



الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

5
4
عام المجتمع
YEAR OF COMMUNITY
PEI UAE

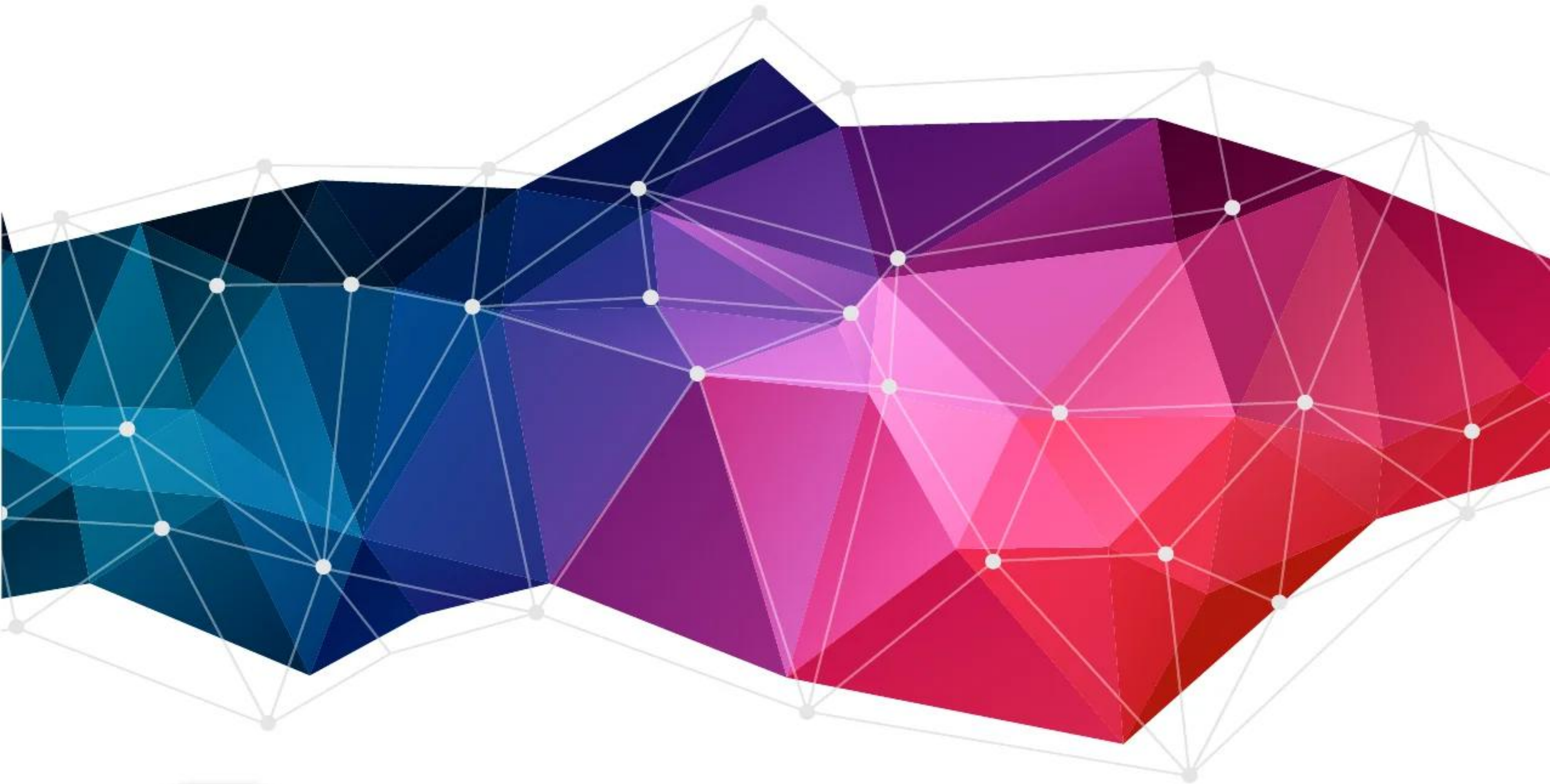
نحن
الإمارات
WE THE UAE
2031

نسخة المعلم

2025-2026

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة



الصف
12
تطبيقي

Mc
Graw
Hill

نسخة المعلم

McGraw-Hill Education

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

المسار التطبيقي



McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 12 Applied Math Vol.1

FM. Front Matter, from Integrated Math III © 2012

1. Exponential and Logarithmic Functions and Relations , from Algebra 2 Chapter 7 © 2014

2. Rational Functions and Relations, from Integrated Math III Chapter 7 © 2012

3. Sequences and Series, from Integrated Math III Chapter 9 © 2012

EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math III © 2012

صورة الغلاف: Shanvood/shutterstock

mheducation.com/prek-12



جميع الحقوق محفوظة © للعام 2020 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education. بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعت له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

النسخة الإلكترونية

طُبِعَ في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-44-709214-8 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-709214-7 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-44-709215-5 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-709215-5 (نسخة المعلم)

رقم النشر الدولي: 978-1-44-709213-1 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-709213-9 (نسخة الطالب)

17 18 19 20 21 22 XXX 9 8 7 6 5 4 3 2 1

ملخص المحتويات

الوحدة 1	الدوال و العلاقات الأسية واللوغاريتمية
الوحدة 2	الدوال والعلاقات النسبية
الوحدة 3	المتتاليات والمتسلسلات
الوحدة 4	التحويلات الهندسية والتناظر
الوحدة 5	الدوال المثلثية
الوحدة 6	المتطابقات والمعادلات المثلثية
الوحدة 7	الدوال من منظور التفاضل والتكامل

المؤلفون

يضمن مؤلفونا الرواد أن برامج Macmillan/McGraw-Hill و Glencoe/McGraw-Hill للرياضيات منظمة حقًا بشكل رأسي مترابط، مع وضع الغاية النهائية نصب الأعين - ألا وهي تحقيق النجاح في الرياضيات المتكاملة وما بعدها. ومن خلال «التخطيط عكسيًا» للمحتوى المأخوذ من برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامجنا المتعلقة بالرياضيات موضحة بشكل جيد في مصفوفة المدى والتتابع.

المؤلفون الرواد

دكتور. جيه إيه كارتز. المدير مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية لينكولنشاير، إلينوي مجالات الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية اليدوية لتصوير المفاهيم وتحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية	دكتور جليبرت جيه كوفاس. أستاذ تعليم الرياضيات جامعة ولاية تكساس - سان ماركوس سان ماركوس، تكساس مجالات الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات ثرية رياضيًا إلى جانب التمثيلات الرياضية
الدكتور روجر داي، مجاز في التعليم من المجلس الوطني رئيس قسم الرياضيات مدرسة بونتياك تاوشيب الثانوية بونتياك، إلينوي مجالات الخبرة: فهم الاحتمالات والإحصائيات وتطبيقها، إلى جانب تدريس الرياضيات لمعلمي الصفوف	الدكتورة كارول مالوي. أستاذ مساعد جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل تشابيل هيل، نورث كارولينا مجالات الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي؛ نجاح الطلاب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

روث كيسي مستشار الرياضيات مدرس إقليمي مشارك جامعة كنتاكي ليكسينغتون، كنتاكي مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني والرياضيات	جيرى كامنز مستشار الرياضيات الرئيس السابق للمجلس القومي لمشرفي الرياضيات ويسترن سبرينجز، إلينوي مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني والرياضيات
الدكتور بيرتشي هوليداي، دكتوراه في التعليم استشاري وطني في الرياضيات سيلفر سبرينغ، ماريلاند مجالات الخبرة: استخدام الرياضيات لنمذجة بيانات الحياة اليومية واستيعابها؛ وتأثير رسوم الجرافيك على فهم الرياضيات	بياتريس مور لاتشين مستشار الرياضيات هيوستن، تكساس مجالات الخبرة: المعرفة بالرياضيات؛ العمل بالتعاون مع متعلمي اللغة الإنجليزية

مؤلف مشارك

دينا زاك مطويات

مستشار تعليمي
شركة دينا مايت أكتيفيز
سان أنطونيو، تكساس

كان لهؤلاء الخبراء بالغ الأثر في تقديم مدخلات واقتراحات قيمة لتحسين مدى فاعلية تعليم الرياضيات.

الاستشاريون الأساسيون

فايكن هوفسباين

أستاذ الرياضيات
كلية ريو هوندو
ويتير، كاليفورنيا

جاي ماكيتجي

مؤلف واستشاري تعليمي
كولومبيا، ماريلاند

الاستشاريون

محتوى الرياضيات

الدكتور جرانت إيه فريزر

أستاذ الرياضيات
جامعة ولاية كاليفورنيا، لوس أنجلوس
لوس أنجلوس، كاليفورنيا

الدكتور آرثر كيه وايمان

أستاذ الرياضيات الفخري
جامعة ولاية كاليفورنيا، لونج بيتش
لونج بيتش، كاليفورنيا

الموهبة والنبوغ

شيلبي كي كول

باحث مساعد
جامعة كونيتيكت
ستورز، كونيتيكت

الجاهزية للجامعة

روبرت لي كيمبل، الابن

رئيس قسم الرياضيات والفيزياء
كلية وايك للتقنية المجتمعية
رالي، نورث كارولينا

الحاسبة البيانية

روث إم. كيسي

معلم وطني من الفئة الثالثة
فرانكفورت، كنتاكي

جيري كامنز

الرئيس السابق
المجلس القومي لمشرفي الرياضيات
ويسترن سبرينجز، إلينوي

التمرس في الرياضيات

روبرت إم كابرارو

أستاذ مساعد
جامعة تكساس إيه آند إم
كوليج ستیشن، تكساس

برنامج الإلحاق المتقدم

(Pre-AP)

ديكسي روس

معلم كبير في الإلحاق المتقدم
في الرياضيات
مدرسة بفلوغرفيل الثانوية
بفلوغرفيل، تكساس

القراءة والكتابة

ريليه كوسيت لينت

مؤلف واستشاري تعليمي
مورجانتاون، جورجيا

لين تي هافينز

مدير مشروع كريس
كاليسبيل، مونتانا

الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية

1



2. الاستعداد للوحدة 1

4. اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية 1-1

12. توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني اختيار النموذج الأمثل

14. حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية 1-2

20. اختبار منتصف الوحدة

21. خواص اللوغاريتمات 1-3

28. اللوغاريتمات العادية 1-4

35. توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

37. الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية 1-5

44. استكشف: مختبر ورقة البيانات المراجعة المركبة

45. استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية 1-6

التقويم

53. دليل الدراسة والمراجعة

57. تدريب على الاختبار

58. التحضير للاختبارات المعيارية

60. تدريب على الاختبار المعياري



الدوال والعلاقات النسبية

2

الوحدة

63 الاستعداد للوحدة 2

65 2-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

74 2-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

81 2-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

88 ■ اختبار منتصف الوحدة

89 2-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

97 📊 توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني للدوال النسبية

98 2-5 حل المعادلات والمتباينات النسبية

107 📊 توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات النسبية

التقويم

109 ■ دليل الدراسة والمراجعة

113 ■ تدريب على الاختبار

114 ■ التحضير للاختبارات المعيارية

116 ■ تدريب على الاختبار المعياري



المتتاليات والمتسلسلات

3 الوحدة

119	الاستعداد للوحدة 3
121	3-1 المتتاليات كدوال
128	3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
136	3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
143	■ اختبار منتصف الوحدة
145	3-4 نظرية ذات الحدين
154	3-5 الاستقراء الرياضي
التقويم	
159	■ دليل الدراسة والمراجعة
163	■ تدريب على الاختبار
164	■ التحضير للإختبارات المعيارية
166	■ تدريب على الاختبار المعياري



التحويلات الهندسية والتناظر

4

الوحدة

الاستعداد للوحدة 4

4-1 الإنعكاس

4-2 الإزاحة

الاستكشاف: مختبر الهندسة

4-3 الدوران

التوسع: مختبر الهندسة

■ اختبار منتصف الوحدة

الاستكشاف: مختبر برنامج الهندسة

4-4 تركيب التحويلات

التوسع: مختبر الهندسة

4-5 التناظر

التوسع: مختبر الهندسة

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني

4-6 عمليات تغيير الأبعاد (التمدد)

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة

■ تدريب على الاختبار

■ التحضير للإختبارات المعيارية

الدوال المثلثية

الاستعداد للوحدة 5

- 5-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة **الاستكشاف: مختبر ورقة البيانات** استكشاف المثلثات القائمة الخاصة
- 5-2 الزوايا وقياس الزوايا **التوسع: مختبر الهندسة** مساحات متوازيات الأضلاع
- 5-3 النسب المثلثية للزوايا العامة **قانون الـ Sine**
- 5-4 **الاستكشاف: مختبر الهندسة** المضلعات المنتظمة **قانون الـ Cosine**
- اختبار منتصف الوحدة
- 5-6 الدوال المثلثية الدائرية والدورية **التمثيل البياني للدوال المثلثية**
- 5-7 **الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني** التمثيلات البيانية المثلثية **إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية**
- 5-8 **الدوال المثلثية العكسية**
- 5-9 **التقويم**
- دليل الدراسة والمراجعة
- تدريب على الاختبار
- التحضير للإختبارات المعيارية
- تدريب على الاختبار المعياري



المتطابقات والمعادلات المثلثية

6

الوحدة

الاستعداد للوحدة 6

6-1 المتطابقات المثلثية

6-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

6-3 متطابقات مجموع زوايتين والفرق بينهما

■ اختبار منتصف الوحدة

6-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

■ الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات المثلثية

6-5 حل المعادلات المثلثية

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة

■ تدريب على الاختبار

■ التحضير للإختبارات المعيارية

■ تدريب على الاختبار المعياري

الدوال من منظور التفاضل والتكامل

الاستعداد للوحدة 7

7-1 الدوال

7-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

7-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

7-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

■ اختبار منتصف الوحدة

7-5 الدوال الأصلية والتحويلات

📊 التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات غير الخطية

7-6 العمليات على الدوال وتركيب الدوال

7-7 العلاقات والدوال العكسية

📊 التوسع: معمل تكنولوجيا الرسم البياني تمثيل المعكوسات بيانياً باستخدام

المعادلات الوسيطة

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة

■ تدريب على الاختبار

■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: معدل التغير عند نقطة

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

EM-1	الرموز
EM-2	القياسات
EM-3	العمليات والعلاقات الحسابية
EM-3	الصيغ والمفاهيم الجبرية
EM-5	الصيغ والمفاهيم الهندسية
EM-6	الدوال والمتطابقات المثلثية
EM-7	الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال
EM-7	النهايات والتفاضل والتكامل
EM-8	الصيغ والمفاهيم الاحصائية

التقويم التشخيصي
تدريب سريعالدرس
1-145 دقيقة: 1.5 يوم
90 دقيقة: 0.75 يومالتوسع
1-145 دقيقة: 0.5 يوم
90 دقيقة: 0.25 يومالدرس
1-245 دقيقة: يوم واحد
90 دقيقة: 0.75 يوم

العنوان

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مختبر تقنية التمثيل البياني:
اختيار النموذج الأمثلحل المعادلات والمتباينات
اللوغاريتمية

الأهداف

- إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً.

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المعادلة الملائمة الأفضل للدوال الأسية واللوغاريتمية.

- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- حل المتباينات اللوغاريتمية.

المفردات الأساسية

لوغاريتم logarithm
دالة لوغاريتمية
logarithmic functionمعادلة لوغاريتمية
logarithmic equation
متباينة لوغاريتمية
logarithmic inequalityالتقويم التكويني
اختبار منتصف الوحدة

الخطة الزمنية المُقترحة			
الفترة الزمنية	التدريس	المراجعة والتقييم	الإجمالي
45 دقيقة	8.5 أيام	يومان	10.5 يومًا
90 دقيقة	6 أيام	يوم واحد	7 أيام

الدرس 1-3 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.75 يوم		الدرس 1-4 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: 1.25 يوم		التوسع 1-4 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم		الدرس 1-5 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.75 يوم	
	خواص اللوغاريتمات		اللوغاريتمات العادية		مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية		الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية
	- تبسيط التعابير وإيجاد قيمها باستخدام خواص اللوغاريتمات. - حل معادلات لوغاريتمية باستخدام خواص اللوغاريتمات.		- حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية. - إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية باستخدام قانون تغيير الأساس.		استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية.		- إيجاد قيمة التعابير المشتملة على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي. - حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.
			لوغاريتم عادي common logarithm قانون تغيير الأساس Change of Base Formula				الأساس الطبيعي, e, natural base الدالة الأسية للأساس الطبيعي natural base exponential function لوغاريتم طبيعي natural logarithm

العنوان	الاستكشاف 1-6 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 1-6 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.75 يوم
الأهداف	استخدام ورقة البيانات لعرض نمو الاستثمار بمرور الزمن.	- استخدام اللوغاريتمات لحل مسائل مشتملة على نموًا واضمحلالًا أسّيًا. - استخدام اللوغاريتمات لحل مسائل مشتملة على نموًا لوجيستيًا.
المفردات الأساسية		معدل النمو المستمر rate of continuous growth معدل الاضمحلال المستمر rate of continuous decay نموذج النمو اللوجيستي logistic growth model
		التقويم الختامي دليل الدراسة والمراجعة تدريب على الاختبار

مهارات دراسية

يمكن مساعدة الطلاب على فهم الفروق بين اثنين أو أكثر من المفاهيم المتشابهة من خلال خريطة مقارنة. اعرض للطلاب نموذجاً لهذه الخريطة والتي تقارن بين النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي في الدرس 1-1. أثناء دراسة الوحدة 1، اطلب من الطلاب العمل في مجموعات متعاونة لتصميم خرائط مقارنة تعرض دوال أسّيّة ولوغاريتمية، ودوال أسّيّة للأساس e ودوال لوغاريتم طبيعي.

الدوال الأسّيّة	
النمو الأسّي $A(t) = a(1 + r)^t$ - متصلة، واحد لواحد، متزايدة $\{D\} = \text{كل الأعداد الحقيقية}$ $\{R\} = \text{الأعداد الحقيقية الموجبة}$ - خط تقارب أفقي	الاضمحلال الأسّي $A(t) = a(1 - r)^t$ - متصلة، واحد لواحد، متناقصة $\{D\} = \text{كل الأعداد الحقيقية}$ $\{R\} = \text{الأعداد الحقيقية الموجبة}$ - خط مقارب أفقي

تأسيس الاستقلال من خلال الإستراتيجيات التي يبتكرها الطلاب

ملاحظات

الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية

التقويم

1E

SE = كتاب الطالب، TE = كتاب المعلم

التشخيص	الوصفة
بداية الوحدة 1	
الاستعداد للوحدة 1 كتاب الطالب	الاستجابة للتدخل التقويمي كتاب المعلم
بداية كل درس	
السابق، الحالي، لماذا كتاب الطالب	كتاب الطالب

التقويم
التشخيصي

أثناء / بعد كل درس	
تمرين موجه كتاب الطالب، كل مثال التحقق من فهمك كتاب الطالب مسائل مهارات التفكير العليا كتاب الطالب مراجعة شاملة كتاب الطالب أمثلة إضافية كتاب المعلم انتبه! كتاب المعلم الخطوة 4، التقويم كتاب المعلم	التدريس المتميز كتاب المعلم
منتصف الوحدة	
اختبار منتصف الوحدة كتاب الطالب	
اختبار ما قبل الوحدة	
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة كتاب الطالب تدريب على الاختبار كتاب الطالب تدريب على الاختبار المعياري كتاب الطالب	

التقويم
التكويني

التقويم
الختامي

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

كلّف الطلاب بإجراء بحث عن جداول اللوغاريتمات العادية للأعداد سواء في ملاحق نصوص الجبر القديمة أو عبر الإنترنت. وتعاون مع الصف الدراسي في تعلم طريقة قراءة هذه الجداول واستخدامها. ثم اطلب من الطلاب استخدام الجداول لإيجاد قيمة عدد من اللوغاريتمات العادية، مثل $\log_{10} 125$. ثم اجعل الطلاب يقارنوا نتائجهم مع ما تلك التي سيحصلون عليها عند إيجاد قيم اللوغاريتمات نفسها باستخدام الآلة الحاسبة.

الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط البصري نظرًا لوجود العديد من الخواص الجديدة المقرر دراستها بهذه الوحدة، اقترح أن يصنع الطلاب ملصقات للخواص. وحثّهم على أن تكون مختصرة قدر الإمكان وأن يستخدموا الألوان لمساعدتهم على لمح طريقة عمل الخاصية سريعًا.

Properties of Logarithms

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a (M/N) = \log_a M - \log_a N$$

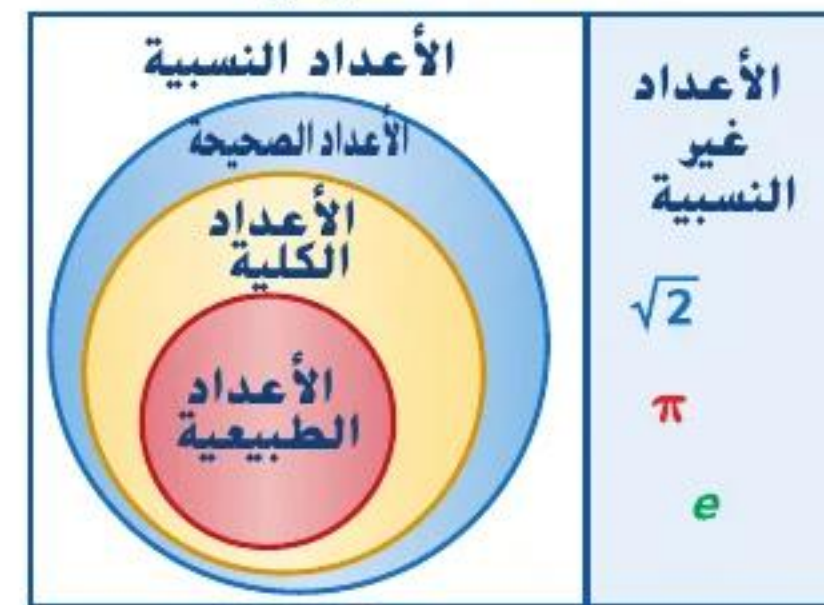
$$\log_a (M^p) = p \log_a M$$

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي كلّف مجموعات الطلاب الثنائية بالبداية بـ AED 10، واختيار نسبة مريحة ستتم مضاعفتها بصفة مستمرة، وحساب المبلغ الذي سيكون لديهم بعد 5، و 10، و 15، و 20 عامًا. بعد كل عملية حسابية، اطلب منهم تمثيل المبلغ المالي الذي لديهم على تمثيل بياني بالأعمدة.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

تعاون مع الصف الدراسي لإنشاء مخطط فن لمجموعة الأعداد الحقيقية. وبمجرد إنشائه، راجع مع الطلاب ما يعنيه أن يكون العدد نسبيًا، أو صحيحًا، أو كليًا، أو طبيعيًا، أو غير نسبي. اكتب مثالاً على كل نوع من أنواع الأعداد الحقيقية على المخطط. ثم تناقش حول e باعتباره عددًا غير نسبي.

الأعداد الحقيقية



التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

معاينة درس تلو الآخر

قبل الوحدة 1

الموضوعات ذات الصلة

- استخدام الأدوات، بما فيها خواص الأسس لتحويل التعابير لأبسط صورة

الوحدة 1

- تحليل حالة ممثلة بدالة أسية، وصياغة معادلة أو متباينة، وحل المسألة
- تطوير تعريف اللوغاريتمات عن طريق استكشاف العلاقات بين الدوال الأسية ومعكوساتها ووصفها
- استخدام الدوال الأصلية في استكشاف ووصف وتوقع آثار تغيرات المعلمة على التمثيلات البيانية للدوال الأسية واللوغاريتمية، ووصف الحدود في المجال والمدى، ودراسة سلوك خطوط التقارب
- تحديد حلول المعادلات الأسية واللوغاريتمية باستخدام التمثيلات البيانية والجداول والطرق الجبرية
- تفسير وتحديد مدى صحة حلول المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية

بعد الوحدة 1

الإعداد

- وصف الدوال الأصلية رمزيًا وبيانيًا، بما في ذلك $f(x) = \ln x$ و $f(x) = \log_a x$
- استكشاف مفاهيم الاتصال، والسلوك الطرفي، وخطوط التقارب وربط هذه الخواص بالدوال الممثلة بيانيًا وعدديًا
- استكشاف الخواص اللوغاريتمية والأسية

1-1 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

بصفة عامة، معكوس $y = b^x$ هو $x = b^y$. في المعادلة

$x = b^y$ ، يكون b هو الأساس ويُشار إلى y بأنه لوغاريتم x . وعادةً ما تُكتب هذه العلاقة في الصورة $y = \log_b x$ ، حيث $b > 0$ و $b \neq 1$. وتُقرأ y يساوي لوغاريتم x للأساس b ، ويُطلق عليها دالة لوغاريتمية.

التمثيل البياني لـ $f(x) = \log_b x$ متصل وواحد لواحد ومجاله هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة. المحور y هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني. التحويلات نفسها التي أُجريت على الدوال الأصلية والتي سبق دراستها، يمكن تطبيقها على التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

1-2 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

عند حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية، من الضروري تذكر أن من السمات المميزة للدالة اللوغاريتمية أن مجالها هو مجموعة كل الأعداد الموجبة. وهذا يعني أن لوغاريتم 0 أو لوغاريتم أي عدد سالب لأي أساس يكون غير مُعرّف. من الأهمية بمكان التحقق من الحلول الممكنة للمعادلات اللوغاريتمية في المعادلة الأصلية للتأكد من أنه لا ينتج عنها لوغاريتم 0 أو لوغاريتم عدد سالب. بالنسبة للمتباينات اللوغاريتمية، هذه الحقيقة لن تستبعد قيمة واحدة فحسب من مجموعة الحل، بل مدى من القيم.

1-3 خواص اللوغاريتمات

أُخترت اللوغاريتمات لتسهيل العملية الحسابية. وفي الواقع، كلمة لوغاريتم هي تقليص للكلمتين "الحساب المنطقي". وفقًا لخاصيتي ناتج الضرب والقسمة في اللوغاريتمات، عند استخدام اللوغاريتمات، يتغير الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح. على سبيل المثال، $\log_3(5 \cdot 7)$ هو مكافئ لـ $\log_3 5 + \log_3 7$. خاصية القوى في اللوغاريتمات تنص على أن لوغاريتم الأس هو ناتج ضرب اللوغاريتم في الأس. على سبيل المثال، $\log_5 3^7 = 7 \log_5 3$. إن استخدام خاصيتي اللوغاريتمات هاتين يساعد على حل المعادلات المشتتة على لوغاريتمات.

1-4 اللوغاريتمات العادية

اللوغاريتمات ذات الأساس 10 تُسمى لوغاريتمات عادية. العدد 10 لا يُكتب عادةً، أي أن $\log_{10} x$ يُكتب في الصورة $\log x$. معظم الآلات الحاسبة تتضمن زر **LOG** لإيجاد قيمة اللوغاريتمات العادية.

يمكن استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات والمتباينات الأسية التي لا يمكن كتابتها بسهولة في صورة قوى للأساس نفسه. لإيجاد حل لمعادلة مثل $5^x = 41$ ، خذ اللوغاريتم لكلا طرفي المعادلة ثم حل لإيجاد x .

إن قانون تغيير الأساس يجعل من الممكن إيجاد قيمة التعبير اللوغاريتمي لأي أساس عن طريق تحويل التعبير إلى تعبير آخر يشتمل على لوغاريتمات عادية.

1-5 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

الدالة الأسية التي لها الأساس e تُسمى دالة أسية للأساس الطبيعي. العدد e هو عدد غير نسبي قيمته $2.71828\dots$ اللوغاريتم الذي له الأساس e يُسمى لوغاريتم طبيعي، ويُرمز له علميًا إما بـ $\log_e x$ أو $\ln x$. وهي دالة عكسية للدالة الأسية للأساس الطبيعي. وتنطبق جميع خواص اللوغاريتمات من الدروس السابقة على اللوغاريتمات الطبيعية كذلك. وتتضمن معظم الآلات الحاسبة الوظيفة e^x لإيجاد قيمة تعابير الأساس الطبيعي والزر **LN** لإيجاد اللوغاريتم الطبيعي للعدد الحقيقي.

1-6 استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية

يمكن استخدام الدالتين $f(x) = ae^{kt}$ و $f(x) = ae^{-kt}$. حيث a هي القيمة الأولية، و t هو الزمن بالعام، و k هو ثابت، لتمثيل النمو والاضمحلال الأسّي على التوالي. والثابت k يمثل معدل النمو المستمر في نموذج النمو ومعدل الاضمحلال المستمر في نموذج الاضمحلال.

عندما يكون للنمو عامل مُحدد، فإنه يمكن استخدام نموذج نمو لوجيستي. مثل دالة النمو اللوجيستي $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-kt}}$ حيث t يمثل الزمن.

الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية

1

مشروع الوحدة

أهمية التعداد السكاني

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن الدوال الأسية واللوغاريتمية لإكمال مشروع.

يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة البيئية، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار العمل للتعلم في القرن الواحد والعشرين.

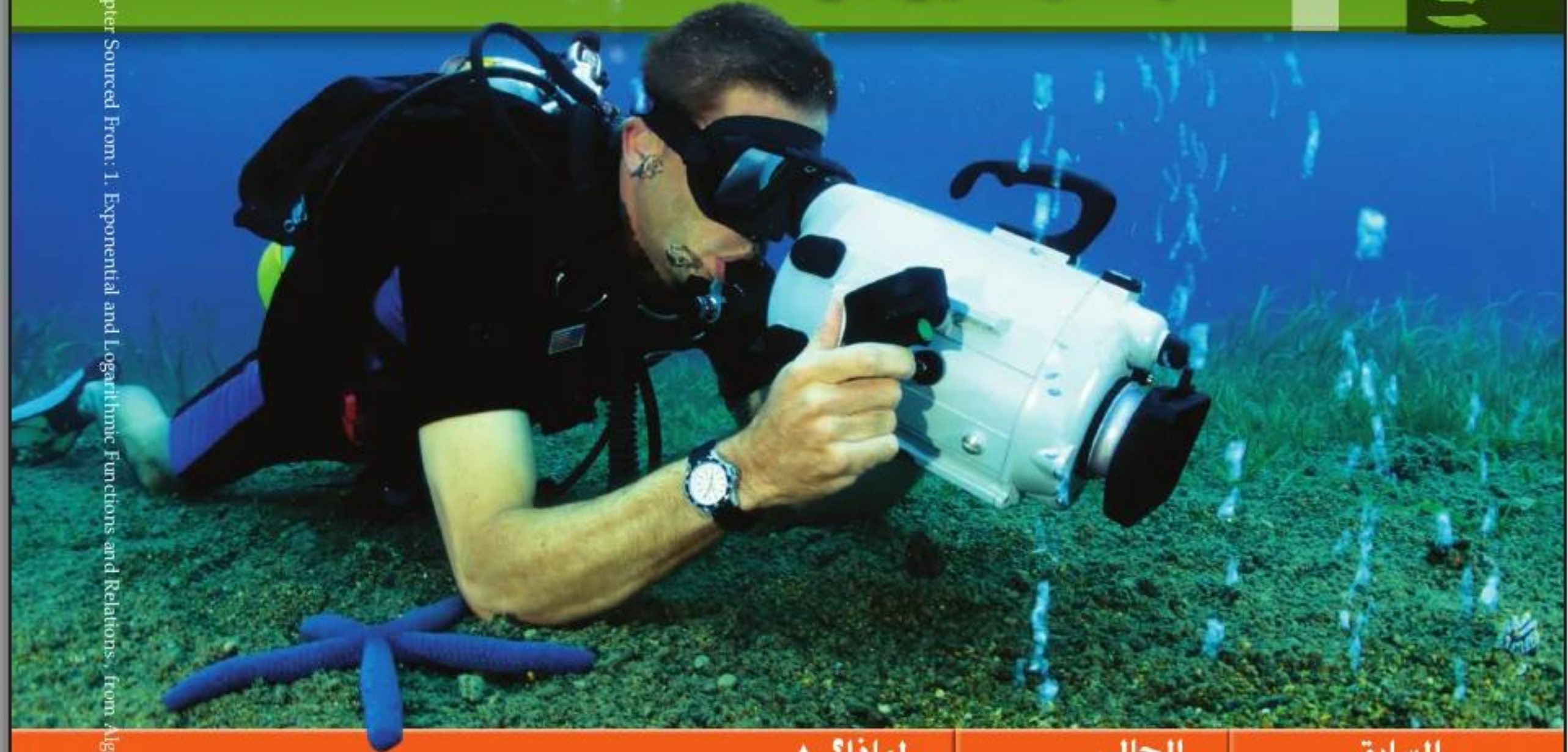
المفردات الأساسية قدم المفردات الأساسية في الوحدة متبعاً النظام التالي.

التعريف: في الدالة $x = b^y$ ، y يُسمى لوغاريتم x للأساس b . ويُكتب عادةً في الصيغة $y = \log_b x$ ويُقرأ "y يساوي لوغاريتم x للأساس b".

المثال: $3 = \log_2 8$

السؤال: كيف تكتب ما يلي في صيغة لوغاريتمية؟ $3^5 = 243$

$\log_3 243 = 5$



Chapter Sourced From: 1. Exponential and Logarithmic Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 7 © 2014

McGraw-Hill Education مؤسسة مخطوطة لكتاب الرياضيات وحقوق الطبع والنشر

لماذا؟ ▲	الحالي	السابق
● العلوم إن الرياضيات والعلوم علمان متلازمان. وسواءً أكنت تتعامل مع الكيمياء أم علم الحياء أم علم المتحجرات أم علم الحيوان أم علم الإنسان. فإنك ستحتاج إلى مهارات رياضية قوية. وفي هذه الوحدة، سوف تتعلم الجوانب الرياضية للعلوم كالفيروسات الحاسوبية وتعداد الحشرات ونمو الجراثيم والانقسام الخلوي وعلم الفلك والأعاصير والزلازل.	● بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على: ■ تمثيل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانياً. ■ حلّ المعادلات والمعادلات الأسية واللوغاريتمية. ■ حل المسائل التي تتضمن نموًا وتضاهلاً أسياً.	● لقد مثلت الدوال وتحويلات الدوال بيانياً.

إجابة إضافية (الاستعداد للوحدة 1)

14. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 6$: $f^{-1}(x)$ تمثل

عدد الإضافات التي يمكن لشخص الحصول عليها إذا أنفق x دراهم.

الأسئلة الأساسية

- كيف يمكنك اتخاذ قرار صائب؟ الإجابة النموذجية: حدّد الخيارات المتاحة، وقارن بين المزايا والعيوب في كل خيار، وحلّل العواقب، واختر الخيار الأمثل.
- ما العوامل التي يمكن أن تؤثر في اتخاذ القرار الصائب؟ الإجابة النموذجية: المدة الزمنية المتاحة، والعملية المُستخدمة، والبيئة، والأشخاص المشاركون، والخيارات المتاحة.

الاستعداد للوحدة

1

الكتاب الدراسي الاختياري

قم بحل التدريب السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة	تدريب سريع
حوّل لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغيّر يساوي صفر. $a^4 a^3 a^5$ a^{12} $(2xy^3z^2)^3$ $8x^3y^9z^6$ $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$ $\frac{-3x^6}{2y^3z^5}$ $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t^4}\right)^2$ $\frac{4r^4}{81n^4t^8}$ 5. الكثافة كثافة جسم تساوي كتلة الجسم مقسومة على حجمة. لدينا جسم كتلته 7.5×10^3 g وحجمه 1.5×10^3 cm³ ما هي كثافة الجسم؟ 5 g/cm³	مثال 1 (مستخدم في الدروس من 1-1 إلى 1-3) حوّل العلاقة التالية لأبسط صورة: $\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$ وافترض أنّ أيّ من المتغيرات لا يساوي الصفر. حوّل البسط لأبسط صورة باستخدام قاعدة قوة القوة وحوّل المقام لأبسط صورة باستخدام قاعدة ناتج ضرب القوى. $\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3} = \frac{a^6b^2c^4}{a^6b^3c^8} = \frac{1}{bc^4}$ أو $b^{-1}c^{-4}$ بسط العلاقة باستخدام قاعدة ناتج قسمة القوى.
جد معكوس كلّ من الدوال التالية. ثمّ مثل الدالة ومعكوسها بيانيًا. $f(x) = 2x + 5$ $f(x) = -4x$ $f(x) = \frac{x-1}{2}$ $f(x) = x - 6$ $f(x) = x - 3$ $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$ $y = \frac{1}{3}x + 4$ $f(x) = 2x + 5$ $g(x) = 2x - 5$ 14. لا الطعام تسعيرة قطعة البيتزا متوسطة الحجم بالجين في مطعم البيتزا 12 AED إضافةً إلى 2 AED لكل طبقة إضافية. فإذا كانت العلاقة $f(x) = 2x + 12$ تمثّل كلفة البيتزا المتوسطة التي تضم x طبقات، فجد $f^{-1}(x)$ واشرح معناها. انظر الهامش.	مثال 2 (مستخدم في الدرسين 1-2 و 1-3) جد معكوس $f(x) = 3x - 1$. الخطوة 1 استبدل $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية، $f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$. الخطوة 2 بدّل بين x و y: $x = 3y - 1$. الخطوة 3 حلّ لإيجاد قيمة y. بالمعكوس $x = 3y - 1$ بإضافة 1 إلى كل طرف. $x + 1 = 3y$ بقسمة كل طرف على 3. $\frac{x+1}{3} = y$ بسّط. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$ الخطوة 4 استبدل y بـ $f^{-1}(x)$. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

مطويات Dinah Zike®

الهدف أن يكتب الطلاب ملاحظات عن الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية أثناء تناولها لدروس هذه الوحدة.

التدريس كلف الطلاب بإعداد مطوياتهم وتسميتها كما هو مبين. واطلب منهم عنونة صفحة واحدة بمطوياتهم بعنوان كل درس في هذه الوحدة واستخدام الصفحات المناسبة مع تناولهم للمادة. واجعل الطلاب يدرجوا المفاهيم الأساسية ومصطلحات المفردات وتعريفاتها في مطوياتهم. أوضح إمكانية استخدام المطويات أيضًا لتدوين التجارب الإيجابية والسلبية خلال عملية التعلم.

وقت الاستخدام شجع الطلاب على إضافة المزيد من المعلومات إلى المطويات أثناء دراسة الوحدة وعلى استخدام تلك المطويات عند المراجعة للاستعداد لاختبار الوحدة.

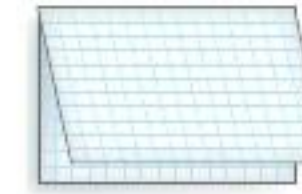
البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدد المفردات المهمة ونظم مواردك.

مطويات منظم الدراسة

الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية

شكل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بهذه الوحدة عن الدوال الأسية واللوغاريتمية. وابدأ بورقتي مربعتين.



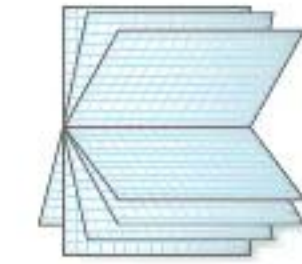
1 اطي الورقتين إلى نصفين بالعرض.



2 على الورقة الأولى، قص لبسافة 5 cm على طول الطية وعلى الجانبين.



3 على الورقة الثانية، قص في منطقة المركز على طول الطية مع ترك مسافة 5 cm على الطرفين بدون قص.



4 أدخل الورقة الأولى من خلال الورقة الثانية وحاذ بين الطيتين، ثم سم الصفحات بأرقام الدروس.

المفردات الجديدة

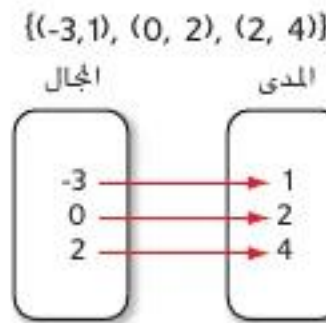
اللوغاريتم logarithm
الدالة اللوغاريتمية logarithmic function
المعادلة اللوغاريتمية logarithmic equation
المتباينة اللوغاريتمية logarithmic inequality
اللوغاريتم العادي common logarithm
تغيير الأساس Change of Base
الصيغة Formula
الأساس الطبيعي e، natural base e
الأساس الطبيعي natural base
الدالة الأسية exponential function
اللوغاريتم الطبيعي natural logarithm

مراجعة المفردات

المجال مجموعة جميع الإحداثيات x في الأزواج المرتبة في علاقة ما

الدالة علاقة يفتقر فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

المدى مجموعة جميع الإحداثيات y في الأزواج المرتبة في علاقة ما



اللوغاريتمات والدوال اللوغارتمية

السابق

الحالي

لماذا؟

لقد وجدت معكوس دالة.

1 إيجاد قيم التعابير اللوغاريتمية.

2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً.

يعتقد كثير من العلماء أن انقراض الديناصورات نتج عن كويكب ضرب كوكب الأرض. ويستخدم العلماء مقياس باليرمو لتصنيف الأجسام القريبة من الأرض بناءً على احتمالية اصطدامها بها. ولتسهيل مقارنة عدة أجسام، طوّر هذا المقياس باستخدام لوغاريتمات. يمكن إيجاد قيمة أي جسم على مقياس باليرمو باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$ ، وفيها R هي الخطورة النسبية التي يشكّلها الجسم.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-1 حل المعادلات الجذرية.

الدرس 1-1 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية. تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً.

بعد الدرس 1-1 تحديد حلول المعادلات اللوغاريتمية باستخدام الطرق الجبرية.

المفردات الجديدة

اللوغاريتم logarithm
الدالة اللوغاريتمية logarithmic function

ممارسات في الرياضيات
مراجعة الدقة.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

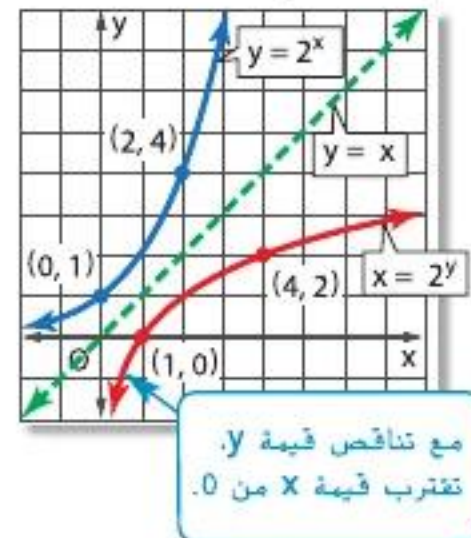
اطرح السؤال التالي:

■ ما الأجسام الموجودة بالقرب من الأرض؟ **الإجابة النموذجية:** الكويكبات، والنيازك، والمذنبات

■ ما الذي تعنيه "احتمالية الاصطدام"؟ **الإجابة النموذجية:** احتمال ارتطام جسم ما بالأرض

1 **الدوال والتعابير اللوغاريتمية** خذ الدالة الأسية التالية $f(x) = 2^x$ ومعكوسها. تذكّر أنك تستطيع تمثيل دالة عكسية بيانياً بالتبديل بين قيمتي x و y في الأزواج المرتبة للدالة.

يمكن تعريف معكوس الدالة $y = 2^x$ على أنه $x = 2^y$ وبصورة عامة، معكوس $y = b^x$ هو $x = b^y$ في $x = b^y$ يدعى المتغير y **لوغاريتم** x . وهو يكتب في العادة بالصورة $y = \log_b x$. والتي تُقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b .



$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

المفهوم الأساسي اللوغاريتم ذو الأساس b

الشرح ليكن b و x عددين موجبين $b \neq 1$. b يرمز للوغاريتم x الذي أساسه b بالرمز $\log_b x$ ويعرّف على أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز على فرض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. من أجل $x > 0$ ، هناك عدة ما y بحيث يتحقق

$$\log_b x = y \text{ إذا وفقط إذا كان } b^y = x.$$

مثال إذا كان $\log_3 27 = y$ ، فإن $3^y = 27$.

يمكن استخدام تعريف اللوغاريتمات للتعبير عن لوغاريتمات بالصورة الأسية.

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة الأسية.

a. $\log_2 8 = 3$

$$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$$

b. $\log_{256} \frac{1}{4} = -4$

$$\log_{256} \frac{1}{4} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$$

تمرين موجّه

1A. $\log_4 16 = 2$ **$16 = 4^2$**

1B. $\log_3 729 = 6$ **$729 = 3^6$**

مثال 2 التحويل من الصورة الأسية إلى اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة اللوغاريتمية.

a. $15^3 = 3375$

$$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$$

b. $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

تمرين موجّه

2A. $4^3 = 64$ $\log_4 64 = 3$

2B. $125^{\frac{1}{3}} = 5$ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

يمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي.

مثال 3 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية

جد قيمة $\log_{16} 4$.

$\log_{16} 4 = y$	ليكن اللوغاريتم يساوي y .
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = (4^2)^y$	$16 = 4^2$
$4^1 = 4^{2y}$	قوة القوة
$1 = 2y$	خاصية المساواة في الدوال الأسية
$\frac{1}{2} = y$	بقسمة كل طرف على 2.

وهكذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

تمرين موجّه

جد قيمة كل تعبير.

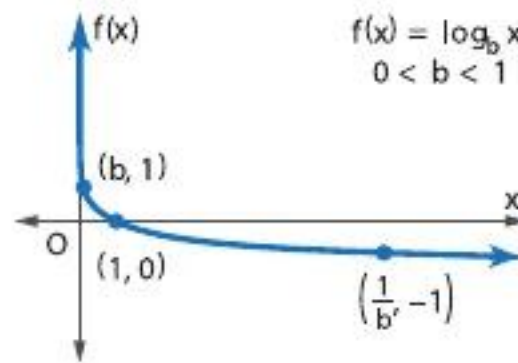
3A. $\log_3 81$ 4

3B. $\log_{\frac{1}{2}} 256$ -8

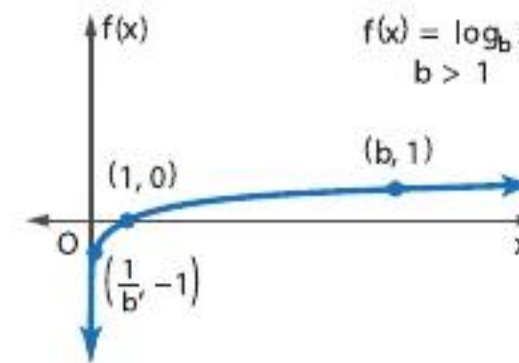
2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً تدعى الدالة $y = \log_b x$ والتي فيها $b \neq 1$ **دالة لوغاريتمية**. ويكون التمثيل البياني لـ $f(x) = \log_b x$ تمثيلاً بيانياً رئيسياً للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي الدالة اللوغاريتمية

نوع التمثيل البياني: متصل، واحد إلى واحد
المجال: جميع الأعداد الحقيقية
نقطة التقاطع: $(1, 0)$



الدالة الأصلية: $f(x) = \log_b x$
المجال: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة
خط التقارب: المحور $f(x)$



التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية عند تدريس اللوغاريتمات لصقك. استخدم الترميز اللوني للأجزاء المتقابلة من الدوال الأسية واللوغاريتمية. على سبيل المثال، استخدم ألواناً مختلفة لكل من x و y و b عند توضيح أن $\log_b x = y$ تتقابل مع $x = b^y$.

