المركز الوطني
لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum
Development

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب التمارين

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي

يوسف سليمان جرادات

نور محمد حسان

إبراهيم عقلة القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2025/4)، تاريـخ 2025/5/6 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2025/121)، تاريـخ 2025/6/17 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2025 / 2026 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2025.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 788 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/370)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	رياضيات الأعمال، كتاب التمارين: الصف الثاني عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الأول
إعداد / هيئة	الأردن، المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمّل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوي مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم العلمي: أ. د. محمد صبح صبابحة
التحكيم التربوي: أ. د. خالد محمد أبو اللوم
التصميم الجرافيكي: راكان محمد السعدي
التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1446 هـ / 2025 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 1 المصفوفات

أستعد لدراسة الوحدة **6**

الدرس 1 مُقدِّمة في المصفوفات 11

الدرس 2 العمليات على المصفوفات 12

الدرس 3 ضرب المصفوفات 14

الدرس 4 المُحدِّدات وقاعدة كريمر 16

الدرس 5 النظير الضربي للمصفوفة 18

قائمة المحتويات

الوحدة 2 الخوارزميات ونظرية المُخطَّطات

أستعد لدراسة الوحدة **20**

الدرس 1 الخوارزميات 22

الدرس 2 خوارزميات تعبئة الصندوق 25

الدرس 3 المُخطَّطات 28

الدرس 4 أنواع خاصة من المُخطَّطات 31

الدرس 5 مُخطَّطات أويلر 34

الوحدة 3 البرمجة الخطِّية

أستعد لدراسة الوحدة **36**

الدرس 1 حلُّ نظام متباينات خطِّية بمُتغيِّرين بيانيًّا 40

الدرس 2 البرمجة الخطِّية 41

أوراق الرسم البياني 42

الوحدة 1: المصفوفات

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المُعطى.

- **تبسيط مقادير عددية**

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $4(-1)+3(6)-5(8)$
2. $3(4-(-2))+5(-3+8)$
3. $9(7-4)+2(-4)^2$
4. $4(7+6-2)-2(-3+9-(-2))$
5. $4(-3)(5)+6(-2)(-8)+0(4)(-3)$
6. $2(3(-4)-5(-6))-3(5(-2)-6(3))$

مثال: أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\mathbf{5(4(-2)-3(-6))}$

$5(4(-2)-3(-6))$	المقدار المُعطى
$=5(-8+18)$	بتبسيط ما في داخل الأقواس
$=5(10)$	بتبسيط ما في داخل الأقواس
$=50$	بالضرب

b) $\mathbf{4(-2)^3-2(-7+3)}$

$4(-2)^3-2(-7+3)$	المقدار المُعطى
$=4(-8)-2(-4)$	بتبسيط ما في داخل الأقواس، وحساب القوى
$=-32+8$	بالضرب
$=-24$	بالجمع

الوحدة 1: المصفوفات

• حلُّ المعادلة الخطِّية بمُتغيِّر واحد

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

7 $7x - 6 = 18$

8 $-5x + 3 = 2x + 8$

9 $2(x - 5) + 6x = 8$

10 $38 + 7k = 8(k + 4)$

مثال: أحُلُّ المعادلة: $2(3x + 4) = 4x + 17$

المعادلة الأصلية	$2(3x + 4) = 4x + 17$
خاصية التوزيع	$6x + 8 = 4x + 17$
أطرح 8 من طرفي المعادلة	$6x + 8 - 8 = 4x + 17 - 8$
أطرح $4x$ من طرفي المعادلة	$6x - 4x = 4x - 4x + 9$
أَقسِم طرفي المعادلة على 2	$\frac{2x}{2} = \frac{9}{2}$
أُبسِّط	$x = 4.5$

• حلُّ المعادلات التربيعية بمُتغيِّر واحد

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

11 $x^2 + 6x = 0$

12 $x^2 - 3x - 4 = 0$

13 $10x^2 + 3x - 4 = 0$

14 $x^2 - 2x = 4$

مثال: أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

المعادلة المُعطاة $2x^2 - 3x - 2 = 0$

بالتحليل إلى العوامل $(2x + 1)(x - 2) = 0$

خاصية الضرب الصفري $2x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$

بحلِّ كل معادلة لِـ x $x = -\frac{1}{2} \qquad x = 2$

b) $x^2 - 4x = 4$

المعادلة المُعطاة $x^2 - 4x = 4$

بإكمال المُربَّع $x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$

بتحليل المُربَّع الكامل $(x - 2)^2 = 8$

بأخذ الجذر التربيعي $x - 2 = \pm\sqrt{8}$

بإضافة 2 إلى الطرفين $x = 2 \pm \sqrt{8}$

إذن، للمعادلة حلّان، هما: $x = 2 - \sqrt{8}$, $x = 2 + \sqrt{8}$.

c) $24x^2 + 17x - 20 = 0$

المعادلة المُعطاة $24x^2 + 17x - 20 = 0$

بالمقارنة مع الصورة العامة: $ax^2 + bx + c = 0$ $a = 24, b = 17, c = -20$

صيغة القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض $x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4(24)(-20)}}{2(24)}$

بالتبسيط $x = \frac{-17 \pm \sqrt{2209}}{48} = \frac{-17 \pm 47}{48}$

إذن، للمعادلة حلّان، هما: $x = -\frac{4}{3}$, $x = \frac{5}{8}$.

• حلُّ أنظمة معادلات خطّية بمُتغيِّرين بالحذف والتعويض

أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي:

16 $3x - 4y = 16$
$x = 2y - 3$

15 $x + 3y = 17$
$2x - 3y = -2$

مثال: أحُلُّ نظام المعادلات الآتي:

$$2x + 5y = 1$$
$$3x - y = -7$$

الطريقة (1): **استعمال الحذف.**

لحلِّ النظام باستعمال طريقة الحذف، أَضرِب طرفي المعادلة الثانية في 5، ثمَّ أجمع المعادلتين.

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 1 \\ 15x - 5y = -35 \\ \hline 17x \quad\quad = -34 \end{array}$$

بقسمة طرفي المعادلة الناتجة على 17، أجد أنَّ: $x = -2$.

بتعويض قيمة x في أيٍّ من المعادلتين الأصليتين (لتكن الأولى)، فإنَّ:

المعادلة الأولى	$2x + 5y = 1$
بتعويض $x = -2$	$2(-2) + 5y = 1$
بالضرب	$-4 + 5y = 1$
بإضافة 4 إلى طرفي المعادلة	$5y = 5$
بقسمة طرفي المعادلة على 5	$y = 1$

إذن، الحلُّ هو: $(-2, 1)$.

الطريقة (2): استعمال التعويض.

لحلِّ النظام باستعمال طريقة التعويض، أجعل أحد المُتغيِّرين موضوعًا لإحدى المعادلتين، ثمَّ أُعوِّض قيمته في المعادلة الأُخرى.

