ بدل $\frac{ML}{NL}$ ينتج أنّ: $\cos L < 1$

36) نلاحظ من المثلث الأيمن أنّ: $\tan A = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$

كما نلاحظ من المثلث الأيسر أنّ: $\sin A = \frac{a}{c}$، وأنّ: $\cos A = \frac{b}{c}$

وبالتعويض نجد أنّ: $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

www.jnob-jo.com

المملكة الأردنية الهاشمية
منتديات صقر الجنوب