1 الدوال والتعابير اللوغاريتمية

المثال 1 يوضح كيفية كتابة المعادلات اللوغاريتمية في صيغة أسية. **المثال 2** يوضح كيفية كتابة المعادلات الأسية في صيغة لوغاريتمية. **المثال 3** يوضح كيفية استخدام تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة الأسية.

a. $\log_3 9 = 2$ $9 = 3^2$

b. $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

2 اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة اللوغاريتمية.

a. $5^3 = 125$ $\log_5 125 = 3$

b. $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

3 جد قيمة $\log_3 243$. 5

2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً

المثال 4 يوضح كيفية تمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانياً. **المثال 5** يوضح كيفية استخدام التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً. **المثال 6** يوضح كيفية إيجاد معكوس الدالة الأسية لحل مثال من الحياة اليومية.

التدريس المتمايز

BL

OL

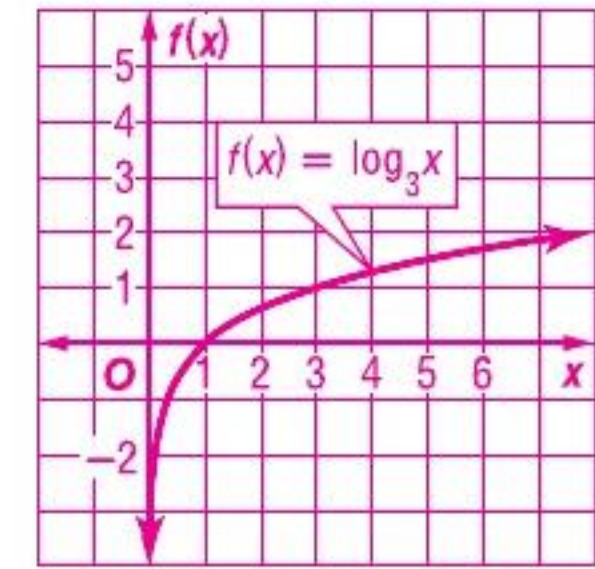
المتعلمون أصحاب النمط المنطقي بعد مناقشة تعريف اللوغاريتم، اكتب $y = 2^x$ على اللوحة

واطلب من الطلاب إعادة كتابة المعادلة مع جعل x بدلالة y . $x = \frac{1}{2}y$ كرر ذلك مع المعادلة $y = x^2$. $x = \pm \sqrt{y}$ والآن، اكتب $y = 2^x$ على اللوحة واطلب من الطلاب إعادة كتابة هذه المعادلة مع جعل x بدلالة y . من المرجح أن يسبب ذلك حيرة لدى الطلاب. اشرح أن المعادلة المعاد كتابتها هي $x = \log_2 y$. أكد على أن اللوغاريتم يُعرّف على أنه معكوس دالة أسية.

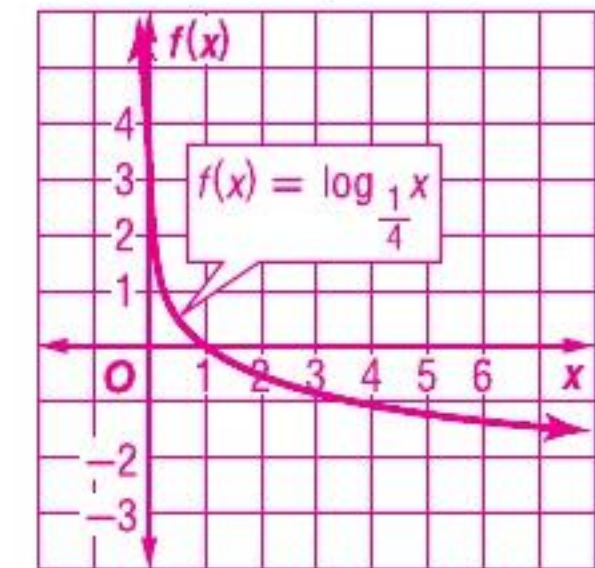
مثال إضافي

4 مثل كل دالة بيانيًا.

a. $f(x) = \log_3 x$



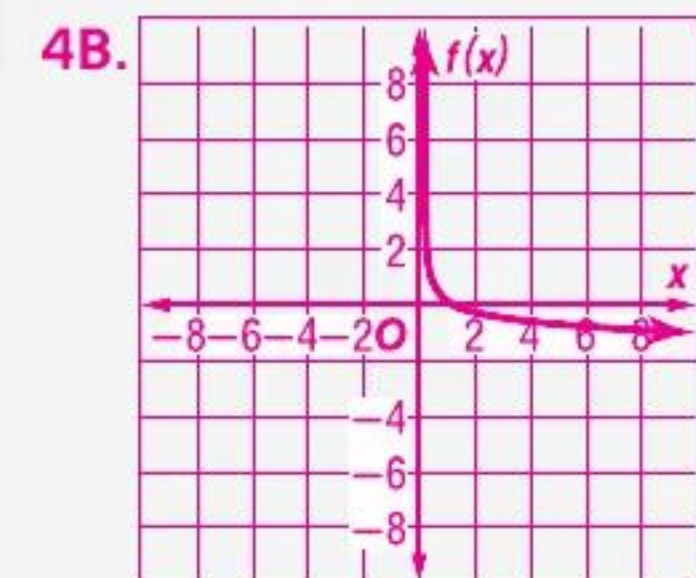
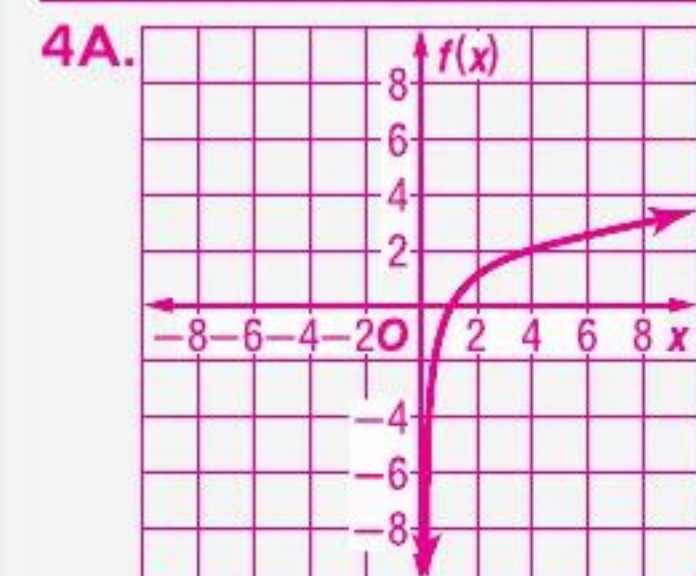
b. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



إرشاد للمعلمين الجدد

وتيرة التقدم لم يتناول الطلاب الدوال اللوغاريتمية من قبل وعلى الأرجح سيجدونها محيرة. توقع أن يحتاج الطلاب إلى مزيد من الوقت لاستيعاب المادة المقدمة في هذا الدرس قبل المتابعة مع بقية الوحدة.

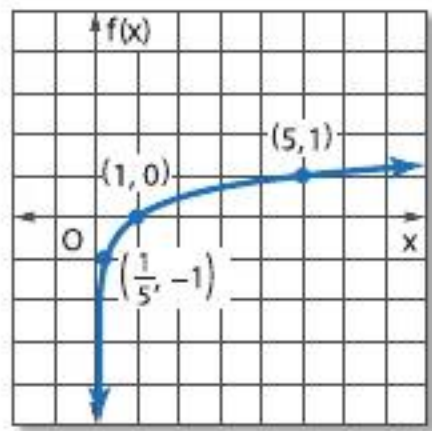
إجابات إضافية (تمرين موجه)



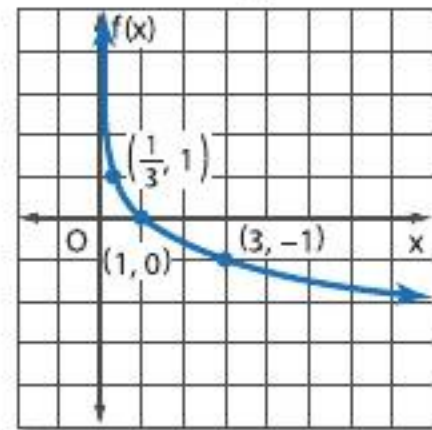
مثال 4 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

مثل كل دالة بيانيًا.

a. $f(x) = \log_5 x$



b. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



الخطوة 1 حدد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2 حدد نقاطًا على المستوى البياني.

نظرًا إلى أن $5 > 1$. استخدم النقاط $(1, 0)$ و $(\frac{1}{5}, -1)$ و $(b, 1)$.

الخطوة 3 مثل النقاط وارسم التمثيل البياني.

$(\frac{1}{b}, -1) \rightarrow (\frac{1}{5}, -1)$

$(1, 0)$

$(b, 1) \rightarrow (5, 1)$

نصيحة دراسية

الأس الصغرى تذكر أنه من أجل أي قيمة $b \neq 0$. $b^0 = 1$. لذلك، $\log_2 0$ غير معرف لأن $2^x \neq 0$ من أجل أي قيمة x .

الخطوة 1 $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2 $1 > \frac{1}{3} > 0$. إذا استخدم النقاط

$(1, 0)$ و $(\frac{1}{3}, 1)$ و $(3, -1)$.

الخطوة 3 ارسم التمثيل البياني.

تمرين موجه

A4. A4. انظر الهامش.

4A. $f(x) = \log_2 x$

4B. $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

يمكن تطبيق الأساليب ذاتها المستخدمة في تحويل التمثيلات البيانية للدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال اللوغاريتمية

$f(x) = a \log_b (x - h) + k$

الإزاحة الرأسية k

k وحدة إلى الأعلى إذا كان k موجبًا
 $|k|$ وحدة إلى الأسفل إذا كان k سالبًا

الإزاحة الأفقية h

h وحدة يمينًا إذا كان h موجبًا
 $|h|$ وحدة يسارًا إذا كان h سالبًا

a الاتجاه والشكل

إذا كانت $|a| > 1$ ، يتمدد التمثيل البياني رأسيًا.
وإذا كانت $0 < |a| < 1$ ، ينضغط التمثيل البياني رأسيًا.

إذا كان $a < 0$ ، يتعكس التمثيل البياني بالنسبة للمحور الأفقي x .

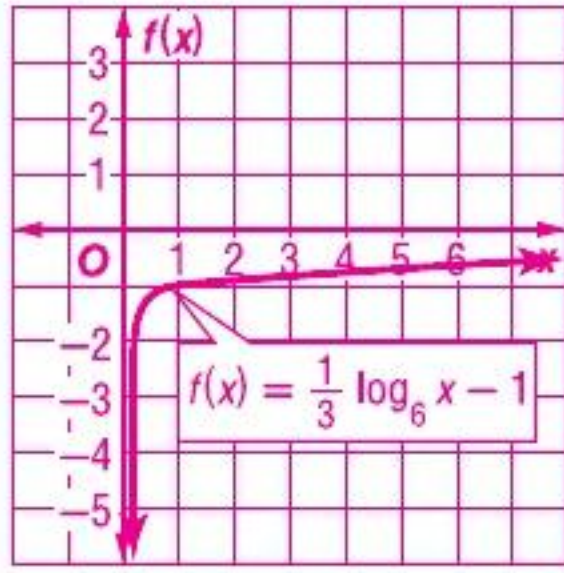
التركيز على محتوى الرياضيات

اللوغاريتمات المعادلة $y = \log_b x$ تُقرأ " y يساوي اللوغاريتم على الأساس b للعدد x ". الأساس b يكون موجبًا دائمًا و $b \neq 1$. وبما أن المعادلة $y = \log_b x$ مكافئة للمعادلة الأسية $x = b^y$ ، اللوغاريتم هو الأس. فإن الأس هو ما يتطلبه الأساس b ليساوي العدد x .

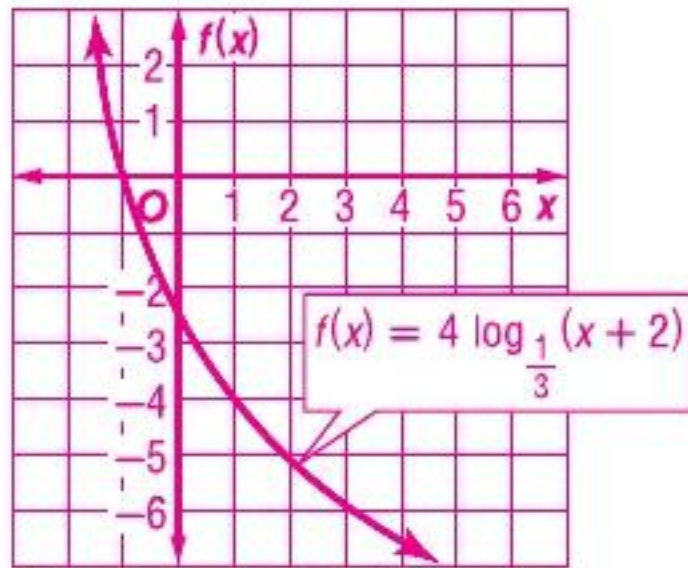
أمثلة إضافية

5 مثل كل دالة بيانيًا.

a. $f(x) = \frac{1}{3} \log_6 x - 1$



b. $f(x) = 4 \log_{\frac{1}{3}} (x + 2)$



6 ضغط الهواء على سطح الأرض.

يُعرّف ضغط الهواء بأنه يساوي جواً واحداً. ويتناقص الضغط بحوالي 20% لكل ميل ارتفاع. يمكن تمثيل الضغط الجوي بالمعادلة $P = 0.8^x$ حيث x يقيس الارتفاع بالميل.

a. جد الضغط الجوي في الأجواء عند ارتفاع 8 mi. **0.168** جو

b. اكتب معادلة لمعكوس الدالة. **$x = \log_{0.8} P$**

المثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

مثل كل دالة بيانيًا.

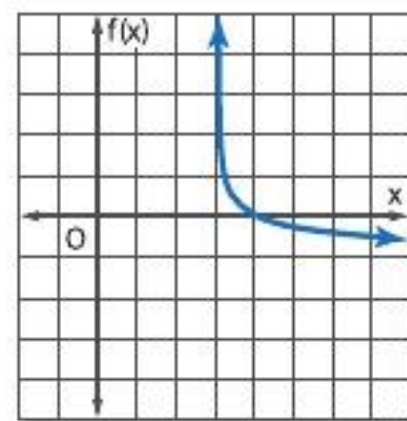
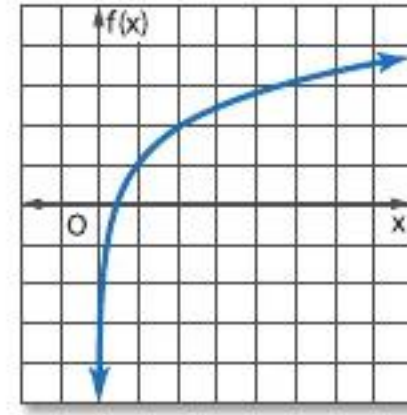
a. $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$

يمثل هذا تحويلاً للتمثيل البياني لـ $f(x) = \log_{10} x$.

• $|a| = 3$: يتمدد التمثيل البياني رأسياً.

• $h = 0$: لا توجد إزاحة أفقية.

• $k = 1$: أزيح التمثيل البياني بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.



b. $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$

هذا هو تحويل التمثيل البياني لـ $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

• $|a| = \frac{1}{2}$: انضغط التمثيل البياني رأسياً.

• $h = 3$: أزيح التمثيل البياني وحدات إلى اليمين.

• $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسية.

تمرين موجّه A5, B5. انظر الهامش.

مثل كل دالة بيانيًا.

5A. $f(x) = 2 \log_3 (x - 2)$

5B. $f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$

المثال 6 من الحياة اليومية إيجاد معكوسات الدوال الأسية

الزلازل يقيس مقياس ريختر شدة الزلازل. وتساوي الزيادة في الشدة بين كل عددين 10 أمثال الدرجة التي تسبقها. فعلى سبيل المثال، الزلزال الذي تقديره على مقياس ريختر 7 تساوي شدته 10 أمثال شدة الزلزال الذي تقديره 6. ويمكن تمثيل شدة زلزال من خلال المعادلة $y = 10^{x-1}$ ، حيث x تمثل التقدير على مقياس ريختر.

a. استخدم المعلومات الموجودة في الجهة اليسرى لإيجاد شدة أقوى زلزال مسجل في الولايات المتحدة الأمريكية.

$y = 10^{x-1}$
 $= 10^{9.2-1}$
 $= 10^{8.2}$
 $= 158,489,319.2$

المعادلة الأصلية

بتعويض 9.2 بدلاً من x .

بسط.

باستخدام آلة حاسبة.

b. اكتب معادلة على الصورة $y = \log_{10} x + c$ لإيجاد معكوس الدالة.

$y = 10^{x-1}$
 $x = 10^{y-1}$
 $y - 1 = \log_{10} x$
 $y = \log_{10} x + 1$

المعادلة الأصلية

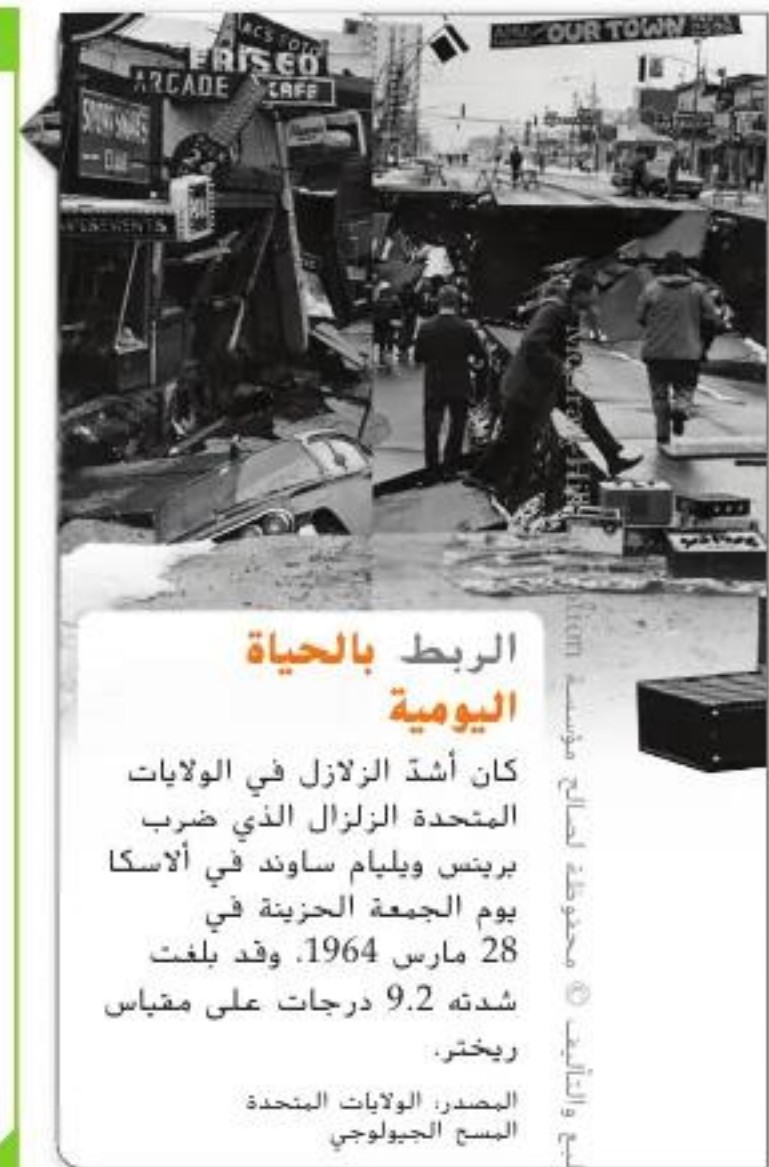
استبدل x بـ y ، واستبدل y بـ x . وجد الحل لإيجاد y .

حسب تعريف اللوغاريتم

بإضافة 1 إلى كل طرف.

تمرين موجّه

6. اكتب معكوس الدالة $y = 0.5^x$ **$y = \log_{0.5} x$**

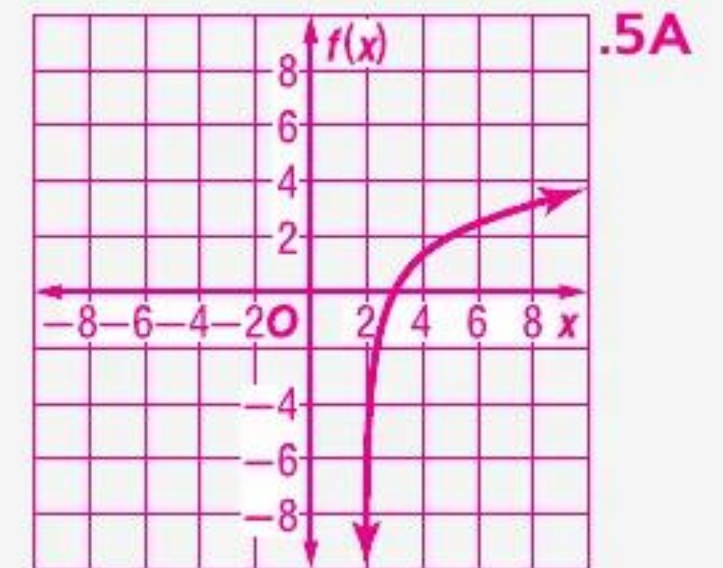
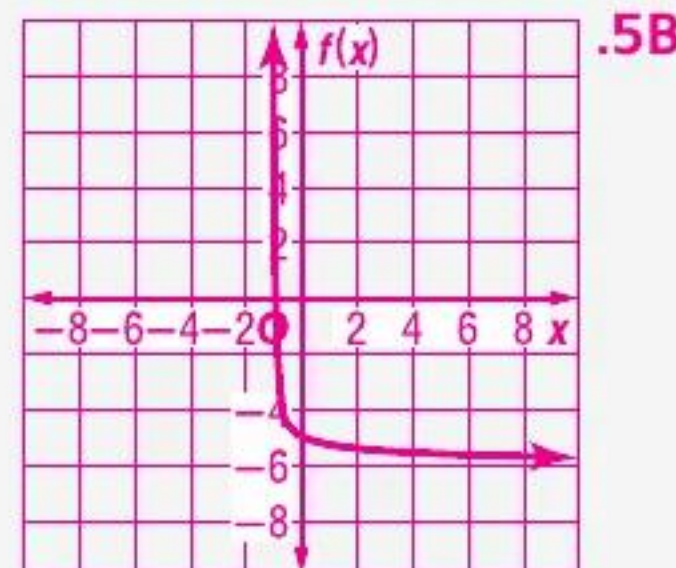


الربط بالحياة اليومية

كان أشدّ الزلازل في الولايات المتحدة الزلزال الذي ضرب برينس ويليام ساوند في ألاسكا يوم الجمعة الحزينة في 28 مارس 1964. وقد بلغت شدته 9.2 درجات على مقياس ريختر.

المصدر: الولايات المتحدة المسح الجيولوجي

إجابات إضافية (تمرين موجّه)



3 تمرين

التقويم التكويني

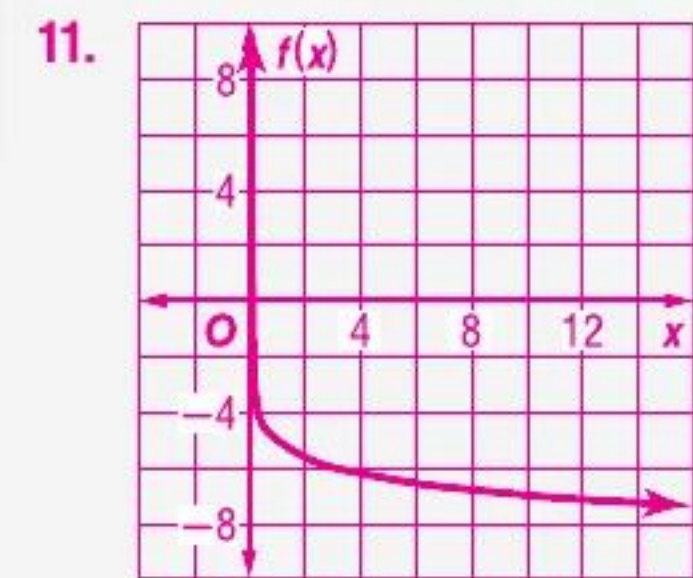
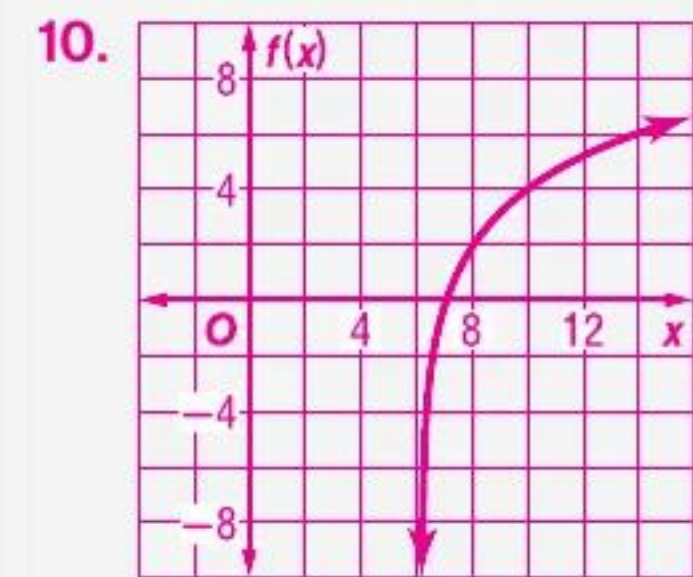
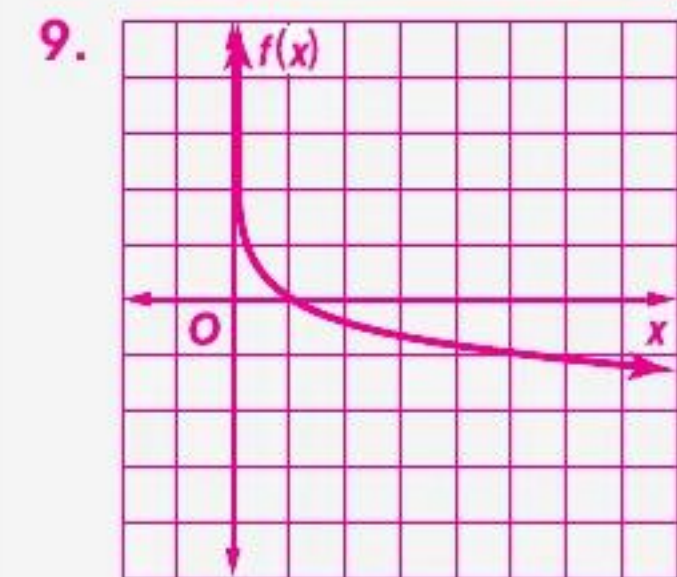
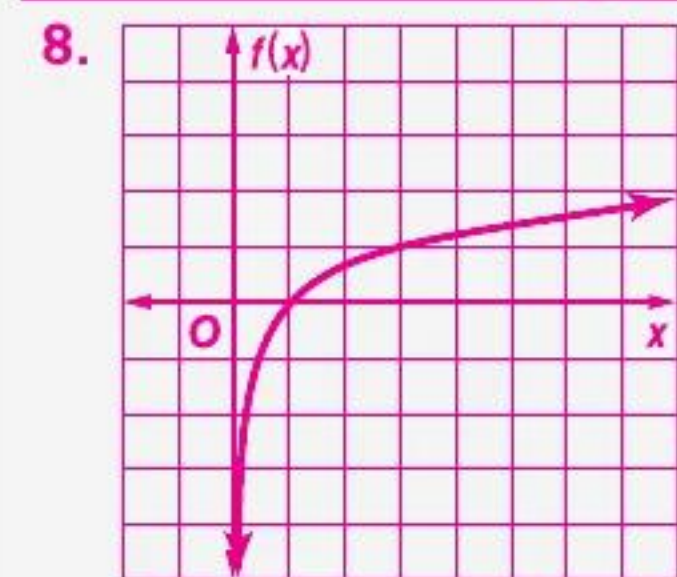
استخدم التمارين من 1 إلى 12 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة، والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

إجابات إضافية



التحقق من فهمك

مثال 1

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة الأسية.

1. $\log_8 512 = 3$ $8^3 = 512$

2. $\log_5 625 = 4$ $5^4 = 625$

مثال 2

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة اللوغاريتمية.

3. $11^3 = 1331$ $\log_{11} 1331 = 3$

4. $16^{\frac{3}{4}} = 8$ $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

مثال 3

جد قيمة كل تعبير.

5. $\log_{13} 169$ **2**

6. $\log_2 \frac{1}{128}$ **-7**

7. $\log_6 1$ **0**

المثالان 4-5

مثل كل دالة بياناً. 8-11. انظر الهامش.

8. $f(x) = \log_3 x$

9. $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

10. $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$

11. $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

مثال 6

12. **العلوم** استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس. يمكن إيجاد القيمة الخاصة بأي جسم على باليرمو باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$ حيث تمثل R الخطورة النسبية التي يشكلها الجسم. اكتب معادلة الصورة الأسية للتعبير عن معكوس الدالة. **$PS = 10^R$**

التمرين وحل المسائل

مثال 1

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة الأسية.

13. $\log_2 16 = 4$ $2^4 = 16$

14. $\log_7 343 = 3$ $7^3 = 343$

15. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ $9^{-2} = \frac{1}{81}$

16. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ $3^{-3} = \frac{1}{27}$

17. $\log_{12} 144 = 2$ $12^2 = 144$

18. $\log_9 1 = 0$ $9^0 = 1$

مثال 2

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة اللوغاريتمية.

19. $9^{-1} = \frac{1}{9}$ $\log_9 \frac{1}{9} = -1$

20. $6^{-3} = \frac{1}{216}$ $\log_6 \frac{1}{216} = -3$

21. $2^8 = 256$ $\log_2 256 = 8$

22. $4^6 = 4096$ $\log_4 4096 = 6$

23. $27^{\frac{2}{3}} = 9$ $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

24. $25^{\frac{3}{2}} = 125$ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

مثال 3

جد قيمة كل تعبير.

25. $\log_3 \frac{1}{9}$ **-2**

26. $\log_4 \frac{1}{64}$ **-3**

27. $\log_8 512$ **3**

28. $\log_6 216$ **3**

29. $\log_{27} 3$ **$\frac{1}{3}$**

30. $\log_{32} 2$ **$\frac{1}{5}$**

31. $\log_9 3$ **$\frac{1}{2}$**

32. $\log_{121} 11$ **$\frac{1}{2}$**

33. $\log_{\frac{1}{5}} 3125$ **-5**

34. $\log_{\frac{1}{8}} 512$ **-3**

35. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ **4**

36. $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ **3**

المثالان 4-5

الدقة مثل كل دالة بياناً. 48-37. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

37. $f(x) = \log_6 x$

38. $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

39. $f(x) = 4 \log_2 x + 6$

40. $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

41. $f(x) = \log_{10} x$

42. $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$

43. $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$

44. $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$

45. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

46. $f(x) = \log_5 (x - 4) - 5$

47. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$

48. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} (x + 2) - 5$

8 | الدرس 1-1 | اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومي
AL مبتدئ	13-56, 60, 62-83	14-56 الأعداد الزوجية, 60, 62-66, 71-83
OL أساسي	13-55 الأعداد الفردية, 62-83, 57-60	57-60, 62-66, 71-83
BL متقدم	57-81	

49. التصوير الفوتوغرافي تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة التغيير في النسبة البؤرية n التي ينبغي استخدامها بوجود إضاءة خافتة بينما يمثل p كسر ضوء الشمس.

a. ضبط خالد إعدادات آلة التصوير التي بحوزته لتلتقط صورًا تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن اليوم غائم. فإذا كانت كمية ضوء الشمس في يوم غائم تساوي $\frac{1}{4}$ بالنسبة للسطوع تحت ضوء الشمس الطبيعي، فكم درجة ينبغي تعديل البعد البؤري لاستقبال كمية أقل من الضوء؟ 2

b. مثل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

c. استخدم التمثيل البياني الذي شكّلته في القسم B للتنبؤ بانكسار الضوء الذي ستستقبله آلة تصوير خالد إذا عدّل البعد البؤري بمقدار 3 درجات. وهل يسمح في هذه الحالة بدخول كمية أقل أو أكثر من الضوء إلى آلة التصوير؟ $\frac{1}{8}$ ضوء أقل

50. التعليم لقياس قدرة الطلاب على الاحتفاظ بالمعرفة، يُختبر الطالب بعد مرور فترة زمنية محددة على تعلمه المعرفة. ويمكن تقدير نتيجة الطالب في اختبار الرياضيات بعد t شهرًا من العام الدراسي تقريبًا من خلال العلاقة $y(t) = 85 - 6 \log_2(t + 1)$ حيث $y(t)$ نتيجة الطالب بصيغة نسبة مئوية.

a. كم كانت نتيجة الطالب عند انتهاء العام الدراسي ($t = 0$)؟ 85

b. كم كانت نتيجة الطالب بعد 3 أشهر؟ 73

c. كم كانت نتيجة الطالب بعد 15 شهرًا؟ 61

مثل كل دالة بيانيًا. 51-56. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

51. $f(x) = 4 \log_2(2x - 4) + 6$

52. $f(x) = -3 \log_{12}(4x + 3) + 2$

53. $f(x) = 15 \log_{14}(x + 1) - 9$

54. $f(x) = 10 \log_5(x - 4) - 5$

55. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8(x - 3) + 4$

56. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_6(6x + 2) - 5$

57. التمثيل بالنماذج بصورة عامة، كلما أنفقت شركة مبلغًا أكبر من المال على الإعلانات، كلما ارتفعت المبيعات. ويمكن تمثيل مبلغ المال الذي تجنيه الشركة من المبيعات، مقدّرًا بالآلاف، بالمعادلة $S(a) = 10 + 20 \log_4(a + 1)$ حيث $a \geq 0$.

a. تساوي قيمة $S(0) \approx 10$ تقريبًا، ويعني ذلك أنه عند إنفاق 10 AED على الإعلانات،

فسيكون العائد 10,000 AED في المبيعات.

جد قيم $S(3)$ و $S(15)$ و $S(63)$. $S(3) = 30$, $S(15) = 50$, $S(63) = 70$

b. فسر معنى كل قيمة للدالة في سياق المسألة.

c. مثل الدالة بيانيًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

d. استخدم التمثيل البياني في القسم c وإجاباتك في القسم a لشرح السبب في أن المال المنفق في الإعلانات يصبح أقل "كفاءة" عند استخدامه بكميات أكبر.

58. علم الأحياء إن زمن جيل الجراثيم هو الزمن الذي يستغرقه عدد الجراثيم كي يتضاعف، ويمكن إيجاد زمن الجيل G لنوع محدد من الجراثيم باستخدام البيانات التجريبية والقانون $G = \frac{t}{3.3 \log_2 f}$ ، حيث t المدة الزمنية و b عدد الجراثيم في بداية التجربة، و f عدد الجراثيم عند نهاية التجربة.

264 ساعة أو 11 يومًا

a. زمن الجيل للمتفطرة السلية 16 ساعة. فكم ستستغرق أربعة من هذه الجراثيم

49.5 ساعة أو يومين و 1.5 ساعة

b. بيّنت تجربة خضعت لها مجموعة من الجرذان، وعرضت خلالها لجراثيم السلمونيلا، أن زمن جيل السلمونيلا كان يساوي 5 ساعات. فكم سيستغرق تضاعف 20 جرثومة من هذا النوع إلى 8000؟

c. تعدّ الإشريكية القولونية إحدى أنواع الجراثيم سريعة التكاثر. فإذا علمت أن 6 من جراثيم الإشريكية القولونية تستطيع التكاثر إلى 1296 خلال 4.4 ساعات، فما هو زمن جيل الإشريكية القولونية؟ $\frac{1}{3}$ أو 20 min

57b. إذا أنفق مبلغ 3000 AED

على الإعلانات،

فيكون العائد على

المبيعات مبلغ 30,000 AED

وإذا أنفق

مبلغ 15,000 AED

على الإعلانات،

فيكون العائد على

المبيعات مبلغ 50,000 AED

وإذا أنفق

مبلغ 63,000 AED

على الإعلانات، فيكون

العائد على المبيعات

70,000 AED

57d. لأن التمثيل

البياني يستقر

في نهاية الأمر،

ومهما أنفقت من

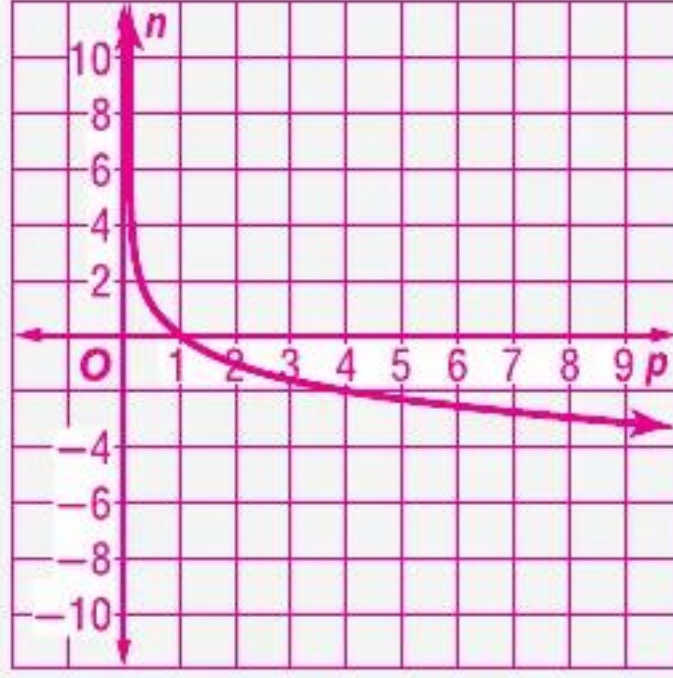
مال، فستجني

العائد نفسه تقريبًا

في المبيعات.

إجابة إضافية

49b.



59 المعرفة المالية أنفقت هدى مبلغ AED 2000 من بطاقتها الائتمانية. وتترض شركة بطاقة الائتمان فائدة مركبة شهرياً بنسبة 24%. تستخدم الشركة المعادلة $\log_{\left(1+\frac{0.24}{12}\right)} \frac{A}{2000} = 12t$ لتحديد الزمن المستغرق إلى أن يبلغ دين هدى مبلغًا محددًا. فإذا كان A هو مبلغ الدين بعد مدة من الزمن، و t هو الزمن بالسنوات.

- a. مثل الدالة الخاصة بدين هدى بيانياً. **انظر الهامش.**
b. كم سيستغرق دين هدى تقريباً كي يتضاعف مرتين؟ **سنوات 3**
c. كم سيستغرق دين هدى تقريباً ليزداد ثلاثة أمثال؟ **سنوات 4.5**

60. الإجابة النموذجية: يمكن أن تنمو النماذج الأسية واللوغاريتمية دون حد، ولكن ذلك لا يمثل في العادة الحالة التي يجري تمثيلها. فعلى سبيل المثال، لا يمكن أن ينمو تعدادٌ دون حد بسبب قيود المكان والغذاء. ولذلك عند استخدام نموذجٍ لاتخاذ القرارات، فينبغي أن تدرس الحالة التي يجري تمثيلها بعناية.

مسائل مهارات التفكير العليا

60. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي ينبغي أن تراعيه عند استخدام النماذج اللوغاريتمية لاتخاذ القرارات؟

61. **براهين** ليكن $y = \log_b x$ حيث b و x و y أعداد حقيقية. يمكن أن يوجد الصفر في المجال أحياناً أو دائماً أو يمكن ألا يوجد مطلقاً. علّل إجابتك.

62. **تحليل الخطأ** تقول سعاد أن التمثيلات البيانية لجميع الدوال اللوغاريتمية تقطع المحور الرأسي y في النقطة (0, 1) لأنّ أي عدد يرفع إلى القوة صفر يساوي 1. ولكن شيخة تخالفها الرأي. فهل أيّ منهما محقّة؟ اشرح استنتاجك.

شيخة: الإجابة النموذجية: تمرّ التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية من النقطة (1, 0)، وليس (0, 1).

63. **التبرير** قارن دون استخدام الآلة الحاسبة $\log_7 51$ و $\log_8 61$ و $\log_9 71$. أيها أكبر؟ اشرح استنتاجك.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلةً لوغاريتميةً بالصورة $y = \log_b x$ لكلٍّ من الشروط التالية. **a-e. انظر الهامش.**

- a. y يساوي 25.
b. y سالب.
c. y بين 0 و 1.
d. x يساوي 1.
e. x يساوي 0.

65. **تحليل الخطأ** يوجد ناصر ويوسف قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

يوسف	ناصر
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$49^y = \frac{1}{7}$	$\frac{1}{7} = 49$
$(7^2)^y = (7)^{-1}$	$(7^{-1})^y = 7^2$
$7^{2y} = (7)^{-1}$	$(7)^{-y} = 7^2$
$2y = -1$	$y = -2$
$y = -\frac{1}{2}$	

66. **الكتابة في الرياضيات** أحد تحويلات $\log_{10} x$ هو $g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$. اشرح عملية التمثيل البياني لهذا التحويل. **انظر الهامش.**

انتبه!

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين

62. أوضح أن سندية تفكر فقط

في الدوال اللوغاريتمية التي

صيغتها $f(x) = a \log_b x$.

تحليل الخطأ بالنسبة

للتمرين 65. أوضح أن في التعبير

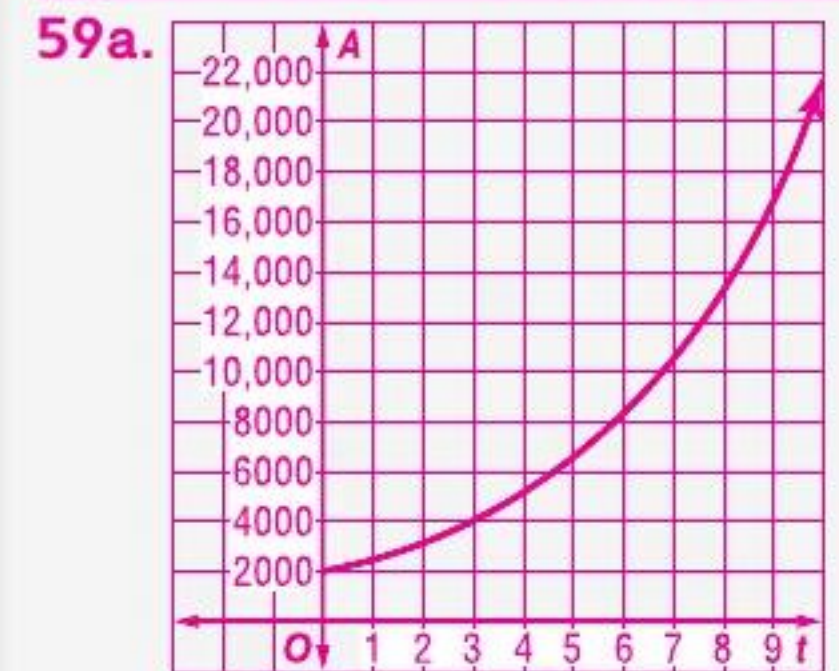
$a \log_b x$ ، b هو أساس القوة

الأسية. ذكر الطلاب بأن إيجاد

لوغاريتم x للأساس b يعني إيجاد

القوة الأسية لـ b التي تساوي x.

إجابات إضافية



64a-e3. الإجابات النموذجية معطاة.

$$\log_2 33,554,432 = 25.64a$$

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3.64b$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}.64c$$

$$\log_7 1 = 0.64d$$

64e. لا يوجد حل ممكن؛ هذه مجموعة فارغة.

65. لا؛ ناصر كان أقرب. كان ينبغي أن

يحصل على $y = 2$ أو $-y = -2$

بدلاً من $y = 2$. يوسف استخدم

تعريف اللوغاريتمات بشكل خاطئ.

66. الإجابة النموذجية: في

$$g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$$

قيمة k هي تحويل رأسي والتمثيل

البياني سيُزاح لأعلى بمقدار k

وحدات إذا كان k موجباً ولأسفل

بمقدار |k| وحدات إذا كان k سالباً.

قيمة h هي تحويل أفقي والتمثيل

البياني سيُزاح بمقدار h وحدات إلى

اليمين إذا كان h موجباً وبمقدار |h|

وحدات إلى اليسار إذا كان h سالباً.

إذا كان $a < 0$ ، فسوف ينعكس

التمثيل البياني على المحور x.

إذا كان $|a| > 1$ ، فالتمثيل البياني

سيتوسع رأسيًا وإذا كان $0 < |a|$

< 1 ، فسوف ينضغط الرسم البياني

رأسيًا.