المعادلة الثانية	$3x - y = -7$
بطرح $3x$ من طرفي المعادلة	$-y = -7 - 3x$
بالضرب في -1	$y = 7 + 3x$
بالتعويض في المعادلة الأولى	$2x + 5(7 + 3x) = 1$
خاصية التوزيع	$2x + 35 + 15x = 1$
بجمع الحدود المُتشابِهة	$17x + 35 = 1$
بطرح 35 من طرفي المعادلة	$17x = -34$
بقسمة طرفي المعادلة على 17	$x = -2$

بتعويض $x = -2$ في المعادلة: $y = 7 + 3x$، فإنَّ: $y = 1$.

إذن، الحلُّ هو: $(-2, 1)$.

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

أُحدِّد رتبة كل مصفوفة ممّا يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

يُبيِّن الجدول المجاور الأسعار (بالقروش) لعدد من المشروبات في أحد المَحالِّ التجارية:

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازيٌّ	40	60	75
شاي	30	40	55
قهوة	50	70	90
عصير	65	90	125

7) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 3×4، ثمَّ أُسمّي المصفوفة P.

8) أجد العنصر p_{32}، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله.

9) ما رمز العنصر 55 في هذه المصفوفة؟

10) إذا كانت: $\begin{bmatrix} 5 & x+3 \\ 8 & 0 \\ 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ x+y & 0 \\ 1 & y+4 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y، و z.

خدمات حكومية: يُتوقَّع إنشاء مدارس ومراكز صِحِّية جديدة عام 2025م وعام 2026م في ثلاث محافظات كما هو مُبيَّن في الجدول المجاور:

	المدارس	المراكز الصِّحِّية
المحافظة 1	54	12
المحافظة 2	94	23
المحافظة 3	75	18

11) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 3×2

12) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

13) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

إذا كان: $D=\begin{bmatrix}-9 & 30 & 36\\ 12 & 15 & -24\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 8\\ 1 & 5 & 4\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}9 & 5\\ -3 & 1\\ 8 & 6\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 5 & 7\\ 3 & 6\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1. $A+B$
2. $B+C$
3. $C-D$
4. $B-A$
5. $4A$
6. $3A-2B$
7. $D+2C$
8. $-\frac{2}{3}D$

9. أكتب المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6}\end{bmatrix}$ في صورة: $A=kM$، حيث k عدد ثابت، وM مصفوفة عناصرها أعداد صحيحة.

10. إذا كانت: $\begin{bmatrix}9 & 3b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & 11\\ -4 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & a\\ -2 & -8\end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb، وc، وd.

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

11 إذا كانت: $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

12 إذا كانت: $3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة B.

13 أجد قيمة كلٍّ من x، وy التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$x\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (3-y) & -7 \end{bmatrix}$$

14 **صناعة:** يُبيِّن الجدول الأيسر عدد ما أنتجته 3 مصانع لإحدى الشركات من 3 طرازات لأجهزة التكييف المنزلي في النصف الأوَّل من عام 2020م، ويُبيِّن الجدول الأيمن عدد أجهزة التكييف المنزلي المُنتَجة في النصف الثاني من العام نفسه في هذه المصانع. أكتب مصفوفة تُمثِّل عدد ما أنتجه كل واحد من هذه المصانع الثلاثة من طرازات أجهزة التكييف المنزلي عام 2020م.

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	850	1200	670
المصنع 2	540	860	530
المصنع 3	620	750	490

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	700	1300	670
المصنع 2	650	1000	890
المصنع 3	480	900	540

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

إذا كانت $A_{5\times3}$، وكانت $B_{2\times3}$، وكانت $C_{3\times5}$، فأُحدِّد عمليات الضرب المُمكِنة ممّا يأتي، ثمَّ أجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) AB 2) AC 3) CA 4) BC 5) CB

إذا كان: $D=\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&2\\-4&3\\1&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&-2\\-4&1&7\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}3&-2\\1&4\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

6) AB 7) BA 8) BC

9) CB 10) BD 11) $2A+3BC$

12) A^2 13) A^3 14) $(CB)^2$

15) إذا كانت: $\begin{bmatrix}1&3\\x&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-7\\8&-3\end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

16) أجد ناتج: $\begin{bmatrix}3&2&-4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5&4\\1&2\\3&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6&2\\-3&5\end{bmatrix}$.

17) إذا كان: $B=\begin{bmatrix}1&0\\\sqrt{3}&-1\end{bmatrix}$، فأجد B^3.

18) إذا كان: $A=\begin{bmatrix}6\\18\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&4\\2&-1\end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة C، بحيث يكون $A+C=BC$.

الدرس 3

يتبع

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

مبيعات: يُبيِّن الجدول الأيمن قيمة مبيعات أحذية الرجال والنساء والأطفال (بالدنانير) لثلاثة مندوبي مبيعات، ويُبيِّن الجدول الأيسر نسب العمولة القديمة والجديدة للمبيعات. أُجيب عن السؤالين التاليين اعتمادًا على المعلومات الواردة في هذين الجدولين:

	أحذية الرجال	أحذية النساء	أحذية الأطفال
المندوب 1	1200	2300	900
المندوب 2	3100	2800	1100
المندوب 3	3700	2600	800

	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
أحذية الرجال	9%	9.5%
أحذية النساء	9%	10%
أحذية الأطفال	13%	12%

19 أجد المصفوفة التي تُمثِّل ما يجنيه كلٌّ من المندوبين الثلاثة وَفق النسبة الجديدة والنسبة القديمة.

20 أُحدِّد المندوب الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

أُحدِّد إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

21 إذا أمكن إيجاد AB وBA، فإنَّ المصفوفة A والمصفوفة B مُربَّعتان.

22 إذا كان AB مصفوفة صفرية، فإنَّ A مصفوفة صفرية، أو B مصفوفة صفرية.

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

7) إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من $|AB|$، و$|BA|$.

8) إذا كانت: $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$، فأجد قيمة x.

9) إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^2، ثمَّ أُبيِّن علاقتها بمُحدِّدة A.

10) تُعطى معادلة المســتقيم المارِّ بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ بالقاعدة: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. أستعمل هذه القاعدة لإيجاد معادلة المستقيم المارِّ بالنقطتين $(2, -5), (-1, 3)$.

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال قاعدة كريمر:

11 $3x - 5y = 22$
$2x + y = 6$

12 $3y + 5x = 7$
$2x - 4y = 8$

13 $3x = y + 10$
$4y = 6 + 5x$

14 حلَّت سلمى نظامًا من معادلتين خطِّيتين بالمُتغيِّرين x، وy باستعمال قاعدة كريمر، فوجدت أنَّ: $x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{D}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{D}$. ما قيمة كلٍّ من x، وy؟

15 أجد مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه: $A(-2, 5), B(7, 11), C(1, 15)$ باستعمال المُحدِّدات.

16 **نقود:** يوجد في صندوق مُحاسِب 75 ورقة نقد أردنية من فئة الدينار وخمسة الدنانير وعشرة الدنانير، تبلغ قيمتها الإجمالية 460 JD. إذا كان عدد أوراق النقد من فئة خمسة الدنانير يساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار، فأجد عدد ما في الصندوق من أوراق النقد لكل فئة باستعمال قاعدة كريمر.

الدرس 5

النظير الضربي للمصفوفة
Multiplicative Inverse of Matrix

أُبيِّن إذا كانت كل مصفوفتين ممّا يأتي تُمثِّل إحداهما نظيرًا ضربيًّا للأُخرى:

1) $A=\begin{bmatrix}8 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -5 & 8\end{bmatrix}$

2) $F=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & 5\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}0.25 & -0.25\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

أُبيِّن إذا كانت كلٌّ من المصفوفات الآتية مُنفرِدة أو غير مُنفرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي لغير المُنفرِدة منها:

3) $M=\begin{bmatrix}4 & -10\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

4) $N=\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 6 & 2\end{bmatrix}$

5) $R=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

أحُلُّ أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظير الضربي:

6) $\begin{aligned}-2x+y&=13\\ x-2y&=-11\end{aligned}$

7) $\begin{aligned}4x+5y&=22\\ 3x+4y&=17\end{aligned}$

8) $\begin{aligned}3x-8y&=34\\ 2y-4x-28&=0\end{aligned}$

9) أجد قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix}x & 1\\ 15 & x+2\end{bmatrix}$ مُنفرِدة.

10) إذا كان: $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^{-1}، ثمَّ أُبيِّن العلاقة بين $|A|$ و $|A^{-1}|$.

النظير الضربي للمصفوفة
Multiplicative Inverse of Matrix

11 إذا كان A و B مصفوفتيــن من مُربَّعتين من الرتبــة 2×2، وكان: $AB = B^5A$، وكان: $B^6 = I$، حيث I المصفوفة المُحايِدة، فأُثبِت أنَّ: $B(AB) = A$.

12 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، وكان B مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2، حيث: $BA^2 = A$، فأجد المصفوفة B.

13 إذا كانت: $B = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$، حيث: $a \neq \frac{-25}{6}$، فأجد قيمة a التي تجعل $B = B^{-1}$.

14 **تغذيــة:** تُخطِّــط اختصاصيــة تغذيــة نظامًــا غذائيًّــا للاعــب كــرة قــدم، بحيــث يتيــح لــه اســتهلاك 3600 ســعرة حراريــة يوميًّــا؛ بــأنْ يــأكل 750 g مــن البروتينــات والكربوهيــدرات والدهــون كل يــوم. إذا كان الغــرام الواحــد لــكلٍّ مــن البروتينــات والكربوهيــدرات يُــزوِّد الجســم بنحــو 4 ســعرات، وكان الغــرام الواحــد مــن الدهــون يُــزوِّد الجســم بنحــو 9 ســعرات، وبلغــت نســبة الســعرات المُقــرَّرة التــي مصدرهــا البروتينــات والدهــون نحــو 60%؛ فأكتــب معادلــة مصفوفيــة، ثــمَّ أحُلُّهــا لإيجــاد مقــدار مــا يتناولــه هــذا اللاعــب مــن البروتينــات والكربوهيــدرات والدهــون يوميًّــا.

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المُعطى.

- **إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة**

أجد الوسط الحسابي للأعداد المُعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

1. 89, 90, 95, 72, 83, 100, 94

2. 345, 279, 583, 404, 556, 702, 636

3. 78, 82, 85, 74, 98, 90, 80, 62, 71, 91

4. 24.6, 20.9, 25.5, 26.9, 27.1, 22.36

مثال: أجد الوسط الحسابي للأعداد الآتية: **3, 12, 13, 11, 16, 3, 12**

بإيجاد مجموع القِيَم $3 + 12 + 13 + 11 + 16 + 3 + 12 = 70$

بقسمة المجموع على عدد القِيَم $\bar{x} = \frac{70}{7} = 10$

إذن، الوسط الحسابي هو: 10

• حلُّ مسألة باستعمال خُطَّة التخمين والتحقُّق

أحُلُّ كُلًّا من المسائل الآتية باستعمال خُطَّة التخمين والتحقُّق:

5 يزيد عُمْر سماح على عُمْر أختها سهى 4 سنوات. إذا كان مجموع عُمْريهما 20 سنة، فكم سنةً عُمْر كلٍّ منهما؟

6 تصدَّق شخص بمواد تموينية على 8 فقراء؛ بأنْ أعطى كُلًّا منهم كيس سُكَّر ثمنه 4 JD، أو كيس أَرُز ثمنه 7 JD، وكان ثمن الأكياس جميعها 41 JD. ما عدد الأكياس التي وزَّعها الشخص من كل نوع؟

7 قطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها مِثْلا عرضها. إذا كان محيطها 210 m، فكم مترًا يبلغ كلٌّ من طولها وعرضها؟

مثال: ذهب 40 شخصًا في رحلة سياحية إلى وادي رم، وكان رسم الاشتراك في الرحلة للكبار 20 JD للشخص الواحد، وللصغار 10 JD للشخص الواحد، وقد بلغ مجموع ما دفعه هؤلاء الأشخاص جميعًا 650 JD. أجد عدد المشاركين في الرحلة من الكبار، وعدد المشاركين فيها من الصغار.

أفترض أنَّ عدد الكبار x وعدد الصغار y، وأكتب مقدارًا جبريًّا يُمثِّل المبلغ الذي دفعه هؤلاء جميعًا للاشتراك في الرحلة، ثمَّ أُكمِل الجدول الآتي، وأُحدِّد الحالة التي يكون فيها مجموع ما دُفِع 650 JD.

أُخمِّن		أتحقَّق	
x	y	$20x + 10y$	
30	10	$20\ (30) + 10\ (10) = 700$	✗ أكبر من 650
26	14	$20\ (26) + 10\ (14) = 660$	✗ أكبر من 650
24	16	$20\ (24) + 10\ (16) = 640$	✗ أصغر من 650
25	15	$20\ (25) + 10\ (15) = 650$	✓ صحيح

إذن، شارك في الرحلة 25 شخصًا من الكبار و15 شخصًا من الصغار.

الدرس 1

الخوارزميات
Algorithms

يُمكِن إيجاد الجذر التربيعي لأيِّ عدد حقيقي موجب مُقرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين باستعمال الخوارزمية الآتية:

1. أُدخِل العدد N.
2. أجد: $S = \frac{N}{2}$.
3. أجد: $T = \frac{\frac{N}{S} + S}{2}$ مُقرَّبةً إلى أقرب منزلتين عشريتين.
4. إذا كانت $S = T$ بعد تقريب قيمة T إلى أقرب منزلتين عشريتين، فإنَّني أنتقل إلى الخطوة السابعة.
5. أضع قيمة T بدلًا من قيمة S.
6. أعود إلى الخطوة الثالثة.
7. أطبع قِيَم S مُقرَّبةً إلى أقرب منزلتين عشريتين.