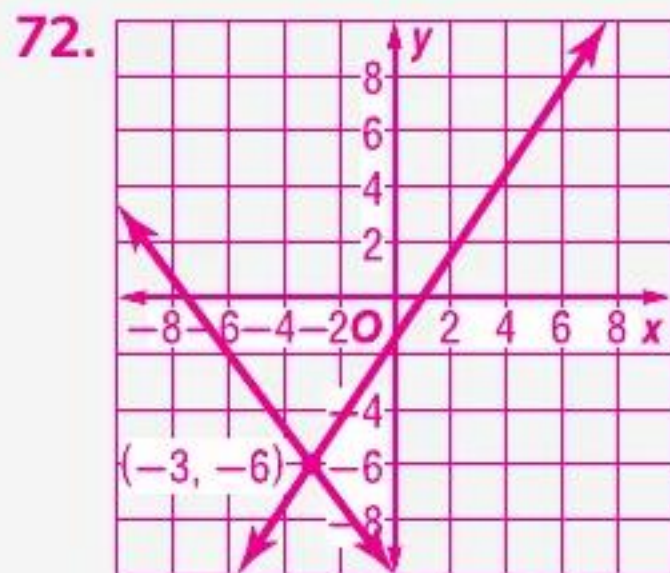
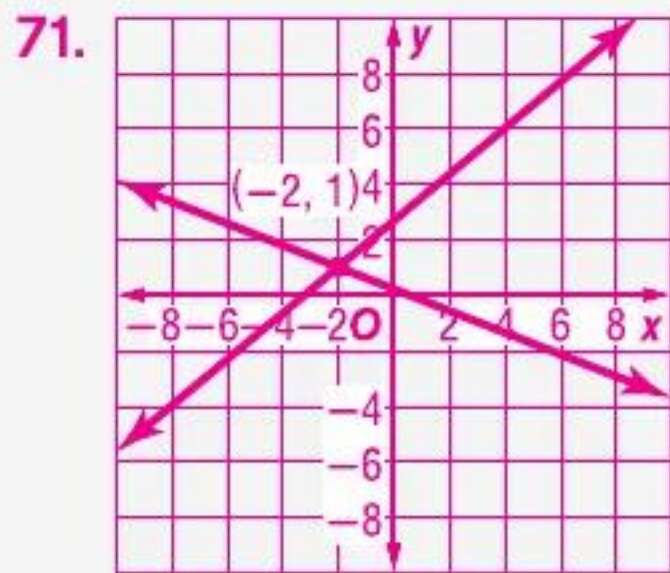
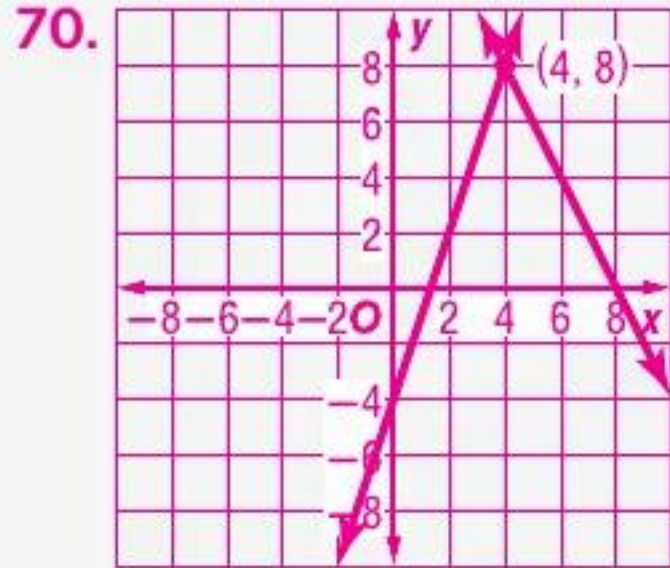
تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقاً في بناء الفرضيات. ويضعون تخمينات ويبنون تقدماً منطقيًا للعبارات لاستكشاف صحة تخميناتهم. كما يمكنهم تحليل الحالات بتفكيكها إلى مسائل، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب مناقشة كيف في اعتقادهم ستساعدهم دراستهم اليوم للوغاريتمات على حل المعادلات اللوغاريتمية في درس الغد.

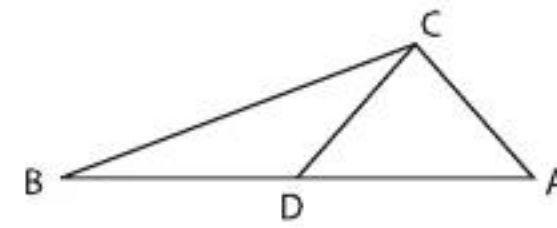
إجابات إضافية



تمرين على الاختبار المعياري

67. لديك مستطيل طووله يساوي مثلي عرضه. فإذا كان عرض المستطيل 3 m، فكم تساوي مساحته بالامتار المربعة؟

- A 9
B 12
C 15
D 18



69. إذا كان $4x = 2 - y$ و $6x - 3y = 30$ ، جد $y + x$

- A -4
B -2
C 2
D 4

68. SAT/ACT لدى طارق بعض البيتزا. وقد باع 40% أكثر من الشرائح التي أكلها. فإذا كان قد باع 70 شريحة من البيتزا، فكم عدد الشرائح التي أكلها؟

- F 25
G 50
H 75
J 98
K 100

مراجعة شاملة

حل كل من أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني. 70-72. انظر الهامش.

70. $y = 3x - 4$
 $y = -2x + 16$

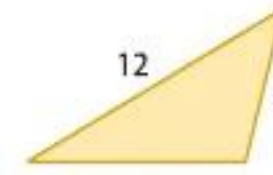
71. $2x + 5y = 1$
 $6y - 5x = 16$

72. $4x + 3y = -30$
 $3x - 2y = 3$

جد قيمة كل دالة.

73. $f(3)$ إذا كان $f(x) = x^2 - 4x + 12$ 9 74. $f(-2)$ إذا كان $f(x) = -4x^2 + x - 8$ -26 75. $f(4)$ إذا كان $f(x) = 3x^2 + x$ 52

76. سؤال هندسي تعطى مساحة مثلث أطوال أضلاعه a و b و c بالعلاقة



$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. إذا كانت أطوال أضلاع مثلث 6 و 9 و 12، فما مساحة المثلث معبراً عنها بصورة جذرية؟ $\frac{27\sqrt{15}}{4} \text{ ft}^2$

77. سؤال هندسي يمكن كتابة حجم صندوق مستطيل بالصيغة $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$ حيث الارتفاع يساوي $x + 2$.

a. ما طول الصندوق وما عرضه؟ $2x + 3$ و $3x + 5$

b. هل ستكون نسبة أبعاد الصندوق هي نفسها على الدوام بغض النظر

عن قيمة x؟ اشرح. لا، على سبيل المثال، إذا كان $x = 1$ فالنسبة هي 3:5:8، ولكن إذا كان $x = 2$ ، فالنسبة هي 4:7:11. والنسبتان غير متكافئتين.

78. ميكانيك السيارات يعمل عمر مديراً للمخزون في أحد محال الصيانة المحلية. يطلب عمر

6 بطاريات و 5 علب شمعات احتراق و عشرين زوجاً من شفرات الماسحات ويدفع مقابل ذلك مبلغ AED 830.

ويطلب 3 بطاريات و 7 علب شمعات احتراق و أربعة أزواج من شفرات الماسحات ويدفع مقابل ذلك مبلغ

AED 820. سعر البطاريات أقل بـ AED 22 من مثلي سعر عشر شفرات للماسحات. استخدم مصفوفة ممتدة

لتحديد كلفة كل مادة. البطاريات، AED 74؛ شمعات الاحتراق، AED 58؛

شفرات الماسحات، AED 48

مراجعة المهارات

حل كل معادلة أو متباينة مما يلي. ثم تحقق من حلك.

79. $9^x = \frac{1}{81}$ -2

80. $2^{6x} = 4^{5x+2}$ -1

81. $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$ -7/4

82. $9x^2 \leq 27x^2 - 2$

$\{x \mid x \leq -\sqrt{6} \text{ أو } x \geq \sqrt{6}\}$

التدريس المتميز

التوسع أوضح أن مسألة القسمة $\frac{32}{4} = 8$ يمكن كتابتها في الصورة $\frac{2^5}{2^2} = 2^3$. كلّف الطلاب

بتحديد لوغاريتم الأساس 2 في المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة. ثم اجعلهم يكتبوا معادلة توضح العلاقة

بين هذه اللوغاريتمات. $\log_2 32 = 5$; $\log_2 4 = 2$; $\log_2 8 = 3$; $\log_2 32 - \log_2 4 = \log_2 8$

مختبر تقنية التمثيل البياني اختيار النموذج الأمثل

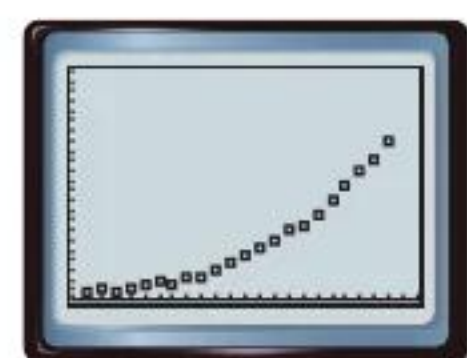
ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

يمكننا إيجاد الدوال الأسية واللوغاريتمية ذوات الملائمة الأفضل باستخدام
حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus.

النشاط

الكثافة السكانية في الولايات المتحدة الأمريكية			
عدد السكان في الميل المربع	العام	عدد السكان في العام	العام
21.5	1900	4.5	1790
26.0	1910	6.1	1800
29.9	1920	4.3	1810
34.7	1930	5.5	1820
37.2	1940	7.4	1830
42.6	1950	9.8	1840
50.6	1960	7.9	1850
57.5	1970	10.6	1860
64.0	1980	10.9	1870
70.3	1990	14.2	1880
80.0	2000	17.8	1890

المصدر: معهد نورث إيست ميد إيست



[1780, 2020] scl: 10 by [0, 115] scl: 5

لإيجاد معادلة ثلاث البيانات بالصورة الفضلى، استخدم سمة الانحدار في الحاسبة. وادرس الانحدارات المتعددة لتحديد النموذج الأفضل.

تذكر أن الحاسبة تُرجع معامل الارتباط r ، والذي يستخدم للإشارة إلى مدى حسن ملائمة النموذج للبيانات. وكلما كان r أقرب إلى 1 أو إلى -1، كلما كانت الملاءمة أفضل.

الانحدار الخطي والانحدار التربيعي

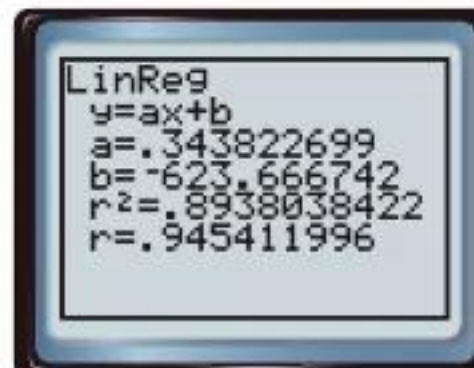
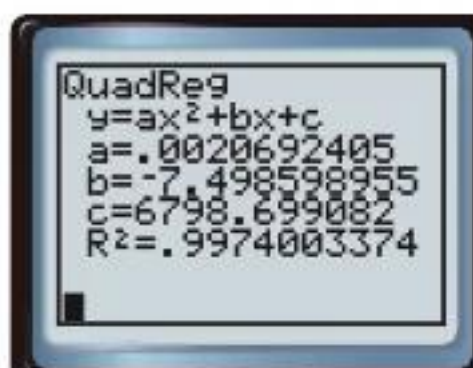
خطوات العملية على الحاسبة: STAT 5 ENTER

خطوات العملية على الحاسبة: STAT 4 ENTER

$$r^2 = 0.9974003374$$

$$r = \sqrt{0.9974003374}$$

$$r \approx 0.9986993228$$



12 | التوسع 1-1 | مختبر تقنية التمثيل البياني: اختيار النموذج الأمثل

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المعادلة الملائمة الأفضل للدوال الأسية واللوغاريتمية.

المواد

حاسبة التمثيل البياني

نصيحة للتدريس

قبل تنفيذ الخطوة 1، يجب على الطلاب ضغط المفتاح [2nd] [STAT PLOT] والتأكد من إغلاق المخطط 2 والمخطط 3.

ينبغي أن يعيّن الطلاب حاسباتهم إلى الإعدادات DiagnosticOn لتعيين الحاسبة إلى إعداد التشخيصات، استخدم [2nd] [CATALOG]، وحرك المؤشر لأسفل إلى DiagnosticOn. ثم اضغط على [ENTER] مرتين.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات متنوعة القدرات من اثنين أو ثلاثة طلاب. واطلب من المجموعات إكمال النشاط والتمارين من 1 إلى 3.

أوضح أن جدول البيانات المبين في المثال مرتب إلى عمودين "مزدوجين".

اقترح أن يقارن الطلاب تمثيلاتهم البيانية بذلك المبين.

كلف الطلاب بتقدير الكثافة السكانية في العامين 2020 و2050. متى ستصبح الكثافة السكانية ضعفي ما كانت عليه في 2000؟ حوالي 2085

عندما يبدأ الطلاب حل التمارين، يجب عليهم مسح قائمتي L1 و L2. وينبغي أيضًا إدخال الإعدادات المناسبة لتنفيذ التمثيل البياني.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 4 إلى 5.

3 التقويم

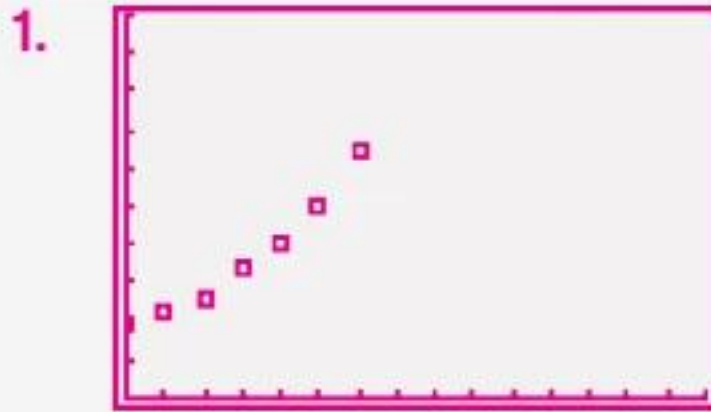
التقويم التكويني

استخدم التمرين 2 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستطيعون تفسير سبب كَوْن المعادلات الملائمة الأفضل الخاصة بهم اختيارات صائبة.

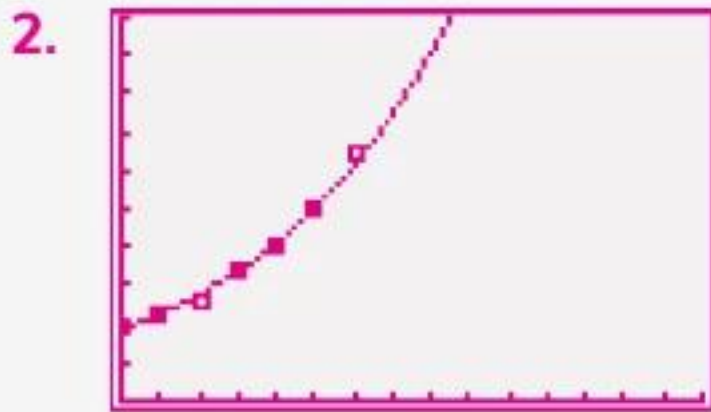
من العملي إلى النظري

عند مناقشة التمرين 5، قد ترغب في السؤال عن أي أفكار لدى الطلاب حول كيفية استخدام الحاسبة للحكم على المزايا ذات الصلة لنماذج متعددة (التربيعية، والتكعيبية، والرابعة، والأسية).

إجابات إضافية



[250, 0] scl: 25 في [30, 0] scl: 2



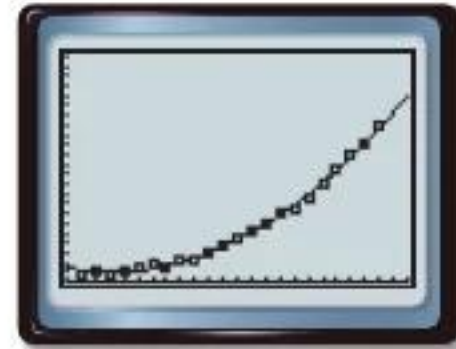
[250, 0] scl: 25 في [30, 0] scl: 2

الانحدار القوة

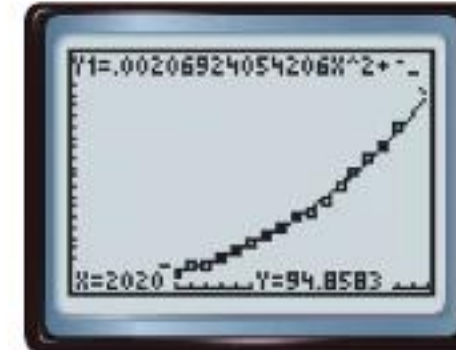
خطوات العملية على الحاسبة: STAT ► ALPHA [A] ENTER



تربيعي: 0.9986993228
قوة: 0.9917543535



[1780, 2020] scl: 10 by [0, 115] scl: 5



[1780, 2020] scl: 10 by [0, 115] scl: 5

الانحدار الأسّي

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ► 0 ENTER



قارن قيم r .
خطي: 0.945411996
أسّي: 0.991887235

إن قيمة r الخاصة بالانحدار التربيعي أقرب إلى 1، ولذلك يبدو أنه يمثل البيانات بالصورة الفضلى، ويمكنك دراسة المعادلة بالنظر عبر التمثيل البياني لمعادلة الانحدار بواسطة مخطط تشتت.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ► 5 ENTER Y= VARS 5 ► 1 GRAPH

b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم سيبلغ تعداد السّكان في الميل المربع عام 2020؟

لتحديد تعداد السّكان في الميل المربع عام 2020، جّد قيمة y عند $x = 2020$.

خطوات العملية على الحاسبة: 2020 [2nd] [CALC] ENTER

إذا استمرّ هذا الاتجاه، سيكون هنالك قرابة 94.9 شخصاً في الميل المربع.

5. لا، الإجابة النموذجية: تساوي قيمة r الخاصة بالانحدار الأسّي 0.9936096203. وتساوي قيمة r الخاصة بالتراجع التربيعي 0.9980751795، وهي أقرب إلى 1.

تمارين

بالنسبة للتمرينات 1-5، أودع محمود 50 AED في أحد الحسابات، ثم نسي الأمر ولم يتم بأي عمليات إيداع أو سحب. يبين الجدول الرصيد في الحساب لقعدة أعوام.

2. w. أنظر الهامش.

1. استخدم حاسبة تمثيل بياني لرسم مخطط تشتت للبيانات.
2. احسب منحني للملاءمة ومثله بيانياً باستخدام انحدار أسّي.
3. اكتب معادلة الملاءمة الفضلى. ما هما المجال والمدى؟
4. الإجابة النموذجية: $\{y = 46.47(1.10^x); D = \{x \mid x \geq 0\}; R = \{y \mid y \geq 4.6.47\}$
5. بناءً على النموذج، كم سيبلغ رصيد الحساب بعد 25 عامًا؟
6. هل النموذج الأسّي هو نموذج الملاءمة الأفضل للبيانات؟ اشرح.

AED 558.58

6. **حان دورك!** اكتب معادلة يمكن الإجابة عليها عبر دراسة بيانات نموذج لوغاريتمي. واختر أولاً موضوعاً ثم اجمع البيانات ذات الصلة عبر البحث في شبكة الإنترنت أو عبر إجراء استطلاع. وبعد ذلك، صمّم مخطط تشتت وجد معادلة انحدار لبياناتك. ثم أجب عن سؤالك. راجع عمل الطلاب.

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

1-2

لماذا؟

الحالي

السابق

نوع الأضرار	سرعة الرياح (mph)	مقياس فوجيتا (F)
المدخن، الأغصان	72-40	F-0 عاصفة
انقلاب المنازل المنقطة	112-73	F-1 إعصار متوسط
تمزق الأسقف	157-113	F-2 عالي
اقتلاع الأشجار	206-158	F-3 شديد
تسوية المنازل بالأرض، تطاير السيارات	260-207	F-4 مدمر
تطاير المنازل	318-261	F-5 هائل
لم يسبق أن سُجل أي إعصار من هذا المستوى	379-319	F-6 رهيب

• تؤثر الدائرة الوطنية للأرصاد الجوية كل عام 1000 إعصار تقريباً في الولايات المتحدة، وتقاس شدة الإعصار على مقياس فوجيتا. وتنقسم الأعاصير إلى ست فئات تبعاً لسرعة الرياح وطول المسار وعرضه إضافة إلى الضرر المترتب عن الإعصار.

1 حل المعادلات اللوغاريتمية.
2 حل المتباينات اللوغاريتمية.

• جدد قيم تعابير لوغاريتمية.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-2 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية.

الدرس 1-2 حل المعادلات اللوغاريتمية. حل المتباينات اللوغاريتمية.

بعد الدرس 1-2 تحديد حلول المعادلات اللوغاريتمية باستخدام الطرق الجبرية.

1 حل المعادلات اللوغاريتمية إن المعادلة اللوغاريتمية تضم لوغاريتمًا واحدًا أو أكثر. يمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لمساعدتك في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 1 حل المعادلة اللوغاريتمية

حل المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$.

المعادلة الأصلية $\log_{36} x = \frac{3}{2}$

تعريف اللوغاريتم $x = 36^{\frac{3}{2}}$

$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$ $36 = 6^2$

قوة القوة $x = 6^3 = 216$

تمرين موجّه

حل كل من المعادلات التالية.

1A. $\log_9 x = \frac{3}{2}$ 27

1B. $\log_{16} x = \frac{5}{2}$ 1024

استخدم الخاصية التالية لحل معادلات لوغاريتمية تضم لوغاريتمات متماثلة الأساس على الطرفين.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

الرموز إذا كان b عددًا موجبًا لا يساوي 1، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ ، فإن $\log_5 x = \log_5 8$.

المفردات الجديدة

المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

كلّف الطلاب بقراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ إعصار بسرعة رياح قدرها 100 mi/h يقع في أي فئة؟ F-1

■ كم عدد إعصارات الفئة F-6 المعروف أنها وقعت؟ 0

مثال 2 على الاختبار المعياري حل المعادلة اللوغاريتمية

حلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

- A -2 B -1 C 2 D 4

قراءة فقرة الاختبار

إنك بحاجة إلى إيجاد x للمعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار

$$\begin{aligned} \log_2 (x^2 - 4) &= \log_2 3x \\ x^2 - 4 &= 3x \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x - 4)(x + 1) &= 0 \\ x - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 1 = 0 \\ x = 4 \quad \quad \quad x = -1 \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية
بطرح $3x$ من كل طرف
بالتحليل إلى العوامل
خاصية ناتج الضرب بصفر
بحلّ كل معادلة

التحقق عوّض كل قيمة في المعادلة الأصلية.

$$\begin{aligned} x = 4 \quad \quad \quad x = -1 \\ \log_2 (4^2 - 4) \quad \log_2 3(4) \quad \log_2 [(-1)^2 - 4] \quad \log_2 3(-1) \\ \log_2 12 = \log_2 12 \quad \checkmark \quad \log_2 (-3) \quad \log_2 (-3) \quad \times \end{aligned}$$

لا يمكن أن يكون مجال دالة لوغاريتمية يساوي 0. إذا $\log_2 (-3)$ غير معرف و -1 هو حل دخيل. الإجابة هي D.

تمرين موجّه

2. حلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

- F -3 G -1 H 5 J 15

2 حل المتباينات اللوغاريتمية المتباينة اللوغاريتمية عبارة عن متباينة تضم لوغاريتمات. ويمكن استخدام الخاصية التالية لحل المتباينات اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في اللوغاريتمات

إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$.

إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x < y$ فإن $x < b^y$.

وتنطبق هذه الخاصية أيضًا على $\leq$ و $\geq$.

مثال 3 حل المتباينة اللوغاريتمية

حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$.

$$\begin{aligned} \log_3 x &> 4 \\ x &> 3^4 \\ x &> 81 \end{aligned}$$

المتباينة الأصلية
خاصية التباين في اللوغاريتمات
بسط

تمرين موجّه

حلّ كل متباينة.

3A. $\log_4 x \geq 3$ $\{x \mid x \geq 64\}$ 3B. $\log_2 x < 4$ $\{x \mid 0 < x < 16\}$

15

1 حل المعادلات اللوغاريتمية

المثال 1 يوضح كيفية حل المعادلات اللوغاريتمية المشتعلة على لوغاريتم مفرد. المثال 2 يوضح كيفية حل معادلة بها لوغاريتمات على كلا الطرفين.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. جد حل $\log_8 x = \frac{4}{3}$. 16

2 مثال على الاختبار المعياري

جد حل $\log_4 x^2 = \log_4 (-6x - 8)$. C

- A 4 B 2
C -2 و -4 D لا يوجد حلول

2 حل المتباينات اللوغاريتمية

المثال 3 يوضح كيفية حل المتباينة اللوغاريتمية. المثال 4 يوضح كيفية حل متباينة بها لوغاريتمات على كلا طرفي الرمز.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو كلف الطلاب بالعمل في مجموعات ثنائية لتصميم عرض فيديو لكيفية حل المتباينة اللوغاريتمية. احرص على أن يوضحوا كل خطوة في حلهم وبالأخص كيفية إعادة كتابة المتباينة اللوغاريتمية في صورة متباينة أسية.

مثال إضافي

3. جد حل $\log_6 x > 3$ $\{x \mid x > 216\}$

نصيحة عند حل الاختبار

التعويض لتوفير الوقت. يمكنك تعويض كل إجابة في الخيارات المعروضة في المعادلة الأصلية إلى أن تتوصل إلى الإجابة التي تعطي إجابة صحيحة.

الربط بتاريخ الرياضيات

تشانغ هونغ (ميلادي. 139-78) يعود اختراع أول مقياس معروف للزلازل إلى الصيني تشانغ هونغ عام 132 قبل الميلاد وكان عبارة عن وعاء كبير من النحاس مزود بنواس ثقيل وعدة أذرع تسقط عند حدوث هزة زلزالية. وكان هذا الجهاز يساعد في تحديد اتجاه الزلزال.

التدريس المتميز OL AL

إذا كان يحتاج الطلاب إلى المساعدة في تصور المواقع النسبية للأرقام في المعادلات اللوغاريتمية والأسية.

عندها كلف الطلاب بإعداد ملصقات ملونة توضح عدة معادلات أسية ولوغاريتمية مكافئة. مثل

$2^3 = 8$ و $\log_2 8 = 3$. اقترح أن يستخدم الطلاب لونًا مختلفًا لكل من الأرقام 2، و 3، و 8.

مثال إضافي

4 جد حل
 $\log_7 (2x + 8) > \log_7 (x + 5)$
 $\{x \mid x > -3\}$

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الدوال اللوغاريتمية

الرموز إذا كان $b > 1$ فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ ويكون
 $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

مثال إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ فإن $x > 35$

وتنطبق هذه الخاصية أيضًا على $\leq$ و $\geq$.

مثال 4 حل متباينات تضم لوغاريتمات في كل طرف

حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$

$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ المتباينة الأصلية
 $x + 3 > 2x + 1$ خاصية التباين في اللوغاريتمات
 $2 > x$ اطرح $x + 1$ من كل طرف
استبعد قيم x التي تحقق $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ فإن $x > -3$ و $x > -\frac{1}{2}$ و
 $x < 2$ مجموعة الحل هي $-\frac{1}{2} < x < 2$ أو $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

تمرين موجّه

4. حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ وتحقق من حلك.
 $\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 3\}$

التحقق من فهمك

حل كل من المعادلات التالية.

1. $\log_8 x = \frac{4}{3}$ 16

2. $\log_{16} x = \frac{3}{4}$ 8

3. الاختيار من متعدد جد حل $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 3x$ C

مثال 2

A 10

B 2

C 5

D 2, 5

حل كل من المتباينات التالية.

4. $\log_5 x > 3$ $\{x \mid x > 125\}$

5. $\log_8 x \leq -2$ $\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{64}\}$

6. $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$ $\{x \mid x \geq 4\}$ 7. $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$ $\{x \mid 2 > x > \frac{4}{3}\}$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 البنية حل كل من المعادلات التالية.

8. $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ 27

9. $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ 3125

10. $\log_8 \frac{1}{2} = x$ $-\frac{1}{3}$

11. $\log_6 \frac{1}{36} = x$ -2

12. $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ 4

13. $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ 9

14. $\log_3 (3x + 8) = \log_3 (x^2 + x)$ -2 أو 4 15. $\log_{12} (x^2 - 7) = \log_{12} (x + 5)$ 4 أو -3

16. $\log_6 (x^2 - 6x) = \log_6 (-8)$ لا يوجد حل 17. $\log_9 (x^2 - 4x) = \log_9 (3x - 10)$ 5

18. $\log_4 (2x^2 + 1) = \log_4 (10x - 7)$ 4 أو 1 19. $\log_7 (x^2 - 4) = \log_7 (-x + 2)$ -3

16 | الدرس 1-2 | حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	8-33, 38, 40-64	8-32 الأعداد الزوجية, 38, 40-44, 49-64
OL أساسي	9-33 الأعداد الفردية, 40-64, 34-38	34-38, 40-44, 49-64
BL متقدم	34-62	

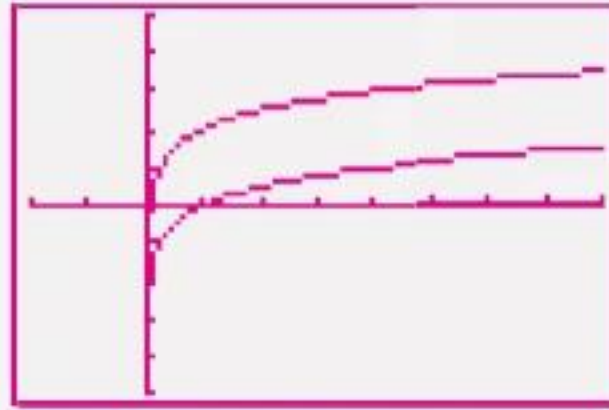
تدريس الممارسات في الرياضيات

التمثيل يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية. وتحليل العلاقات رياضياً لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

إجابات إضافية

36b. كل من التمثيلين البيانيين هو انعكاس للتمثيل البياني الآخر على المحور x .

36c.1. التمثيل البياني الثاني هو نفسه الأول عدا أنه مُمَزَّح رأسياً لأعلى بمقدار وحدتين.



$[-5, 5]$ scl: 1 في $[-2, 8]$ scl: 1

2. التمثيل البياني الثاني هو نفسه الأول عدا أنه مُمَزَّح أفقياً إلى اليسار بمقدار وحدتين.



$[-5, 5]$ scl: 1 في $[-4, 8]$ scl: 1

3. كل نقطة على التمثيل البياني الثاني لها إحداثي y تساوي 3 أمثال النقطة المقابلة على التمثيل البياني الأول.



$[-5, 5]$ scl: 1 في $[-2, 8]$ scl: 1

العلوم تُعطي معادلة سرعة الرياح w ، بالميل في الساعة، بالقرب من مركز إعصار بالعلاقة $w = 93 \log_{10} d + 65$ ، حيث d هي المسافة التي يقطعها الإعصار.

20. اكتب المعادلة بالصورة الأسية. $d = 10^{\frac{w-65}{93}}$

21. ضرب إعصار عام 1999 مدينة أوكلاهوما برياح هي الأسرع على الإطلاق، فإذا قطع الإعصار 525 mph، قدر سرعة الرياح بالقرب من مركز الإعصار. **318 mi/h**

حل كل من المتباينات التالية. $\{x \mid \frac{6}{7} < x < 5\}$

22. $\log_6 x < -3$ $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\}$

24. $\log_3 x \geq -4$ $\{x \mid x \geq \frac{1}{81}\}$

26. $\log_5 x > 2$ $\{x \mid x > 25\}$

28. $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

30. $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$

32. $\log_{11} (3x - 24) \geq \log_{11} (-5x - 8)$ $\{x \mid x \geq 2\}$

23. $\log_4 x \geq 4$ $\{x \mid x \geq 256\}$

25. $\log_2 x \leq -2$ $\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$

27. $\log_7 x < -1$ $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{7}\}$

29. $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$ $\{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$

31. $\log_5 (12x + 5) \leq \log_5 (8x + 9)$ $\{x \mid -\frac{5}{12} < x \leq 1\}$

33. $\log_9 (9x + 4) \leq \log_9 (11x - 12)$ $\{x \mid x \geq 8\}$

المثالان 3 و 4

34. B التمثيل بالنهادج تقاس شدة الزلازل على مقياس لوغاريتمي يدعى مقياس ريختر. وتُعطي شدة الزلازل $M = \log_{10} x$ ، حيث x تمثل سعة الموجة الزلزالية التي تسبب الحركة الأرضية.

a. كم ضعفاً تزيد السعة الناتجة عن زلزالٍ تقدير شدته 8 على مقياس ريختر عن سعة هزة ارتدادية تقدير شدتها 5 على مقياس ريختر؟

b. كادت مدينة سان فرانسيسكو عام 1906 تُدمر عن بكرة أبيها نتيجة زلزالٍ شدته 7.8. وفي عام 1911، حدث زلزالٌ قدرته شدته 8.1 على طول صدع نيو مدريد في وادي نهر الميسيسيبي. فكم ضعفاً تزيد شدة زلزال نيو مدريد عن زلزال سان فرانسيسكو؟

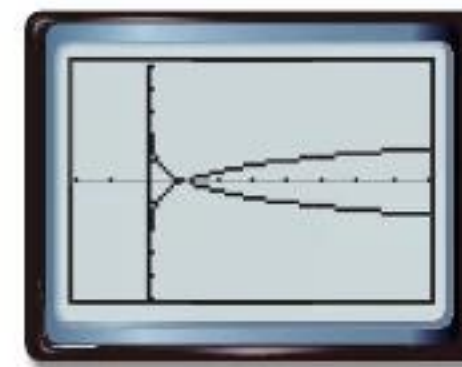
35. الموسيقى يقابل المفتاح الأول على لوحة مفاتيح البيانو طبقة صوتية ترددها 27.5 دورة في الثانية. ومع كل انتقال إلى المفتاح التالي، صعوداً إلى المفاتيح السوداء وهبوطاً إلى البيضاء، تضرب طبقة الصوت بثابت. يعطى قانون حساب تردد طبقة الصوت الصادر

عند العزف على المفتاح ذي الترتيب n على اللوحة الموسيقية من خلال العلاقة $f = 1 + 12 \log_2 \frac{f}{27.5}$.

a. لنغمة أحد المفاتيح التردد 220 دورة في الثانية. فكم رقم هذا المفتاح على لوحة مفاتيح البيانو؟ **37**

b. لطبقة صوتية أخرى على لوحة المفاتيح التردد 880 دورة في الثانية. فبعد كم مفتاح على لوحة المفاتيح توجد هذه الطبقة؟ **61**

34a. أكبر بـ 10^3 أو بـ 1000 ضعف
34b. أكبر بـ $10^{0.3}$ أو بضعفين تقريباً



$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

1. $y = \log_4 x + 2$

2. $y = \log_4 (x + 2)$

3. $y = 3 \log_4 x$

d. سؤال تحليلي صف العلاقة بين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ واذكر مجالا ومدئ معقولين لكل دالة.

e. سؤال تحليلي اكتب معادلة لدالة تمثيلها البياني هو التمثيل البياني لـ $y = \log_3 x$ مزاحاً 4 وحدات إلى الجهة اليسرى ووحدة واحدة إلى الأعلى.

$y = \log_3 (x + 4) + 1$

36a. التمثيلان البيانيان متماثلان من حيث الشكل وخط التقارب لكل تمثيل بياني هو المحور الرأسي y ونقطة تقاطع كل من التمثيلين البيانيين مع المحور الأفقي x هي النقطة 1.
36d. كل من التمثيلين البيانيين هو انعكاس للتمثيل البياني الآخر بالنسبة للمحور الأفقي x .
 $D = \{x \mid x > 0\}$ ؛ $R = \{جميع الأعداد الحقيقية\}$

تدريس الممارسات في الرياضيات

النقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين وتمييز المنطق أو الاستنتاج الصحيح من الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، فهم يستطيعون توضيح ماهيته.

انتبه!

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين

38. ذكّر الطلاب بأن رفع العدد إلى قوة أسية سالبة ليس مثل الضرب في -1.

إجابات إضافية

37c. الإجابة النموذجية: لا تتغير القوة

الأسية للوغاريتم إلا بمعدل 2. القوة الأسية هي الإجابة على اللوغاريتم. أي أن 2 مضروبًا في 10 قبل اللوغاريتم. إذا، نحن نتوقع أن يتغير الديسيبل بمعدل 20.

44. التقاطع مع المحور y للدالة الأسية

$y = b^x$ هو $(0, 1)$. عندما يُبدل الإحداثيان x و y ، يتحول التقاطع مع المحور y إلى التقاطع مع المحور x $(1, 0)$. لا يوجد تقاطع مع المحور x في الدالة الأسية التي لها الصورة $y = b^x$. إذا، عندما يُبدل الإحداثيان x و y ، لن تكون هناك نقطة على المعكوس $(0, 1)$. ولن يوجد تقاطع مع المحور y .

37

الصوت تعطى العلاقة بين شدة الصوت I وعدد وحدات الديسيبل β من خلال $\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$. حيث I تمثل شدة الصوت بالواط في المتر المربع.

عدد وحدات الديسيبل	شدة الصوت	الصوت
0	100	رنة الإبرة
1	101	النفث الطبيعي
6	106	آلة تجفيف الملابس
10	1010	قطار الأنفاق
12	1012	الألعاب النارية

a. جد عدد وحدات الديسيبل لصوت شدته واط واحد في المتر المربع. **120**

b. جد عدد وحدات الديسيبل لصوت شدته 10^{-2} واطًا في المتر المربع. **100**

c. تساوي شدة صوت مقدارها واط واحد في المتر المربع 100 ضعف من شدة صوت مقدارها 10^{-2} واطًا في المتر المربع.

فلماذا لا نوازي ذلك زيادة في عدد وحدات الديسيبل مقدارها 100 ضعف؟ **انظر الهامش.**

40. الإجابة النموذجية: عندما $0 < b < 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ فقط وفقط إذا كان $x < y$ يُقلب رمز المتباينة لأن الكسر الأقل من 1 يصبح أصغر عند رفعه إلى قوة أكبر.

مسائل مهارات التفكير العليا

38. **النقد** بحلّ سالم وجمال $\log_3 x \geq -3$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

جمال	سالم
$\log_3 x \geq -3$	$\log_3 x \geq -3$
$x \leq 3^{-3}$	$x \geq 3^{-3}$
$0 < x \leq \frac{1}{27}$	$x \geq \frac{1}{27}$

38. الإجابة النموذجية: سالم؛ لم يكن هناك داع لقلب رمز المتباينة عند الرفع إلى قوة سالبة.

39. **التحدي** جد $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$. **6 $\frac{17}{20}$**

41. إن الدالة

اللوغاريتمية **التبرير** تنص خاصية التباين في الدوال اللوغاريتمية أنه عندما يكون $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. فما هو الحال عندما $0 < b < 1$ ؟ اشرح استنتاجك.

$\log_b x = y$ هي معكوس الدالة

الأسية ذات الصورة $y = b^x$.

إن مجال إحدى الدالتين

المتعاكستين هو مدى الدالة

الأخرى. ومدى إحدى الدالتين

المتعاكستين هو مجال الدالة الأخرى.

41. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية ارتباط مجال الدوال اللوغاريتمية ومداهما بمجال الدوال الأسية ومداهما.

42. سؤال غير محدد الإجابة أعط مثالاً لمعادلة لوغاريتمية لا حلّ لها.

الإجابة النموذجية: $\log_3 (x + 4) = \log_3 (2x + 12)$

43. **التبرير** اختر مصطلحًا مناسبًا. وشرح استنتاجك. جميع المعادلات اللوغاريتمية لها الصورة $y = \log_b x$.

a. إذا كان أساس معادلة لوغاريتمية أكبر من 1 وكانت قيمة x بين 0 و 1، فإن قيمة y (أصغر، أكبر، تساوي) 0.

b. إذا كان أساس معادلة لوغاريتمية بين 0 و 1 وكانت قيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y (أصغر من، أكبر من، تساوي) 0.

c. هناك (حلّ معدومة، حلّ وحيد، عدد لا نهائي من الحلول) لـ b في المعادلة $y = \log_b 0$.

d. هناك (حلّ معدومة، حلّ وحيد، عدد لا نهائي من الحلول) لـ b في المعادلة $y = \log_b 1$.

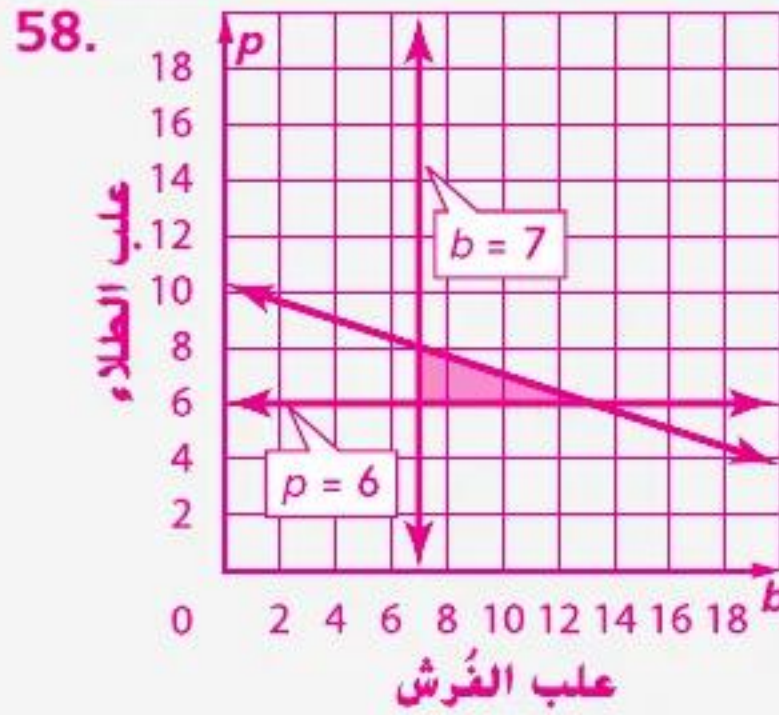
44. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن لأي دالة لوغاريتمية صيغتها $y = \log_b x$ نقطة التقاطع مع

المحور الأفقي x هي $(0, 1)$ دون أن تكون لها أي نقطة تقاطع مع المحور الرأسي y . **انظر الهامش.**

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات كلف الطلاب بكتابة شرح خطوة بخطوة لإجراء حل معادلة لوغاريتمية مثل $\log_8 n = \frac{7}{3}$.

إجابات إضافية



تمرين على الاختبار المعياري

45. جد قيمة x إذا كان $\frac{6.4}{x} = \frac{4}{7}$. C

- A 3.4
B 9.4
C 11.2
D 44.8

46. بعرض الجدول الهطول المطري الشهري خلال جزء من العام. H

الشهر	الهطول المطري (in.)
أبريل	3.60
مايو	5.15
يونيو	5.35
يوليو	3.18
أغسطس	3.83

جد الهطول المطري الوسطي

- F 4.25 in. H 3.83 in.
G 4.22 in. J 3.60 in.

47. مُنحت خديجة زيادةً في الراتب بنسبة 10% لـ 3 سنوات متتالية. فكم بلغ راتبها بعد الزيادات الثلاث إذا كان راتبها الابتدائي AED 12,000 في العام؟ B

- A AED 14,520
B AED 15,972
C AED 16,248
D AED 16,410

48. SAT/ACT بحوزة أحد الباعة 14 بالونًا مملوءًا بالهيليوم للبيع: 9 من البالونات صفراء، و 3 حمراء و 2 خضراوان. اختير بالونٌ عشوائيٌ وبيع. فإذا كان لون البالون المباع أصفر، فما احتمال أن يكون البالون التالي، والمختار عشوائيًا، أصفر أيضًا؟ J

- F $\frac{1}{9}$ H $\frac{36}{91}$ K $\frac{9}{14}$
G $\frac{1}{8}$ J $\frac{8}{13}$

مراجعة شاملة

جد قيمة كل تعبير. (الدرس 1-1)

49. $\log_4 256$ 4

50. $\log_2 \frac{1}{8}$ -3

51. $\log_6 216$ 3

52. $\log_3 27$ 3

53. $\log_5 \frac{1}{125}$ -3

54. $\log_7 2401$ 4

55. السفر ترافق وفاء النادي الإماراتي إلى كوستاريكا، حيث تشتري 10 شيكات سياحية من الفئات AED 20 و AED 50 و AED 100 مجموعها AED 370. فإذا علمت أن بحوزتها عددًا متساويًا من الشيكات التي فئتها AED 20 و AED 50. فكم عدد كل نوع من أنواع الشيكات السياحية التي معها؟ شيك واحد من فئة AED 100 و 3 شيكات من فئة AED 50 و 6 شيكات من فئة AED 20.

56. الشحن يزيد ارتفاع أسطوانة شحن البضائع 4 أقدام عن نصف قطرها. فإذا كان حجم الأسطوانة $5\pi \text{ ft}^3$. فكم طولها؟ استخدم الصيغة $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. 5 ft

57. علم الآثار تُنصب شبكة إحدائية فوق حفرة للتنقيب عن الآثار لتحديد موقع الآثار. وقد كشف جزئيًا عن ثلاث من زوايا أحد المباني عند النقاط (6, -1) و (5, 4) و (-1, -2). فإذا كان قياس كل مربع في الشبكة يساوي قدمًا مربعة واحدة، قدر مساحة أرضية المبنى. حوالي 20 ft^2

58. الفن يُسمح لونا أن تنفق مبلغًا لا يزيد عن AED 225 لتوريد فراش وألوان إلى نادي الفنون. وهي بحاجة على الأقل إلى 20 فرشاة و 56 علبة ألوان. مثل بيانها المنطقة التي تعبر عن عدد الصناديق التي يمكن شراؤها من كل مادة. انظر الهامش.



مراجعة المهارات

حوّل لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغير يساوي صفر.

59. $x^5 \cdot x^3$ x^8

60. $a^2 \cdot a^6$ a^8

61. $(2p^2n)^3$ $8p^6n^3$

62. $(3b^3c^2)^2$ $9b^6c^4$

63. $\frac{x^4y^6}{xy^2}$ x^3y^4

64. $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$ 1

التوسع كلف الطلاب بإيجاد قيمة $\log_3 9$ و $\log_3 27$. 2, 3 ثم اطلب منهم توقع قيمة $\log_3 (9 \times 27)$. بعد أن يبينوا توقعاتهم، اطلب منهم التحقق لرؤية ما إذا كانت 3 مرفوعة إلى قيمهم المتوقعة تساوي 9×27 . أم 243. اطلب منهم توقع قيمة $\log_3(mn)$. $\log_3 m + \log_3 n$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-1 إلى 1-2

التقويم التكويني

استخدام اختبار منتصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في الجزء الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

مطويات منظم الدراسة

مطويات Dinah Zike®

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة، شجّعهم على مراجعة معلومات الدروس من 1-1 إلى 1-2 المكتوبة في مطوياتهم.