أُطبِّق الخوارزمية السابقة لإيجاد الجذر التربيعي لكل عدد ممّا يأتي مُقرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) 7 2) 3 3) 11

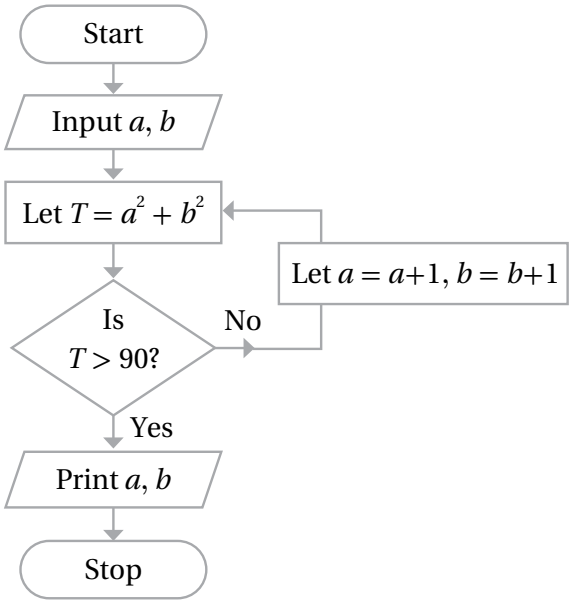
4) أُطبِّق الخوارزمية الآتية لإيجاد مُخرَجها عندما $P = 600,\ R = 4,\ T = 5$.

1. Input P, R, T
2. Let $I = (P \times R \times T)/100$
3. Let $A = P + I$
4. Let $M = A/(T \times 12)$
5. Print M
6. Stop

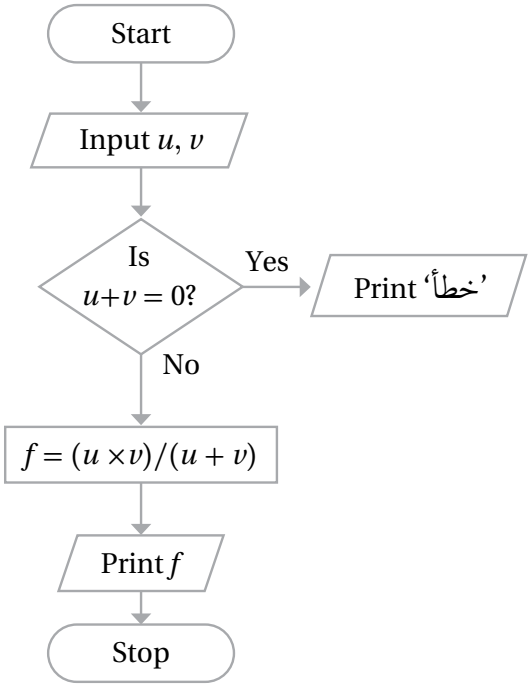
الخوارزميات
Algorithms

يتبع

5 أُطبِّق الخوارزمية الآتية لإيجاد مُخرَجاتها عندما $a = 3, b = 1$.



أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُطبِّق الخوارزمية على كلٍّ من قيمة u وقيمة v المُعطاة في ما يأتي لإيجاد المُخرَج:



6 $u = 8, v = 8$

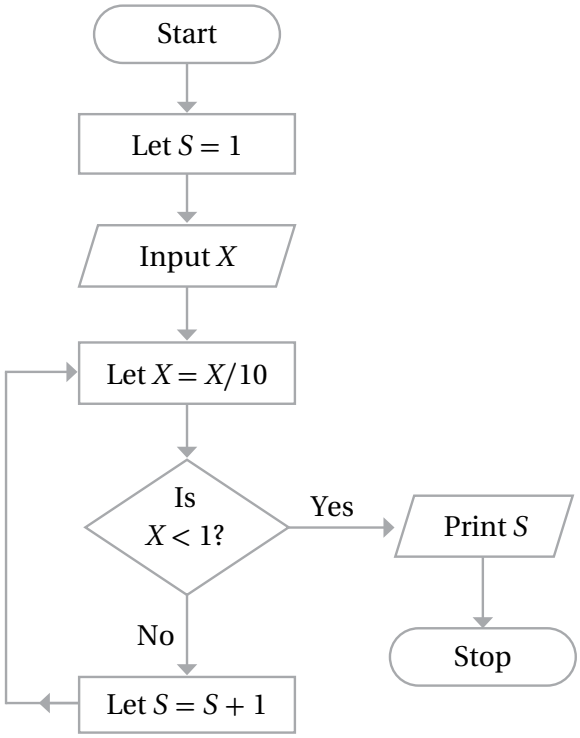
7 $u = 7, v = -7$

8 $u = 12, v = 4$

الخوارزميات
Algorithms

يتبع

أتأمَّـل الخوارزميـة الآتيـة المُمثَّلـة بمُخطَّـط سَـيْر العمليـات، ثـمَّ أُطبِّـق الخوارزميـة علـى قيمـة X المُعطـاة فـي مـا يأتـي لإيجـاد المُخـرَج:



9 $X = 48$

10 $X = 9170$

11 $X = -800$

الدرس 2

خوارزميات تعبئة الصندوق
Bin-Packing Algorithms

يُــراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 45 وحدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية:

16 23 18 9 4 20 35 5 17 13 6 11

1. أســتعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
2. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
3. أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

يُــراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 20 وحدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية:

5 1 8 13 16 5 8 2 15 12 10

4. أســتعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
5. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
6. أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
7. أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

الدرس 2

خوارزميات تعبئة الصندوق
Bin-Packing Algorithms

يتبع

تخزيــن بيانات: في ما يأتي ســعات 8 ملفات حاســوبية (بالميجابايت) يُــراد حفظها في أقراص تخزين، ســعة كلٍّ منها 50 ميجابايت:

23 29 11 34 10 14 35 17

8 أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باســتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولــى، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

9 أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باســتعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

10 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

خشب: في ما يأتي أطوال 10 قطع خشبية (بالمليمتر)، يرادُ قَصُّها من ألواح خشبية كبيرة تُباع بطول 1 m:

650 431 245 643 455 134 710 290 550 452

11 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع الخشــبية من الألواح باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الألواح اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الخشب.

12 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع الخشــبية من الألواح باســتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولــى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الألواح اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الخشب.

13 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

يتبع

خوارزميات تعبئة الصندوق
Bin-Packing Algorithms

شحن: في ما يأتي كتل 10 صناديق (بالكيلوغرام)، يُراد نقلها في شاحنات، تحمل كلٌّ منها كتلة إجمالية أقصاها 300 kg:

175 135 210 105 100 150 60 30 90 125

14 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

15 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

16 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

أنابيب: في ما يأتي أطوال 8 قطع بلاستيكية (بالسنتيمتر)، يرادُ قَصُّها من أنابيب، طول كلٍّ منها 50 cm:

25 22 30 18 29 21 27 21

17 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع من الأنابيب باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الأنابيب اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الأنابيب.

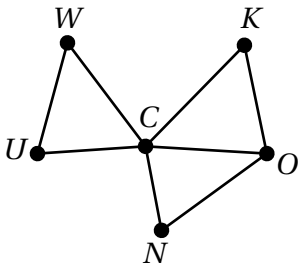
18 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع من الأنابيب باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الأنابيب اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الأنابيب.