جد قيمة كل من التعابير الآتية. (الدروس 1-1)

5. $\log_4 32 = \frac{5}{2}$

6. $\log_5 5^{12} = 12$

7. $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

8. اكتب $\log_9 729 = 3$ بالصورة الأسية. (الدروس 1-1)

$729 = 9^3$

حلّ كلّ معادلة أو متباينة في ما يلي. وتحقق من صحة الحل. (الدروس 1-2)

9. $\log_4 x = \frac{3}{2}$ 8

10. $\log_7 (-x + 3) = \log_7 (6x + 5)$ $-\frac{2}{7}$

11. $\log_2 x < -3$ $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{8}\right\}$

12. $\log_8 (3x + 7) = \log_8 (2x - 5)$ لا يوجد حل

مثّل كل دالة بيانيًا. أذكر المجال والمدى. (الدروس 1-1)

1. الاختيار من متعدد جد قيمة x في المعادلة $\log_3 (x^2 + 2x) = \log_3 (x + 2)$ (الدروس 1-1)

$x = -2, 1$ F

$x = -2$ G

$x = 1$ H

J لا يوجد حل

H

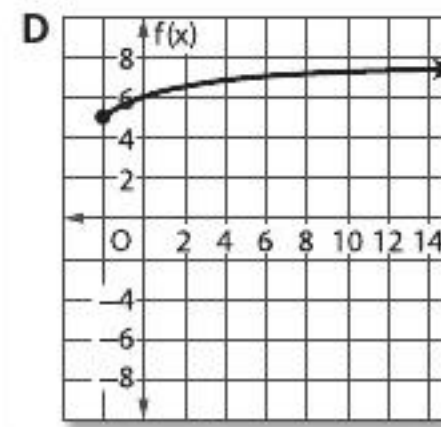
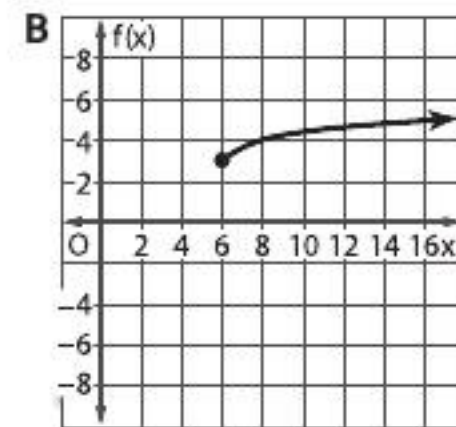
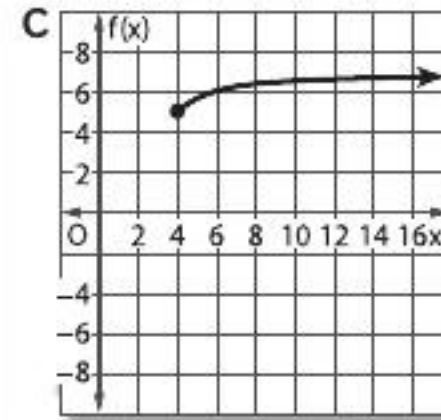
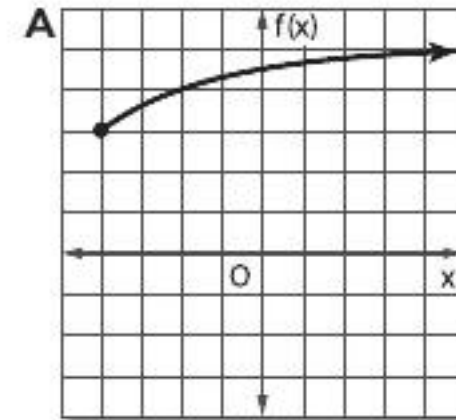
مثّل كل دالة بيانيًا. (الدروس 1-1)

2. $f(x) = 3 \log_2 (x - 1)$

3. $f(x) = -4 \log_3 (x - 2) + 5$

2, 3 انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

4. الاختيار من متعدد أي من التمثيلات البيانية المبينة أدناه هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_3 (x + 5) + 3$ ؟ (الدروس 1-1)



1 الهدف

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-3 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية وحل المعادلات اللوغاريتمية.

الدرس 1-3 تبسيط التعابير وإيجاد قيمها باستخدام خواص اللوغاريتمات. حل التعابير اللوغاريتمية باستخدام خواص اللوغاريتمات.

بعد الدرس 1-3 تحديد حلول المعادلات الأسية باستخدام الطرق الجبرية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- هل عصير الليمون حمضي أم قاعدي؟ **حمضي**
- هل حليب المغنيسيا حمضي أم قاعدي؟ **قاعدي**
- قاعدية حليب المغنيسيا كم تساوي من أمثال قاعدية المياه المحايدة؟
 $10^{10} - 7 = 10^3 = 1000$

خواص اللوغاريتمات

السابق	الحالي	لماذا	مستوى درجة الحموضة	فاتح الضرب
لقد وجدت قيم تعابير لوغاريتمية وحللت معادلات لوغاريتمية.	1 تبسيط التعابير وإيجاد قيمها باستخدام خواص اللوغاريتمات.	إن مستوى الحموضة في الطعام هامّ بالنسبة لبعض المستهلكين ذوي المعدة الحساسة. ونميل معظم الأطعمة التي نتناولها إلى الحموضة أكثر من الأساسية. يقيس مقياس درجة الحموضة الحموضة؛ حيث يشير انخفاض مستوى pH إلى أن الوسط حمضي، بينما يشير ارتفاعها إلى أن الوسط أساسي. وهذا المقياس مثال عن المقاييس اللوغاريتمية القائمة على قوى العدد عشرة. للقهوة السوداء درجة حموضة pH تساوي 5، بينما يملك الماء الحيادي درجة الحموضة 7. وتتفوق حموضة القهوة السوداء حموضة الماء المحايد بمائة ضعف، وذلك لأن $10^2 = 10^7 - 5$ أو 100.	2.1	عصير الليمون
	2 حل معادلات لوغاريتمية باستخدام خواص اللوغاريتمات.		3.5	الملحوظ الخلل
			4.2	الطماطم
			5.0	القهوة السوداء
			6.4	الحليب
			7.0	الماء النقي
			7.8	الببض
			10.0	حليب المغنيسيا

1 خواص اللوغاريتمات نظرًا إلى أن اللوغاريتمات هي أسس، فيمكن اشتقاق خواصها من خواص الأسس. يمكن اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية ضرب الأسس.

المفهوم الأساسي خاصية الضرب في اللوغاريتمات

الشرح إن لوغاريتم ناتج الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز لجميع الأعداد الموجبة a و b و x ، حيث $x \neq 1$ ، يكون $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.

مثال $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

ولتوضيح صحة هذه الخاصية، ليكن لديك $b^x = a$ و $b^y = c$. إذا، باستخدام تعريف اللوغاريتم، يكون $x = \log_b a$ و $y = \log_b c$.

بالتعويض
ناتج ضرب الأسس
خاصية التباين في اللوغاريتمات
خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات
بإستبدال x بـ $\log_b a$ و y بـ $\log_b c$.
يمكنك استخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقدير التعابير اللوغاريتمية تقريبًا.

مثال 1 استخدام خاصية الضرب

استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقدير تقريبًا قيمة $\log_4 192$.

بإستبدال 192 بـ $4^3 \times 3$ أو 64×3 .
خاصية الضرب
خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات
بإستبدال $\log_4 3$ بـ 0.7925.

تمرين موجّه

1. استخدم $\log_4 2 = 0.5$ لتقدير تقريبًا قيمة $\log_4 32$. **2.5**

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

تذكر أنه يتم إيجاد ناتج قسمة القوى عبر طرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات مشابهة لذلك أيضًا. $b^x = a$ و $b^y = c$ وبالتالي $\log_b a = x$ و $\log_b c = y$

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c}$$

$$b^{x-y} = \frac{a}{c}$$

$$\log_b b^{x-y} = \log_b \frac{a}{c}$$

$$x - y = \log_b \frac{a}{c}$$

$$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$

خاصية القسمة

خاصية المساواة في المعادلات اللوغاريتمية

خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات

بإستبدال x بـ $\log_b a$ و y بـ $\log_b c$

المفهوم الأساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

الشرح لوغاريتم القسمة يساوي الفرق بين لوغاريتمي البسط والمقام.

الرموز لكل الأعداد الموجبة a و b و x ، حيث $x \neq 1$.
 $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$

مثال $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام خاصية القسمة

العلوم تعرّف درجة الحموضة pH لمادة على أنها تركيز شوارد الهيدروجين $[H^+]$ بالمول. وهي تعطى من خلال الصيغة $pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$. جد كمية الهيدروجين الموجودة في لتر واحد من المطر الحمضي الذي درجة حموضته pH تساوي 4.2.

الاستيعاب لديك الصيغة الخاصة بإيجاد درجة الحموضة pH ولديك درجة حموضة المطر. وأنت بحاجة لإيجاد كمية الهيدروجين الموجودة في لتر من هذا المطر.

التخطيط اكتب المعادلة، ثم حلّها لإيجاد $[H^+]$.

جد حلّ

$$pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

المعادلة الأصلية

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

بتعويض 4.2 بدلاً من pH.

$$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$$

خاصية القسمة

$$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$$

$\log_{10} 1 = 0$

$$4.2 = -\log_{10} [H^+]$$

بسط.

$$-4.2 = \log_{10} [H^+]$$

بضرب كل طرف بـ -1.

$$10^{-4.2} = [H^+]$$

تعريف اللوغاريتم

هناك $10^{-4.2}$ ، أو حوالي 0.000063 مولاً من الهيدروجين في اللتر الواحد من المطر.

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

$pH = 4.2$

التحقق

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$$

$[H^+] = 10^{-4.2}$

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$$

خاصية القسمة

$$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$$

بسط.

$$4.2 = 4.2$$

تمرين موجّه

2. **الصوت** تعطى جهازة الصوت L ، والمقاسة بوحدة الديسيبل، من خلال العلاقة $L = 10 \log_{10} R$.

والتي فيها R الشدة النسبية للصوت. افترض أن شخصاً يتكلم بشدّة نسبية تساوي 10^6 أو 60 ديسيبل.

فكم سيكون صوت 100 شخص أكثر جهازة علماً أنّ كلّ منهم يتحدث بالشدة نفسها؟ **سيكون أكثر**

جهازة بـ 20 ديسيبل

الربط بالحياة اليومية

المطر الحمضي أكثر حموضة من المطر العادي. حيث يتصاعد الدخان والبخار الصادر عن حرق الوقود الأحفوري في الجو ويختلط مع الرطوبة الموجودة في المطر ليشكّل المطر الحمضي. وقد يكون المطر الحمضي مسؤولاً عن تآكل النماثيل، كما توضح الصورة المبينة أعلاه.

1 خواص اللوغاريتمات

المثال 1 يوضح كيفية استخدام خاصية ناتج الضرب لتقريب قيمة التعبير اللوغاريتمي. **المثال 2** يوضح كيفية استخدام خاصية ناتج القسمة لحل مسألة من الحياة اليومية. **المثال 3** يوضح كيفية استخدام خاصية القوى في اللوغاريتمات لتقريب قيمة التعبير اللوغاريتمي.

أمثلة إضافية

1 استخدم $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 250$. **3.4307**

2 **العلوم** جد كمية الهيدروجين الموجودة في لتر من المطر الحمضي الذي به أس هيدروجيني (pH) من 5.5. **$10^{-5.5}$ أو 0.0000032 مول**

التركيز على محتوى الرياضيات

خواص اللوغاريتمات بالإضافة إلى خواص ناتج الضرب وناتج القسمة والقوى في اللوغاريتمات، توجد خواص أخرى مثل الخواص الأربع المذكورة أدناه، والتي يمكن أن تكون ذات فائدة.

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b b^x = x$$

$$b^{\log_b x} = x$$

توضح أول اثنتين من تلك الخواص عندما تُكتب المعادلات في صيغة أسية. وتنتج الخاصيتان الثالثة والرابعة عن حقيقة أن الدوال اللوغاريتمية والأسية دوال معكوسة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية على اللوحة، حل العديد من الأمثلة التي تستخدم خواص مختلفة من اللوغاريتمات. احفظ كل مثال باعتباره صفحة ملاحظات، وعنونه بالخاصية المستخدمة به بشكل واضح. وألصق ملاحظاتك على صفحة الويب الخاصة بصفك الدراسي بحيث يمكن للطلاب استخدامها باعتبارها مرجعاً إضافياً خارج الصف الدراسي.

إرشاد للمعلمين الجدد

حل المسائل عند مناقشة خاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات، أوضح أن اللوغاريتمات المستخدمة في المثال تبين أن الخاصية تنطبق على كل اللوغاريتمات وليس فقط تلك التي يمكن تحويلها لأبسط صورة.

تذكّر أنه يتم إيجاد قوة القوة عبر ضرب الأسس. وخاصية القوة في اللوغاريتمات مشابهة لذلك.

المفهوم الأساسي خاصية القوة في اللوغاريتمات

الشرح إن لوغاريتم قوة هو ناتج ضرب اللوغاريتم بالقوة.

الرموز لأي عدد حقيقي p ، ولأي عددين موجبين m و b ، حيث $b \neq 1$ ، يكون $\log_b m^p = p \log_b m$

$$\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$$

مثال

مثال 3 خاصية القوة في اللوغاريتمات

لديك $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، جد بصورة تقريبية $\log_2 25$.

استبدل العدد 25 بـ 5^2 .

خاصية القوة

استبدل $\log_2 5$ بـ 2.3219

$$\begin{aligned} \log_2 25 &= \log_2 5^2 \\ &= 2 \log_2 5 \\ &\approx 2(2.3219) \text{ أو } 4.6438 \end{aligned}$$

تمرين موجّه

3. لديك $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، جد على وجه تقريبي قيمة $\log_3 49$.

2 حل المعادلات اللوغاريتمية يمكنك استخدام خواص اللوغاريتمات لحلّ معادلات تضم لوغاريتمات.

مثال 4 حل المعادلات باستخدام خواص اللوغاريتمات

حلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$.

المعادلة الأصلية

خاصية الضرب

تعريف اللوغاريتم

ب طرح 36 من كل طرف.

بالتحليل إلى العوامل.

خاصية الضرب بصفر

بحلّ كل معادلة.

$$\begin{aligned} \log_6 x + \log_6 (x - 9) &= 2 \\ \log_6 x(x - 9) &= 2 \\ x(x - 9) &= 6^2 \\ x^2 - 9x - 36 &= 0 \\ (x - 12)(x + 3) &= 0 \\ x - 12 = 0 \text{ or } x + 3 &= 0 \\ x = 12 \quad x = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_6 x + \log_6 (x - 9) &= 2 \\ \log_6 12 + \log_6 (12 - 9) &\stackrel{?}{=} 2 \\ \log_6 12 + \log_6 3 &\stackrel{?}{=} 2 \\ \log_6 (12 \times 3) &\stackrel{?}{=} 2 \\ \log_6 36 &\stackrel{?}{=} 2 \\ \checkmark \quad 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_6 x + \log_6 (x - 9) &= 2 \\ \log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) &\stackrel{?}{=} 2 \\ \log_6 (-3) + \log_6 (-12) &\stackrel{?}{=} 2 \end{aligned}$$

نظرًا لكون $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرّفين، فإنّ -3 حلّ دخيل.

إذا الحلّ هو $x = 12$.

تمرين موجّه

$$4A. 2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$$

$$4B. \log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$$

مثال إضافي

3 علمًا بأن $\log_5 6 \approx 1.1133$ ، قرّب قيمة $\log_5 216$ إلى 3.3399.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الأدوات يراعي الطلاب المتفوقون في الرياضيات الأدوات المتاحة أثناء حل مسألة رياضية. حتّ الطلاب على التحقق من حلولهم باستخدام الآلة الحاسبة.

2 حل المعادلات اللوغاريتمية

المثال 4 يوضح كيفية حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خواص اللوغاريتمات.

مثال إضافي

4 حل المعادلة.

$$5 \quad 4 \log_2 x - \log_2 5 = \log_2 125$$

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي شجّع الطلاب على التحقق من إجاباتهم بالتقدير. على سبيل المثال، في المثال 3، $2^4 = 16$ و $2^5 = 32$. إذا، من المعقول أن يكون $\log_2 25$ بين 4 و 5.

نصيحة دراسية

الأدوات يمكنك التحقق من هذه الإجابة عبر إيجاد قيمة $2^{4.6438}$ على الحاسبة. وينبغي أن تعطيك الحاسبة نتيجة تساوي تقريبًا 25. وذلك نظرًا لكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ يعني أن $2^{4.6438} \approx 25$.

التدريس المتميز AL OL BL

المتعلمون بطريقة التواصل بعد مناقشة المثال 4 مباشرة، نظّم الطلاب في مجموعات ثنائية لإعادة حل المثال معًا دون النظر إلى الحل في الكتاب. واطلب من كل ثنائي تبادل الأدوار في شرح خطوات الحل لبعضهما البعض. ودعهم أيضًا يتناقشوا حول مدى صحة حلولهم.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف، ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقدير قيمة كل تعبير مما يلي تقريبًا.

1. $\log_4 18$ **2.085**
2. $\log_4 15$ **1.9535** **جبل إيفرست: 26,855.44 باسكال**
3. $\log_{43} \frac{5}{3}$ **0.3685** **جبل تريسولي: 34,963.34 باسكال**
4. $\log_{44} \frac{3}{4}$ **-0.2075** **جبل بونيت: 36,028.42 باسكال**

جبل ماكينلي:

39,846.22

باسكال:

جبل لوغان:

41,261.82

باسكال

الجبل	البلد	الارتفاع (m)
إيفرست	نيبال/التبت	8850
تريسولي	الهند	7074
بونيتي	الأرجنتين/تشيلي	6872
ماكينلي	الولايات المتحدة	6194
لوغان	كندا	5959

مثال 2 5. تسلق الجبال مع زيادة الارتفاع.

ينخفض الضغط الجوي للهواء.

ويعطى قانون حساب الضغط

بناءً على الارتفاع بالعلاقة

$a = 15,500 (5 - \log_{10} P)$ حيث a

يمثل الارتفاع بالأمتار و P يمثل الضغط

بالباسكال (باسكال 6900 ≈ 1 psi).

فما قيمة ضغط الهواء عند القمة بالباسكال

لكل من الجبال المدرجة في الجدول

على الجهة اليمنى؟

مثال 3 إذا كان لديك $\log_3 5 \approx 1.465$ و $\log_5 7 \approx 1.2091$ ، قدر قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

6. $\log_3 25$ **2.93**
7. $\log_5 49$ **2.4182**

مثال 4 حل كل معادلة مما يلي. وتحقق من صحة الحل.

8. $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ **8**
9. $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$ **2**
10. $3 \log_2 x = \log_2 8$ **2**
11. $\log_{10} a + \log_{10} (a - 6) = 2$ **13.4403**

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 استخدم $\log_4 2 = 0.5$ ، $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقدير قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

12. $\log_4 30$ **2.4535**
13. $\log_4 20$ **2.1610**
14. $\log_4 \frac{2}{3}$ **-0.2925**
15. $\log_4 \frac{4}{3}$ **0.2075**
16. $\log_4 9$ **1.5850**
17. $\log_4 8$ **1.5**

مثال 2 18. العلوم سجّل عام 2007 وقوع زلزال بالقرب

من سان فرانسيسكو بشدة 5.6 على مقياس ريختر.

وكانت شدة زلزال سان فرانسيسكو الشهير الذي وقع

عام 1906 8.3.

a. فيكم تزيد شدة الزلزال الذي وقع عام 1906

عن الزلزال الذي وقع عام 2007؟

b. صنف ريختر نفسه الزلزال الذي وقع عام 1906

على أن شدته كانت 8.3. ولكن إحدى الدراسات

الحديثة أشارت إلى أن شدته كانت على الأرجح 9.7.

فما الفرق في الشدتين؟

المصدر: TLC

ظن ريختر أن الزلزال كان أشد بـ $10^{0.4}$

أو بـ $2\frac{1}{2}$ ضعفًا من شدته الحقيقية.

مثال 3 إذا كان لديك $\log_6 8 \approx 1.1606$ و $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، قدر قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

19. $\log_6 48$ **2.1606**
20. $\log_7 81$ **2.2584**
21. $\log_6 512$ **3.4818**
22. $\log_7 729$ **3.3876**

مثال 4 المثابرة حل كل معادلة مما يلي. وتحقق من صحة الحل.

23. $\log_3 56 - \log_3 n = \log_3 7$ **8**
24. $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$ **2**
25. $5 \log_2 x = \log_2 32$ **2**
26. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$ **4**

24 | الدرس 1-3 | خواص اللوغاريتمات

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	12-26, 61-63, 65-88	12-26 الأعداد الزوجية، 61-63, 73-88
OL أساسي	13-57 الأعداد الفردية، 59-63, 65-88	27-63, 65-68, 73-88
BL متقدم	27-82 (اختياري: 83-88)	

الاحتمالات أثبت الدكتور فرانك بنفورد في الثلاثينات من القرن الماضي طريقة لتحديد ما إن كانت مجموعة من الأعداد قد اختيرت عشوائياً أو بدوياً. فإذا لم تُختر مجموعة من الأعداد عشوائياً، فإن قانون بنفورد المبين بالعلاقة $P = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d}\right)$ يتنبأ باحتمال كون رقم ما d هو الرقم الأول في مجموعة. فعلى سبيل المثال، هناك احتمال يساوي 4.6% بأن يكون العدد الأول هو 9.

a. أعد كتابة القانون لإيجاد العدد إذا أعطيت الاحتمال. $d = \frac{1}{10^P - 1}$

b. جد العدد الذي احتمال اختياره يساوي 9.7%. 4

c. جد احتمال أن يكون العدد الأول يساوي $(\log_{10} 2 \approx 0.30103)$. 30.1%

استخدم $\log_5 3 \approx 0.6826$ و $\log_5 4 \approx 0.8614$ لتقدير قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

28. $\log_5 40$ 2.2921

30. $\log_5 \frac{3}{4}$ -0.1788

32. $\log_5 9$ 1.3652

34. $\log_5 12$ 1.5440

29. $\log_5 30$ 2.1133

31. $\log_5 \frac{4}{3}$ -0.1788

33. $\log_5 16$ 1.7228

35. $\log_5 27$ 2.0478

حل كل معادلة مما يلي. وتحقق من صحة الحل.

36. $\log_3 6 + \log_3 x = \log_3 12$ 2

38. $\log_{10} 18 - \log_{10} 3x = \log_{10} 2$ 3

40. $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$ 108

37. $\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$ 3

39. $\log_7 100 - \log_7 (y + 5) = \log_7 10$ 5

41. $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$ $85\frac{1}{3}$

حل لإيجاد قيمة n .

42. $\log_a 6n - 3 \log_a x = \log_a x$ $\frac{x^4}{6}$

43. $2 \log_b 16 + 6 \log_b n = \log_b (x - 2)$ $\left(\frac{x-2}{256}\right)^{\frac{1}{6}}$

حل كل معادلة مما يلي، وتحقق من صحة الحل. 46. ليس هناك حل حقيقي

44. $\log_{10} z + \log_{10} (z + 9) = 1$ 1

46. $\log_2 (15b - 15) - \log_2 (-b^2 + 1) = 1$

48. $\log_6 0.1 + 2 \log_6 x = \log_6 2 + \log_6 5$ 10

45. $\log_3 (a^2 + 3) + \log_3 3 = 3$ $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$

47. $\log_4 (2y + 2) - \log_4 (y - 2) = 1$ 5

49. $\log_7 64 - \log_7 \frac{8}{3} + \log_7 2 = \log_7 4p$ 12

50. **الاستنتاج** بعد الحوت الأحدب أحد الأنواع المهددة بالانقراض. على فرض أن هناك 5000 حوت الأحدب على قيد الحياة اليوم، وأن تعداد هذه الحيتان يتناقص بنسبة 4% كل عام.

a. اكتب دالة لوغاريتمية للزمن بالسنوات بناءً على تعداد الحيتان. $t = \log_{0.96} \left(\frac{P}{5000}\right)$

b. كم سنة سيستغرق انخفاض تعداد الحيتان إلى ما دون 1000؟ قرب إجابتك إلى أقرب سنة. 40 عاماً

حدد ما إذا كانت كل معادلة صحيحة أم خاطئة.

51. $\log_8 (x - 3) = \log_8 x - \log_8 3$ خاطئة

53. $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$ خاطئة

55. $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ صحيحة

57. $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ خاطئة

52. $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$ صحيحة

54. $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$ صحيحة

56. $\log_4 (z + 2) = \log_4 z + \log_4 2$ خاطئة

58. $\log_9 \frac{x^2 y^3}{4} = 2 \log_9 x + 3 \log_9 y - 4 \log_9 z$ صواب

59. **الموكب** تعطى معادلة حساب الجهارة L مقدرةً بالديسيبل بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$. حيث R هي الشدة النسبية للصوت.

a. جد حل R $120 = 10 \log_{10} R$ لإيجاد الشدة النسبية لموكب مهرجان جهارته 120 ديسيبل وذلك بناءً على مدى القرب من الموكب. 10^{12}

b. بوذ بعض أولياء الأمور ذوي الأطفال الصغار أن يُخفَضَ مستوى الجهارة إلى 80 ديسيبل. فبكم ضعف تكون الشدة أقل في تلك الحالة؟ بمعنى آخر، جد نسبة الشدتين. 10^4 أو 10,000 ضعف تقريباً

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. يتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلاً منطقيًا للمسألة التي يحلها؛ والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

60. **المعرفة المالية** يبلغ الرصيد المدين للإماراتي في المتوسط على بطاقة الائتمان قرابة AED 8600 وذلك

$$m = \frac{b\left(\frac{r}{n}\right)}{1 - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt}}$$

عند معدل سنوي (APR) يساوي 18.3% يمكن استخدام الصيغة لحساب الدفعة الشهرية m اللازمة لسداد رصيد بطاقة الائتمان b خلال عدد محدد من السنوات t . حيث r يمثل المعدل السنوي و n يمثل عدد الدفعات في السنة.

a. ما هي الدفعة الشهرية التي ينبغي سدادها لسداد الرصيد المدين خلال ثلاثة سنوات بالضبط؟ وما المبلغ الإجمالي المسدد؟ **AED 312.21; AED 11,239.56**

الدفعة (m)	عدد السنوات (t)
AED 50	غير حقيقي
AED 100	غير حقيقي
AED 150	11.42
AED 200	5.87
250 AED	4.09
300 AED	3.16

b. يمكن استخدام المعادلة $t = \frac{\log\left(1 - \frac{br}{mn}\right)}{-n \log\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$ من أجل حساب عدد السنوات اللازم لسداد ما. انسخ الجدول وأكمله. **انظر الهامش.**

c. مثل بيانات المعلومات في الجدول الوارد في القسم b.

d. إذا كنت تستطيع سداد مبلغ AED 100 في الشهر. فهل سيكون بوسعك سداد الرصيد المدين؟ وكم سيستغرق ذلك؟ وإن لم يكون بوسعك سدادها، فما السبب؟

e. ما هي الدفعة الصغرى التي يمكن دفعها لسداد الدين؟ **AED 131.16**

لا؛ تساوي الفائدة الشهرية AED 131.15، وبالتالي فإن الدفعات قاصرة حتى عن تغطية الفائدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

61. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيراً لوغاريتمياً لكل حالة مما يلي. ثم اكتب التعبير الموسع.

a. ناتج ضرب وناتج قسمة **الإجابة النموذجية:** $\log_b \frac{xz}{5} = \log_b x + \log_b z - \log_b 5$

b. ناتج ضرب وقوة **الإجابة النموذجية:** $\log_b m^4 p^6 = 4 \log_b m + 6 \log_b p$

c. ناتج ضرب وناتج قسمة وقوة **الإجابة النموذجية:** $\log_b \frac{j^8 k}{h^5} = 8 \log_b j + \log_b k - 5 \log_b h$

62. **براهين** استخدم خواص الأسس لإثبات خاصية القوة في اللوغاريتمات. **انظر الهامش.**

63. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في صحة ما يلي. **63b. $\log_b b = 1$ لأن $b^1 = b$.**

a. $\log_b 1 = 0$ b. $\log_b b = 1$ c. $\log_b b^x = x$
63a. $\log_b 1 = 0$ لأن $b^0 = 1$. **63c. $\log_b b^x = x$ لأن $b^x = b^x$.**

64. **التحدي** حول العلاقة $\log_{\sqrt{a}}(a^2) = x$ لأبسط صورة من أجل إيجاد قيمتها العددية المحددة. **انظر الهامش.**

65. أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟ جـد التعبير الذي لا ينتمي. مع الشرح.

$$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$$

$$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$$

$$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$$

$$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$$

66. التبرير استخدم خواص اللوغاريتمات لإثبات أن $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

67. **التحدي** حول العلاقة $\log_5 2 - \log_5 x^3$ لأبسط صورة لإيجاد قيمتها العددية المحددة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

68. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الرابط بين خواص الأسس واللوغاريتمات. واشتمل على أمثلة مشابهة للمثال الوارد في بداية الدرس والذي يوضح خاصية الضرب. ولكن في حالة خاصية القسمة وخاصية القوى في اللوغاريتمات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقاً في بناء الفرضيات. ويضعون تخمينات ويبنون تقدماً منطقيًا للعبارات لاستكشاف صحة تخميناتهم. كما يمكنهم تحليل الحالات بتفكيكها إلى مسائل. ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

إجابات إضافية

60c.



62. $m^p = m^p$
 $(b^{\log_b m})^p = b^{\log_b (m^p)}$
 $b^{\log_b m p} = b^{\log_b (m^p)}$
 $\log_b m p = \log_b (m^p)$
 $p \log_b m = \log_b (m^p)$

64. $\log_{\sqrt{a}}(a^2) = x$
 $(\sqrt{a})^x = a^2$
 $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^x = a^2$
 $a^{\frac{x}{2}} = a^2$
 $\frac{x}{2} = 2$
 $x = 4$

4 التقويم

الكرة البلورية أخبر الطلاب أنهم سيتعلمون في الدرس التالي كيفية حل المعادلات باستخدام اللوغاريتمات العادية (الأساس 10). اطلب منهم كتابة عما يعتقدونه بشأن ارتباط ما تعلموه اليوم بالدرس التالي المقرر دراسته.

تمرين على الاختبار المعياري

69. جد النمط الذي تأخذه البيانات.

22, 11, 12, 23, 7, 6, 17, 15, 21, 19

11 A
15 B
16 C
D لا يوجد نمط.

70. SAT/ACT ما الأثر الذي يصيب التمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2$ عند تغييرها إلى $y = 2x^2$ ؟ H

F يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجة حول نقطة الأصل.

G يتضيق التمثيل البياني.

H يتوسع التمثيل البياني عرضاً.

J التمثيل البياني للعلاقة $y = 2x^2$ هو انعكاس للتمثيل البياني للعلاقة $y = 4x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي x.

K لا تغيير يصيب التمثيل البياني.

71. إجابة قصيرة:

إذا كان $\ln y = 6.5(1.07)^x$ حيث x يمثل

عدد السنوات منذ عام 2000، و y يمثل

العدد التقريبي من ملايين الأمريكيين البالغة

أعمارهم 7 سنوات وأكثر، والذين ذهبوا في

رحلة للتخييم مرتين أو أكثر في ذلك العام.

صف كيف يتغير عدد الأمريكيين الذين

يذهبون للتخييم بمرور الزمن مقدراً بالملايين.

نموذج أسّي

72. ما نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل

البياني الخاص بـ $y = 4x^2 - 3x - 1$ ؟ D

A $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$

B -1 و $\frac{1}{4}$

C -1 و 1

D $-\frac{1}{4}$ و 1

مراجعة شاملة

حل كل معادلة مما يلي، وتحقق من صحة الحل. (الدرس 1-2)

73. $\log_5 (3x - 1) = \log_5 (2x^2)$ $\frac{1}{2}, 1$

74. $\log_{10} (x^2 + 1) = 1 \pm 3$

75. $\log_{10} (x^2 - 10x) = \log_{10} (-21)$

جد قيمة كل تعبير. (الدرس 1-1) لا يوجد حل

76. $\log_{10} 0.001$ -3

77. $\log_4 16^x$ 2x

78. $\log_3 27^x$ 3x

79. الكهرباء يمكن حساب مقدار التيار الكهربائي الذي يستهلكه جهاز ما بالأمبير I باستخدام القانون $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ ، وفيه P هي الاستطاعة بالواط و R هي المقاومة بالأوم. فما مقدار التيار الكهربائي الذي يستهلكه جهاز إذا كانت 120 واطاً و P = 3 أوم و R؟ قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة. 6.3

حدّد ما إن كان كل زوج من الدوال التالية دالتين متعاكستين. اكتب نعم أو لا.

80. $f(x) = x + 73$

$g(x) = x - 73$ نعم

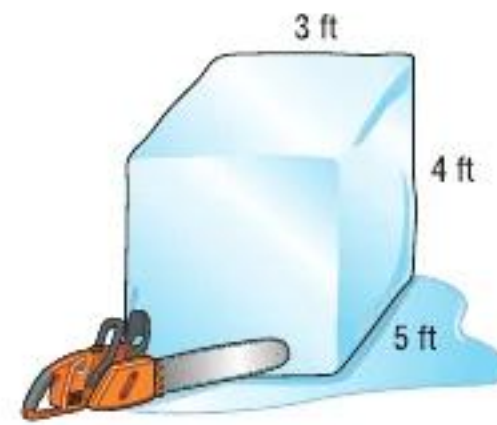
81. $g(x) = 7x - 11$

$h(x) = \frac{1}{7}x + 11$ لا

82. النّحت يصنع حمد تمثالاً من النّج. حيث يستخدم كتلة من النّج. ويرغب بالتقليل من حجمها عبر اقتطاع الكمية نفسها من الاتجاه الطولي والعرضي ومن الارتفاع. حيث يؤدّ إنقاص حجم كتلة النّج إلى 24 ft^3 . ا. $(3 - x)(4 - x)(5 - x) = 24$

ا. اكتب معادلة كثيرة حدود لتمثيل هذه الحالة.

ب. كم ينبغي أن يقتطع من كلّ بعد؟ 1 ft



مراجعة المهارات

حل كل معادلة أو متباينة مما يلي. ثمّ تحقق من صحة الحل.

83. $3^{4x} = 3^3 - x$ $\frac{3}{5}$

84. $3^{2n} \leq \frac{1}{9}$ $\{n \mid n \leq -1\}$

85. $3^{5x} \times 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 10

86. $49^x = 7^{x^2 - 15}$ -3, 5

87. $\log_2 (x + 6) > 5$ $\{x \mid x > 26\}$

88. $\log_5 (4x - 1) = \log_5 (3x + 2)$ 3

التدريس المتمايز

التوسع اعرض للطلاب ما يلي:

$\log_{10} 3 \approx 0.4771$

$\log_{10} 30 \approx 1.4771$

$\log_{10} 300 \approx 2.4771$

$\log_{10} 3000 \approx 3.4771$

اطلب من الطلاب توقع $\log_{10} 30,000$. 4.4771

اطلب من الطلاب استخدام خواص اللوغاريتمات لشرح هذا النمط. الشرح النموذجي: يمكن كتابة كل من 3، و 30، و 300، و 3000 في الصورة 3×10^0 ، و 3×10^1 ، و 3×10^2 ، و 3×10^3 على التوالي. ومن ثمّ يمكن إعادة كتابة لوغاريتمات الأساس 10 لكل منها في صورة جمع لوغاريتمين. على سبيل المثال، $\log_{10} 3000$ يمكن كتابتها في الصورة $\log_{10} (3 \times 10^3)$ ، وعليه $\log_{10} (3 \times 10^3) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10^3 = \log_{10} (3) + 3 = 3.4771$

اللوغاريتمات العادية

1-4

السابق: الحالي: لماذا:

عدد ريختر	الشدة
1	10^1 دقيق
2	10^2 خفيف جدًا
3	10^3 خفيف جدًا
4	10^4 خفيف
5	10^5 معتدل
6	10^6 قوي
7	10^7 كبير
8	10^8 عظيم

● يستخدم علماء الزلازل مقياس ريختر لقياس قوة الزلازل أو شدتها. ويُحدّد شدة الزلزال باستخدام لوغاريتم اتساع الأمواج الذي تسجله أجهزة رصد الزلازل. يعتمد المقياس اللوغاريتمي الذي يستخدمه مقياس ريختر على قوى 10. فعلى سبيل المثال، فإن زلزال بشدة 6.4 يمكن تمثيله بـ $\log_{10} x = 6.4$.

1 ● حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية.
2 إيجاد قيم التعابير اللوغاريتمية باستخدام قانون تغيير الأساس.

● حولت التعابير لأبسط صورة، وحللت المعادلات باستخدام خواص اللوغاريتمات.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-4 تبسيط التعابير وإيجاد قيمها باستخدام خواص اللوغاريتمات.

الدرس 1-4 حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية. إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية باستخدام قانون تغيير الأساس.

بعد الدرس 1-4 تحليل الحالة الممثلة بدالة أسية، وحل المسألة.

المفردات الجديدة

لوغاريتم عادي
common logarithm
قانون تغيير الأساس
Change of Base Formula

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

كلّف الطلاب بقراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- كيف يُقارن عدد ريختر للزلزال "العظيم" بعدد الزلزال "الخفيف"؟ يساوي ضعف شدته.
- كيف تُقارن شدة الزلزال "العظيم" بشدة الزلزال "الخفيف"؟ تساوي 10,000 مضروبة في شدته.
- أين سيظهر زلزال شدته نصف شدة 10^8 في الجدول؟ بين "هائل" و"عظيم"

1 اللوغاريتمات العادية تبين لك أن الدالة اللوغاريتمية $y = \log_{10} x$ تُستخدم في العديد من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات قوى العدد 10 باللوغاريتمات العادية. وتُكتب اللوغاريتمات العادية عادةً دون العدد 10 أسفل اللوغاريتم.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تتضمن معظم الآلات الحاسبة العلمية على الزر LOG لإيجاد قيمة اللوغاريتمات العادية.

مثال 1 إيجاد اللوغاريتم العادي

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل تعبير مما يلي مع التقريب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $\log 5$

خطوات العملية على الحاسبة: 5 [ENTER] LOG 6989700043.
 $\log 5 \approx 0.6990$

b. $\log 0.3$

خطوات العملية على الحاسبة: 0.3 [ENTER] LOG 5228787453.-
 $\log 0.3 \approx -0.5229$

تمرين موجّه

1A. $\log 7$ 0.8451

1B. $\log 0.5$ -0.3010

ترتبط اللوغاريتمات العادية لأعداد تختلف بقوى العدد عشرة الصحيحة. ببعضها بشكل وثيق. تذكر أن اللوغاريتم هو أس. على سبيل المثال في المعادلة $y = \log x$ تكون y هي القوة التي يُرفع إليها 10 للحصول على قيمة x .

$\log x = y$	→	يعني	→	$10^y = x$
$\log 1 = 0$		بما أن		$10^0 = 1$
$\log 10 = 1$		بما أن		$10^1 = 10$
$\log 10^m = m$		بما أن		$10^m = 10^m$

تُستخدم اللوغاريتمات العادية في قياس الصوت. وتصل الموسيقى المُسجَلة الهادئة إلى حوالي 36 ديسيبل (dB).

1 اللوغاريتمات العادية

المثال 1 يوضح كيفية استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة لوغاريتم عادي.

المثال 2 يوضح كيفية استخدام معكوس اللوغاريتمات، أو الرفع، لحل معادلة لوغاريتمية تمثل تطبيقًا من الحياة اليومية. **المثال 3** يوضح كيفية حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات. **المثال 4** يوضح كيفية استخدام اللوغاريتمات لحل المتباينات الأسية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

- 1 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل تعبير مما يلي مع التقريب لأقرب جزء من عشرة آلاف.
a. $\log 6$ حوالي 0.7782
b. $\log 0.35$ حوالي -0.4559
- 2 **المحركات النفاثة** ارجع إلى المثال 2. يمكن أن يصل صوت المحرك النفاث إلى علو 125 ديسيبل. كم عدد مرات الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع المتمثلة في ذلك الصوت؟
 $10^{12.5}$ ، أو حوالي 3×10^{12}
وهو 3 تريليون
- 3 أوجد حل $5^x = 62$ حوالي 2.5643

مثال 2 من الحياة اليومية حل المعادلات اللوغاريتمية

المحركات النفاثة إذا كان علو الصوت L ، بالديسيبل، لصوت ما هو $L = 10 \log \frac{I}{m}$ ، حيث I هي شدة الصوت و m هو الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية. فإن السائقين على بعد عدة أميال من مطار يمكنهم سماع الطائرات وهي تُقَلع عند شدة 66.6 ديسيبل، فكم عدد مرات الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية المتمثلة في ذلك الصوت، إذا كان m مُعرَّفًا بأنه 1؟

$$\begin{aligned} L &= 10 \log \frac{I}{m} && \text{المعادلة الأصلية} \\ 66.6 &= 10 \log \frac{I}{1} && \text{عوض عن } L \text{ بـ } 66.6 \text{ و } m \text{ بـ } 1. \\ 6.66 &= \log I && \text{اقسم كل طرف على 10 وبسط} \\ I &= 10^{6.66} && \text{الصيغة الأسية} \\ I &\approx 4,570,882 && \text{استخدم آلة حاسبة} \end{aligned}$$

كان الصوت الذي سمعه السكان يساوي حوالي 4,570,000 مرة من الحد الأدنى لشدة الصوت المسموع بالأذن البشرية.

تمرين موجّه

2. **الزلازل** كمية الطاقة E ، مقدرة بالأرغ، التي تنبعث من زلزال ما ترتبط بشدة مقياس ريختر M لهذا الزلزال من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد كمية الطاقة المنبعثة من زلزال جزيرة سومطرة عام 2004 الذي كانت شدته 9.0 بمقياس ريختر مما أدى لحدوث تسونامي.

حوالي 2×10^{25} أرغ

إذا تعذر كتابة طرفي المعادلة الأسية بسهولة في صورة قوى لها نفس الأساس، فإنك تستطيع حل المعادلة عن طريق أخذ اللوغاريتم من كل طرف.

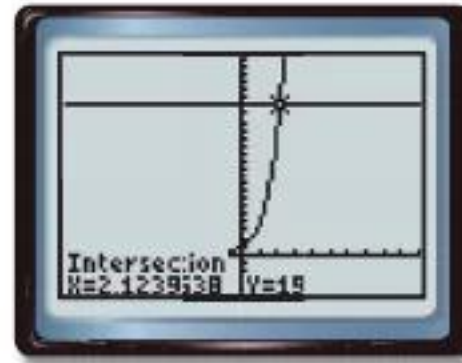
مثال 3 حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

حلّ المعادلة $4^x = 19$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\begin{aligned} 4^x &= 19 && \text{المعادلة الأصلية} \\ \log 4^x &= \log 19 && \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية} \\ x \log 4 &= \log 19 && \text{خاصية القوى للوغاريتمات} \\ x &= \frac{\log 19}{\log 4} && \text{اقسم كل طرف على } \log 4 \\ x &\approx 2.1240 && \text{استخدم آلة حاسبة} \end{aligned}$$

إذا الحل هو 2.1240 تقريبًا.

التحقق يمكنك التحقق من هذه الإجابة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني. مثل المستقيم $y = 4^x$ والمستقيم $y = 19$ ثم استخدم القائمة **CALC** لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. إن نقطة التقاطع قريبة جدًا من الإجابة التي حصلنا عليها جبريًا. ✓



[-10, 10] scl: 1 by [-5, 25] scl: 1

تمرين موجّه

$$3A. 3^x = 15 \approx 2.4650$$

$$3B. 6^x = 42 \approx 2.0860$$

الربط بالحياة اليومية

مهندس صوتي المهندسون الصوتيون معنيون بحد الأصوات غير المرغوب فيها والتحكم في الضوضاء وعمل الأصوات المفيدة. وتضمن أمثلة الأصوات المفيدة الأشعة فوق الصوتية، والسونار، واستنساخ الأصوات، ويتطلب العمل في هذا المجال درجة البكالوريوس في الحد الأدنى.



يمكن استخدام نفس الإستراتيجيات المستخدمة في حل المعادلات الأسية لحل المتباينات الأسية.

مثال 4 حل المتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$. قَرِّبْ لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\begin{aligned} 3^{5y} &< 7^{y-2} && \text{المتباينة الأصلية} \\ \log 3^{5y} &< \log 7^{y-2} && \text{خاصية التباين في اللوغاريتمات} \\ 5y \log 3 &< (y-2) \log 7 && \text{خاصية القوى للوغاريتمات} \\ 5y \log 3 &< y \log 7 - 2 \log 7 && \text{خاصية التوزيع} \\ 5y \log 3 - y \log 7 &< -2 \log 7 && \text{اطرح } y \log 7 \text{ من كل طرف.} \\ y(5 \log 3 - \log 7) &< -2 \log 7 && \text{خاصية التوزيع} \\ y &< \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7} && \text{اقسم كل طرف على } 5 \log 3 - \log 7 \\ \{y \mid y < -1.0972\} &&& \text{استخدم آلة حاسبة} \end{aligned}$$

التحقق اختبر $y = -2$.

$$\begin{aligned} 3^{5y} &< 7^{y-2} && \text{المتباينة الأصلية} \\ 3^{5(-2)} &\geq 7^{(-2)-2} && \text{عوض عن } y \text{ بـ } -2. \\ 3^{-10} &\geq 7^{-4} && \text{بسط} \\ \frac{1}{59,049} &< \frac{1}{2401} && \text{خاصية الأس السالب} \end{aligned}$$

تمرين موجّه

حل كل متباينة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$4A. 3^{2x} \geq 6^{x+1} \quad \{x \mid x \geq 4.4190\} \quad 4B. 4^y < 5^{2y+1} \quad \{y \mid y > -0.8782\}$$

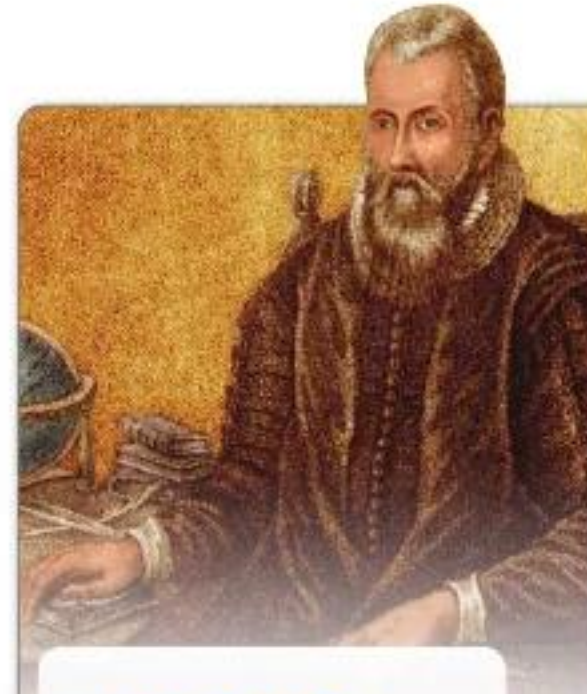
2 قانون تغيير الأساس يسمح قانون تغيير الأساس لك بكتابة التعابير اللوغاريتمية المكافئة التي تختلف في الأساس.