19 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

الدرس 3

المُخطَّطات
Graphs

أتأمَّل الشـكل المجاور الذي يُبيِّن مُخطَّطًا للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

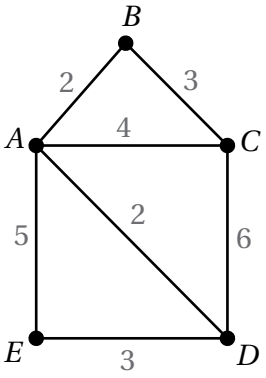


1. أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط؟

2. أَصِف مسارين مُحتمَلين يُمكِن بهما الوصول من المدينة W إلى المدينة O.

3. ما عدد المدن التي ترتبط بها المدينة C مباشرة؟

تكلفة: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لتكلفة استعمال سيّارة رُكّاب صغيرة للتنقُّل بين مناطق عِدَّة في مدينة عمّان، حيث يُمثِّل العدد على كل حافةٍ التكلفة بالدينار للتنقُّل بين كل منطقتين:



4. أجد تكلفة الذهاب من المنطقة C إلى المنطقة D مباشرة.

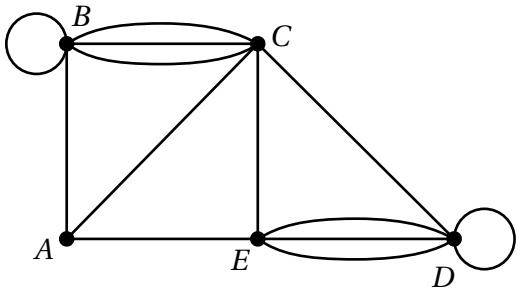
5. أُحدِّد أقل تكلفة للذهاب من المنطقة A إلى المنطقة D، ثمَّ أُحدِّد المسـار الذي اتخذته لذلك.

6. أُحدِّد أقل تكلفة للذهاب من المنطقة B إلى المنطقة E، ثمَّ أُحدِّد المسار الذي اتخذته لذلك.

يتبع

المُخطَّطات
Graphs

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:

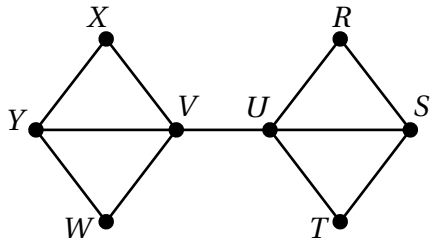


7 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

8 أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.

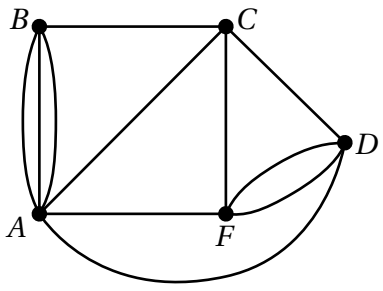
9 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

10 أُحـدِّد جميع الطرق التـي تصل بين الـرأس X والرأس T في المُخطَّط المجاور.

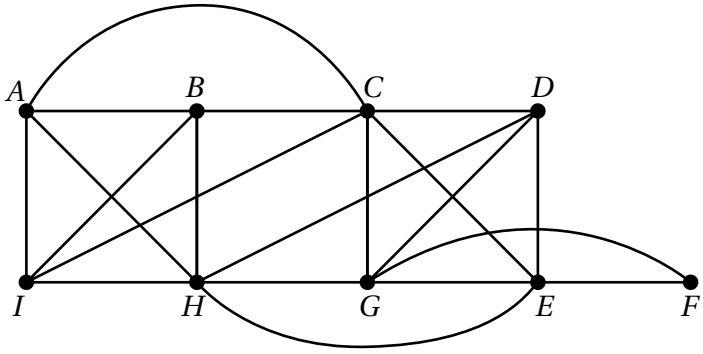


أجد مجموع درجات الرؤوس في كلٍّ من المُخطَّطين الآتيين:

11



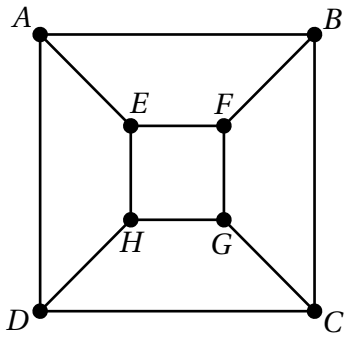
12



يتبع

المُخطَّطات
Graphs

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



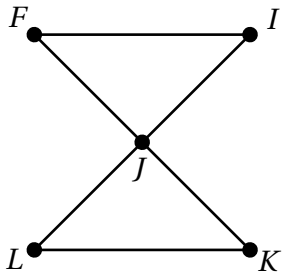
13 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

14 أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.

15 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

16 أُحدِّد في المُخطَّط ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون تبدأ بالرأس A، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت).

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



17 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

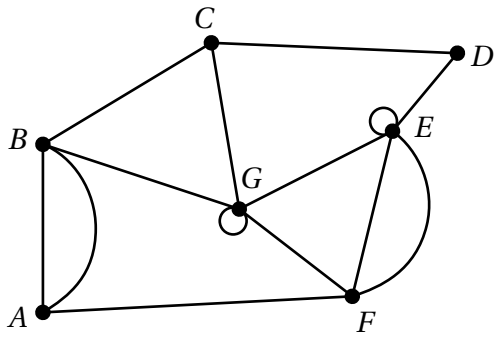
18 أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.

19 أُحدِّد في المُخطَّط ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر تبدأ بالرأس F.

الدرس 4

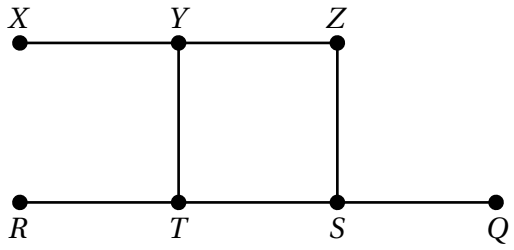
أنواع خاصة من المُخطَّطات
Special Types of Graphs

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



1. هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.
2. هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.
3. أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.
4. أرسم شجرتين للمُخطَّط.
5. أرسم شجرة شاملة للمُخطَّط.

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



6. هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.
7. هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.
8. هل المُخطَّط كامل؟ أُبرِّر إجابتي.
9. أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.
10. أرسم شجرتين للمُخطَّط.
11. أرسم شجرة شاملة للمُخطَّط.

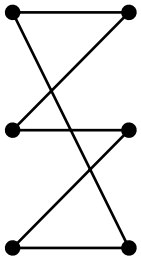
الدرس 4

أنواع خاصة من المُخطَّطات
Special Types of Graphs

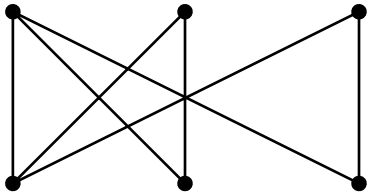
يتبع

أرسم المُخطَّط المُكمِّل لكلٍّ من المُخطَّطين الآتيين:

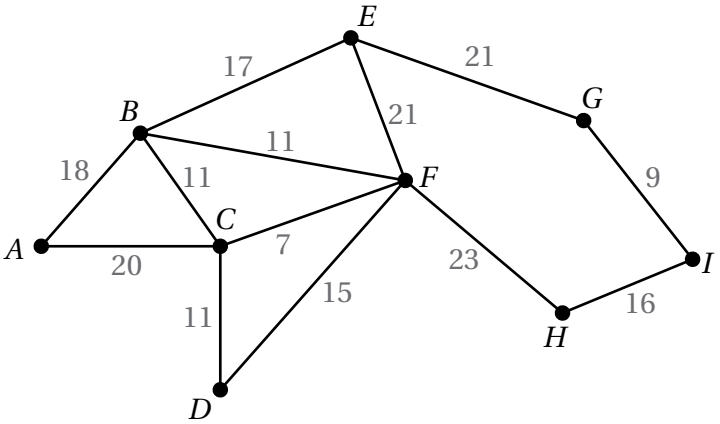
12



13



حدائق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للممرّات التي تصل بين المَحطّات الرئيسة في إحدى الحدائق، حيث يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الممرِّ (بالمتر) بين كل مَحطَّتين رئيستين. أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



14 أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.

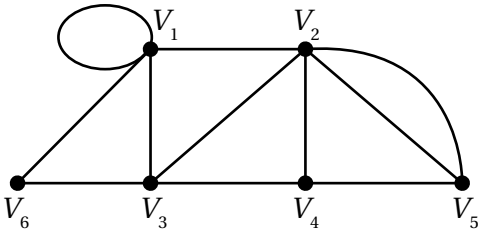
15 أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل تكلفة تَلزم لتبليط الممرّات للربط بين جميع المَحطّات الرئيسة في الحديقة، علمًا بأنَّ تكلفة تبليط المتر الطولي الواحد من الممرِّ 25 JD.

الدرس 4

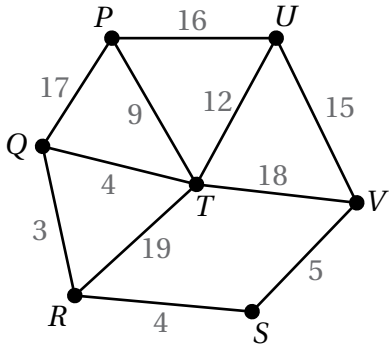
يتبع

أنواع خاصة من المُخطَّطات
Special Types of Graphs

16 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الجوار.



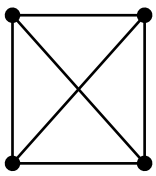
17 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الوزن.



18 أرسم المُخطَّط المُمثَّل في مصفوفة الجوار الآتية.

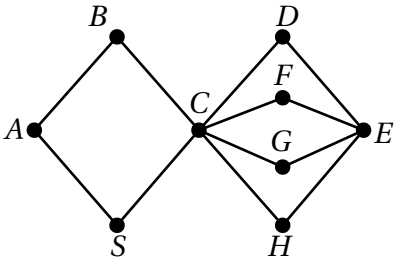
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

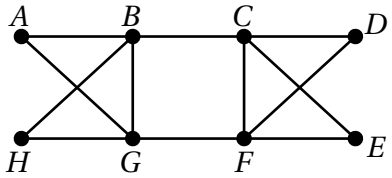
19 أرسم 6 أشجار شاملة للمُخطَّط الآتي.

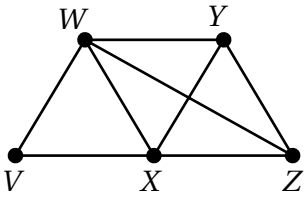


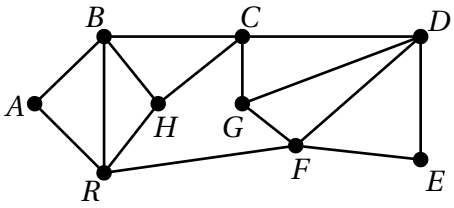
مُخطَّطات أويلر
Euler Graphs

أتأمَّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

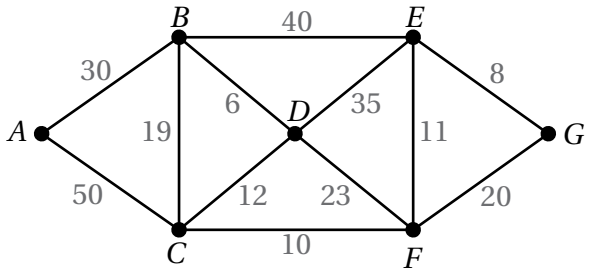
1


2


3


4


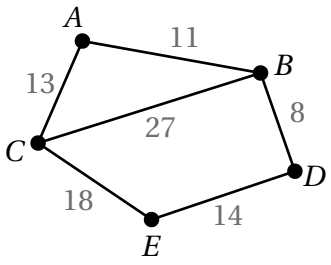
5 أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون الآتي، يبدأ بالرأس G، وينتهي به.



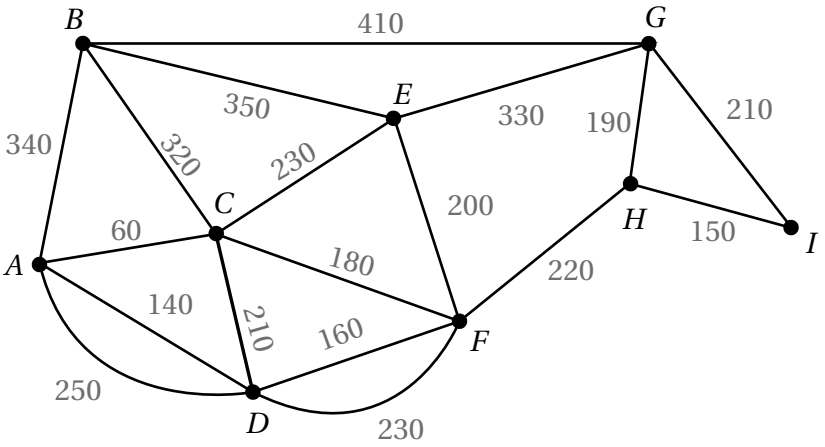
يتبع

مُخطَّطات أويلر
Euler Graphs

6 أجد طول أقصر مســـار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس C، وينتهي به.



7 **حدائق:** يُبيِّن الشكل التالي مُخطَّطًا للمســـارات في إحدى الحدائق العامة. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول المسار بالمتر. تريد المهندســـة الزراعية في الحديقة أنْ تســـير على كل مســـار فيها مَرَّة واحدة على الأقل يوميًّا، بَدْءًا بالنقطة A، وانتهاءً بها؛ لتفقُّد المزروعات. أجد طول أقصر مسار أويلري يُمكِن أنْ تمرَّ به المهندسة لإنجاز مهمتها.



الوحدة 3: البرمجة الخطّية

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المُعطى.

• استعمال المتباينات الخطّية بمُتغيّرين للتعبير عن موقف حياتي

1. **نجارة:** إذا علمْتُ أنَّ نجّارًا يريد شراء نوعين من الخشب، لا يزيد ثمنهما الكلي على 72 JD، ووُجِد أنَّ ثمن المتر الطولي من النوع الأوَّل 4 JD، ومن النوع الثاني 6 JD، فأكتب متباينة خطّية بمُتغيّرين تُمثِّل كمية الخشب التي يُمكِن للنجّار شراؤها من كل نوع.