مفهوم أساسي قانون تغيير الأساس

$$\begin{aligned} \text{الرموز} & \text{ لكل الأعداد الموجبة } a, b, \text{ و } n, \text{ حيث } a \neq 1 \text{ و } b \neq 1. \\ \log_a n &= \frac{\log_b n}{\log_b a} \quad \begin{aligned} &\leftarrow \text{أساس اللوغاريتم } b \text{ للعدد الأصلي} \\ &\leftarrow \text{أساس اللوغاريتم } b \text{ للأساس القديم} \end{aligned} \\ \text{مثال} & \log_3 11 = \frac{\log_{10} 11}{\log_{10} 3} \end{aligned}$$

لإثبات هذا القانون، افرض أن $\log_a n = x$.

$$\begin{aligned} a^x &= n && \text{تعريف اللوغاريتم} \\ \log_b a^x &= \log_b n && \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية} \\ x \log_b a &= \log_b n && \text{خاصية القوى للوغاريتمات} \\ x &= \frac{\log_b n}{\log_b a} && \text{اقسم كل طرف على } \log_b a \\ \log_a n &= \frac{\log_b n}{\log_b a} && \text{عوض عن } x \text{ بـ } \log_a n \end{aligned}$$



الربط بتاريخ الرياضيات
جون نابير (1550-1617) كان جون نابير عالم رياضيات وعالماً لاهوتياً من إسكتلندا. وهو من بدأ باستخدام اللوغاريتمات للمساعدة في إجراء الحسابات. وهو يُعرف أيضاً بتعميمه لاستخدام النقطة العشرية.

مثال إضافي

4 جد حل $3^{7x} > 2^{5x-3}$. قَرِّبْ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.
 $\{x \mid x > -0.4922\}$

التركيز على محتوى الرياضيات

اللوغاريتمات العادية لوغاريتمات الأساس 10 يُطلق عليها اللوغاريتمات العادية. عندما يكون أساس اللوغاريتم غير ظاهر، فيُفترض أن الأساس هو 10. عندما يكون لديك تعبير لوغاريتمي لأي أساس، يمكنك إيجاد قيمته باستخدام قانون تغيير الأساس لتحويل التعبير إلى آخر يشتمل على لوغاريتمات عادية.

2 قانون تغيير الأساس

المثال 5 يوضح كيفية التعبير عن تعبير لوغاريتمي لأي أساس بدلالة لوغاريتمات عادية.

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج أثناء مناقشة قانون تغيير الأساس، أوضح أن الأساس b الذي يغيره الطلاب ليس بالضرورة أنه يساوي 10. فإنه يمكن استخدام أي أساس؛ ومع ذلك، 10 يكون أكثر شيوعاً لأن ذلك يسمح بإيجاد قيمة اللوغاريتمات بواسطة الآلة الحاسبة. عندما يكون اللوغاريتم غير ظاهر، يُفترض أن يكون الأساس هو 10.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية اعرض

نموذجاً مثل

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

من اللوغاريتم الأصلي لتوضيح قانون تغيير الأساس.

التدريس المتميز OL BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب تذكر أن معادلة مثل $4^x = 19$ من المثال 3 يمكن كتابتها في صورة لوغاريتمية مثل $\log_4 19 = x$. على الرغم من أن هذا اللوغاريتم لا يمكن إيجاد قيمته بشكل مباشر، فإنه يمكن استخدام قانون تغيير الأساس لتقديم الناتج الصحيح لـ $x \approx 2.1234$.

قانون تغيير الأساس يجعل من الممكن إيجاد قيمة التعبير اللوغاريتمي لأي أساس عن طريق تحويل التعبير إلى تعبير آخر يشتمل على لوغاريتمات عادية.

مثال 5 قانون تغيير الأساس

عبر عن $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3} \quad \text{قانون تغيير الأساس}$$

$$\approx 2.7268 \quad \text{استخدم آلة حاسبة}$$

$$\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \approx 1.1606 \quad \text{تمرين موجّه}$$

5. عبر عن $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال إضافي

5 عبر عن $\log_5 140$ بدلالة

اللوغاريتمات العادية. ثم قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_5 140 = \frac{\log_{10} 140}{\log_{10} 5}$$

$$\log_5 140 \approx 3.0704$$

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 15 للتحقق من الاستيعاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف، ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

إجابات إضافية

$$12. \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.7712$$

$$13. \frac{\log 23}{\log 4} \approx 2.2618$$

$$14. \frac{\log 13}{\log 9} \approx 1.1674$$

$$15. \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2.3219$$

التحقق من فهمك

1 مثال استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل تعبير مما يلي مع التقريب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$1. \log 5 \quad 0.6990 \quad 2. \log 21 \quad 1.3222 \quad 3. \log 0.4 \quad -0.3979 \quad 4. \log 0.7 \quad -0.1549$$

2 مثال 5. علوم كمية الطاقة E ، مقدرة بالأرغ، التي تنبعث من زلزال ما ترتبط بشدة مقياس ريختر M لهذا الزلزال من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد كمية الطاقة المنبعثة من زلزال تشيلي عام 1960 الذي بلغ 8.5 على مقياس ريختر. 3.55×10^{24} أرغ

3 مثال حل كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$6. 6^x = 40 \quad 2.0588 \quad 7. 2.1^{a+2} = 8.25 \quad 0.8442 \quad 8. 7^{x^2} = 20.42 \quad \pm 1.2451 \quad 9. 11^{b-3} = 5^b \quad 9.1237$$

4 مثال حل كل متباينة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$10. 5^{4n} > 33 \quad \{n \mid n > 0.5431\} \quad 11. 6^{p-1} \leq 4^p \quad \{p \mid p \leq 4.4190\}$$

5 مثال عبر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب قيمته لأقرب جزء من عشرة آلاف. 12-15. انظر الهامش.

$$12. \log_3 7 \quad 13. \log_4 23 \quad 14. \log_9 13 \quad 15. \log_2 5$$

التمرين وحل المسائل

1 مثال استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل تعبير مما يلي مع التقريب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$16. \log 3 \quad 0.4771 \quad 17. \log 11 \quad 1.0414 \quad 18. \log 3.2 \quad 0.5051$$

$$19. \log 8.2 \quad 0.9138 \quad 20. \log 0.9 \quad -0.0458 \quad 21. \log 0.04 \quad -1.3979$$

2 مثال 22. التبرير المنطقي ركبت نجاة كاتما جديدًا للصوت في سيارتها. وانخفض مستوى ضوضاء المحرك من 85 ديسيبل إلى 73 ديسيبل.

a. كم عدد مرات الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية المتمثلة في صوت السيارة بكام الصوت القديم، إذا كان m مُعرفًا بأنه 1؟ **حوالي 316,227,766 مرة**

b. كم عدد مرات الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية المتمثلة في صوت السيارة بكام الصوت الجديد؟ اكتشف النسبة المئوية للانخفاض في شدة الصوت مع استخدام كام الصوت الجديد. **حوالي 93.7%**

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	16-38, 68, 70-92	16-38 الأعداد الزوجية, 68, 70-72, 77-92
OL أساسي	17-39 الأعداد الفردية, 40, 41-65 الأعداد الفردية, 66-68, 70-92	16-38, 73-76
BL متقدم	39-86 (اختياري: 87-92)	39-68, 70-72, 77-92

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة، والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

مثال 3

حل كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

23. $8^x = 40$ **1.7740**
 24. $5^x = 55$ **2.4899**
 25. $2.9^{a-4} = 8.1$ **5.9647**
 26. $9^{b-1} = 7^b$ **8.7429**
 27. $13^{x^2} = 33.3$ **± 1.1691**
 28. $15^{x^2} = 110$ **± 1.3175**

مثال 4

حل كل متباينة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

29. $6^{3n} > 36$ **$\{n \mid n > 0.6667\}$**
 30. $2^{4x} \leq 20$ **$\{x \mid x \leq 1.0805\}$**
 31. $3^{y-1} \leq 4^y$ **$\{y \mid y \geq -3.8188\}$**
 32. $5^{p-2} \geq 2^p$ **$\{p \mid p \geq 3.5129\}$**

مثال 5

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب قيمته لأقرب جزء من عشرة آلاف.

33. $\log_7 18$ **$\frac{\log 18}{\log 7} \approx 1.4854$**
 34. $\log_5 31$ **$\frac{\log 31}{\log 5} \approx 2.1337$**
 35. $\log_2 16$ **$\frac{\log 16}{\log 2} = 4$**
 36. $\log_4 9$ **$\frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.5850$**
 37. $\log_3 11$ **$\frac{\log 11}{\log 3} \approx 2.1827$**
 38. $\log_6 33$ **$\frac{\log 33}{\log 6} \approx 1.9514$**

B 39

حيوانات أليفة يمكن تمثيل عدد n أصحاب الحيوانات الأليفة بالآلاف بعد t أعوام باستخدام المعادلة $n = 35[\log_4(t+2)]$. افترض أن $t = 0$ يمثل 2000. استخدم قانون تغيير الأساس للإجابة على الأسئلة التالية.

- a. كم عدد أصحاب الحيوانات الأليفة في 2010؟ **62,737 شخصاً**
 b. ما طول الفترة حتى يصل عدد أصحاب الحيوانات الأليفة إلى 80,000؟ متى سيحدث ذلك؟ **2022**

40. الدقة منذ خمسة سنوات ماضية، كان تعداد الدببة الشهباء في حديقة وطنية معينة 325 دباً. وبلغ التعداد اليوم 450 دباً. وأظهرت الدراسات أن الحديقة يمكنها دعم تعداد من 750 دباً.

- a. ما متوسط المعدل السنوي للنمو في التعداد إذا كانت الدببة الشهباء تتناسل مرة في السنة؟ **0.067 أو 6.7%**
 b. كم عدد السنوات التي ستستغرق لبلوغ الحد الأقصى للتعداد إذا استمر التعداد في النمو بنفس متوسط المعدل؟ **8 yr**

حل كل معادلة أو متباينة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

41. $3^x = 40$ **3.3578**
 42. $5^{3p} = 15$ **0.5609**
 43. $4^{n+2} = 14.5$ **-0.0710**
 44. $8^{z-4} = 6.3$ **4.8851**
 45. $7.4^{n-3} = 32.5$ **4.7393**
 46. $3.1^{y-5} = 9.2$ **6.9615**
 47. $5^x \geq 42$ **$\{x \mid x \geq 2.3223\}$**
 48. $9^{2a} < 120$ **$\{a \mid a < 1.0894\}$**
 49. $3^{4x} \leq 72$ **$\{x \mid x \leq 0.9732\}$**
 50. $7^{2n} > 52^{4n+3}$ **$\{n \mid n < -0.9950\}$**
 51. $6^p \leq 13^{5-p}$ **$\{p \mid p \leq 2.9437\}$**
 52. $2^{y+3} \geq 8^{3y}$ **$\{y \mid y \leq 0.3750\}$**

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب قيمته لأقرب جزء من عشرة آلاف.

53. $\log_4 12$ **$\frac{\log 12}{\log 4} \approx 1.7925$**
 54. $\log_3 21$ **$\frac{\log 21}{\log 3} \approx 2.7712$**
 55. $\log_8 2$ **$\frac{\log 2}{\log 8} = 0.3333$**
 56. $\log_6 7$ **$\frac{\log 7}{\log 6} \approx 1.0860$**
 57. $\log_5 (2.7)^2$ **$\frac{\log 7.29}{\log 5} \approx 1.2343$**
 58. $\log_7 \sqrt{5}$ **$\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} \approx 0.4135$**

59. موسيقى السنت الموسيقي هو وحدة في مقياس لوغاريتمي لحدة الصوت أو الفترات النسبية.

الجواب الموسيقي الواحد يساوي 1200 سنت. يمكن استخدام الصيغة $n = 1200 \left(\log_2 \frac{a}{b} \right)$ لتحديد الفرق بالسنتات بين نوتتين موسيقيتين لهما التردد a و b .

- a. جد الفترة بالسنتات عندما يتغير التردد من 443 هرتز (Hz) إلى 415 Hz. **113.03 سنناً**
 b. إذا كانت الفترة 55 سنناً وتردد البداية هو 225 Hz. فجد التردد النهائي. **حوالي 218 Hz**

التمثيلات المتعددة

في التمرين 67، يستخدم الطلاب حاسبة تمثيل بياني والجبر لحل معادلة أسية جبريًا وبيانيًا ومقارنة النتائج.

تدريس الممارسات في الرياضيات

النقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين وتمييز المنطق أو الاستنتاج الصحيح من الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، فهم يستطيعون توضيح ماهيته.

انتبه!

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين

68. أوضح للطلاب أن في خاصية القوى في اللوغاريتمات، $\log b m p = p \log b m$ يكون p ممثلًا للأس الكامل لـ m .

إجابات إضافية

معادلة أصلية	$\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ 69.
قانون تغيير الأساس	$\frac{\log_a 3}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a x$
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\log_a 3}{\frac{1}{2}} = \log_a x$
اضرب البسط والمقام في 2.	$2 \log_a 3 = \log_a x$
خاصية القوى في اللوغاريتمات	$\log_a 3^2 = \log_a x$
خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية	$3^2 = x$
بسط	$9 = x$

حل كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف. $61. \pm\sqrt{5} \approx \pm 2.2361$

$$60. 10^{x^2} = 60 \pm 1.3335$$

$$61. 4^{x^2-3} = 16$$

$$62. 9^{6y-2} = 3^{3y+1} \quad 0.5556$$

$$63. 8^{2x-4} = 4^{x+1} \quad 3.5$$

$$64. 16^x = \sqrt{4^{x+3}} \quad 1$$

$$65. 2^y = \sqrt{3^{y-1}} \quad -3.8188$$

66. العلوم البيئية مهندس بيئي يختبر عن وجود تلوث في آبار مياه الشرب في المجتمعات الساحلية. وبالأخص المستويات غير الآمنة من الزرنيخ. ويبلغ المستوى الآمن من الزرنيخ 0.025 جزء في المليون (ppm). كذلك، يجب أن يكون العدد الهيدروجيني pH لمستوى الزرنيخ أقل من 9.5. صيغة تركيز أيون الهيدروجين هي $\text{pH} = -\log H$ (إرشاد: كيلوجرام واحد من الماء يحتل تقريبًا مساحة لتر واحد. $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg/kg}$).

a. افترض أن تركيز أيون الهيدروجين للبئر هو 1.25×10^{-11} . هل ينبغي أن يطلق المهندس البيئي بشأن الارتفاع العالي في محتوى الزرنيخ؟ نعم: $9.5 < 10.9$

b. وجد المهندس البيئي ميليجرامًا واحدًا من الزرنيخ في عينة من 3 لترات. فهل البئر آمن؟ لا

c. ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يقابل المستوى المقلق من الأس الهيدروجيني 9.5؟ 3.16×10^{-10}

67. تمثيلات متعددة في هذه المسألة، ستجد حل المعادلة الأسية $4^x = 13$. a. يقع الحل بين 1.8 و 1.9.

a. جدولًا أدخل الدالة $y = 4^x$ إلى حاسبة التمثيل البياني، وأنشأ جدولًا لقيم الدالة، ومرر عبر الجدول لإيجاد x عندما يكون $y = 13$.

b. بيانيًا مثل $y = 4^x$ و $y = 13$ بيانيًا على الشاشة نفسها. استخدم خاصية intersect لإيجاد نقطة التقاطع. (1.85, 13)

c. عددًا جد حل المتباينة جبريًا. هل كل الطرق تؤدي إلى الناتج نفسه؟ اشرح لم أو لم لا.

نعم: كل الطرق تخرج الحل 1.85. يجب عليها جميعًا أن تخرج الناتج نفسه لأنك بدأت بنفس المعادلة. وإذا لم يكن الناتج واحدًا، فإنه إذا تم الوقوع في خطأ ما.

مسائل مهارات التفكير العليا

68. التفكير النقدي تحل عاشرة وسالي $4^{3p} = 10$. هل إحداهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سالي: نسيت عاشرة إنزال 3 من الأس عندما أخذت اللوغاريتم من كل طرف.

سالي

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$3p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$$

عاشرة

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{\log 4}$$

72. اللوغاريتمات هي الأسس. لحل المعادلات اللوغاريتمية، اكتب كل طرف من المعادلة باستخدام الأسس وحل باستخدام خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات. ولحل معادلات أسية، استخدم خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية وخاصية القوى للوغاريتمات.

69. التحدي حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لإيجاد x و اشرح كل خطوة. انظر الهامش.

$$\frac{\log_5 9}{\log_5 3} = \log_3 9 \quad 70. \text{التبرير اكتب } \frac{\log_5 9}{\log_5 3} \text{ في صورة لوغاريتم منفرد.}$$

71. البرهان جد قيمة $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. ضع استنتاجًا بشأن العلاقة بين $\log_a b$ و $\log_b a$ وقم بإثباته. انظر الهامش.

72. الكتابة في الرياضيات اشرح العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات. اذكر أمثلة مثل كيفية حل معادلة لوغاريتمية باستخدام الأسس وكيفية حل معادلة أسية باستخدام اللوغاريتمات.

$$71. \log_3 27 = 3 \text{ و } \log_{27} 3 = \frac{1}{3}; \text{ تخمين: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

البرهان:

$$\log_a b \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a} \quad \text{عبارة أصلية}$$

$$\frac{\log_b b}{\log_b a} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a} \quad \text{قانون تغيير الأساس}$$

$$\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{معكوس خاصية في الأسس واللوغاريتمات}$$

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة كيف ساعدتهم معرفة خواص اللوغاريتمات في حل المعادلات والمتباينات الأسية في درس اليوم.

إجابات إضافية

$$\begin{aligned} 74a. \quad 3d + 2v + 2m &= 16.29, \\ d + 3v + 4m &= 19.84, \\ 2d + v + m &= 9.14 \end{aligned}$$

74b. أفلام وثائقية: AED 1.99,
ألعاب فيديو: AED 2.79,
أفلام: AED 2.37

التمرين على الاختبار المعياري

75. **هندسة** إذا زادت مساحة السطح لمكعب بمعامل بمقدار 9، فما التغير في طول أضلاع المكعب؟ **G**
- F** يبلغ الطول مثلي الطول الفعلي.
- G** يبلغ الطول 3 أمثال الطول الفعلي.
- H** يبلغ الطول 6 أمثال الطول الفعلي.
- J** يبلغ الطول 9 أمثال الطول الفعلي.

76. **SAT/ACT** أي مما يلي يعبر عن أدق وصفًا لتحوّل التمثيل البياني لـ $y = (x + 4)^2 - 3$ إلى التمثيل البياني لـ $y = (x - 1)^2 + 3$ ؟ **E**

- A** إلى الأسفل بمقدار 1 وإلى اليمين بمقدار 3
- B** إلى الأسفل بمقدار 6 وإلى اليسار بمقدار 5
- C** إلى الأعلى بمقدار 1 وإلى اليسار بمقدار 3
- D** إلى الأعلى بمقدار 1 وإلى اليمين بمقدار 3
- E** إلى الأعلى بمقدار 6 وإلى اليمين بمقدار 5

73. اكتب تعبيرًا يمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3$ و $g(x) = x - 5$ ؟ **B**

- A** $x^2 + 4x - 2$
- B** $x^2 - 6x + 8$
- C** $x^2 - 9x + 23$
- D** $x^2 - 14x + 6$

74. **الإجابة الموسعة** استأجرت هيام 3 أفلام وثائقية، ولعبتي فيديو، وفيلمين. وبلغت التكلفة AED 16.29. وفي الأسبوع التالي، استأجرت فيلمًا وثائقيًا و 3 ألعاب فيديو، و 4 أفلام بتكلفة إجمالية AED 19.84. وفي الأسبوع الثالث، استأجرت فيلمين وثائقيين، ولعبة فيديو، وفيلمًا واحدًا بتكلفة إجمالية AED 9.14.

- a.** اكتب نظام معادلات لتحديد تكلفة استئجار كل عنصر.
- b.** ما تكلفة استئجار كل عنصر؟

انظر الهامش.

مراجعة شاملة

حلّ كلّ معادلة مما يلي، وتحقق من صحة الحل. (الدرس 1-3)

77. $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$ **14**

78. $2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$ **6**

79. $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$ **15**

80. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$ **4**

حلّ كلّ معادلة أو متباينة. (الدرس 1-2)

81. $\log_4 x = \frac{1}{2}$ **2**

82. $\log_{81} 729 = x$ **$\frac{3}{2}$**

83. $\log_8 (x^2 + x) = \log_8 12$ **-4, 3**

84. $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$ **$\{y \mid \frac{1}{3} < y < 3\}$**

85. **الإبحار** إذا كانت مساحة شراع على شكل مثلث هي $16x^4 - 60x^3 - 28x^2 + 56x - 32$ أمطار مربعة. وقاعدة المثلث هي $4 - x$ أمطار. فما ارتفاع الشراع؟ **$32x^3 + 8x^2 - 24x + 16$**

86. **الإصلاحات المنزلية** تُركب أقفال جديدة لدى عامر. وتبلغ رسوم عامل الأقفال AED 85 مقابل طلب الخدمة و AED 25 لكل باب، و AED 30 لكل قفل.

a. اكتب معادلة تمثل تكلفة x عدد الأبواب. **$y = 85 + 55x$**

b. يريد عامر تغيير الأقفال في الباب الأمامي والجانب والخليفي وباب الكراج. فكم ستبلغ تكلفة ذلك؟ **AED 305**

مراجعة المهارات

اكتب معادلة أسية مكافئة لكل معادلة لوغاريتمية.

87. $\log_2 5 = x$ **$2^x = 5$**

88. $\log_4 x = 3$ **$4^3 = x$**

89. $\log_5 25 = 2$ **$5^2 = 25$**

90. $\log_7 10 = x$ **$7^x = 10$**

91. $\log_6 x = 4$ **$6^4 = x$**

92. $\log_4 64 = 3$ **$4^3 = 64$**

التدريس المتميز

BL OL

التوسع ذكّر الطلاب بأن القانون $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ يمكن استخدامه لإيجاد المبلغ النهائي للاستثمار باستخدام نسبة المراجعة. اطلب منهم استخدام اللوغاريتمات لإيجاد عدد الأعوام t التي سيستغرقها استثمار قيمته AED 5000 للنمو إلى AED 8000 بنسبة مرابحة 5% مركبة على أساس شهري.

حوالي 9.4 أعوام



مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

1-4

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية.

المواد الخاصة لكل مجموعة

■ حاسبة التمثيل البياني

نصيحة للتدريس

أوضح أن العملية $\log$ (يمكن استخدامها مع أعداد أو تعابير. ذكّر الطلاب أنها فكرة جيدة على الدوام أن يستخدموا أقواسًا مغلقة في نهاية التعبير.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسّم الطلاب على مجموعات متنوعة القدرات من اثنين أو ثلاثة طلاب. ثم اطلب من المجموعات إكمال النشاطين 1 و 2 والتمارين من 1 إلى 4.

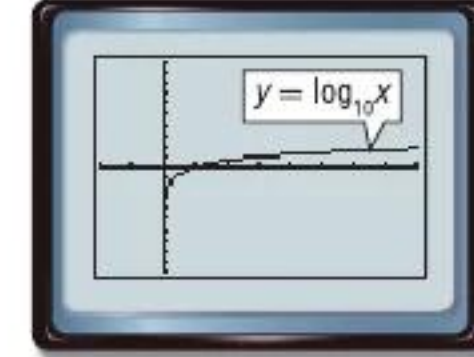
النشاط 1

- قبل مناقشة النشاط، اطلب من الطلاب استخدام قانون تغيير الأساس للتعبير عن كل طرف من طرفي المعادلة بدلالة لوغاريتمات عادية.
- تأكد من استيعاب الطلاب لكيفية قراءة خاصية الجدول لإيجاد قيمة x التي تساويها قيم y .
- كلف الطلاب بتعويض الحل في المعادلة الأصلية للتحقق من صحته.

لقد حللت سابقًا معادلات لوغاريتمية جبريًا. ويمكنك حل معادلات لوغاريتمية كذلك عن طريق التمثيل البياني أو استخدام الجدول. وتتضمن حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus $y = \log_{10} x$ باعتبارها

دالة مدمجة. أدخل GRAPH $\text{X,T,}\theta,n$ LOG $Y=$ لعرض هذا التمثيل البياني.

لتمثيل دوال لوغاريتمية أساسها مغاير للعدد 10. بيانيًا، يجب عليك استخدام قانون تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$.



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

النشاط 1

حل المعادلة $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.

الخطوة 1

تمثيل طرفي المعادلة بيانيًا.

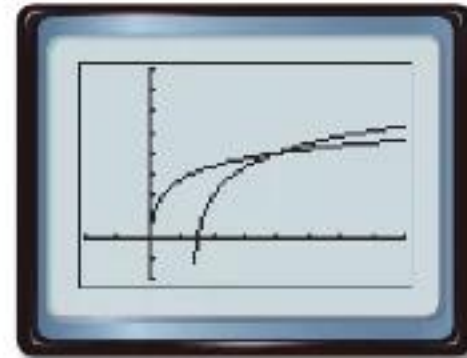
مثل كل طرف من طرفي المعادلة باعتباره دالة منفصلة. أدخل $\log_2 (6x - 8)$ في صيغة $Y1$ و $\log_3 (20x + 1)$ في صيغة $Y2$. ثم

مثل المعادلتين بيانيًا.

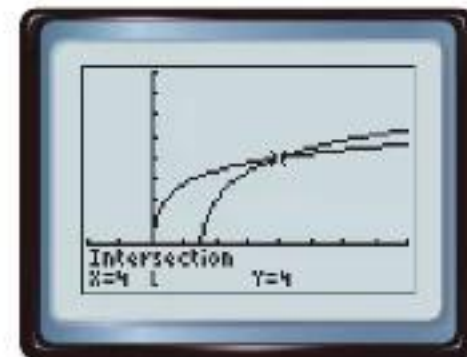
خطوات العملية على الحاسبة:

$Y=$ LOG 6 $\text{X,T,}\theta,n$ $-$ 8 $)$ $\div$ LOG 2 $)$

ENTER LOG 20 $\text{X,T,}\theta,n$ $+$ 1 $)$ $\div$ LOG 3 $)$ GRAPH



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

X	Y1	Y2
0	ERR	0
1	ERR	0.6931
2	ERR	1.3863
3	ERR	2.0794
4	ERR	2.7726
5	ERR	3.4657
6	ERR	4.1589
7	ERR	4.8521
8	ERR	5.5452
9	ERR	6.2384
10	ERR	6.9315
11	ERR	7.6247
12	ERR	8.3178
13	ERR	9.0110
14	ERR	9.7041
15	ERR	10.3973
16	ERR	11.0905
17	ERR	11.7836
18	ERR	12.4768
19	ERR	13.1699
20	ERR	13.8631
21	ERR	14.5562
22	ERR	15.2494
23	ERR	15.9425
24	ERR	16.6357
25	ERR	17.3288
26	ERR	18.0220
27	ERR	18.7151
28	ERR	19.4083
29	ERR	20.1014
30	ERR	20.7946
31	ERR	21.4877
32	ERR	22.1809
33	ERR	22.8740
34	ERR	23.5672
35	ERR	24.2603
36	ERR	24.9535
37	ERR	25.6466
38	ERR	26.3398
39	ERR	27.0329
40	ERR	27.7261
41	ERR	28.4192
42	ERR	29.1124
43	ERR	29.8055
44	ERR	30.4987
45	ERR	31.1918
46	ERR	31.8850
47	ERR	32.5781
48	ERR	33.2713
49	ERR	33.9644
50	ERR	34.6576
51	ERR	35.3507
52	ERR	36.0439
53	ERR	36.7370
54	ERR	37.4302
55	ERR	38.1233
56	ERR	38.8165
57	ERR	39.5096
58	ERR	40.2028
59	ERR	40.8959
60	ERR	41.5891
61	ERR	42.2822
62	ERR	42.9754
63	ERR	43.6685
64	ERR	44.3617
65	ERR	45.0548
66	ERR	45.7480
67	ERR	46.4411
68	ERR	47.1343
69	ERR	47.8274
70	ERR	48.5206
71	ERR	49.2137
72	ERR	49.9069
73	ERR	50.6000
74	ERR	51.2932
75	ERR	51.9863
76	ERR	52.6795
77	ERR	53.3726
78	ERR	54.0658
79	ERR	54.7589
80	ERR	55.4521
81	ERR	56.1452
82	ERR	56.8384
83	ERR	57.5315
84	ERR	58.2247
85	ERR	58.9178
86	ERR	59.6110
87	ERR	60.3041
88	ERR	61.0000
89	ERR	61.6929
90	ERR	62.3859
91	ERR	63.0789
92	ERR	63.7719
93	ERR	64.4649
94	ERR	65.1579
95	ERR	65.8509
96	ERR	66.5439
97	ERR	67.2369
98	ERR	67.9299
99	ERR	68.6229
100	ERR	69.3159

(يتبع في الصفحة التالية)

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات اللوغاريتمية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية تابع

النشاط 2

- قبل مناقشة النشاط 2، اطلب من الطلاب استخدام قانون تغيير الأساس للتعبير عن كل طرف من طرفي المتباينة بدلالة لوغاريتمات عادية.
 - تأكد من استيعاب الطلاب سبب ضرورة إعادة كتابة المتباينة في صورة نظام من المتباينات.
 - تأكد من استيعاب الطلاب لكيفية قراءة خاصية الجدول لإيجاد قيمة x التي وفقًا لها تكون قيم y غير معرّفة وكذلك قيمة x التي تساويها قيم y .
- تمرين** اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 5 إلى 8.

3 التقويم

التقويم التكويني

- في التمرين 8. تحقق من تدوين الطلاب للمتباینات في مجموعة الحل بشكل صحيح. وبالأخص، ينبغي أن يقوم الطلاب بتضمين حقيقة أن x يجب أن يكون أكبر من 0.

من العملى إلى النظرى

- اجعل الطلاب يوضحوا كيف ستتغير
مجموعة الحل في النشاط 2 إذا كانت
المتباينة
- $$\log_4(10x + 1) > \log_5(16 + 6x)$$

النشاط 2

حل المتباينة $\log_4 (10x + 1) < \log_5 (16 + 6x)$.

الخطوة 1 أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y > \log_4(10x + 1)$ و $\log_4(10x + 1) < y$. بما أن هذه المتباينة تتضمن رمز أكبر من، فظلل فوق المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم مفاتيح السهم و **ENTER** لاختيار

التظليل أعلى الرمز،

المتباينة الثانية هي $y < \log_5(16 + 6x)$. ظلل أسفل المنحنى بما أن هذه المتباينة تحتوي على رمز أصغر من.

خطوات العملية على الحاسبة:

$Y = \frac{\log_{10}(X, T, \theta, n) + 1}{\log_4(\log_{16}(\log_5(\log_6(X, T, \theta, n))))}$

الخطوة 2

تمثيل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

الحد الأيسر من مجموعة الحل هو حيث تكون المتباينة الأولى غير معرفة. وهي تكون غير معرفة حيث $10x + 1 \leq 0$.

$$10x + 1 \leq 0$$

$$10x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{10}$$

استخدم خاصية **التقاطع** في الحاسبة لإيجاد الحد الأدنى. يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3 استخدام خاصية TABLE للتحقق من حلك.

ابدأ الجدول عند -0.1 ووضح أن قيم x تزداد بمعدل 0.1 . مرر عبر الجدول.

خطوات العملية على الحاسبة: **2nd** **[TBLSET]** **-0.1** **[ENTER]** **0.1** **[ENTER]** **2nd** **[TABLE]**:
الجدول يؤكد أن حل المتباينة هو $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

تہارین

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.

1. $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$ **0, 2**
2. $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$ **5**
3. $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$ **0.7 حوالي**
4. $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$ **-1.5 حوالي**
5. $\log_4 (9x + 1) > \log_3 (18x - 1)$ **{x | 0.06 < x < 0.17}**
6. $\log_3 (3x - 5) \geq \log_3 (x + 7)$ **{x | x ≥ 6}**
7. $\log_5 (2x + 1) < \log_4 (3x - 2)$ **{x | x > 2}**
8. $\log_2 2x \leq \log_4 (x + 3)$ **{x | 0 < x ≤ 1}**

الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

1-5

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-5 التعامل مع اللوغاريتمات العادية.

الدرس 1-5 إيجاد قيمة التعابير المشتملة على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي. حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.

بعد الدرس 1-5 تحليل الحالة الممثلة بدالة أسية. وحل المسألة.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

كلّف الطلاب بقراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

ما الكيانات الأخرى التي رأيتها تشبه في شكلها القوس؟ الإجابة النموذجية: توجد الأقواس في إعلانات الأطعمة السريعة والجسور المقوسة

ما الأعداد الخاصة الأخرى التي درستها؟ π

لماذا

الحالي

السابق

- يمثل قوس جيت واي في ميزوري شكل منحنى السلسلة. ويوجه منحنى السلسلة قوة وزنه على نفسه. بحيث:
 - إذا كان عبارة عن سلسلة أو جبل يتدلى، فإنه يكون مشدوداً أخذاً هذا الشكل.
 - إذا كانت السلسلة قائمة بشكل مستقيم، فإنها تستطيع دعم نفسها.
- تشتمل معادلة منحنى السلسلة على e ، وهو عدد خاص يظهر في جميع نواحي الرياضيات والتعلم.

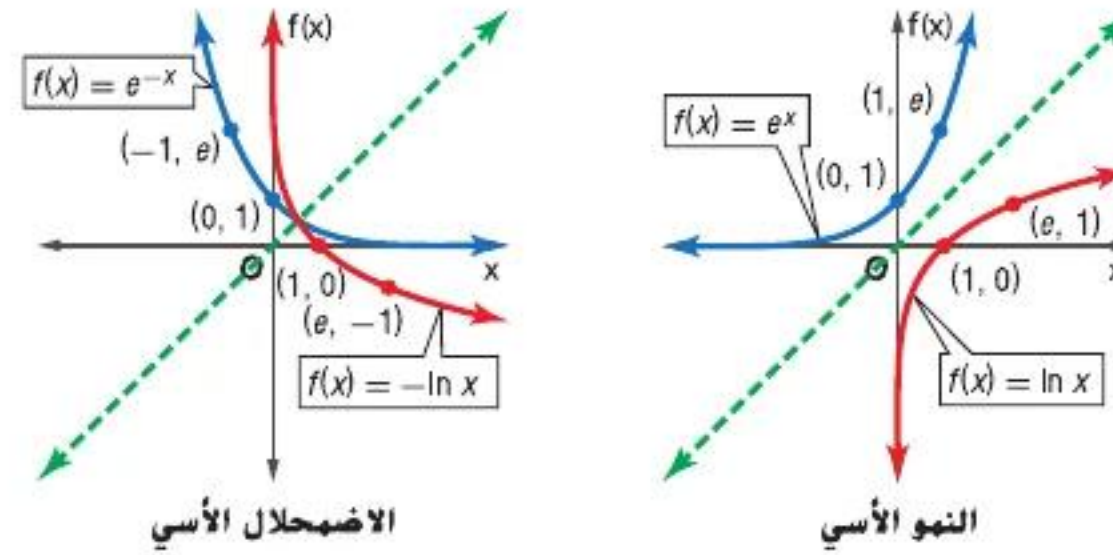
- 1 إيجاد قيم التعابير المشتملة على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.
- 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.

- تعاملت مع اللوغاريتمات العادية.

1 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية كما هو الحال مع π و $\sqrt{2}$ ، فإن العدد e هو عدد غير نسبي. وقيمة e تساوي 2.71828... ويُشار إليه بالأساس الطبيعي، e . ويُطلق على الدالة الأسية التي لها أساس e الدالة الأسية للأساس الطبيعي.

المفهوم الأساسي دوال الأساس الطبيعي

تُستخدم الدالة $f(x) = e^x$ في تمثيل النمو الأسّي المتصل. تُستخدم الدالة $f(x) = e^{-x}$ في تمثيل الاضمحلال الأسّي المتصل. معكوس الدالة الأصلية للأساس الطبيعي يُطلق عليه اللوغاريتم الطبيعي. ويمكن كتابة هذا اللوغاريتم في الصيغة $\log_e x$ ، ولكن في كثير من الأحيان يُختصر في الصيغة $\ln x$.



يمكنك كتابة معادلة أسية للأساس e مكافئة للمعادلة اللوغاريتمية الطبيعية عن طريق استخدام حقيقة أن $\ln x = \log_e x$.

$$\ln 4 = x \rightarrow \log_e 4 = x \rightarrow e^x = 4$$

مثال 1 كتابة التعابير المكافئة

اكتب كل معادلة أسية مما يلي في صيغة لوغاريتمية.

a. $e^x = 8$
 $e^x = 8 \rightarrow \log_e 8 = x$
 $\ln 8 = x$

b. $e^5 = x$
 $e^5 = x \rightarrow \log_e x = 5$
 $\ln x = 5$

تمرين موجّه

1A. $e^x = 9$ $\ln 9 = x$

1B. $e^7 = x$ $\ln x = 7$

المفردات الجديدة

الأساس الطبيعي،
 natural base
 الدالة الأسية للأساس الطبيعي
 natural base exponential function
 لوغاريتم طبيعي
 natural logarithm

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

يمكنك كذلك كتابة معادلة لوغاريتم طبيعي مكافئة للمعادلة الأسية للأساس الطبيعي e .

$$e^x = 12 \rightarrow \log_e 12 = x \rightarrow \ln 12 = x$$

مثال 2 كتابة التعابير المكافئة

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يلي في صيغة أسية.

a. $\ln x \approx 0.7741$

$$\ln x \approx 0.7741 \rightarrow \log_e x = 0.7741$$

$$x \approx e^{0.7741}$$

b. $\ln 10 = x$

$$\ln 10 = x \rightarrow \log_e 10 = x$$

$$10 = e^x$$

تمرين موجّه

2A. $\ln x \approx 2.1438$ $x = e^{2.1438}$

2B. $\ln 18 = x$ $18 = e^x$

خواص اللوغاريتمات التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على اللوغاريتمات الطبيعية. ويمكن تبسيط التعبيرين اللوغاريتميين التاليين إلى حد لوغاريتمي منفرد.

مثال 3 تبسيط التعابير المشتملة على الأساس e واللوغاريتم الطبيعي

اكتب كل تعبير مما يلي في صيغة لوغاريتم منفرد.

a. $3 \ln 10 - \ln 8$

$$3 \ln 10 - \ln 8 = \ln 10^3 - \ln 8$$

خاصية القوى للوغاريتمات

$$= \ln \frac{10^3}{8}$$

خاصية ناتج القسمة للوغاريتمات

$$= \ln 125$$

بسط.

$$= \ln 5^3$$

$5^3 = 125$

$$= 3 \ln 5$$

خاصية القوى للوغاريتمات

استخدم آلة حاسبة للتحقق من الحل.

التحقق

خطوات العملية على الحاسبة: 3 [LN] 10 [)] [-] [LN] 8 [)] [ENTER] 4.828313737

خطوات العملية على الحاسبة: 3 [LN] 5 [)] [ENTER] 4.828313737 ✓

b. $\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x$

$$\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x = \ln 40 + \ln \frac{1}{4} + \ln x$$

خاصية القوى للوغاريتمات

$$= \ln \left(40 \times \frac{1}{4} \times x \right)$$

خاصية ناتج الضرب للوغاريتمات

$$= \ln 10x$$

بسط.

تمرين موجّه

3A. $6 \ln 8 - 2 \ln 4$ $14 \ln 2$

3B. $2 \ln 5 + 4 \ln 2 + \ln 5y$ $\ln 2000y$

نظرًا لأن الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي دالتان متعاكستان، فإنه من الممكن استخدامهما لعكس عمل بعضهما البعض أو إلغائه.

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

1 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

المثال 1 يوضح كيفية كتابة معادلة لوغاريتمية طبيعية مكافئة لمعادلة أسية.

المثال 2 يوضح كيفية كتابة معادلة أسية مكافئة لمعادلة لوغاريتم طبيعي.

المثال 3 يوضح كيفية تحويل التعابير المشتملة على لوغاريتمات طبيعية لأبسط صورة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اكتب كل معادلة أسية مما يلي في صورة لوغاريتمية.

a. $e^x = 23$ $\ln 23 = x$

b. $e^4 = x$ $\ln x = 4$

2 اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يلي في صورة أسية.

a. $\ln x \approx 1.2528$ $x \approx e^{1.2528}$

b. $\ln 25 = x$ $25 = e^x$

3 اكتب كل تعبير مما يلي في صورة لوغاريتم منفرد.

a. $4 \ln 3 + \ln 6$ $\ln 486$

b. $2 \ln 3 + \ln 4 + \ln y$
 $\ln 36y$

انتبه!

مفاهيم خاطئة شائعة أكد

على أن e عبارة عن ثابت مثل π وليس متغيرًا مثل x أو y .

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الهدونة اطلب من الطلاب كتابة مداخل في الهدونة تصف أوجه التشابه والاختلاف بين اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات العادية.

2 المعادلات والمتباينات المشتملة على e و $\ln$ تعد المعادلات والمتباينات المشتملة على الأساس e أسهل في الحل عن طريق استخدام اللوغاريتمات الطبيعية عن استخدام اللوغاريتمات العادية لأن $\ln e = 1$.

مثال 4 حل معادلات الأساس e

حلّ المعادلة $4e^{-2x} - 5 = 3$. قَرِّبْ لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\begin{aligned} 4e^{-2x} - 5 &= 3 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 4e^{-2x} &= 8 && \text{اجمع 5 إلى كل طرف.} \\ e^{-2x} &= 2 && \text{اقسم كل طرف على 4.} \\ \ln e^{-2x} &= \ln 2 && \text{خاصية المساواة للوغاريتمات} \\ -2x &= \ln 2 && \ln e^x = x \\ x &= \frac{\ln 2}{-2} && \text{اقسم كل طرف على -2.} \\ x &\approx -0.3466 && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

خطوات العملية على الحاسبة: $\text{LN } 2 \text{) } \div \text{ -2 } \text{ ENTER } = -0.34657359$

تمرين موجّه

حلّ كل معادلة. قَرِّبْ لأقرب جزء من عشرة آلاف.

4A. $3e^{4x} - 12 = 15$ **0.5493** 4B. $4e^{-x} + 8 = 17$ **-0.8109**

مثلها يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي لحذف e^x . يمكن استخدام الدالة الأسية للأساس الطبيعي لحذف $\ln x$.

مثال 5 حل معادلات ومتباينات اللوغاريتم الطبيعي

حلّ كل معادلة أو متباينة. قَرِّبْ لأقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $3 \ln 4x = 24$

$$\begin{aligned} 3 \ln 4x &= 24 && \text{المعادلة الأصلية} \\ \ln 4x &= 8 && \text{اقسم كل طرف على 3.} \\ e^{\ln 4x} &= e^8 && \text{خاصية المساواة للدوال الأسية} \\ 4x &= e^8 && e^{\ln x} = x \\ x &= \frac{e^8}{4} && \text{اقسم كل طرف على 4.} \\ x &\approx 745.2395 && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

b. $\ln (x - 8)^4 < 4$

$$\begin{aligned} \ln (x - 8)^4 &< 4 && \text{المعادلة الأصلية} \\ e^{\ln (x - 8)^4} &< e^4 && \text{اكتب كل طرف باستخدام الأسس والأساس } e. \\ (x - 8)^4 &< e^4 && e^{\ln x} = x \\ |x - 8| &< e && \text{خاصية المساواة للدوال الأسية} \\ -e < x - 8 &< e && \text{حل القيمة المطلقة} \\ 8 - e < x &< 8 + e && \text{اجمع 8 إلى كل طرف.} \\ 5.1945 &< x < 10.7183 && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

تمرين موجّه حلّ كل معادلة أو متباينة. قَرِّبْ لأقرب جزء من عشرة آلاف.

5A. $5 \ln 6x = 8$ **0.8255** 5B. $\ln (2x - 3)^3 > 6$ **$\{x | x > 5.1945\}$**

39

التركيز على محتوى الرياضيات

الأساس e اللوغاريتم الذي يتضمن أساس e يُسمى لوغاريتم طبيعيًا. ويُكتب في الصورة $\log_e x$ أو $\ln x$. دالة اللوغاريتم الطبيعي، $y = \ln x$ ، هي معكوس الدالة الأسية للأساس الطبيعي $y = e^x$.

2 المعادلات والمتباينات المشتملة على e و $\ln$

المثال 4 يوضح كيفية استخدام اللوغاريتمات الطبيعية لحل معادلة مشتملة على الأساس e . **المثال 5** يوضح كيفية حل معادلات ومتباينات اللوغاريتم الطبيعي. **المثال 6** يوضح كيفية استخدام القانون $A = Pe^{rt}$ لحل مسألة من الحياة اليومية مشتملة على نسبة مراححة تكون مركبة باستمرار.

أمثلة إضافية

4 جد حل $3e^{-2x} + 4 = 10$ قَرِّبْ إلى أقرب أربع منازل عشرية. **$x \approx -0.3466$**

5 جد حل كل معادلة أو متباينة. وقَرِّبْ لأقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $2 \ln 5x = 6$ **4.0171**

b. $\ln (3x + 1)^2 > 8$ **$\{x | x > 17.8661\}$**

نصيحة دراسية

الآلات الحاسبة تتضمن معظم الآلات الحاسبة e^x والزر LN لإيجاد قيمة تعابير الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.

التدريس المتمايز AL

إذا كان يعتقد بعض الطلاب خطأً أن معادلة مثل $4e^{-2x} - 5 = 3$ تحتوي على متغيرين.

عندها أوضح أن الحرف e يمثل ثابتًا، مثلما يفعل π . كلٌّ من e و π عددان غير نسبيين لا يمكن التعبير عنهما عدديًا. لمساعدة الطلاب على تجنب هذا الخلط، اجعلهم يميزوا المتغيرات في المعادلة بقلم تحديد.

يمكن إيجاد المربحة التي تكون مركبة على نحو مستمر، باستخدام e .

المفهوم الأساسي المربحة المركبة المستمرة

احسب المربحة المركبة المستمرة باستخدام الصيغة التالية:

$$A = Pe^{rt}$$

حيث A هو المبلغ بعد t من السنوات، و P هو المبلغ الأصلي المُستثمر، و r هو معدل المربحة السنوي.

مثال 6 من الحياة اليومية حل متباينات الأساس e

المعرفة المالية عندما وُلدت فوزية، أودع جدها AED 3000 في حساب توفير لغرض التعليم الذي يحقق مربحة مركبة مستمرة نسبتها 4%.

a. بافتراض عدم وجود أي عمليات سحب أو إيداع أخرى من الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 10 أعوام؟

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} && \text{الصيغة المركبة المستمرة} \\ &= 3000e^{(0.04)(10)} && t = 10 \text{ و } r = 0.04 \text{ و } P = 3000 \\ &= 3000e^{0.4} && \text{بسط.} \\ &\approx 4475.47 && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

سيكون الرصيد AED 4475.47.

b. كم سيستغرق الأمر ليصل الرصيد إلى AED 10,000 على الأقل؟

$$\begin{aligned} A &< Pe^{rt} && \text{الصيغة المركبة المستمرة} \\ 10,000 &< 3000e^{(0.04)t} && A = 10,000 \text{ و } r = 0.04 \text{ و } P = 3000 \\ \frac{10}{3} &< e^{0.04t} && \text{اقسم كل طرف على 3000.} \\ \ln \frac{10}{3} &< \ln e^{0.04t} && \text{خاصية المساواة للوغاريتمات} \\ \ln \frac{10}{3} &< 0.04t && \ln e^x = x \\ \frac{\ln \frac{10}{3}}{0.04} &< t && \text{اقسم كل طرف على 0.04} \\ 30.099 &< t && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

سيستغرق الأمر حوالي 30 عامًا ليصل الرصيد إلى AED 10,000 على الأقل.

c. إذا أراد الجدان أن تحصل فوزية على AED 10,000 بعد 18 عامًا، فكم المبلغ المطلوب منهما استثماره؟

$$\begin{aligned} 10,000 &= Pe^{(0.04)18} && t = 18 \text{ و } r = 0.04 \text{ و } A = 10,000 \\ \frac{10,000}{e^{0.72}} &= P && \text{اقسم كل طرف على } e^{0.72} \\ 4867.52 &\approx P && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

يحتاج الجدان إلى استثمار AED 4867.52.

تدريب موجّه

6. استخدم المعلومات المبينة في مثال 6 للإجابة على ما يلي.

A. إذا استثمر الجدان AED 8000 بمربحة مركبة مستمرة نسبتها 3.75% فكم المبلغ الذي سيكون في الحساب بعد 30 عامًا؟ **AED 24,641.73**

B. إذا تمكنا فقط من إيداع AED 10,000 في الحساب أعلاه، فما معدل نمو الحساب المطلوب لكي نحصل فوزية على AED 30,000 بعد 18 عامًا؟ **حوالي 6.1%**

C. إذا وجد جدنا فوزية حسابًا يحقق مربحة مركبة مستمرة بنسبة 5% وأرادا أن نحصل فوزية على AED 30,000 بعد 18 عامًا، فما المبلغ الذي يجب عليهما إيداعه؟ **AED 12,197.09**

مثال إضافي

6 المداخلات افترض أنك أودعت

AED 700 في حساب يدفع نسبة مربحة 3% مركبة باستمرار.

a. ماذا سيكون الرصيد بعد 8 أعوام؟ **AED 889.87**

b. كم سيستغرق الأمر ليصل الرصيد في حسابك إلى AED 1200 على الأقل؟ **حوالي 18 عامًا**

c. كم المبلغ الذي ينبغي إيداعه من أجل الوصول إلى رصيد قيمته AED 1500 بعد 12 عامًا؟ **AED 1046.51**

الربط بالحياة اليومية

متوسط تكلفة الالتحاق بالكلية العامة بنظام الأعوام الأربعة يبلغ حوالي AED 6185 في العام.

المصدر: CNN

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات والعلاقات فيما بينها حسب حالات المسألة. ذكّر الطلاب أن التقريب أثناء العمليات الحسابية يمكن أن يوصل إلى نتائج غير دقيقة.

نصيحة دراسية

التبرير لكي تتجنب الوقوع في أي خطأ عند التقريب، لا تُقرب حتى النهاية الفعلية لحساباتك.

المثالان 1 و 2 اكتب دالة أسية أو لوغاريتمية مكافئة.

1. $e^x = 30$ $\ln 30 = x$
2. $\ln x = 42$ $e^{42} = x$
3. $e^3 = x$ $\ln x = 3$
4. $\ln 18 = x$ $e^x = 18$

مثال 3 اكتب كلاً مما يلي في صيغة لوغاريتم منفرد.

5. $3 \ln 2 + 2 \ln 4$ $7 \ln 2$
6. $5 \ln 3 - 2 \ln 9$ $\ln 3$
7. $3 \ln 6 + 2 \ln 9$ $\ln 17496$
8. $3 \ln 5 + 4 \ln x$ $\ln 125x^4$

مثال 4 حل كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

9. $5e^x - 24 = 16$ 2.0794
10. $-3e^x + 9 = 4$ 0.5108
11. $3e^{-3x} + 4 = 6$ 0.1352
12. $2e^{-x} - 3 = 8$ -1.7047

مثال 5 حل كل معادلة أو متباينة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

13. $\ln 3x = 8$ 993.6527
14. $-4 \ln 2x = -26$ 332.5708
15. $\ln(x+5)^2 < 6$
16. $\ln(x-2)^3 > 15$ $\{x | x > 150.4132\}$
17. $e^x > 29$ $\{x | x > 3.3673\}$
18. $5 + e^{-x} > 14$ $\{x | x < -2.1972\}$
19. $\{x | -25.0855 < x < 15.0855, x \neq -5\}$

19. علوم فيروس ينتشر عبر شبكة حاسوب وفقاً للصيغة $v(t) = 30e^{0.1t}$ ، حيث v هو عدد الحواسيب المصابة بالفيروس و t هو الزمن بالدقائق. كم سيستغرق الفيروس لإصابة 10,000 حاسوب؟ حوالي 58 min

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 اكتب دالة أسية أو لوغاريتمية مكافئة.

22. $0.25 = e^x$ $23. 5.4 = e^x$
20. $e^{-x} = 8$ $\ln 8 = -x$ 21. $e^{-5x} = 0.1$ $\ln 0.1 = -5x$
22. $\ln 0.25 = x$ 23. $\ln 5.4 = x$
24. $e^{x-3} = 2$ $\ln 2 = x - 3$ 25. $\ln(x+4) = 36$ $e^{36} = x + 4$
26. $e^{-2} = x^6$ $-2 = 6 \ln x$ 27. $\ln e^x = 7$ $e^7 = e^x$

مثال 3 اكتب كلاً مما يلي في صيغة لوغاريتم منفرد.

28. $\ln 125 - 2 \ln 5$ $\ln 5$
29. $3 \ln 10 + 2 \ln 100$ $7 \ln 10$
30. $4 \ln \frac{1}{3} - 6 \ln \frac{1}{9}$ $-8 \ln \frac{1}{3}$
31. $7 \ln \frac{1}{2} + 5 \ln 2$ $-2 \ln 2$
32. $8 \ln x - 4 \ln 5$ $\ln \frac{x^8}{625}$
33. $3 \ln x^2 + 4 \ln 3$ $\ln 81x^6$

حل كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

34. $6e^x - 3 = 35$ 1.8458
35. $4e^x + 2 = 180$ 3.7955
36. $3e^{2x} - 5 = -4$ -0.5493
37. $-2e^{3x} + 19 = 3$ 0.6931
38. $6e^{4x} + 7 = 4$ لا يوجد حل
39. $-4e^{-x} + 9 = 2$ -0.5596

40. التبرير المنطقي قيمة سيارة معينة تضمحل وفقاً للصيغة $v(t) = 18500e^{-0.186t}$ ، حيث t هو عدد السنوات بعد شراء السيارة جديدة.

- a. ماذا ستكون قيمة السيارة بعد 18 شهراً؟ AED 13,996
- b. متى ستصبح قيمة السيارة نصف قيمتها الأصلية؟ حوالي 3.73 yr
- c. متى ستصبح قيمة السيارة أقل من 1000 AED؟ حوالي 15.69 yr

حل كل متباينة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

45. $\{x | x < -239.8802 \text{ or } x > 239.8802\}$
46. $\{x | 6 < x \leq 26.0855\}$
41. $e^x \leq 8.7$ $\{x | x \leq 2.1633\}$
42. $e^x \geq 42.1$ $\{x | x \geq 3.7400\}$
43. $\ln(3x+4)^3 > 10$ $\{x | x > 8.0105\}$
44. $4 \ln x^2 < 72$
45. $\ln(8x^4) > 24$
46. $-2 [\ln(x-6)^{-1}] \leq 6$
- $\{x | -8103.0839 < x < 8103.0839, x \neq 0\}$

41

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 19 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف، ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مساراً للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

إرشاد للمعلمين الجدد

مدى صحة الحل شجّع الطلاب على تقييم كل حل للمعادلات والمتباينات اللوغاريتمية من حيث مدى صحته.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

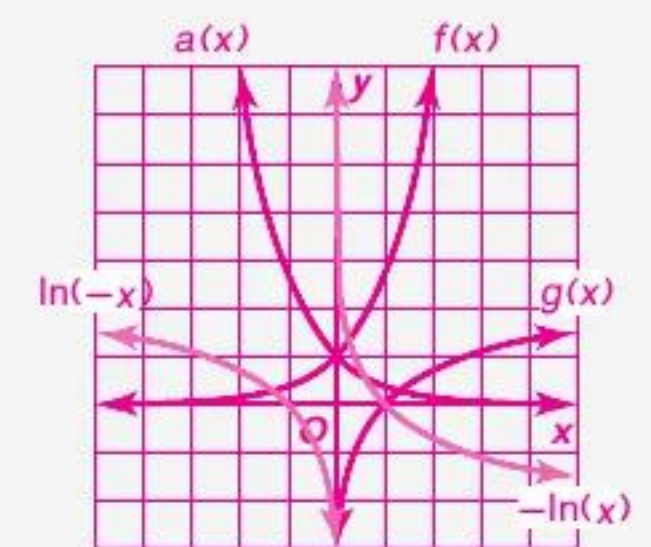
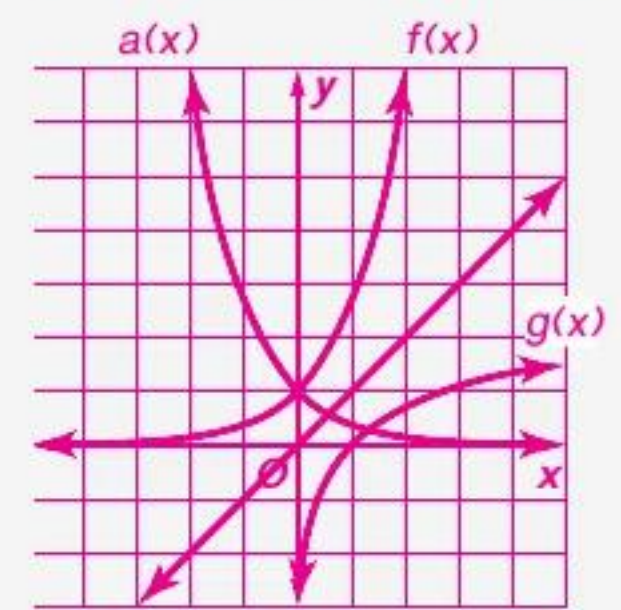
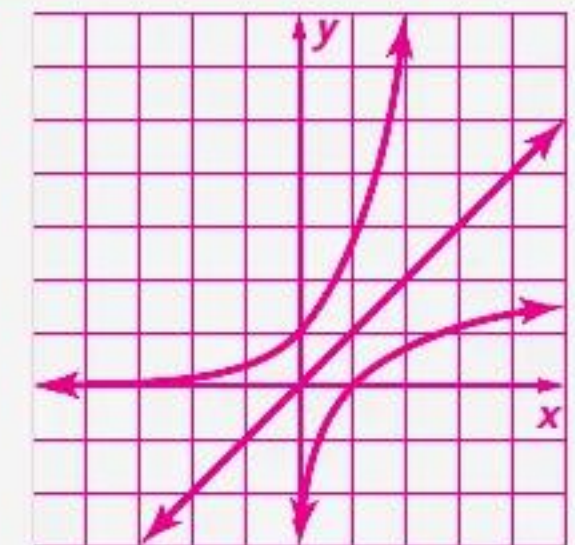
المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	20-46, 59-82	20-46 الأعداد الزوجية، 59-62, 67-82
OL أساسي	21-55 الأعداد الفردية، 56-57, 59-82	21-45 الأعداد الفردية، 63-66
BL متقدم	47-76 (اختياري، 77-82)	20-46, 63-66

تدريس الممارسات في الرياضيات

التمثيل يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

إجابات إضافية

57a.



59. افترض أن $p = \ln a$ و $q = \ln b$.

هذا يعني أن $e^p = a$ و $e^q = b$.

$$ab = e^p \times e^q$$

$$ab = e^{p+q}$$

$$\ln(ab) = (p+q)$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

62. الإجابة النموذجية: اللوغاريتم

الطبيعي والأساس الطبيعي هما دالتان معكوستان، لذا أخذ اللوغاريتم الطبيعي والأساس الطبيعي سوف يعكس عمل الأساس الطبيعي ويجعل المسألة أسهل للحل.

47 B

المعرفة المالية استخدم الصيغة الخاصة بالمراوحة المركبة المستمرة.

a. إذا أودعت AED 800 في حساب يحقق 4.5% مراوحة مركبة مستمرة، فكم سيكون المبلغ في الحساب بعد 5 سنوات؟ **AED 1001.86**

b. كم سيستغرق الأمر ليصل مالك إلى الضعف؟ **حوالي 15.4 yr**

c. إذا أردت مضاعفة مالك في 9 أعوام، فما معدل المراوحة الذي تحتاج إليه؟ **حوالي 7.7%**

d. إذا أردت فتح حساب يحقق مراوحة مركبة مستمرة بنسبة 4.75% وأن يكون لديك AED 10,000 في الحساب بعد 12 عامًا، فما المبلغ الذي تحتاج إلى إيداعه؟ **حوالي AED 5655.25**

اكتب التعبير في صورة مجموع أو فرق لوغاريتمات أو مضاعفات للوغاريتمات.

48. $\ln 12x^2$
 $\ln 12 + 2 \ln x$

49. $\ln \frac{16}{125}$
 $4 \ln 2 - 3 \ln 5$

50. $\ln \sqrt[5]{x^3}$
 $\frac{3}{5} \ln x$

51. $\ln xy^4z^{-3}$
 $\ln x + 4 \ln y - 3 \ln z$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة.

52. $8^x = 24$ **1.5283** 53. $3^x = 0.4$ **-0.8340** 54. $2^{3x} = 18$ **1.3900** 55. $5^{2x} = 38$ **1.1301**

56 C

التمثيل قانون نيوتن للتبريد الذي يمكن استخدامه لتحديد مدى سرعة برودة جسم ما في أوساط محيطية معطاة، تمثله المعادلة $T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$ حيث T_0 هي درجة الحرارة الأولية للجسم، و T_s هي درجة حرارة الوسط المحيط، و t هو الزمن بالدقائق، و k هو قيمة ثابتة تعتمد على نوع الجسم.

a. إذا وُضع كوب قهوة درجة حرارته الأولية 180° في غرفة ذات درجة حرارة 70° وبردت القهوة إلى 140° بعد 10 دقائق، فجد قيمة k . **0.045**

b. استخدم قيمة k هذه لتحديد درجة حرارة القهوة بعد 20 دقيقة. **حوالي 114.7°**

c. متى ستصل درجة حرارة القهوة إلى 75° ؟ **حوالي 68 min**

57. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم $f(x) = e^x$ و $g(x) = \ln x$.

a. بيانيًا مثل بيانيًا كلاً من الدالتين ومحور التماثل لهما، $y = x$. حيث $-5 \leq x \leq 5$. ثم مثل $a(x) = e^{-x}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه. **انظر الهامش.**

b. تحليليًا التمثيلان البيانيان لـ $a(x)$ و $f(x)$ منعكستان على أي محور؟ ما الدالة التي ستكون انعكاسًا لـ $f(x)$ على المحور الآخر؟ **محور y ; $a(x) = -e^x$ هو انعكاس على المحور y . $\ln(-x)$ هو انعكاس على المحور x .**

c. بيانيًا حدد الدالتين اللتين تكونان منعكستين لـ $g(x)$. مثل هاتين الدالتين الجديدتين بيانيًا.

d. لفظيًا نحن نعلم أن $f(x)$ و $g(x)$ متعاكستان. هل أي من الدوال الأخرى التي مثلناها بيانيًا متعاكستان أيضًا؟ اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: لا؛ هاتان الدالتان تكونان منعكستين على $y = -x$ ، مما يشير ذلك إلى أنهما ليستا عكسيتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

58. **التحدي** حلّ المعادلة $4^x - 2^{x+1} = 15$ لإيجاد x . **2.3219**

59. **البرهان** أثبت أن $\ln ab = \ln a + \ln b$ للوغاريتمات الطبيعية. **انظر الهامش.**

60. **التبرير** حدد إذا ما كانت $x > \ln x$ صحيحة أحيانًا، أم دائمًا، أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك. **الإجابة النموذجية: دائمًا؛ التمثيل البياني لـ $y = x$ يكون دائمًا أكبر من التمثيل البياني لـ $y = \ln x$ والتمثيلان البيانيان لا يتقاطعان أبدًا.**

61. **مسألة غير محددة الإجابة** عبّر عن القيمة 3 باستخدام e^x واللوغاريتم الطبيعي. **الإجابة النموذجية: $e^{\ln 3}$**

62. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي لحل معادلة أسية لأساس طبيعي. **انظر الهامش.**

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات دع كل طالب يكتب معادلة لوغاريتمية طبيعية ومتباينة لوغاريتمية طبيعية. ثم اجعل الطلاب يكتبوا كل الخطوات المتخذة لإيجاد حل لمسائلهم.

65. حلّ المعادلة $|2x - 5| = 17$. **G**

- F -6, -11
G -6, 11
H 6, -11
J 6, 11

66. متجر محلي لطعام الحيوانات الأليفة يبيع طعام أرانب. تكلفة العبوتين ذات 5 kg تساوي AED 7.99. يمكن إيجاد إجمالي تكلفة C شراء n عبوات عن طريق:

- A ضرب n في C .
B ضرب n في 5.
C ضرب n في تكلفة العبوة الواحدة.
D ضرب n في C .

63. باعتبار الدالة $y = 2.34x + 11.33$. أي عبارة مما يلي تعد أفضل وصفًا لتأثير إزاحة التمثيل البياني لأسفل بمقدار وحدتين؟ **B**

- A يتناقص التقاطع مع المحور x .
B يتناقص التقاطع مع المحور y .
C يبقى التقاطع مع المحور x كما هو.
D يبقى التقاطع مع المحور y كما هو.

64. الإجابة الشبكية يبيع محمد إطارات صور خشبية عبر الإنترنت. وهو يشتري مواد بسعر AED 85 ويدفع AED 19.95 نظير الموقع الإلكتروني. فإذا حصل على 15 مقابل كل إطار. فكم عدد الإطارات التي يحتاج إلى بيعها لكي يحقق ربحًا لا يقل عن AED 270؟ **25**

مراجعة شاملة

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف. (الدرس 1-4)

67. $2^x = 53$ **5.7279**

68. $2.3^{x^2} = 66.6$ **± 2.2452**

69. $3^{4x-7} < 4^{2x+3}$ **$x < 7.3059$**

70. $6^{3y} = 8^{y-1}$ **-0.6309**

71. $12^{x-5} \geq 9.32$ **$x \geq 5.8983$**

72. $2.1^{x-5} = 9.32$ **8.0086**

73. الصوت استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$ حيث L هو علو الصوت و R هي حدة الصوت النسبية. افترض أن صوت ساعة تنبيه واحدة يساوي 80 ديسيبل. اكتشف مقدار علو صوت 10 ساعات تنبيه بالمقارنة مع الساعة المنبهة الواحدة. (الدرس 1-3) **10 ديسيبل**

باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، جد باقي عوامل كثيرة الحدود هذه. قد لا تكون بعض العوامل من كثيرات الحدود.

74. $x^3 + 5x^2 + 8x + 4; x + 1$ **$x + 2, x + 2$**

75. $x^3 + 4x^2 + 7x + 6; x + 2$ **$x^2 + 2x + 3$**

76. تمرين راجع الصورة.

نادي الجميع الرياضي

يبدأ الأمر من هنا!

الخيار 1: AED 400/yr زيارات غير محدودة	الخيار 2: AED 150/yr للزيارة AED 5
---	---

a. لكل خيار، اكتب معادلة تمثل تكلفة الانضمام إلى صالة الألعاب الرياضية.

$y = 400; y = 150 + 5x$

b. مثل المعادلات بيانيًا. قدر نقطة التعادل لعضوية صالة الألعاب الرياضية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 6.**

c. اشرح ما تعنيه نقطة التعادل.

d. إذا كنت تخطط لزيارة صالة الألعاب الرياضية مرة في الأسبوع على الأقل خلال العام، فأأي خيار ستختار؟ **الخيار 1**

76c. تعني أن تكلفة الخيارات ستكون هي ذاتها إذا ذهبت في 50 زيارة في العام.

مراجعة المهارات

حلّ كل من المعادلات التالية.

77. $2^{3x+5} = 128$ **$\frac{2}{3}$**

78. $5^{n-3} = \frac{1}{25}$ **1**

79. $\left(\frac{1}{9}\right)^m = 81^{m+4}$ **$-\frac{8}{3}$**

80. $\left(\frac{1}{7}\right)^{y-3} = 343$ **0**

81. $10^{x-1} = 100^{2x-3}$ **$\frac{5}{3}$**

82. $36^{2p} = 216^{p-1}$ **-3**

43

التدريس المتمايز

التوسع وضّح للطلاب أن $2!$ تعني 2×1 ، و $3!$ تعني $3 \times 2 \times 1$ ، و $4!$ تعني $4 \times 3 \times 2 \times 1$. وهكذا. كلف الطلاب باستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة المتسلسلة التالية لأكبر عدد ممكن من الحدود حسب رغبتهم:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

ناقش مع الطلاب مدى اقتراب قيمة هذه المتسلسلة من القيمة e . أوضح أن المتسلسلة المُعَبَّر عنها بحوالي 20 حدًا سوف تعطي دقة لـ e مثلما أعطها أولير؛ وهو عالم رياضيات سويسري درس العدد e في عشرينيات القرن الثامن عشر.



مختبر ورقة البيانات المربحة المركبة

1-6

الاستكشاف 1-6

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الثلاثية بطريقة إستراتيجية.

يمكنك استخدام ورقة البيانات لتنظيم البيانات وعرضها. وتعتبر ورقة البيانات طريقة سهلة لتتبع مبلغ المربحة المكتسبة خلال مدة زمنية.

لا يتم كسب المربحة المركبة على المبلغ الأصلي فقط، وإنما على أية مربحات تمت إضافتها على المال الأساسي أيضًا.

النشاط

جد المبلغ المالي الكلي بعد 5 سنوات إذا كنت قد أودعت AED 100 بمعدل مربحة مركبة سنوية 7%.

الخطوة 1

قم بتسمية الأعمدة كما هو موضح. المدة عام واحد. أدخل قيم البدء والمعدل.

الخطوة 2

سيتم إنشاء كل صف باستخدام الصيغ. أدخل الصيغ كما هو موضح.

حساب توفير					
	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المربحة	الرصيد	المعدل خلال الفترة
2	0			AED100.00	7%
3	=A2+1	=D2	=B3*\$E\$2	=C3+D2	
4					
	1 الورقة	2 الورقة	3 الورقة		

الخطوة 3

استخدم وظيفة تعبئة لأسفل لملء 4 صفوف إضافية.

حساب توفير					
	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المربحة	الرصيد	المعدل خلال الفترة
2	0			AED 100.00	7%
3	1	AED 100.00	AED 7.00	AED 107.00	
4	2	AED 107.00	AED 7.49	AED 114.49	
5	3	AED 114.49	AED 8.01	AED 122.50	
6	4	AED 122.50	AED 8.58	AED 131.08	
7	5	AED 131.08	AED 9.18	AED 140.26	
8					
	1 الورقة	2 الورقة	3 الورقة		

إذا كنت قد أودعت AED 100 بمعدل مربحة سنوية 7% لمدة 5 سنوات، فسيكون معك AED 140.26 بنهاية السنوات الخمس.

تمارين

جد الرصيد الإجمالي في كل حالة.

- إيداع AED 500 لمدة 7 سنوات بمعدل مربحة 5%
- إيداع AED 1000 لمدة 5 سنوات بمعدل مربحة 6%
- إيداع AED 200 لمدة سنتين بمعدل مربحة 10%
- إيداع AED 800 لمدة 3 سنوات بمعدل مربحة 8%
- افتراض AED 10,000 لمدة 5 سنوات بمعدل مربحة 05.5%
- افتراض AED 25,000 لمدة 30 سنة بمعدل مربحة 8%

44 | الاستكشاف 1-6 | مختبر ورقة البيانات: المربحة المركبة

توسيع المفهوم

اطرح السؤال التالي:

- كيف سيتم تغيير ورقة البيانات لتعكس التراكم الشهري؟ اقسم المبلغ الموجود في الخلية E2 على 12.
- كيف تُقارن الأرصدة السنوية بتلك الموجودة في ورقة البيانات الأصلية؟ أكبر

من العملي إلى النظري

استخدم التمرين 5 لرؤية ما إذا كان الطلاب سيدركون أن المبالغ المُقترضة ستزداد كما يحدث لمبالغ الإيداعات إذا سُمح لها بالتراكم.

1 التركيز

الهدف استخدام ورقة البيانات لعرض نمو الاستثمار بمرور الزمن.

المواد الخاصة لكل طالب

- ورقة بيانات إلكترونية

نصيحة للتدريس

في الخطوة 2 من النشاط، اذكر أن علامات الدولار في الخلية C3 مطلوبة بحيث تُستخدم النسبة الموجودة في الخلية E2 بالنسبة لجميع الخلايا في العمود C. وهذا يُسمى "الخلية المرجعية المطلقة"، بينما تكون جميع الخلايا الأخرى مرجعية ذات صلة.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات متنوعة القدرات من طالبين لإكمال النشاط والتمرين 1.

اطرح السؤال التالي:

- ما القانون الذي يظهر في الخلية A4؟
 $A3 + 1 =$

- لماذا يبدأ كل قانون بـ "="؟

مدخلات الخلايا التي تملأ من "=" لا تُجرى عليها أي عملية.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 2 إلى 6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 4 لتقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون كيفية إيجاد الأرصدة السنوية بعد تراكم سنوي مع اختلاف القيم الأولية ونسب المربحة.

استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية

1-6 الدرس

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-6 استخدام صيغ النمو والاضمحلال الأسي.

الدرس 1-6 استخدام اللوغاريتمات لحل مسائل مشتملة على نمو واضمحلال أسي. استخدام اللوغاريتمات لحل مسائل تتضمن نمو لوجيستي.

بعد الدرس 1-6 تبسيط التعابير النسبية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ في أي منطقة تقع بنيكاراجوا؟
أمريكا الوسطى

■ لماذا يمكن استخدام الكربون لأغراض التأريخ؟ **لأن الكربون يتحلل بمرور الزمن وفقًا لنمط قابل للقياس.**

لماذا

الحالي

السابق



- 1 استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن نموًا واضمحلالًا أسيًا.
- 2 استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن نموًا لوجيستيًا.

- استخدمت قوانين النمو والاضمحلال الأسي.

1 النمو والاضمحلال الأسي يستخدم العلماء والباحثون في حالات كثيرة صورًا بديلة لقوانين النمو والاضمحلال التي تعلمتها في الدرس 1-1.

المفهوم الأساسي النمو والاضمحلال الأسي

النمو الأسي	الاضمحلال الأسي
يمكن تمثيل النمو الأسي بالدالة $f(x) = ae^{kt}$	يمكن تمثيل الاضمحلال الأسي بالدالة $f(x) = ae^{-kt}$
حيث a هي القيمة الأولية، و t هو الزمن بالسنوات، و k هو الثابت الذي يمثل معدل النمو المستمر .	حيث a هي القيمة الأولية، و t هو الزمن بالسنوات، و k هو الثابت الذي يمثل معدل الاضمحلال المستمر .

مثال 1 من الحياة اليومية الاضمحلال الأسي

العلوم عمر النصف لأي مادة مشعة هو الزمن الذي تستغرقه المادة حتى يتحلل نصف ذراتها. فعمر النصف للكربون 14 هو 5730 عامًا. حدد قيمة k ومعادلة تحلل الكربون 14.

إذا كانت a هي الكمية الأولية للمادة، فإن y هي الكمية المتبقية بعد 5730 عامًا والتي يمكن تمثيلها بالآتي $\frac{1}{2}a$ أو $0.5a$.

$y = ae^{-kt}$	قانون الاضمحلال الأسي
$0.5a = ae^{-k(5730)}$	$t = 5730$ و $y = 0.5a$
$0.5 = e^{-5730k}$	بقسمة كل طرف على a .
$\ln 0.5 = \ln e^{-5730k}$	خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية
$\ln 0.5 = -5730k$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 0.5}{-5730} = k$	بقسمة كل طرف على -5730.
$0.00012 \approx k$	استخدام الآلة الحاسبة.

وبالتالي، تكون معادلة تحلل الكربون 14 هي $y = ae^{-0.00012t}$.

تمرين موجّه $k \approx 2.888 \times 10^{-5}$

1. عمر النصف للبلوتونيوم 239 يبلغ 24,000 عام. حدد قيمة k .

المفردات الجديدة

معدل النمو المستمر
rate of continuous growth
معدل الاضمحلال المستمر
rate of continuous decay
نموذج النمو اللوجيستي
logistic growth model

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة
في حلها.

مثال 2 من الحياة اليومية التأريخ بالكربون

العلوم يقوم عالم حفريات بفحص عظام حيوان من عصر ما قبل التاريخ ويقدّر أنها تحتوي على 2% من كمية الكربون 14 التي احتوت العظام عليها في حياة الحيوان.

a. منذ متى عاش ذلك الحيوان؟

الفهم قانون تحليل الكربون 14 هو $y = ae^{-0.00012t}$. وتريد إيجاد منذ متى عاش هذا الحيوان.

التخطيط افترض أن a هي الكمية الأولية من الكربون 14 في جسم الحيوان. وأن الكمية y المتبقية بعد عدد t من السنوات هي 2% من a أو $0.02a$.

الحل

$$\begin{aligned} y &= ae^{-0.00012t} & \text{قانون تحليل الكربون 14} \\ 0.02a &= ae^{-0.00012t} & y = 0.02a \\ 0.02 &= e^{-0.00012t} & \text{بقسمة كل طرف على } a \\ \ln 0.02 &= \ln e^{-0.00012t} & \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية} \\ \ln 0.02 &= -0.00012t & \ln e^x = x \\ \frac{\ln 0.02}{-0.00012} &= t & \text{بقسمة كل طرف على } -0.00012 \\ 32,600 &\approx t & \text{باستخدام الآلة الحاسبة.}\end{aligned}$$

عاش الحيوان منذ ما يقرب من 32,600 عام مضى.

التحقق استخدم القانون لإيجاد مقدار العينة المتبقية بعد 32,600 عام. استخدم الكمية الأصلية في 1.

$$\begin{aligned} y &= ae^{-0.00012t} & \text{المعادلة الأصلية} \\ = 1e^{-0.00012(32,600)} & & t = 32,600 \text{ و } a = 1 \\ \approx 0.02 \text{ or } 2\% & \checkmark & \text{باستخدام الآلة الحاسبة.}\end{aligned}$$

b. إذا أشار بحث سابق إلى أن الحيوان عاش منذ حوالي 20,000، فما مقدار الكربون 14 الذي ينبغي أن يوجد في الحيوان؟

$$\begin{aligned} y &= ae^{-0.00012t} & \text{قانون تحليل الكربون 14} \\ = 1e^{-0.00012(20,000)} & & t = 20,000 \text{ و } a = 1 \\ = e^{-2.4} & & \text{بسط.} \\ = 0.09 \text{ or } 9\% & & \text{باستخدام الآلة الحاسبة.}\end{aligned}$$

تمرين موجّه

2. استخدم المعلومات الواردة في المثال 2 للإجابة عن الأسئلة التالية.

- A. عينة احتوت في الأساس على 42 mg من الكربون تحتوي الآن على 8 mg. فكم عمر الأحفورة؟ **حوالي 13,819 yr**
- B. يُظن أن عمر عينة من الماموث الصوفي يبلغ 12,000 عام. فما كمية الكربون 14 التي ينبغي أن توجد في الحيوان؟ **حوالي 23.7%**

تتطابق معادلة النمو الأسّي $y = ae^{kt}$ مع صيغة المرباحة المركبة المستمرة التي تعلمتها في الدرس 1-5.

النمو السكاني

$$y = ae^{kt}$$

a = التعداد الأولي

t = التعداد في المدة

k = معدل النمو المستمر

المرباحة المركبة المستمرة

$$A = Pe^{rt}$$

P = الكمية الأولية

A = الكمية في المدة

r = معدل المرباحة



الربط بالحياة اليومية

يبلغ عمر أقدم أحفورة للإنسان الحديث، تم العثور عليها في إثيوبيا، 160,000 عام تقريباً.
المصدر: الإذاعة الوطنية العامة

نصيحة دراسية

التأريخ بالكربون عندما يكون لديك نسبة مئوية أو كسر من التحلل، استخدم المقدار الأصلي من 1 مع a .

1 النمو والاضمحلال الأسّي

التمرينان 1 و 2 يوضحان كيفية استخدام النموذج الجبري $y = ae^{-kt}$ لحل مسائل مشتملة على اضمحلال أسّي.

المثال 3 يوضح كيفية استخدام النموذج الجبري $y = ae^{kt}$ لحل مسألة من الحياة اليومية تشتمل على نمو أسّي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 جيولوجيا العمر النصفى

للصوديوم 22 هو 2.6 عام. حدد قيمة k ومعادلة اضمحلال الصوديوم 22.

$$k \approx 0.2666; y = ae^{-0.2666t}$$

حيث t يُعطى بالأعوام

2

جيولوجيا عالم جيولوجيا يفحص

نيزكاً يُقدّر بأنه يحتوي فقط على

10% تقريباً من كمية الصوديوم

22 التي كان يحتويها عند وصوله

إلى سطح الأرض. منذ متى وصل

النيزك إلى سطح الأرض؟ **حوالي**

9 أعوام ماضية

التدريس باستخدام التكنولوجيا

البحث على الإنترنت اجعل الطلاب

يبحثوا على الإنترنت عن العمر النصفى

لعناصر مشعة مختلفة. اجعلهم يختاروا

ثلاثة عناصر، واطلب منهم حساب الكمية

المتبقية من عينة قدرها 500 جرام بعد

مرور 10 أعوام.

التدريس المتميّز (AL) (OL) (BL)

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي كلّف الطلاب بالعمل في مجموعات ثنائية أو مجموعات صغيرة. واطلب منهم إمعان النظر في صيغ النمو والاضمحلال في الأمثلة من 1 إلى 3 ومناقشة وجه الارتباط بين هذه المعادلات. وبالأخص، اطلب منهم مناقشة كيف يمكنهم التعرف على أي المعادلات مستخدمة لحالات الاضمحلال الأسّي (رمز الناقص/السالب) وأياها مستخدمة للنمو الأسّي.

التعداد السكاني في 2007. وصل تعداد سكان ولاية جورجيا إلى 9.36 ملايين نسمة. وفي 2000. وصل إلى 8.18 ملايين. حدد قيمة k ، معدل النمو النسبي لجورجيا.

$$y = ae^{kt}$$

قانون النمو الأسّي المستمر

$$9.36 = 8.18e^{k(7)}$$

$y = 9.36$ و $a = 8.18$ و $t = 2007 - 2000 = 7$

$$\frac{9.36}{8.18} = e^{7k}$$

بقسمة كل طرف على 8.18

$$\ln \frac{9.36}{8.18} = \ln e^{7k}$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\ln \frac{9.36}{8.18} = 7k$$

$\ln e^x = x$

$$\frac{\ln \frac{9.36}{8.18}}{7} = k$$

بقسمة كل طرف على 7

$$0.01925 = k$$

باستخدام الآلة الحاسبة.

يبلغ معدل النمو النسبي لولاية جورجيا حوالي 0.01925 أو 2% تقريبًا.

b. متى سيبلغ التعداد السكاني لجورجيا 12 مليون نسمة؟

$$y = ae^{kt}$$

قانون النمو الأسّي المستمر

$$12 = 8.18e^{0.01925t}$$

$y = 12$ و $a = 8.18$ و $k = 0.01925$

$$1.4670 = e^{0.01925t}$$

بقسمة كل طرف على 8.18

$$\ln 1.4670 = \ln e^{0.01925t}$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\ln 1.4670 = 0.01925t$$

$\ln e^x = x$

$$\frac{\ln 1.4670}{0.01925} = t$$

بقسمة كل طرف على 0.01925

$$19.907 \approx t$$

باستخدام الآلة الحاسبة.

سيبلغ التعداد السكاني لجورجيا 12 مليون نسمة بحلول عام 2020.

c. بلغ التعداد السكاني لميتشجن في عام 2000 9.9 مليون ويمكن تمثيله بالآتي $y = 9.9e^{0.0028t}$. حدد متى سيتجاوز تعداد سكان ولاية جورجيا تعداد ميشيغن.

$$8.18e^{0.01925t} > 9.9e^{0.0028t}$$

قانون النمو الأسّي

$$\ln 8.18e^{0.01925t} > \ln 9.9e^{0.0028t}$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\ln 8.18 + \ln e^{0.01925t} > \ln 9.9 + \ln e^{0.0028t}$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\ln 8.18 + 0.01925t > \ln 9.9 + 0.0028t$$

$\ln e^x = x$

$$0.01645t > \ln 9.9 - \ln 8.18$$

بطرح $(0.0028t + \ln 8.18)$ من كل طرف.

$$t > \frac{\ln 9.9 - \ln 8.18}{0.01645}$$

بقسمة كل طرف على 0.01645

$$t > 11.6$$

باستخدام الآلة الحاسبة.

تجاوز التعداد السكاني لجورجيا تعداد ميشيغن في 2012.

تمرين موجّه

3. الأحياء تنمو أحد أنواع الجراثيم أسّيًا وفق التمثيل $y = 1000e^{kt}$. حيث t هي الزمن بالدقائق. A. إذا كان هناك 1000 خلية بشكل أولي و 1650 خلية بعد 40 دقيقة، فجد قيمة k للجراثيم.

$$k \approx 0.0125$$

B. افترض أن هناك نوعًا آخر من الجراثيم ينمو أسّيًا وفق التمثيل $y = 50e^{0.0432t}$. فحدد مقدار الزمن الذي سيمر قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذا النوع من الجراثيم عدد خلايا النوع الآخر منها. حوالي 97.58 min

نصيحة في حل المسائل
استخدام القوانين عند التعامل مع التعداد السكاني. يلزم دائمًا تقريبًا استخدام قانون النمو والاضمحلال الأسّي.

التركيز على محتوى الرياضيات النمو والاضمحلال الأسّي

صيغ الاضمحلال الأسّي يكون لها الشكل $y = a(1 - r)^t$ أو $y = ae^{-kt}$. صيغ النمو الأسّي يكون لها الشكل $y = a(1 + r)^t$ أو $y = ae^{kt}$. يمكن استخدام اللوغاريتمات لحل مسائل مشتملة على نمو واضمحلال أسّي.

مثال إضافي

3. التعداد السكاني في عام 2007. بلغ التعداد السكاني في الصين 1.32 مليار نسمة. وفي عام 2000. كان يبلغ التعداد 1.26 مليار نسمة.

a. حدد قيمة k ، معدل النمو النسبي للصين. 0.0066

b. متى سيصل التعداد

السكاني للصين إلى 1.5 مليار نسمة؟ في 2026

c. بلغ التعداد السكاني للهند 1.13 مليار نسمة في 2007.

ويمكن تمثيل هذا التعداد بالمعادلة $1.13e^{0.015t}$. حدد

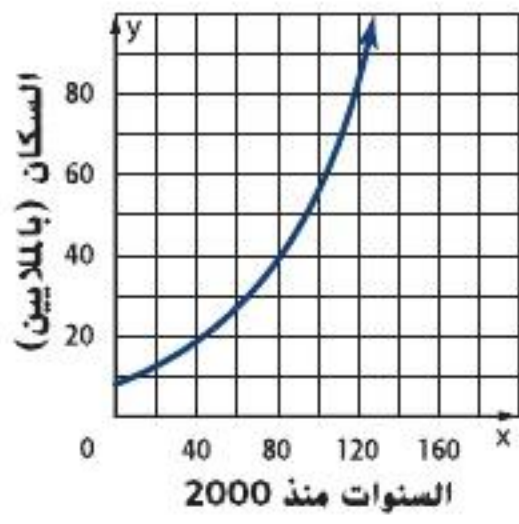
متى سيتخطى التعداد السكاني للهند نظيره في الصين. (ملحوظة: t تمثل الأعوام بعد 2007).

بعد 18.5 عامًا، أو في منتصف عام 2025

التوسع يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات البحث عن معدلات النمو لأنواع مختلفة من البكتيريا. ويمكنهم استكشاف كيفية تحديد معدلات النمو تلك، وماهية العوامل البيئية التي تسبب إثراء أو تثبيط ازدهارها. وتمثيل نمو الأنواع المختلفة منها لأغراض المقارنة.

2 النمو اللوجستي

المثال 4 يوضح كيفية استخدام معادلة النمو اللوجستي لتمثيل النمو بعامل مُحدّد.



النمو اللوجستي يرجع إلى المعادلة التي تمثل التعداد السكاني لجورجيا في المثال 3. وفقًا للتمثيل البياني على اليسار، سيصل تعداد جورجيا إلى حوالي واحد مليار نسمة بحلول 2130. فهل يبدو ذلك منطقيًا؟

لا يمكن أن ينمو تعداد السكان بصورة لانهائية. فهناك قيود مثل إمدادات الغذاء والحروب ومكان المعيشة والأمراض والموارد المتوفرة، وما إلى ذلك.

النمو الأسّي غير مقيّد، بمعنى أنه يتزايد دون توقف. أما **نموذج النمو اللوجستي**، فيمثل النمو الذي له عامل مُحدّد. وتعد النماذج اللوجستية النماذج الأدق لتمثيل النمو السكاني.

المفهوم الأساسي دالة النمو اللوجستي

افترض أن a و b و c هي الثوابت الموجبة حيث $b < 1$. ويتم تمثيل دالة النمو اللوجستي بالآتي $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$ حيث t تمثل الزمن.

مثال 4 من الحياة اليومية النمو اللوجستي

يمكن تمثيل التعداد السكاني لمدينة فينيكس بأريزونا بالملايين بالدالة اللوجستية $f(t) = \frac{2.0666}{1 + 1.66e^{-0.048t}}$ ، حيث t هي عدد السنوات بعد 1980.

a. مَثِّل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \leq t \leq 500$.

b. ما خط التقارب الأفقي؟

يقع خط التقارب الأفقي عند $y = 2.0666$.

c. هل سيزداد تعداد مدينة فينيكس بصورة لانهائية؟ إذا كانت الإجابة لا، فما سيكون أقصى تعداد سكاني لها؟

لا، ستكون ذروة التعداد السكاني أقل من 2.0666 نسمة بقليل.

d. وفقًا للدالة، متى سيصل تعداد مدينة فينيكس إلى 1.8 نسمة؟

يشير التمثيل البياني إلى أن التعداد سيصل 1.8 مليون نسمة في $t \approx 50$. وباستبدال $f(t)$ بـ 1.8 وإيجاد قيمة t في المعادلة ينتج $t = 50.35$ عامًا. إذا، سيبلغ تعداد مدينة فينيكس 1.8 مليون في 2031.

تمرين موجّه

4. يمكن تمثيل تعداد أحد أنواع الأسماك في بحيرة ما بعد t من السنوات بالدالة $P(t) = \frac{1880}{1 + 1.42e^{-0.037t}}$ ، حيث $t \geq 0$.

A. مَثِّل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \leq t \leq 500$. انظر الهامش.

B. ما خط التقارب الأفقي؟ $y = 1880$

C. ما أقصى تعداد للسماك في البحيرة؟ 1880

D. متى سيصل التعداد 1875؟ بعد حوالي 170 yr

الربط بالحياة اليومية

تعتبر مدينة فينيكس خامس أكبر مدينة في الولايات المتحدة ولها تعداد سكاني يصل إلى 1.5 مليون نسمة.

نصيحة دراسية

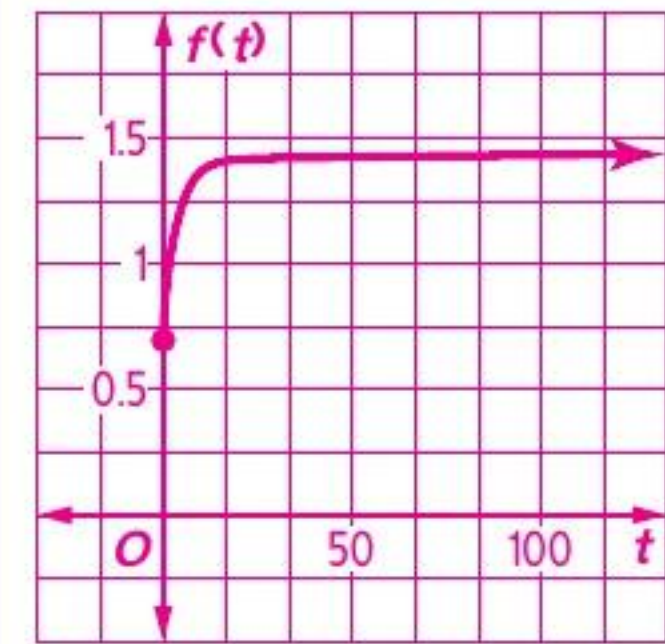
التقاطعات لتحديد الموضع الذي يتقاطع فيه التمثيل البياني مع 1.8 على الآلة الحاسبة، مَثِّل بيانيًا النقطة $y = 1.8$ على التمثيل البياني نفسه وحدد $intersection$ من قائمة CALC.

مثال إضافي

4 يمكن تمثيل تعداد سكاني، بالمليون، في مدينة ما بالمعادلة $f(t) = \frac{1.432}{1 + 1.05e^{-0.32t}}$ حيث t هو

عدد الأعوام منذ 2000.

a. مَثِّل الدالة بيانيًا.



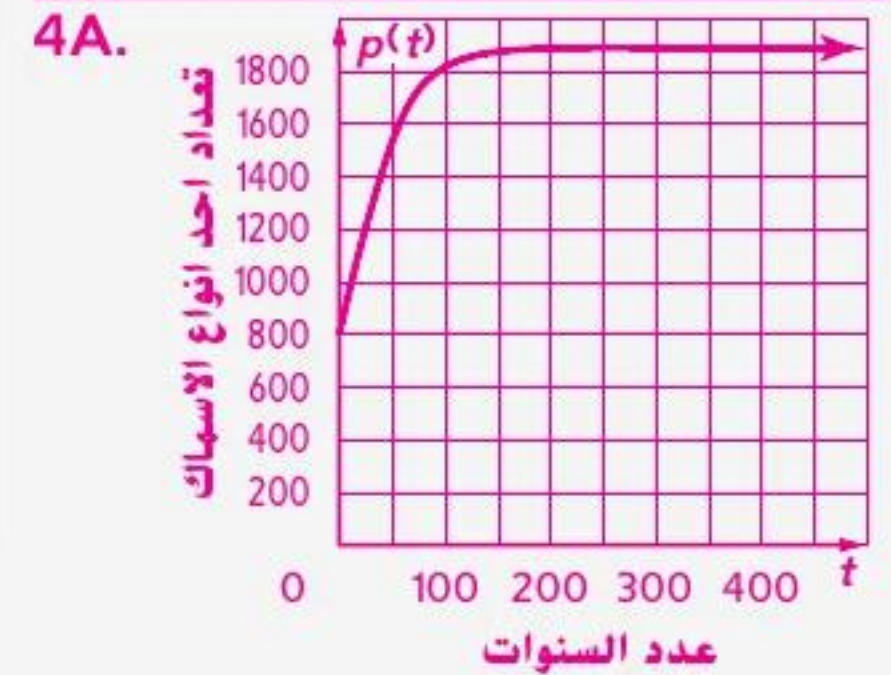
b. ما خط التقارب

الأفقي؟ $f(t) = 1.432$

c. ما سيكون الحد الأقصى للتعداد؟ 1,432,000

d. وفقًا للدالة، متى سيصل تعداد المدينة إلى مليون نسمة؟ 2003

إجابات إضافية (تمرين موجّه)



المتابعة

كيف يمكن للنماذج الرياضية أن تساعدك في اتخاذ قرارات سليمة؟ الإجابة النموذجية: يمكن استخدام النماذج الرياضية للمقارنة بين الخيارات المختلفة المتاحة، علاوة على تأثير أي خيار منها إذا ما تم اختياره.