2. **تسوق:** تريد سامية شراء عنب وتفّاح، بحيث لا يزيد المبلغ الذي تدفعه ثمنًا لكلا النوعين على 6 JD. إذا كان ثمن الكيلوغرام الواحد من العنب 1.5 JD، وثمن الكيلوغرام الواحد من التفّاح 1 JD، فأكتب متباينة خطّية بمُتغيّرين تُمثِّل عدد الكيلوغرامات التي يُمكِن لسامية أنْ تشتريها من كل نوع.

مثال: حقائب: يصنع جمال حقائب كبيرة وأُخرى صغيرة للسيِّدات؛ كي يبيعها في مَعرِض الحِرَف اليدويّة، وهو يحتاج إلى 3 أيام لصنع الحقيبة الصغيرة، و5 أيام لصنع الحقيبة الكبيرة. أكتب متباينة خطّية بمُتغيّرين تُمثِّل عدد الحقائب التي يُمكِن لجمال صنعها من كل نوع في 30 يومًا حدًّا أقصى قبل يوم افتتاح المَعرِض.

أفترض أنَّ عدد الحقائب الصغيرة هو x، وأنَّ عدد الحقائب الكبيرة هو y.

ومن ثَمَّ، فإنَّ عدد الأيام اللازمة لصنع الحقائب من كلا النوعين هو: $3x + 5y$، وهذا المجموع يجب ألّا يتجاوز 30 يومًا.

إذن، المتباينة التي تُمثِّل عدد الحقائب جميعًا، ويُمكِن لجمال صنعها قبل افتتاح المَعرِض، هي: $3x + 5y \leq 30$

أتذكّر

رموز المتباينات				
$\geq$	$\leq$	$>$	$<$	الرمز
• أكبر من أو يساوي • أكثر من أو يساوي • على الأقلِّ • لا يقلُّ عن	• أصغر من أو يساوي • أقلُّ من أو يساوي • على الأكثر • لا يزيد على	• أكبر من • يزيد على • أكثر من	• أصغر من • يقلُّ عن • أقلُّ من	بالكلمات

• تمثيل معادلة خطّية بمُتغيّرين في المستوى الإحداثي

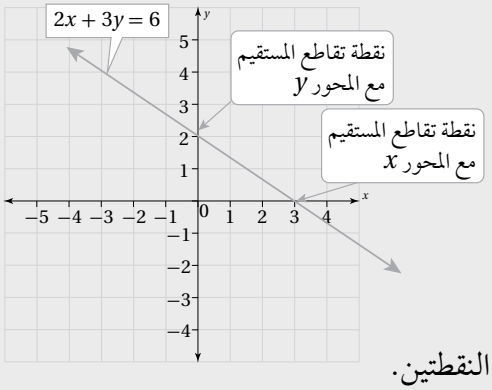
أُمثِّل كُلًّا من المعادلات الآتية في المستوى الإحداثي:

3. $x - 2y = 10$
4. $3x + y = 27$
5. $-7x - 2y = -14$

مثال: أُمثِّل المعادلة: $2x + 3y = 6$ في المستوى الإحداثي.

لتمثيل المعادلة الخطِّية، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y = 0$، ثمَّ أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x = 0$:

بتعويض $y = 0$ في المعادلة	$2x + 3(0) = 6$
بالتبسيط	$x = 3$
بتعويض $x = 0$ في المعادلة	$2(0) + 3y = 6$
بالتبسيط	$y = 2$



إذن، نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x هي $(3, 0)$، ونقطة تقاطعه مع المحور y هي $(0, 2)$.

لتمثيل المعادلة بيانيًّا، أرسم في المستوى الإحداثي مستقيمًا يمرُّ بهاتين النقطتين.

• حلُّ نظام مُكوَّن من معادلتين خطِّيتين بطريقة الحذف

أحُلُّ أنظمة المعادلات الخطِّية الآتية بطريقة الحذف:

8 $x - y = 5$
$x + 2y = -1$

7 $2x + y = 9$
$x - y = 0$

6 $x + y = 5$
$x - y = 1$

مثال: أحُلُّ نظام المعادلات الخطِّية الآتي بطريقة الحذف:

$$2x + y = 4$$
$$x + 3y = 7$$

المعادلة الأولى	$2x + y = 4$
بضرب المعادلة الثانية في العدد 2	$2x + 6y = 14$
بطرح المعادلتين	$-5y = -10$
بقسمة طرفي المعادلة على العدد -5	$y = 2$
بتعويض قيمة y في المعادلة الثانية	$x + 3(2) = 7$
بطرح العدد 6 من الطرفين	$x = 1$
حلُّ النظام	$(1, 2)$

الوحدة 3: البرمجة الخطّية

• تحديد إذا كان زوج مُرتَّب يُمثّل حلًّا لمتباينة خطّية بمُتغيّرين

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حلًّا للمتباينة: $x + 3y < 6$

9 $(0, 1)$ 10 $(-2, 4)$ 11 $(8, -1)$

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حلًّا للمتباينة: $-3x + 4y \geq 12$

12 $(-5, 3)$ 13 $(0, 2)$ 14 $(3, 7)$

مثال: **أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حلًّا للمتباينة: $3x + y < 7$:**

a) $(-3, 1)$

أُعوِّض الزوج المُرتَّب $(-3, 1)$ في المتباينة:

المتباينة المُعطاة $3x + y < 7$

بتعويض $x = -3, y = 1$ $3(-3) + 1 \overset{?}{<} 7$

الناتج صحيح ✓ $-8 < 7$

أُلاحِظ عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة أنَّ الناتج يكون صحيحًا.

إذن، الزوج المُرتَّب $(-3, 1)$ هو أحد الحلول المُمكِنة للمتباينة.

a) $(2, 4)$

أُعوِّض الزوج المُرتَّب $(2, 4)$ في المتباينة:

المتباينة المُعطاة $3x + y < 7$

بتعويض $x = 2, y = 4$ $3(2) + 4 \overset{?}{<} 7$

الناتج غير صحيح ✗ $10 < 7$

أُلاحِظ عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة أنَّ الناتج لا يكون صحيحًا.

إذن، الزوج المُرتَّب $(2, 4)$ ليس أحد الحلول المُمكِنة للمتباينة.

الوحدة 3: البرمجة الخطِّية

تمثيل المتباينات الخطِّية بمُتغيِّرين بيانيًّا

أُمثِّل كُلًّا من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي:

15 $y \leq 3 - 2x$

16 $x + y < 11$

17 $x - 2y < 0$

18 $4y - 8 \geq 0$

19 $3x - y \leq 6$

20 $2x + 5y < -10$

21 $-4x + 6y > 24$

22 $y < 3x + 3$

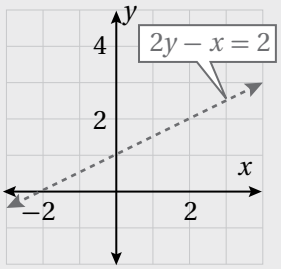
مثال: أُمثِّل المتباينة الخطِّية: $2y - x < 2$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أُمثِّل المستقيم الحدودي.