1. علم الأحياء القديمة يبلغ عمر النصف للبوتاسيوم 40 حوالي 1.25 مليار عام.

a. حدد قيمة k ومعادلة تحليل البوتاسيوم 40. 5.545×10^{-10}

b. تحتوي عينة حاليًا على 36 mg من البوتاسيوم 40. فكم من الزمن ستستغرقه العينة في التحلل لتصل إلى 15 mg فقط من البوتاسيوم 40؟

c. كم عدد مللي جرامات البوتاسيوم 40 التي سوف تبقى بعد 300 مليون عام؟ حوالي 30.48 mg

d. كم الزمن الذي سيستغرقه البوتاسيوم 40 للتحلل إلى ثمن مقداره الأصلي؟ 3,750,120,003 yr

2. العلوم سقط نوع معين من الطعام على الأرض. وتنمو عليه الجراثيم أسبًا وفق النموذج $y = 2e^{kt}$. حيث t الوقت بالثواني. b. حوالي 2.828 خلية

a. إذا كان هناك خليتان بشكل أولي و 8 خلايا بعد 20 ثانية، فجد قيمة k للجراثيم. $k \approx 0.0693$

b. تنص "قاعدة الثواني الخمس" على أنه إذا تناول شخص طعامًا قد أسقطه على الأرض في غضون 5 ثوانٍ قلن يكون هناك ضرر. ما مقدار الجراثيم التي ستكون على الطعام بعد 5 ثوانٍ؟

c. هل ستتناول طعامًا سقط على الأرض لمدة 5 ثوانٍ؟ لم أو لم لا؟ هل تعتقد أن المعلومات التي لديك في هذا التمرين معقولة؟ اشرح.

3. علم الحيوان افترض أن تعداد الثعالب الحمراء في موطنها المحدد يتبع الدالة $P(t) = \frac{16,500}{1 + 18e^{-0.085t}}$. حيث t تمثل الزمن بالسنوات.

a. مثل الدالة بيانًا عندما يكون $0 \leq t \leq 200$. انظر الهامش.

b. ما خط التقارب الأفقي؟ $y = 16,500$

c. ما الحد الأقصى للتعداد؟ 16,500

d. متى سيصل التعداد إلى 16,450؟ بعد حوالي 102 عامًا

التمرين وحل المسائل

4. المشابة يبلغ عمر النصف للروبيديوم 87 حوالي 48.8 مليار عام.

a. حدد قيمة k ومعادلة تحليل الروبيديوم 87.

b. تحتوي عينة حاليًا على 50 mg من الروبيديوم 87. فكم من الزمن ستستغرقه العينة في التحلل لتصل إلى 18 mg فقط من الروبيديوم 87؟ 71,947,270,950 yr

c. كم عدد مللي جرامات الروبيديوم 87 التي سوف تبقى بعد 800 مليون عام؟ حوالي 49.4 mg

d. كم الزمن الذي سيستغرقه الروبيديوم 87 للتحلل إلى سدس مقداره الأصلي؟ 195.3 مليار عام

5. الأحياء ينمو نوع محدد من الجراثيم أسبًا وفق النموذج $y = 80e^{kt}$. حيث t هي الزمن بالدقائق.

a. إذا كان هناك 80 خلية بشكل أولي و 675 خلية بعد 30 دقيقة، فجد قيمة k للجراثيم. $k \approx 0.071$

b. متى سيصل تعداد الجراثيم إلى 6000 خلية؟ بعد حوالي 60.8 min

c. إذا كان هناك نوع آخر من الجراثيم ينمو أسبًا وفق النموذج $y = 35e^{0.0978t}$. فحدد مقدار الزمن الذي سيمر قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذا النوع من الجراثيم عدد خلايا النوع الآخر منها. حوالي 30.85 min

6. الغابات يتبع عدد الأشجار في غابة معينة الدالة $f(t) = \frac{18000}{1 + 16e^{-0.084t}}$. حيث t هو الزمن بالسنوات.

a. مثل الدالة بيانًا عندما يكون $0 \leq t \leq 100$. انظر الهامش.

b. متى سيصل العدد إلى 17500 شجرة؟ بعد حوالي 75.33 yr

3 تمرين

التقويم التكويني

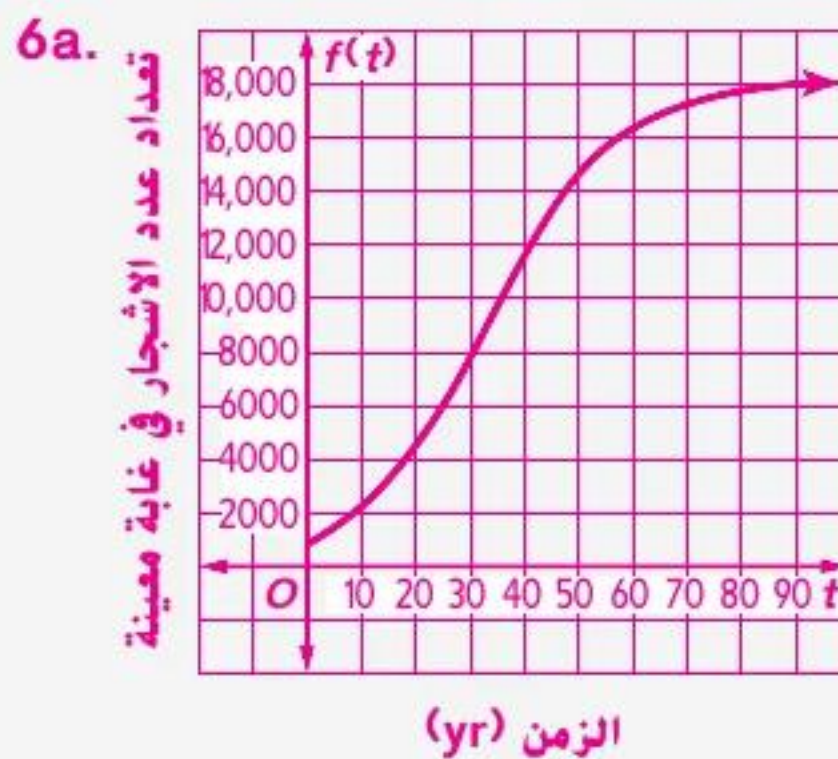
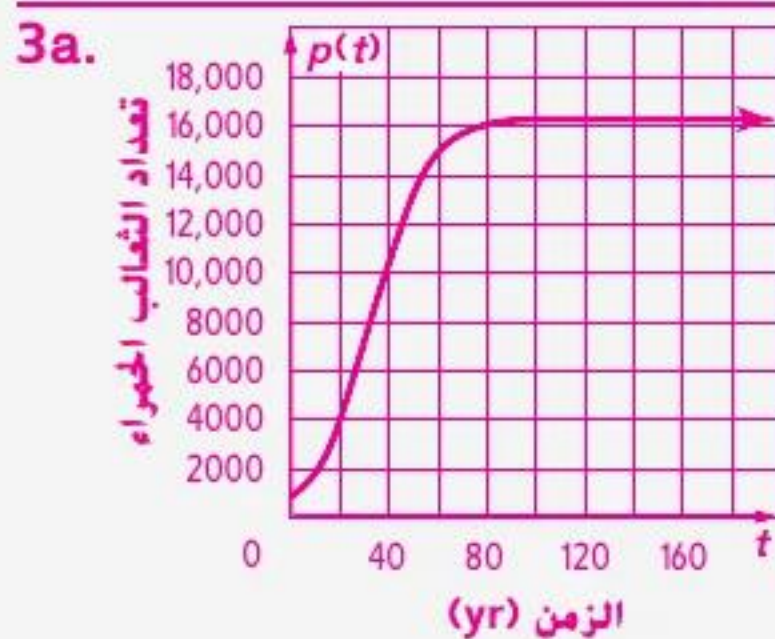
استخدم التمارين من 1 إلى 3 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المشابة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلًا من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

إجابات إضافية



خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	4-6, 14, 16-34	5, 19-22
OL أساسي	5, 7-14, 16-34	4-6, 19-22
BL متقدم	7-26, (اختياري: 27-34)	

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقاً في بناء الفرضيات. ويضعون تخمينات ويبينون تقدماً منطقيًا للعبارات لاستكشاف صحة تخميناتهم. كما يمكنهم تحليل الحالات بتفكيكها إلى مسائل، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

B

7

علم الأحياء القديمة عثر أحد علماء الأحياء القديمة على عظمة بشرية وحدد أن مقدار الكربون 14 الموجود في العظمة يساوي 85% من ذلك الذي كان في أسجة العظم الحية. فما عمر هذه العظمة؟ **حوالي 1354 yr**

8. **أنثروبولوجيا** حدد أحد علماء الأنثروبولوجيا أن عمر عظمة بشرية مكتشفة حديثاً يبلغ 8000 عام. فما مقدار الكربون 14 الموجود في العظمة مقارنة بالمقدار الأصلي؟ **حوالي 38%**

9. **الاضمحلال الإشعاعي** تم تخزين 100 mg من اليورانيوم 238 في حاوية. فإذا كان عمر النصف لليورانيوم 238 يبلغ 4.47 مليارات عام. فبعد كم عام سيوجد 10 mg فقط؟ **حوالي 14.85 مليار عام**

10. **النمو السكاني** نمت تعداد سكان مدينة أوريغون من 3.4 ملايين في عام 2000 إلى 3.7 ملايين في عام 2006. اكتب معادلة نمو أسّي بالصورة $y = ae^{kt}$ لأوريغون. حيث t هو عدد الأعوام بعد عام 2000. **$y = 3.4e^{0.014t}$**

a. استخدم معادلتك للتنبؤ بتعداد سكان أوريغون في عام 2020. **4.5 ملايين نسمة**

b. وفقاً للمعادلة، متى ستصل مدينة أوريغون إلى 6 ملايين نسمة؟ **في حوالي 2041**

11. **نصف العمر** مادة يتحلل 9.99% من إجمالي كتلتها بعد 200 عام. حدد نصف العمر للمادة. **حوالي 20.1 yr**

12. **النمو اللوجستي** يمكن تمثيل تعداد سكان ولاية أوهايو بالملايين بعد عام 1900 بالآتي $P(t) = \frac{12.95}{1 + 2.4e^{-kt}}$ حيث t هي عدد الأعوام بعد 1900 و k هي الثابت.

a. إذا كان تعداد سكان أوهايو 10 ملايين في عام 1970. فجد قيمة k . **$k \approx 0.0299464$**

b. وفقاً للمعادلة، متى سيصل تعداد سكان أوهايو إلى 12 مليون؟ **2014**

13. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف نمو التعداد السكاني. يتبع النمو السكاني لبلد ما الدالة الأسية $f(t) = 8e^{0.075t}$ أو الدالة اللوجستية $g(t) = \frac{400}{1 + 16e^{-0.025t}}$. يتم قياس التعداد السكاني بالملايين وتكون t الزمن بالسنوات.

a. **بيانياً** مثل الدالتين بيانياً عندما يكون $0 \leq t \leq 100$. **انظر الهامش.**

b. **تحليلياً** حدد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. ما أهمية هذا التقاطع؟

c. **تحليلياً** أي دالة تعد تقريباً أكثر دقة لتعداد البلد بعد 100 عام من الآن؟ اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: الدالة اللوجستية $g(t)$ أكثر دقة في تقدير تعداد سكان البلد حيث إن $f(t)$ ستتسهر في النمو أسياً و $g(t)$ تعتبر الحدود على النمو السكاني مثل الإمدادات الغذائية.

مسائل مهارات التفكير العليا

14. **مسألة غير محددة الإجابة** قدّم مثلاً على كمية تنمو أو تضمحل بمعدل ثابت. واكتب مسألة من الحياة اليومية تتضمن ذلك المعدل وجد حلها باستخدام اللوغاريتمات.

الإجابة النموذجية: الأموال في

المصارف؛ راجع عمل الطلاب.

15. **التحدي** حلّ $24e^{0.055t} = \frac{120,000}{1 + 48e^{-0.015t}}$ عندما تكون t . **$t \approx 113.45$**

16. **فرضيات** اشرح رياضياً لماذا تقترب $f(t) = \frac{c}{1 + 60e^{-0.5t}}$ من القيمة c بينما $t \rightarrow +\infty$ ولكن لا تصل إليها أبداً.

17. **مسألة غير محددة الإجابة** قدّم مثلاً على كمية تنمو لوجستياً ومحدودة النمو، وشرح لماذا تنمو الكمية بهذه الطريقة. **انظر الهامش.**

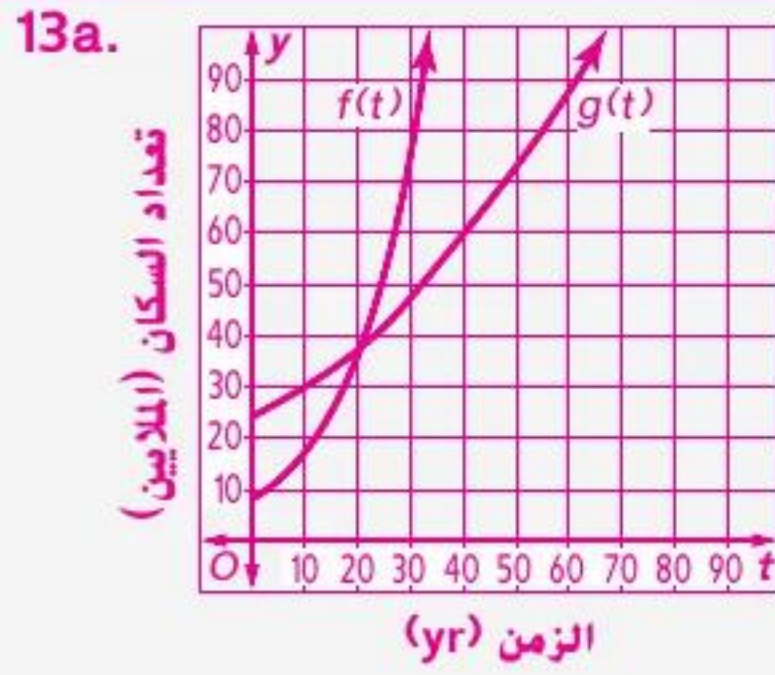
18. **الكتابة في الرياضيات** كيف تُستخدم الدوال الأسية والأسية المستمرة اللوجستية في تمثيل المواقف المختلفة من الحياة اليومية؟ **انظر الهامش.**

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

الطلاب كلف الطلاب بكتابة أسئلة يمكن حلها باستخدام $y = ae^{kt}$ على أحد وجهي بطاقة فهرسة. ثم اطلب منهم حل مسائلهم على الوجه المقابل للبطاقة.

إجابات إضافية



17. الإجابة النموذجية: انتشار الإنفلونزا عبر مدينة صغيرة. يكون معدل نمو ذلك محدودًا بتعداد المدينة ذاتها.

18. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام الدوال الأسية لتمثيل حالات متضمنة نسبيًا نموًا أو اضمحلال بعدد معين من المرات في العام. يمكن استخدام الدوال الأسية المتصلة لتمثيل حالات متضمنة نسبيًا نموًا لنمو أو اضمحلال استمراري. يمكن استخدام الدوال اللوجيستية لتمثيل حالات متضمنة نسبيًا نموًا لنمو أو اضمحلال استمراري وتحتوي على عامل مُحدد.

26c. الإجابة النموذجية: الطريقة 1: استخدم قانون تغيير الأساس واكتشف أن القيمة تساوي حوالي 0.4709. الطريقة 2: استخدم القيمتين $\log_7 2 \approx 0.3562$ و $\log_7 3 \approx 0.5646$. أولاً، جد متوسط القيم ثم خمن وتحقق من خلال رفع الرقم 7 إلى قوى أسية متعددة. تابع حتى تحصل على القرب المطلوب من 2.5. للتحقق، جد 70.4709 وهي قريبة بشدة من 2.5.

تمرين على الاختبار المعياري

العملاء	النكبة
35	الشيكلانة
42	الغانيليا
7	الغراولة
12	صناع يقطع الشيكلانة
4	الجوز والزبد

19. يرسم ناصر تمثيلًا بيانيًا دائريًا يوضح نكهات المثلجات المفضلة لدى العملاء في متجره. يلخص الجدول البيانات. ما الزاوية المركزية التي ينبغي على ناصر استخدامها مع الجزء الذي يمثل الشيكلانة؟ **C**

- A 35° C 126°
B 63° D 150°

20. احتمالية مع هالة 6 كتب في مكتبتها. اثنان منها كتب أدبية، وواحد كتاب علمي، واثنان كتب رياضيات، وواحد قاموس. ما احتمال أن تختار عشوائيًا الكتاب العلمي والقاموس؟ **J**

- F $\frac{1}{3}$ H $\frac{1}{12}$
G $\frac{1}{4}$ J $\frac{1}{15}$

21. SAT/ACT صنع بدر لعبة من أجل فعالية في مدرسة ابنته. لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة إلى 8 قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة 18 in، فما المساحة التقريبية للقطاع الواحد؟ **D**

- A 4 in^2 D 127 in^2
B 14 in^2 E 254 in^2
C 32 in^2

22. إحصائيات في استقصاء شمل 90 مدرب لياقة بدنية. قال 15 منهم أنهم مارسوا الركض على الأقل 5 مرات في الأسبوع. ومن تلك المجموعة، قال 5 أنهم مارسوا السباحة أيضًا خلال الأسبوع. ويوجد على الأقل 25% من جميع مدربي اللياقة البدنية من يمارس الركض والسباحة كل أسبوع. فما النتيجة الصحيحة بناءً على المعلومات المعطاة؟ **H**

- F التقرير دقيق لأن 15 من 90 يساوي 25%.
G التقرير دقيق لأن 5 من 15 يساوي 33%. أي على الأقل 25%.
H التقرير غير دقيق لأن 5 من 90 يساوي 6.5% فقط.
J التقرير غير دقيق لأنه لا أحد يعرف ما إذا كانت السباحة ممارسة رياضية بالفعل أم لا.

26a. أرمينيا ويوغوسلافيا، أو هاييتي ويوغوسلافيا؛ المغرب وإندونيسيا

مراجعة شاملة

اكتب معادلة أسية أو لوغاريتمية مكافئة. (الدرس 1-5)

23. $e^7 = y \ln y = 7$

24. $e^{2n-4} = 36 \ln 36 = 2n - 4$

25. $\ln 5 + 4 \ln x = 9 \quad 5x^4 = e^9$

العام	الموقع	الشدة
1963	يوغوسلافيا	6.0
1970	بيرو	7.8
1988	أرمينيا	7.0
2004	المغرب	6.4
2007	إندونيسيا	8.4
2010	هاييتي	7.0

26. زلازل. يبين الجدول جسامه بعض أقوى الزلازل. (تلميح: زلزال بجسامه x له شدة 10^x). (الدرس 1-3 و 1-4)
- a. أي زلازل كانت شدة أحدهما تساوي 10 مرات شدة الآخر؟ أي زلازل كانت شدة أحدهما تساوي 100 مرة شدة الآخر؟
- b. ماذا ستكون جسامه زلزال تبلغ شدته 1000 مرة مثل شدة زلزال 1963 في يوغوسلافيا؟ **9.0**
- c. افترض أنك تعرف أن $\log_7 2 \approx 0.3562$ و $\log_7 3 \approx 0.5646$. صف طريقتين مختلفتين يمكنك استخدامهما لتقريب $\log_7 2.5$. (يجوز لك استخدام الآلة الحاسبة بالطبع.) ثم صف كيف يمكنك التحقق من النتيجة. **انظر الهامش.**

مراجعة المهارات

حل كل معادلة واكتبها في أبسط صورة.

27. $\frac{8}{5}x = \frac{4}{15} \quad \frac{1}{6}$

28. $\frac{27}{14}n = \frac{6}{7} \quad \frac{4}{9}$

29. $\frac{3}{10} = \frac{12}{25}a \quad \frac{5}{8}$

30. $\frac{6}{7} = 9p \quad \frac{2}{21}$

31. $\frac{9}{8}b = 18 \quad 16$

32. $\frac{6}{7}y = \frac{3}{4} \quad \frac{7}{8}$

33. $\frac{1}{3}z = \frac{5}{6} \quad 2\frac{1}{2}$

34. $\frac{2}{3}q = 7 \quad 10\frac{1}{2}$

51

التدريس المتمايز

التوسع منحنيات السلسلة هي منحنيات شبيهة بتلك التي تشكلها السلسلة المتعدلية بين خطافين. كل قطعة من السلسلة تجذب القطعة الأخرى من السلسلة لتعطي شكلًا منحنياً. ويعد قوس جيت واي في ميزوري مثالاً لمنحنى سلسلة معكوس.

اطلب من الطلاب استخدام حاسبات التمثيل البياني لتمثيل $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ بيانيًا لرؤية نموذج لمنحنى السلسلة.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموضوع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة، 1-7 فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذكراتهم بشأن مصطلحات المفردات.

المطويات منظم الدراسة

مطويات Dinah Zike®

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا أمثلة إلى مطوياتهم لكل درس بالوحدة. واقترح على الطلاب إبقاء مطوياتهم معهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة. ووضح أن المطويات تعدّ بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة من أجل اختبار الوحدة.

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 1-1 إلى 1-4)

- افتراض أن $b > 0$ و $b \neq 1$ حيث $x > 0$. هناك عدد y مثل $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا كان $b^y = x$.
- لوغاريتم ناتج الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات عوامله.
- لوغاريتم ناتج القسمة يساوي الفرق بين لوغاريتمي البسط والمقام.
- لوغاريتم القوة يساوي ناتج ضرب اللوغاريتم في الأس.
- قانون تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية (الدرس 1-5)

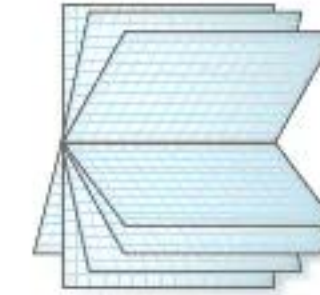
- بما أن دالة الأساس الطبيعية ودالة اللوغاريتم الطبيعية دالتان عكسيتان، يمكن استخدام هاتين الدالتين في "إلقاء" بعضهما البعض.

استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية (الدرس 1-6)

- يمكن تمثيل النمو الأسي بالدالة $f(x) = ae^{kt}$ حيث k هو ثابت يمثل معدل النمو المستمر.
- يمكن تمثيل الاضمحلال الأسي بالدالة $f(x) = ae^{-kt}$ حيث k هو ثابت يمثل معدل الاضمحلال المستمر.

مطويات منظم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

الأساس الطبيعي، e (natural base)	صيغة تغيير الأساس
الدالة الأسية للأساس الطبيعي	Change of Base Formula
natural base exponential function	لوغاريتم عادي
لوغاريتم طبيعي	common logarithm
natural logarithm	اللوغاريتم
معدل الاضمحلال المستمر	المعادلة اللوغاريتمية
rate of continuous decay	logarithmic equation
معدل النمو المستمر	الدالة اللوغاريتمية
rate of continuous growth	logarithmic function
	المتباينة اللوغاريتمية
	logarithmic inequality
	نموذج النمو اللوجيستي (logistic growth model)

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه الكلمة أو المصطلح الذي يكمل كل جملة أو عبارة بأفضل شكل.

- في $x = b^y$ ، المتغير y يُسمى _____ لـ x .
اللوغاريتم
- تُسمى لوغاريتمات الأساس 10 _____.
لوغاريتمات عادية
- يُتيح لك _____ كتابة التعابير اللوغاريتمية المتكافئة ذات الأسس المختلفة.
قانون تغيير الأساس
- الدالة $y = \log_b x$ حيث $b > 0$ و $b \neq 1$ تُسمى $a(n)$ _____ دالة لوغاريتمية.
- الدالة الأسية ذات الأساس e تُسمى _____ دالة **أسية ذات أساس طبيعي**.
- اللوغاريتم ذو الأساس e يُسمى _____ **لوغاريتم طبيعي**.
- العدد e يُشار إليه بالاسم _____ **أساس طبيعي**.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

1-1 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مثال 1

جد قيمة $\log_2 64$.

ليكن اللوغاريتم يساوي y
 $\log_2 64 = y$
 $64 = 2^y$ تعريف اللوغاريتم
 $2^6 = 2^y$ $64 = 2^6$
 $6 = y$ خاصية المساواة في الدوال الأسية

8. اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ في صيغة أس. $2^{-4} = \frac{1}{16}$

9. اكتب $10^2 = 100$ في صورة لوغاريتم. $\log_{10} 100 = 2$

جد قيمة كل تعبير.

10. $\log_4 256$ 4

11. $\log_2 \frac{1}{8}$ -3

ارسم التمثيل البياني لكل دالة. 12، 13. انظر الهامش.

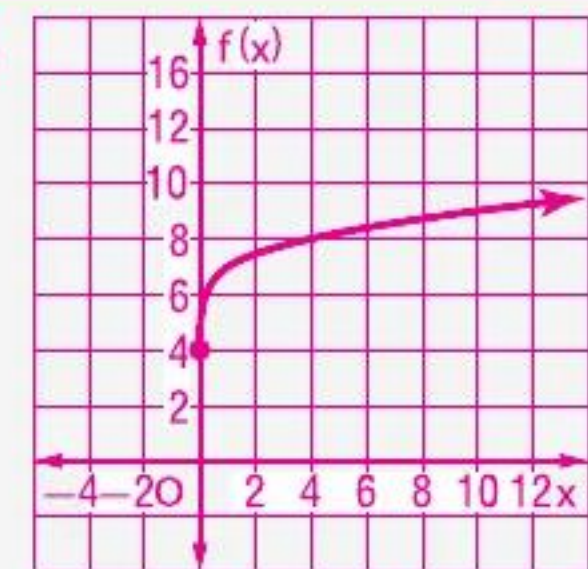
12. $f(x) = 2 \log_{10} x + 4$ 13. $f(x) = \frac{1}{6} \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$

مراجعة درس بدرس

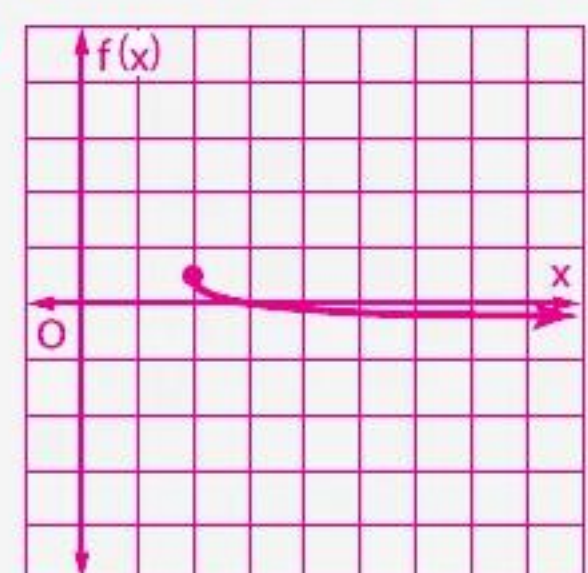
التدخل التقويهي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة. فذكر الطلاب بأن مراجعة الدروس ترشدكم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

12.



13.



1-2 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مثال 2

حل المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$ المتباينة الأصلية
 $x < 27^{\frac{2}{3}}$ لوغاريتم متباينة أسية
 $x < 9$ بسط

مثال 3

حل المعادلة $\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$.

$\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$ المتباينة الأصلية
 $p^2 - 2 = p$ خاصية المعادلة
 $p^2 - p - 2 = 0$ من كل طرف p اطرح
 $(p - 2)(p + 1) = 0$ العامل
 $p - 2 = 0$ أو $p + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب صفر
 $p = 2$ $p = -1$ جد حل كل معادلة

الحل يساوي $p = 2$. حيث $\log_5 p$ غير معرف عندما $p = -1$.

حل كل معادلة أو متباينة.

14. $\log_4 x = \frac{3}{2}$ 64

15. $\log_2 \frac{1}{64} = x$ -6

16. $\log_4 x < 3$

17. $\log_5 x < -3$

18. $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$ $\{x \mid 0 < x < 64\}$ لا يوجد حل

19. $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$ -6

20. $\log_3 (3x + 4) \leq \log_3 (x - 2)$ لا يوجد حل

21. **الزلازل** تُقاس شدة الزلازل بمقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر. ويتم الحصول على الشدة M باستخدام $M = \log_{10} x$. حيث x تمثل سعة موجة الزلازل المتسبب في حركة الأرض. ما مقدار شدة السعة الناتجة عن زلزال شدته 10 على مقياس ريختر بالنسبة إلى موجة ارتدادية شدتها 7 على مقياس ريختر؟ 1000

1-3 خواص اللوغاريتمات

مثال 4

استخدم $\log_5 2 \approx 0.4307$ و $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب $\log_5 32$.
 $\log_5 32 = \log_5 (16 \cdot 2)$ استبدل 32 بـ 16
 $= \log_5 16 + \log_5 2$ خاصية الضرب
 $\approx 1.7227 + 0.4307$ استخدم حاسبة
 ≈ 2.1534

مثال 5

حلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$.
 $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$ المعادلة الأصلية
 $\log_3 3x(4) = \log_3 36$ خاصية الضرب
 $3x(4) = 36$ تعريف اللوغاريتم
 $12x = 36$ اضرب
 $x = 3$ اقسّم كل طرف على 12

استخدم $\log_5 2 \approx 0.4307$ و $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب قيمة كل تعبير.

22. $\log_5 8$ **1.2920** 23. $\log_5 64$ **2.5841**
 24. $\log_5 4$ **0.8614** 25. $\log_5 \frac{1}{8}$ **-1.2921**
 26. $\log_5 \frac{1}{2}$ **-0.4307**

حلّ كل معادلة مما يلي. وتحقق من حلّك.

27. $\log_5 x - \log_5 2 = \log_5 15$ **30**
 28. $3 \log_4 a = \log_4 27$ **3**
 29. $2 \log_3 x + \log_3 3 = \log_3 36$ **$2\sqrt{3}$**
 30. $\log_4 n + \log_4 (n - 4) = \log_4 5$ **5**

31. **الصوت** استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$ حيث L هو ارتفاع الصوت و R هو الشدّة النسبية للصوت. في إيجاد كم سيكون مقدار ارتفاع صوت 20 شخصًا يتحدثون عن صوت شخص واحد. افترض أن صوت الشخص المتحدث تساوي الشدّة النسبية له 80 ديسيبل. **361.6 مرة**

1-4 اللوغاريتمات العادية

مثال 6

حلّ المتباينة $5^{3x} > 7^{x+1}$.
 $5^{3x} > 7^{x+1}$ المتباينة الأصلية
 $\log 5^{3x} > \log 7^{x+1}$ خاصية متباينة
 $3x \log 5 > (x + 1) \log 7$ خاصية القوى
 $3x \log 5 > x \log 7 + \log 7$ خاصية التوزيع
 $3x \log 5 - x \log 7 > \log 7$ اطرح $x \log 7$
 $x(3 \log 5 - \log 7) > \log 7$ خاصية التوزيع
 $x > \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$ اقسّم على $3 \log 5 - \log 7$
 $x > 0.6751$ استخدم الحاسبة
 مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 0.6751\}$

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

32. $3^x = 15$ **$x \approx 2.4650$** 33. $6^{x^2} = 28$ **$x \approx \pm 1.3637$**
 34. $8^{m+1} = 30$ **$m \approx 0.6356$** 35. $12^{r-1} = 7r$ **$r \approx 4.6102$**
 36. $3^{5n} > 24$ **$\{n \mid n > 0.5786\}$** 37. $5^{x+2} \leq 3^x$ **$\{x \mid x \leq -6.3013\}$**

38. **المداخلات** لقد أودعت AED 1000 في حساب بنكي يدفع معدل فائدة سنوي r بنسبة 5% مركبة في كل فصل. باستخدام $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

- a. ما المدة المستغرقة لتمتلك مبلغ AED 1500 في حسابك؟ **8.2 أعوام تقريبًا**
 b. ما المدة التي سيتضاعف خلالها مالک؟ **حوالي 13.9 عامًا**

دليل الدراسة والمراجعة تابع

إجابات إضافية

39. 1.9459

40. -1.9459

41. 201.7144

42. $\{x \mid x > 1.9459\}$

43. $\{x \mid -3 < x < -0.2817\}$

44. $\{x \mid x < -2.8904\}$

1-5 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

مثال 7

حلّ المعادلة $3e^{5x} + 1 = 10$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3e^{5x} + 1 = 10$	المعادلة الأصلية
$3e^{5x} = 9$	اطرح 1 من كلا الطرفين
$e^{5x} = 3$	اقسم كل طرف على 3
$\ln e^{5x} = \ln 3$	خاصية المعادلة
$5x = \ln 3$	$\ln e^x = x$
$x = \frac{\ln 3}{5}$	اقسم كل طرف على 5
$x \approx 0.2197$	استخدم الحاسبة

حلّ كل معادلة أو متباينة. قَرِّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

39. $4e^x - 11 = 17$ 40. $2e^{-x} + 1 = 15$
41. $\ln 2x = 6$ 42. $2 + e^x > 9$
43. $\ln(x + 3)^5 < 5$ 44. $e^{-x} > 18$

45. **المدخلات** إذا أودعت AED 2000 في حساب يقدم نسبة فائدة مركبة 6.4%. فما المدة المستغرقة حتى يصبح المبلغ ثلاثة أضعاف القيمة الأصلية؟ استخدم $A = Pe^{rt}$ **17.2 سنة تقريبًا**

1-6 استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية

مثال 8

تزيد سلالة من البكتريا من 250 إلى 2000 خلال 1.5. جد قيمة الثابت k في صيغة النمو. باستخدام $y = ae^{kt}$

$y = ae^{kt}$	صيغة النمو الأسي
$2000 = 250e^{k(1.5)}$	استبدل y بـ 2000، و a بـ 250، و t بـ 1.5
$8 = e^{1.5k}$	اقسم كل طرف على 250
$\ln 8 = \ln e^{1.5k}$	خاصية المعادلة
$\ln 8 = 1.5k$	خاصية المعكوس
$\frac{\ln 8}{1.5} = k$	اقسم كل طرف على 1.5
$1.3863 \approx k$	استخدم الحاسبة

46. **سيارات** اشترى أيوب سيارة مستعملة بـ AED 2500. ومن المتوقع أن تنخفض قيمتها بنسبة 25% سنويًا. كم ستكون قيمة السيارة بعد 3 سنوات؟ **AED 1054.69**

47. **علم الأحياء** في سلالة معينة من البكتريا، k تساوي 0.728 عند قياس t بالأيام. باستخدام الصيغة $y = ae^{kt}$ ، ما المدة التي ستستغرقها 10 من البكتريا ليزيد عددها وتصبح 675؟ **5.8 أيام**

48. **تعداد السكان** كان تعداد سكان المدينة منذ 20 عامًا يبلغ 24,330 نسمة. ومنذ ذلك الحين، يزداد تعداد السكان بمعدل ثابت كل عام. إذا كان تعداد السكان حاليًا 55,250، فجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة. **4.1% تقريبًا**

7. **المدخرات** لقد وضعت AED 7500 في حساب إيداع يقدم فائدة نسبة مركبة قيمتها 3%.

a. بافتراض عدم وجود أي عمليات سحب أو إيداع أخرى من الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 5 أعوام؟

AED 8713.76

b. ما المدة التي ستتضاعف خلالها المدخرات؟ ≈ 23.1 سنة

c. كم سنة ستمر حتى يصبح لديك AED 10,000 في حسابك؟ **9.6 سنة تقريباً**

8. **اختيار من متعدد** ما حل $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$ ؟ **G**

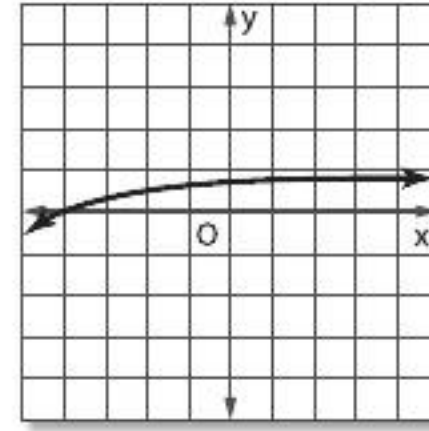
F $\frac{1}{2}$

G 2

H 4

J 8

9. **اختيار من متعدد** ما الدالة المُمثلة في التمثيل البياني أدناه؟ **C**



A $y = \log_{10}(x - 5)$

B $y = 5 \log_{10} x$

C $y = \log_{10}(x + 5)$

D $y = -5 \log_{10} x$

10. اكتب $2 \ln 6 + 3 \ln 4 - 5 \ln \left(\frac{1}{3}\right)$ في صورة لوغاريتم مفرد.

$\ln 559,872$ أو $\ln \frac{(6^2)(4^3)}{\left(\frac{1}{3}\right)^5}$

استخدم $\log_5 11 \approx 1.4899$ و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب القيمة في كل تعبير.

1. $\log_5 44$ **2.3513**

2. $\log_5 \frac{11}{2}$ **1.0592**

3. **تعداد السكان** كان تعداد سكان إحدى المدن من 10 سنوات 150,000. ومنذ ذلك الحين، كان تعداد السكان يزيد بمعدل ثابت كل عام. وبلغ تعداد السكان حالياً 185,000. **a. $y = 150,000(1.0212)^x$**

a. اكتب معادلة أسية يمكن استخدامها في تمثيل تعداد السكان بعد x سنوات إذا كان تعداد السكان يتغير بالمعدل نفسه.

b. كم سيصبح تعداد السكان بعد 25 عامًا؟ **253,432 تقريباً**

4. اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ في صيغة أسية. **$9^{\frac{3}{2}} = 27$**

5. **زراعة** المعادلة التي تمثل انخفاض عدد المزارع الأمريكية هي $y = 3,962,520(0.98)^x$. حيث x هو عدد السنوات منذ عام 1960 و y هو عدد المزارع.

$\{b \mid b < 1\}$

a. كيف يمكنك تحديد أن العدد ينخفض؟

b. ما المعدل السنوي لانخفاض العدد؟ **2%**

c. توقع متى سيكون عدد المزارع أقل من مليون. **في عام 2028 تقريباً**

6. **اختيار من متعدد** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$ ؟ **A**

A -3

B $-\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{3}$

D 3

التحضير للاختبارات المعيارية

1

الوحدة 1

1 التركيز

الهدف اتخاذ إستراتيجية استخدام التكنولوجيا لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية اطرح السؤال التالي:

- ما نوع الأدوات التي استخدمتها أثناء حل مسائل الرياضيات؟
- الإجابة النموذجية: آلة حاسبة، منقلة، فرجار، مسطرة، قلم رصاص، ورقة
- كيف تعلم أي أداة مطلوب استخدامها؟
- الإجابة النموذجية: استخدم الآلة الحاسبة عند تمثيل الدوال، واستخدم المنقلة عند قياس الزوايا، واستخدم الفرجار عند إنشاء زوايا، واستخدم المسطرة عند القياس، واستخدم القلم الرصاص والورقة عندما لا تتوفر لديك آلة حاسبة أو عندما يتعذر عليك إجراء رياضيات ذهنية.

استخدام التقنية

سيفيدك استخدام الحاسبة في الاختبارات المعيارية. فقد تجد بعض المسائل التي تشتمل على خطوات أو عمليات حسابية تتطلب استخدام الحاسبة. وتفيد الحاسبة أيضًا في حل المسألة بسرعة أكبر.

إستراتيجيات استخدام التقنية

الخطوة 1

الحاسبة أداة مفيدة، ولكن ينبغي ألا تفرط في استخدامها. ولقد وضعت الاختبارات المعيارية لقياس قدرتك على التفكير وحل المسائل، وليس لقياس قدرتك على الضغط على مفاتيح الحاسبة.

اسأل نفسك قبل أن تستخدم الحاسبة:

- كيف يمكنني حل هذا النوع من المسائل بالطريقة العادية؟
- هل هناك أي خطوات لا يمكنني أداؤها ذهنيًا أو باستخدام الورقة والقلم؟
- هل الحاسبة ضرورية حقًا لحل هذه المسألة؟
- هل ستساعدني الحاسبة في حل هذه المسألة بطريقة أسرع أو بطريقة أكثر كفاءة؟

الخطوة 2

متى يكون استخدام الحاسبة مفيدًا؟

- حل المسائل التي تتضمن عمليات حسابية مطولة ومعقدة
- حل مسائل معينة تتضمن دالات تمثيل بياني، ودالات تقويم، وحل المعادلات وهكذا
- التحقق من حلول المسائل

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

تتكون علبة المشروبات الغازية من 60 mg من الكافيين. يتخلص الجسم من الكافيين بمعدل 15% في الساعة. ما عمر النصف للكافيين؟ أي، كم ساعة يأخذ الجسم ليتخلص من نصف الكافيين؟

- | | |
|--------------|-------------|
| A 4 ساعات | C 4.5 ساعة |
| B 4.25 ساعات | D 4.75 ساعة |

مثال إضافي

تدريب على الاختبار المعياري

كان يبلغ تعداد مدينة معينة 4590 نسمة في عام 1800. ومنذ ذلك الوقت، والنمو يزداد بمعدل 1.05% تقريبًا على أساس سنوي. في أي عام بلغ تعداد المدينة 37,075 نسمة؟ **D**

- A 1808
- B 1820
- C 1997
- D 2000

3 التقويم

استخدم التمارين من 1 إلى 3 لتقويم استيعاب الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية، يمكنك حل المسألة باستخدام الدالة الأسية. استخدم قانون الاضمحلال الأسّي في تمثيل المسألة وإيجاد عمر النصف للكافيين.

$$y = a(1 - r)^t$$

$$y = 60(1 - 0.15)^t$$

نصف 60 mg يساوي 30. إذا، افترض أن $y = 30$ وجد قيمة t .

$$30 = 60(1 - 0.15)^t$$

$$0.5 = (0.85)^t$$

خذ $\log$ كل طرف واستخدم خاصية القوى.

$$\log 0.5 = \log (0.85)^t$$

$$\log 0.5 = t \log 0.85$$

$$\frac{\log 0.5}{\log 0.85} = t$$

من الضروري عند هذه النقطة أن تستخدم الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتمات وحل المسألة. وبيّن ذلك أن $t \approx 4.265$. إذا، عمر النصف للكافيين يساوي 4.25 تقريبًا. الإجابة الصحيحة هي **B**.

تمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. اشترى عمر مؤخرًا شاشة جديدة سعرها AED 34750. وتنخفض قيمة الشاشة بنسبة 12% سنويًا. كم ستكون القيمة التقريبية للشاشة بعد 7 سنوات من شرائها؟ **D**

- A AED 13,775
- B AED 13,890
- C AED 14,125
- D AED 14,200

2. أ زميت كرة السلة لأعلى بسرعة 105 ft/sec. وتم رمي الكرة عندما كانت على بُعد 5 ft من الأرض. يمكن الحصول على ارتفاع كرة السلة t بعد ثوانٍ من رميها من الصيغة $h(t) = -16t^2 + 105t + 5$. جد زمن وصول الكرة إلى أقصى ارتفاع لها. **G**

- | | |
|---------|-----------|
| F 1.0 s | H 6.6 s |
| G 3.3 s | J 177.3 s |

3. أودعت خديجة AED 2500 في بنك CD حسب الشروط المذكورة أدناه.



استخدم الصيغة المذكورة أدناه لإيجاد t . عدد السنوات اللازمة لكسب AED 250 كفايدة من بنك CD.

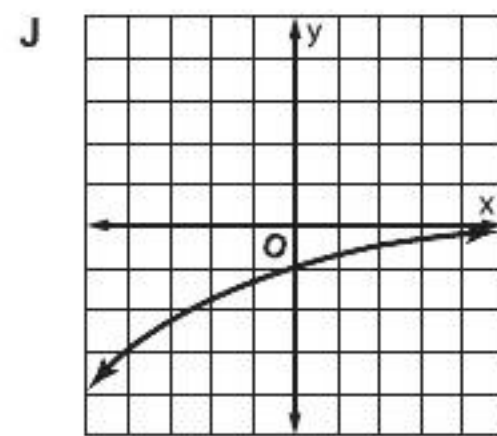
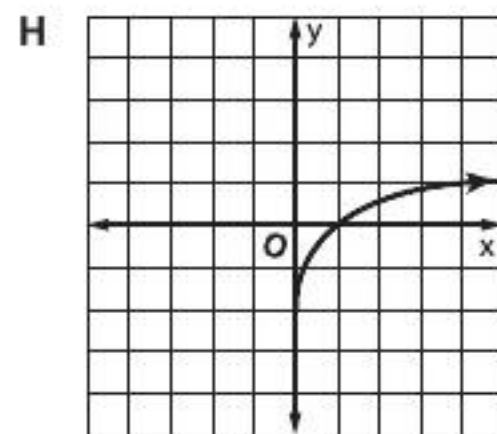
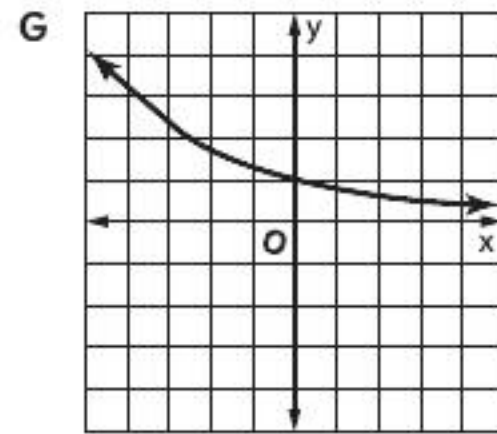
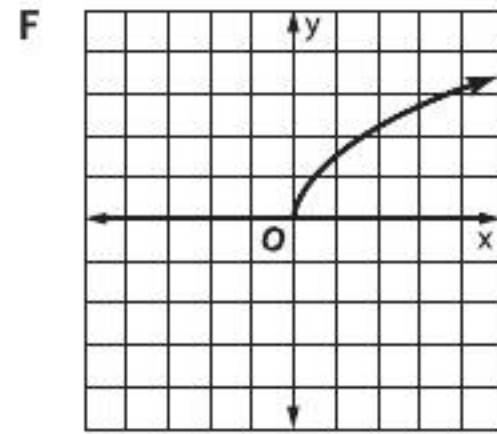
$$2750 = 2500 \left(1 + \frac{0.0425}{365}\right)^{365t} \quad \text{B}$$

- A 2.15 سنة تقريبًا
- B 2.24 سنة تقريبًا
- C 2.35 سنة تقريبًا
- D 2.46 سنة تقريبًا

تدريب على الاختبار المعياري

1

الوحدة

4. ارسم التمثيل البياني $\log_5 =$ H

5. تبيع مكتبة رايان كتابين مستخدمين بسعر AED 7.99. إجمالي تكلفة شراء من الكتب يمكن إيجادها من — C

A ضرب في .