لتمثيل المستقيم الحدودي: $2y - x = 2$، أُنشِئ جدول قِيَم يُبيِّن نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين.

x	0	−2
y	1	0

أُعيِّن النقطتين $(0, 1)$ و $(-2, 0)$ في المستوى الإحداثي، ثمَّ أرسم مستقيمًا يمرُّ بهما. بما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم المستقيم الحدودي مُتقطِّعًا كما في الشكل المجاور.



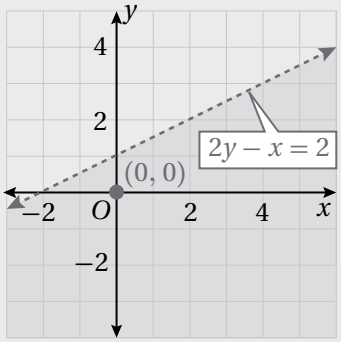
الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(0, 0)$، ثمَّ أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

المتباينة الخطِّية	$2y - x < 2$
بتعويض $x = 0, y = 0$	$2(0) - 0 \stackrel{?}{<} 2$
الناتج صحيح ✓	$0 < 2$

الخطوة 3: أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة.

بما أنَّ النقطة $(0, 0)$ هي أحد الحلول المُمكِنة للمتباينة، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل المجاور.



الدرس 1

حلُّ نظام متباينات خطِّية بمُتغيِّرين بيانيًّا

Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

أُمثِّل منطقة حلِّ كلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية، ثمَّ أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ:

1. $7x - 5y > 1$
   $x + 3y < 1$

2. $-8x - 5y \leq -3$
   $2x + 7y < 6$

3. $4x - 8y \geq 5$
   $-2y + x < -3$

4. $9x + 3y \leq 6$
   $3x + y \geq 2$

5. $-x - y \leq 2$
   $7x - 6y \geq 4$
   $2x + 5y > 4$

6. $9x + y < 8$
   $4x + 3y \geq 6$
   $-8x + y \geq -5$

7. $x - 3y < 1$
   $2x - 6y \geq 5$
   $4x - 12y \geq 9$

8. $-6x - 3y \geq -12$
   $3x + \frac{3}{2}y \geq 6$
   $x + \frac{1}{2}y \leq 2$

عمل خيري: **مع حاتم 20 دينارًا، أراد أنْ يشتري بها نوعين من وجبات الإفطار في شهر رمضان للتصدُّق بها، فوجد أنَّ سعر النوع الأوَّل (A) هو 1.5 دينار، وسعر النوع الثاني (B) هو ديناران، وقد قرَّر شراء أكثر من 9 وجبات من كلا النوعين:**

9. أكتب نظام المتباينات الخطِّية الذي يُمثِّل عدد الوجبات التي يُمكِن لحاتم شراؤها من كلا النوعين.

10. أُمثِّل نظام المتباينات بيانيًّا.

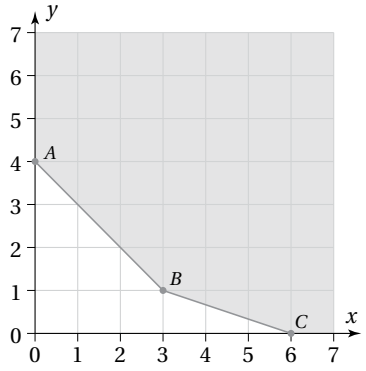
11. أجد ثلاثة حلول مُمكِنة لنظام المتباينات الآتي:

$$x + y \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \geq 0$$

الدرس 2

البرمجة الخطّية
Linear Programming

1 إذا كان التمثيل البياني للقيود الآتية كما في الشكل المجاور، فأجد إحداثيي النقطة (x , y) التي تجعل الاقتران: $Q = 4x + 2y$ أصغر ما يُمكِن:



$$x + y \geq 4$$
$$x + 3y \geq 6$$
$$x \geq 0 , y \geq 0$$

2 أجد إحداثيي النقطة (x , y) التي تجعل الاقتران: $W = x + 2y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 20$$
$$2x + y \leq 30$$
$$x \geq 0 , y \geq 0$$

3 **درّاجات هوائيــة:** يُنتِج مصنع نوعين من الدرّاجــات الهوائية A, B. ويُبيِّن الجدول المجاور عدد الساعات التي يستغرقها إنتاج كلٍّ من النوعين في أقسام المصنع الثلاثة. إذا كان عدد ســاعات العمل الأســبوعية في كل قسم لا يزيد على 40 h للتجميــع، و 48 h للدهان، و 13 h للتغليف، وكان ربح الدرّاجة الواحدة المَبيعة 45 دينارًا للنــوع A، و30 دينارًا للنوع B، فكم درّاجة من كل نوع يتعيَّن على المصنع إنتاجها أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

القسم	النوع A	النوع B
التجميع	2 h	2 h
الدهان	4 h	1 h
التغليف	1 h	0.5 h

4 **صالــة زفاف:** أرادت فاطمة دعوة 250 شــخصًا إلــى حفل زفاف، وتعيَّن عليها اســتئجار طــاولات ليجلس حولها المدعوون. عرضت عليها صالة زفاف تأجيرها نوعين من الطاولات: طاولات مســتطيلة الشــكل تتسع لِـ 6 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 28 دينارًا، وطاولات دائرية الشكل تتسع لِـ 10 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 52 دينارًا. إذا كانت الصالة تســع 35 طاولة من كلا النوعين على الأكثر، وكان أكبر عدد يُمكِن توفيره من الطاولات المستطيلة الشكل 15 طاولة، فما عدد الطاولات التي يُمكِن لفاطمة استئجارها من كلا النوعين بأقل تكلفة مُمكِنة؟

المملكة الاردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته
نرحب بكم في
موقع ومنتديات صقر الجنوب التعليمية
منهاج المملكة الأردنية الهاشمية
ويسعدنا ويشرفنا ان نستمر معكم في تقديم
كل ما هو جديد للمنهاج المحدثة المطورة ولجميع
المستويات والمواد
ملفات نجمعها من كل مكان ونضعها لكم في مكان واحد
ليسهل تحميلها
علما ان جميع ما ننشر مجاني 100%

أخي الزائر - أختي الزائرة ان دعمكم لنا هو انمامكم لنا
فهو شرف كبير
صفحتنا على الفيس بوك هنا
مجموعتنا على الفيس بوك هنا
قناتنا على اليوتيوب هنا

جميع ملفاتنا نرفعها على مركز تحميل خاص في صقر الجنوب

نحن نسعى دائما الى تقديم كل ما هو أفضل لكم و هذا وعد منا ان شاء الله
شجعونا دائما حتى نواصل في العطاء و نسأل الله ان يوفقنا و يسدد خطانا

في حال واجهتك اي مشكلة في تحميل اي ملف من منتديات صقر الجنوب المنهاج الاردني
صفحة اتصل بنا