B ضرب في 5.

C ضرب في تكلفة الكتاب الواحد.

D قسمة على

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها لك معلمك أو في ورقة أخرى.

1. افترض أن هناك 3500 طائر فقط من نوع مهدد بالانقراض تعيش على إحدى الجزر، ولكن ينخفض تعداد تلك الطيور بمعدل يبلغ 5% تقريبًا سنويًا.

توقع الدالة الخوارزمية $\log_{0.95} 3500 =$ عدد

السنوات التي سينخفض خلالها التعداد إلى العدد . ما الفترة التي سيصل خلالها تعداد الطيور إلى 3000 طائر؟ G

F 2 سنتين H 5 سنوات

G 3 سنوات J 8 سنوات

2. وجد عبد الرحمن أن إجمالي تكلفة تأجير سيارة يمكن تمثيلها بالمعادلة $125 + 0.35x$ ، حيث عدد الأميال التي قادها. إذا كان إجمالي تأجير السيارة AED 363، فكم ميلًا قادها عبد الرحمن؟ J

F 125 H 520

G 238 J 680

3. أي مما يلي يقدم أفضل وصف للتمثيل البياني $3y = 4x - 3$ و $8y = -6x - 5$ C

A الخطوط لها نقطة التقاطع نفسها مع المحور .

B الخطوط لها نقطة التقاطع نفسها مع المحور .

C الخطوط متعامدة.

D الخطوط متوازية

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 استخدم التقنية وخصائص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة t عندما تكون $p = 3000$.

إجابة إضافية

10a. $N = 135,000(1.1)^t$. حيث N هو عدد الغزلان ذات الذيل الأبيض و t هو عدد الأعوام منذ 1995.

الإجابة الموسعة

سجل إجاباتك في ورقة، واكتب الحل هنا.

10. افترض أن عدد الغزلان ذات الذيل الأبيض في منطقة معينة قد يزيد بمعدل سنوي 10% تقريباً منذ عام 1995. وكان عدد تلك الغزلان 135.000 عام 1995.
- a. اكتب معادلة لتمثيل عدد الغزلان ذات الذيل الأبيض بعد t من السنوات. **انظر الهامش.**
- b. كم تقريباً عدد الغزلان ذات الذيل الأبيض التي كانت تعيش في هذه المنطقة عام 2000؟ قرب إجابتك إلى أقرب مئة غزال. **تقريباً 217400 غزال**

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو في ورقة أخرى.

6. اشترت سوزان سيارة جديدة هذا العام بسعر AED 33.750. ويتوقع أن تنخفض قيمة هذه السيارة بمعدل 10.5% سنوياً. كم ستكون القيمة **التقريبية** للسيارة بعد 6 سنوات من شرائها؟ اكتب الحل هنا. **تقريباً AED 17.347**

7. يحل أيوب نظام المعادلات $8x - 2y = 12$ و $-15x + 2y = -19$ باستخدام الاختزال. وستجد حله أدناه.

$$\begin{array}{r} 8x - 2y = 12 \\ -15x + 2y = -19 \\ \hline -7x = 7 \\ x = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8x - 2y = 12 \\ 82 - (1 - y) = 12 \\ -8 - 2y = 12 \\ -2y = 20 \\ y = -10 \end{array}$$

الحل هو $(-1, -10)$.

- a. ما الخطأ الذي ارتكبه أيوب؟ **7a. الإجابة النموذجية: لديه خطأ في الإشارة عندما جمع المعادلات؛ $-19 = -7$ ، وليس -19 .**
- b. ما الحل الصحيح لنظام المعادلات؟ اكتب الحل هنا. **$(1, -2)$**

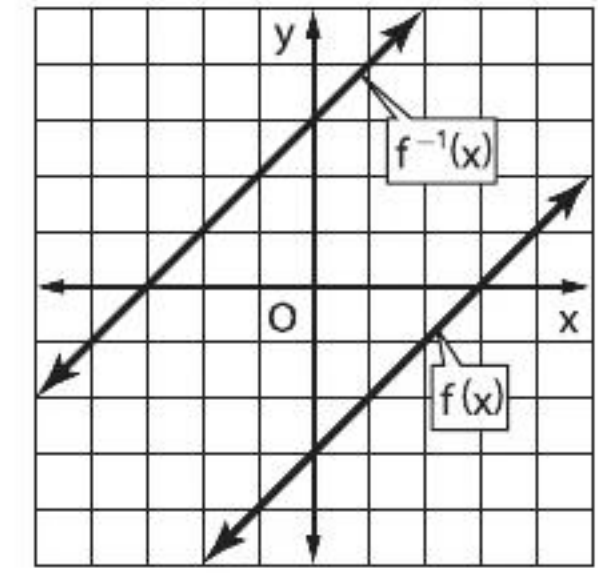
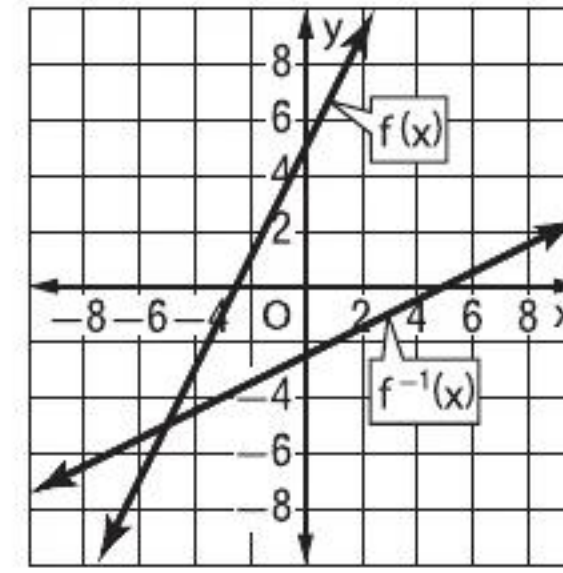
8. إجابة شبكية إذا كان $f(x) = 3x$ وكان $g(x) = x^2 - 1$. فما قيمة $f(g(-3))$ **24**

9. حوّل لأبسط صورة $(-2a^{-2}b^{-6})(-3a^{-1}b^8)$. **$\frac{6b^2}{a^3}$**

الاستعداد للوحدة 1

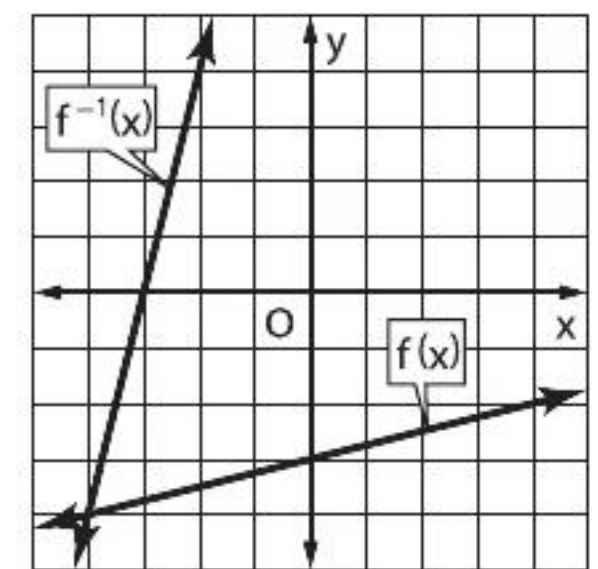
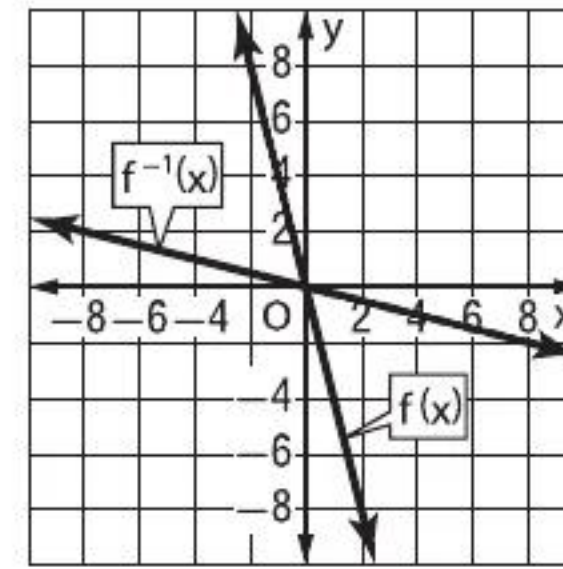
6. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

7. $f^{-1}(x) = x + 3$



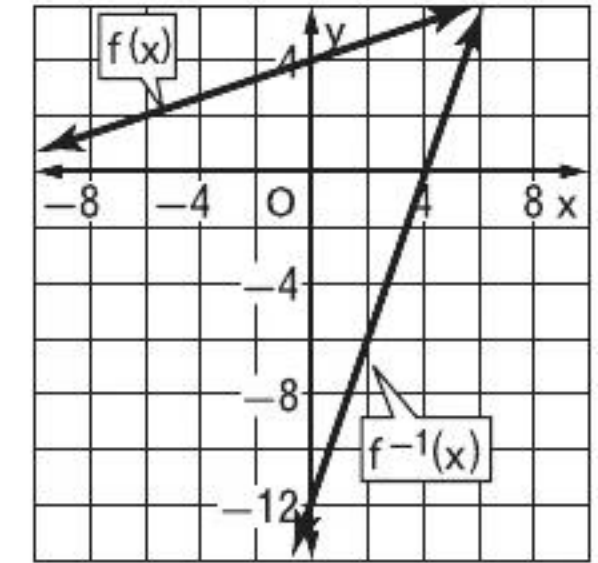
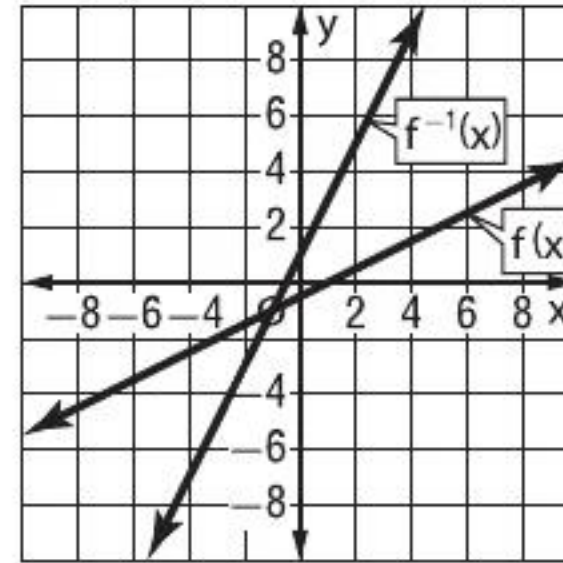
8. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x$

9. $f^{-1}(x) = 4x + 12$

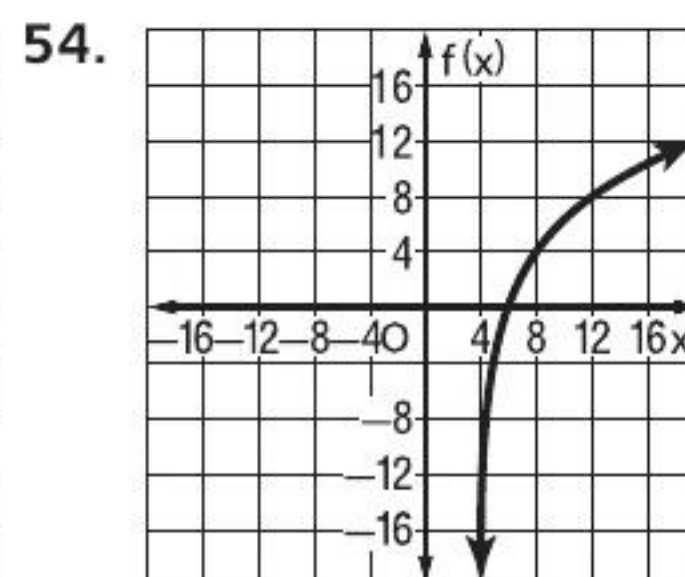
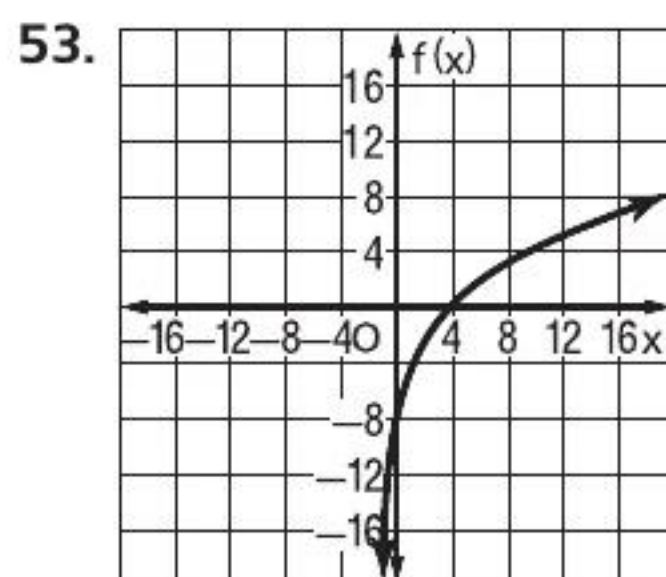
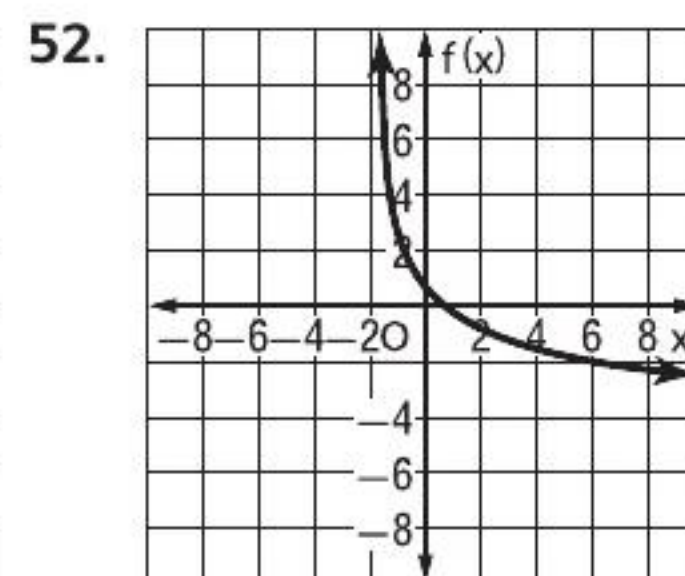
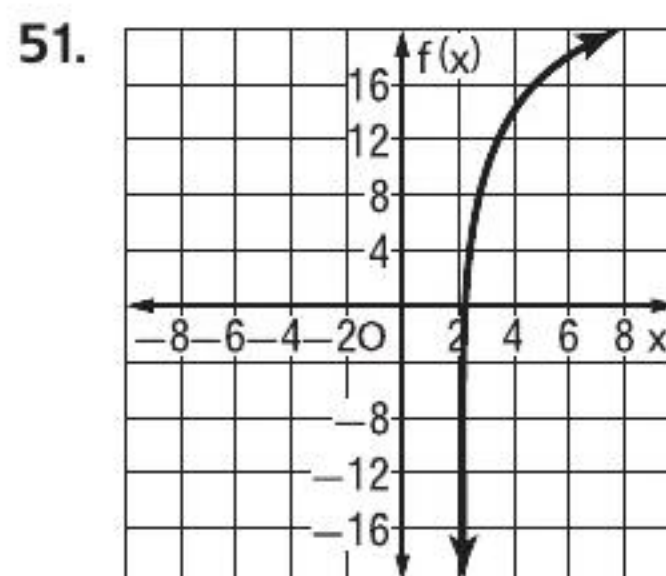
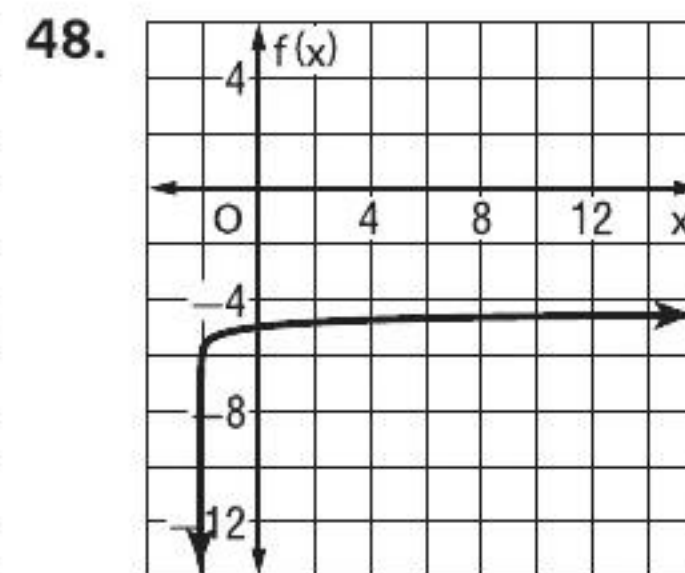
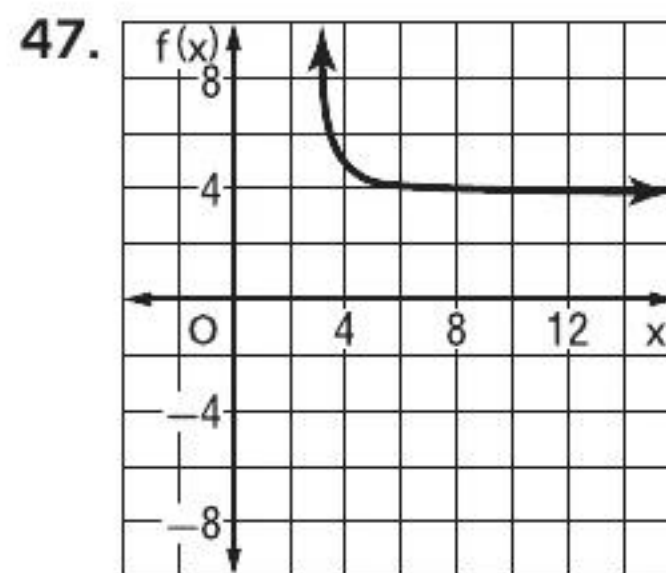
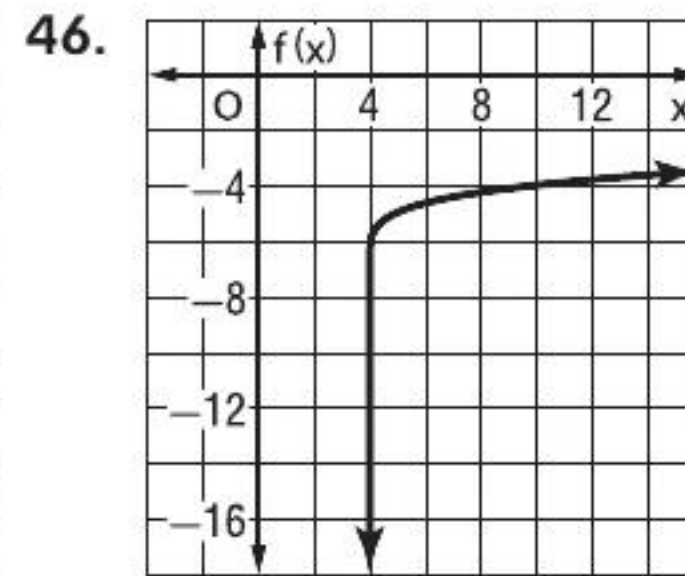
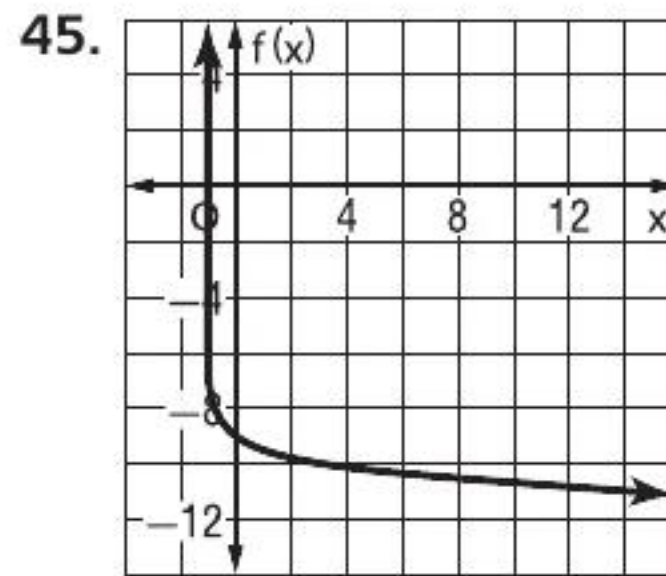
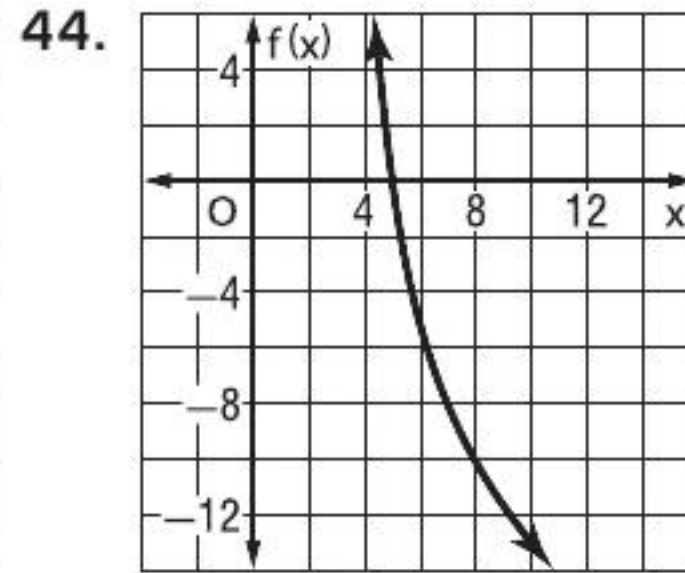
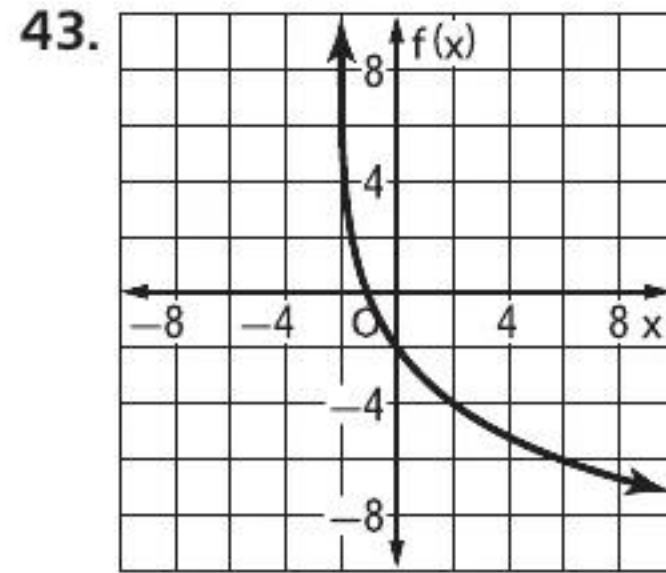
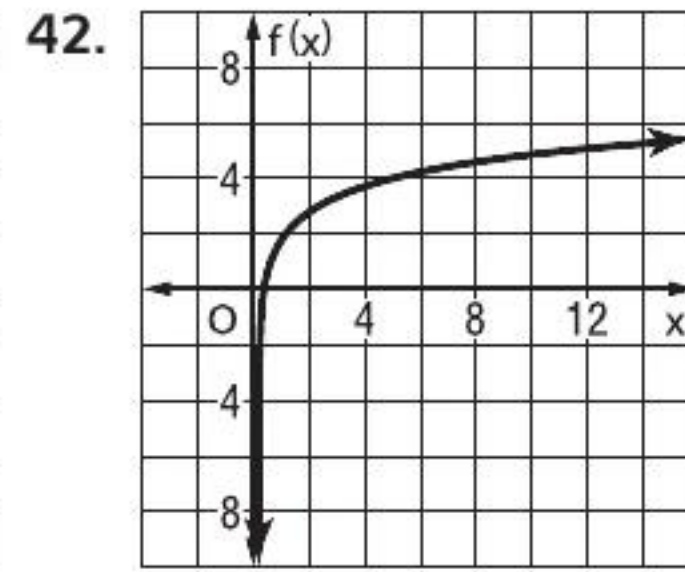
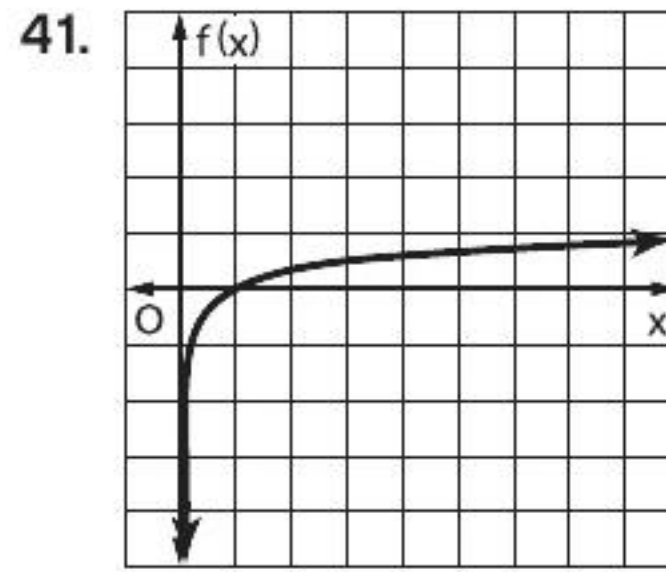
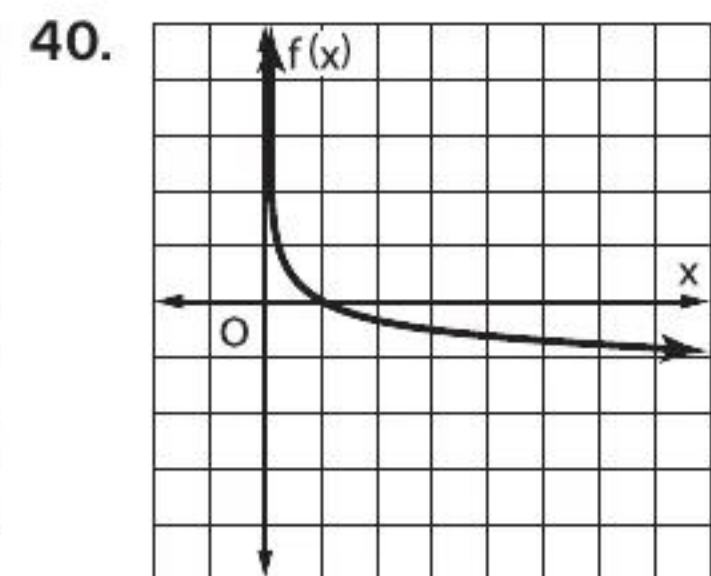
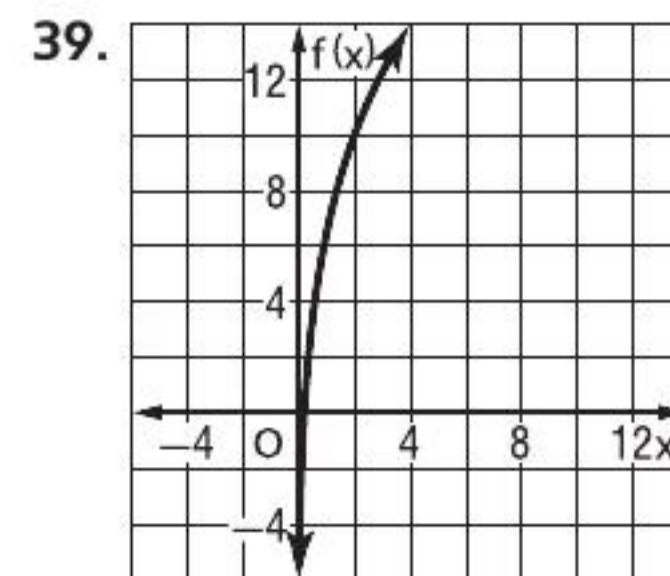
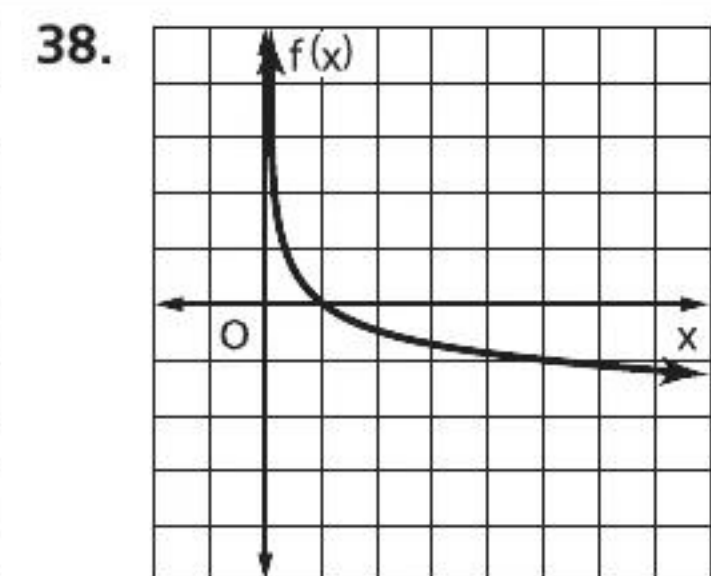
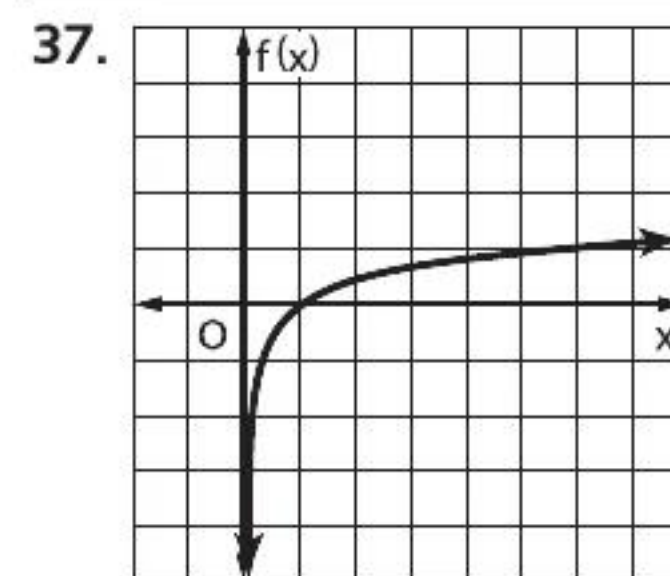


10. $f^{-1}(x) = 2x + 1$

11. $f^{-1}(x) = 3x - 12$



الدرس 1-1



68. بما أن اللوغاريتمات عبارة عن أسس، فخواص اللوغاريتمات متشابهة مع خواص الأسس. تشير خاصية ناتج الضرب إلى أنه لضرب قوتين أسيتين لهما الأساس نفسه، يجب جمع الأسين. على نحو مماثل، لوغاريتم ناتج الضرب هو مجموع لوغاريتمي عامليه. تشير خاصية ناتج القسمة إلى أنه لقسمة قوتين أسيتين لهما الأساس نفسه، يجب طرح الأسين. على نحو مماثل، لوغاريتم ناتج القسمة هو فرق لوغاريتمي البسط والمقام. تشير خاصية القوى إلى أنه لإيجاد القوة الأسية لقوة أسية، يجب ضرب الأسين. على نحو مماثل، لوغاريتم القوة الأسية هو ناتج ضرب اللوغاريتم والأس. يجب أن تتضمن الإجابات ما يلي.

• خاصية ناتج القسمة: $\log_2 \left(\frac{32}{8} \right) = \log_2 \left(\frac{2^5}{2^3} \right)$ عوض بـ 32 عن 2^5 وعن 8 وبـ 2^3 .

$$\begin{aligned} &= \log_2 2^{(5-3)} \quad \text{ناتج قسمة الأسس} \\ &= 5 - 3 \quad \text{أو } 2 \quad \text{معكوس خاصية الأسس} \\ &\quad \text{واللوغاريتمات} \end{aligned}$$

عوض بـ 2^5 عن 32 بـ $\log_2 2^5 - \log_2 2^3 = \log_2 32 - \log_2 8$ وعوض عن 8 بـ 2^3 .

$$\begin{aligned} &= 5 - 3 \quad \text{أو } 2 \quad \text{معكوس خاصية} \\ &\quad \text{الأسس واللوغاريتمات} \end{aligned}$$

$$\text{إذًا، } \log_2 \left(\frac{32}{8} \right) = \log_2 32 - \log_2 8$$

خاصية القوى: $\log_3 9^4 = \log_3 (3^2)^4$ عوض بـ 9 عن 3^2 .

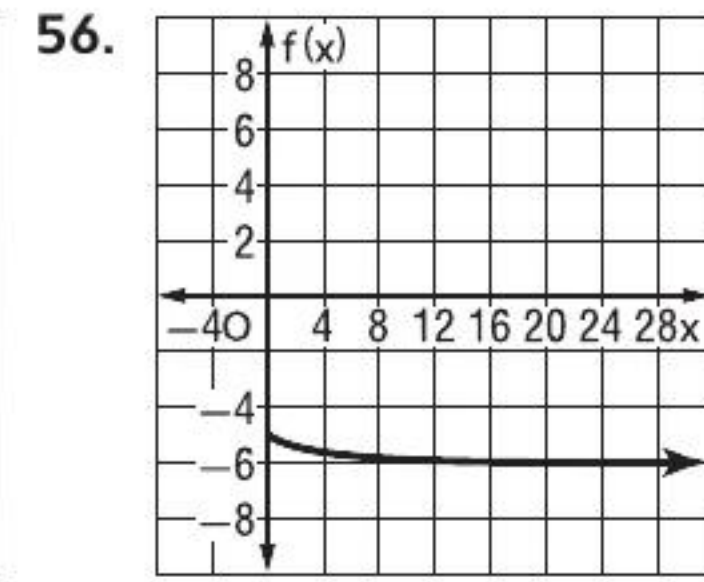
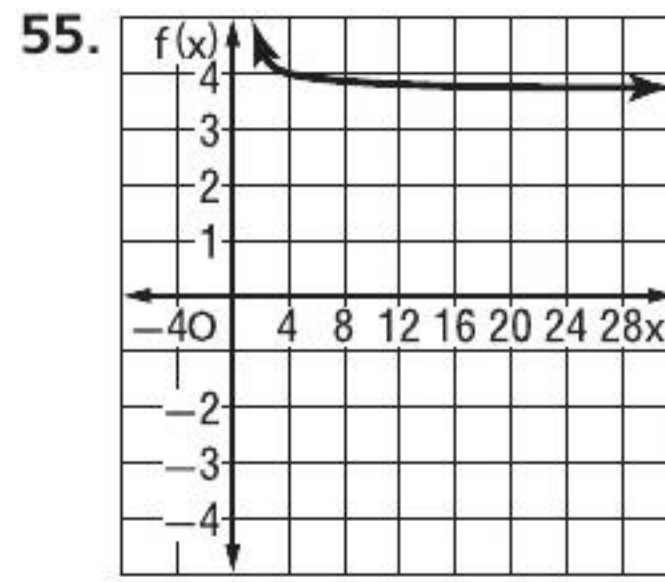
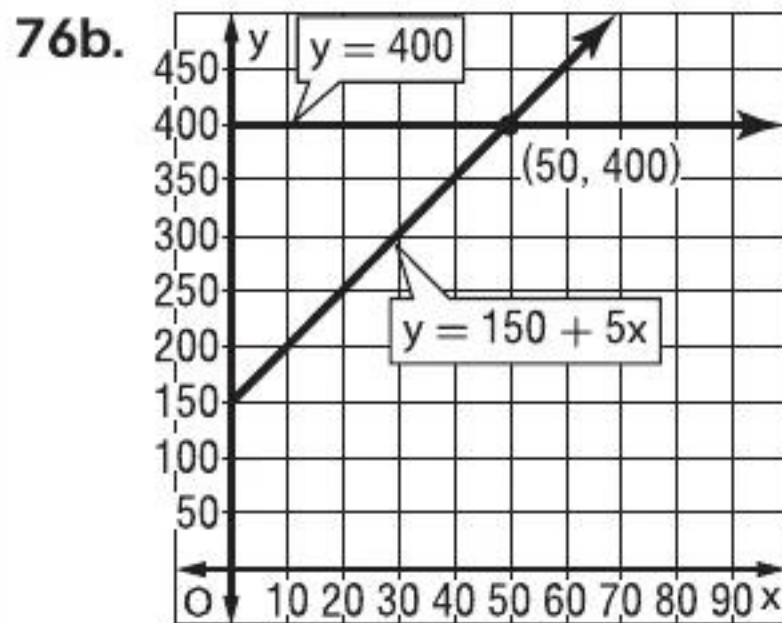
$$\begin{aligned} &= \log_3 3^{(2 \times 4)} \quad \text{رفع القوة لقوة} \\ &= 2 \times 4 \quad \text{أو } 8 \quad \text{معكوس خاصية الأسس} \\ &\quad \text{واللوغاريتمات} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \log_3 9 &= (\log_3 9) \times 4 \quad \text{خاصية التبديل} \\ &= (\log_3 3^2) \times 4 \quad \text{عوض بـ 9 عن } 3^2. \\ &= 2 \times 4 \quad \text{أو } 8 \quad \text{معكوس خاصية الأسس} \\ &\quad \text{واللوغاريتمات} \end{aligned}$$

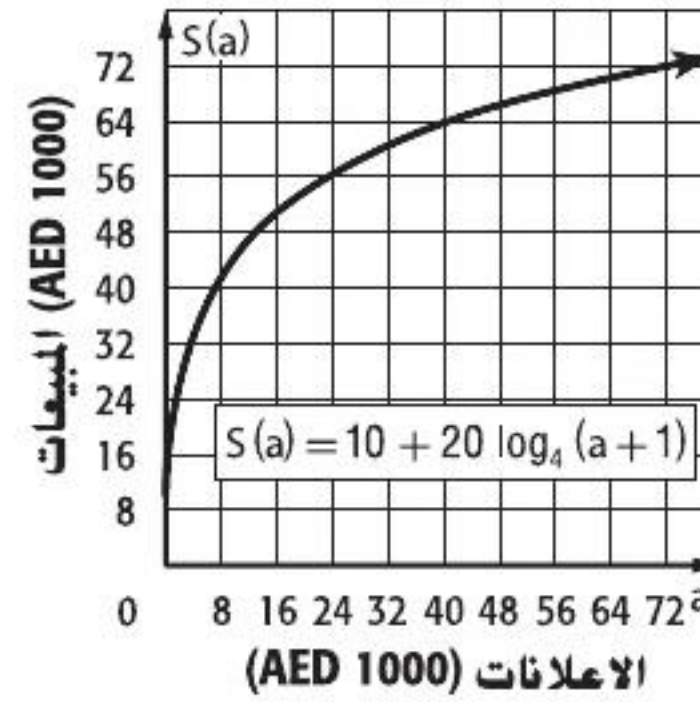
$$\text{إذًا، } \log_3 9^4 = 4 \log_3 9$$

• خاصية ناتج ضرب الأسس وخاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات تشتملان على جمع الأسس بما أن اللوغاريتمات عبارة عن أسس.

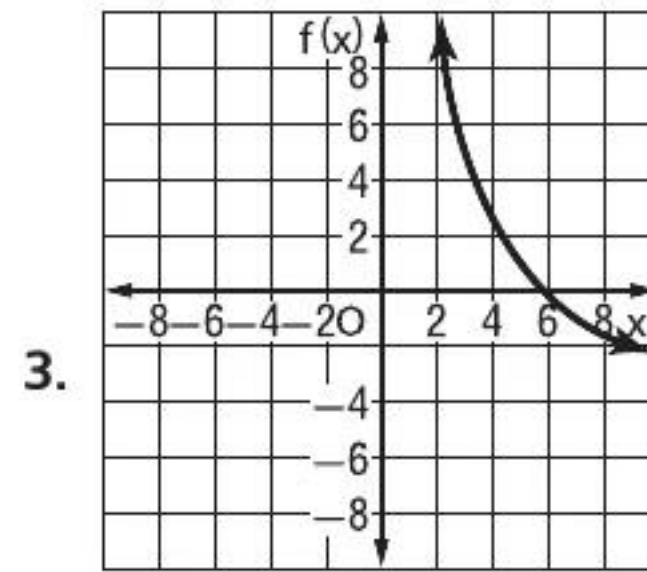
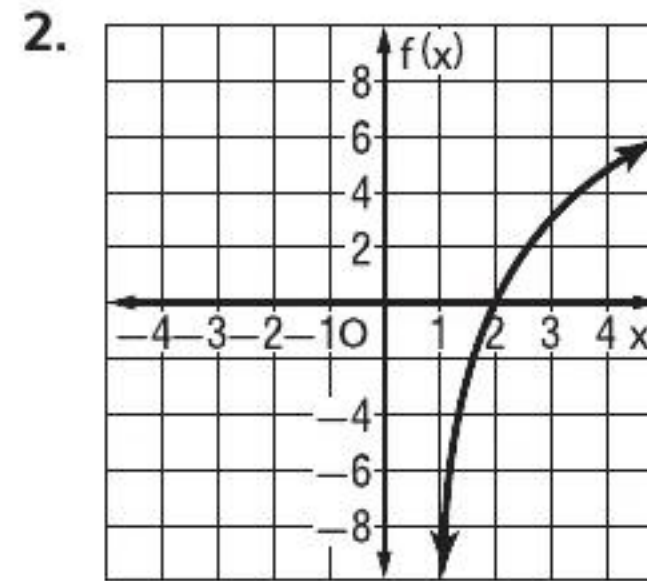
الدرس 1-5



57c. المبيعات مقابل الإنفاق على الإعلانات



اختبار منتصف الوحدة



الدرس 1-3

66. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ معادلة أصلية
 $\log_a x^{-1} = -\log_a x$ تعريف الأسس السالبة
 $\log_a x^{-1} = (-1)\log_a x$ خاصية القوى
 $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ بسط.

67. $x^{3 \log_x 2 - \log_x 5} = x^{\log_x 2^3 - \log_x 5}$
 $= x^{\log_x 8 - \log_x 5}$
 $= x^{\log_x \frac{8}{5}}$
 $= \frac{8}{5}$

الدوال والعلاقات النسبية

مخطط الوحدة

الوحدة 2

التقويم التشخيصي تدريب سريع		الدرس 2-1 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: نصف يوم		الدرس 2-2 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: نصف يوم		الدرس 2-3 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: نصف يوم		الدرس 2-4 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: نصف يوم	
العنوان	ضرب التعابير النسبية وقسمتها	جمع التعابير النسبية وطرحها	تمثيل دوال المقلوب بيانيًا	التمثيل البياني للدوال النسبية					
الأهداف	■ تبسيط التعابير النسبية. ■ تبسيط الكسور الجبرية المركبة المتضمنة تعابير نسبية.	■ تحديد المضاعف المشترك الأصغر للدوال كثيرة الحدود. ■ جمع التعابير النسبية وطرحها.	■ تحديد خواص دوال المقلوب. ■ تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانيًا.	■ تمثيل الدوال النسبية ذات خطوط التقارب الأفقية والرأسية بيانيًا. ■ تمثيل الدوال النسبية ذات خطوط التقارب المائلة ونقطة الانفصال بيانيًا.					
المفردات الأساسية	تعبير نسبي rational expression كسر مركب complex fraction		دالة مقلوبة reciprocal function قطع زائد hyperbola خط تقارب asymptote	دالة نسبية rational function نقطة الانفصال point discontinuity					
		التقويم التكويني اختبار منتصف الوحدة							

Chapter Sourced From: 2. Rational Functions and Relations, from Integrated Math III Chapter 7 © 2012 McGraw-Hill Education مؤسسة صالح محفوظ للطباعة والتأليف © محفوظة الحقوق

الخطة الزمنية المقترحة			
الفترة الزمنية	شرح الدروس	المراجعة والتقويم	الإجمالي
45 دقيقة	9 أيام	يومان	11 يومًا
90 دقيقة	4 أيام	يوم واحد	5 أيام

التوسّع 2-4 45 دقيقة: نصف يوم 90 دقيقة: نصف يوم		الدرس 2-5 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: نصف يوم		التوسّع 2-5 45 دقيقة: نصف يوم 90 دقيقة: نصف يوم	
	مختبر تقنية التمثيل البياني: التمثيل البياني للدوال النسبية		حل المعادلات والمتباينات النسبية		مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات والمتباينات النسبية
	استخدم حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية.		- حل المعادلات النسبية. - حل المتباينات النسبية.		استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول.
			معادلات نسبية rational equations متباينات نسبية rational inequalities المتوسط المرجح weighted average		
التقويم الختامي دليل الدراسة والمراجعة تدريب على الاختبار					

التشخيص	سُبل الحل
بداية الوحدة 2	
الاستعداد للوحدة 2 كتاب الطالب	الاستجابة للتدخل التقويمي كتاب المعلم
بداية كل درس	
السابق، الحالي، لماذا؟ كتاب الطالب	كتاب الطالب

التقويم
التشخيصي

أثناء/بعد كل درس	
تمرين موجه كتاب الطالب، كل مثال التحقق من فهمك كتاب الطالب مسائل مهارات التفكير العليا كتاب الطالب مراجعة شاملة كتاب الطالب أمثلة إضافية كتاب المعلم انتبه! كتاب المعلم الخطوة 4، التقويم كتاب المعلم	التدريس المتمايز كتاب المعلم
منتصف الوحدة	
اختبار منتصف الوحدة كتاب الطالب	
اختبار ما قبل الوحدة	
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة كتاب الطالب تدريب على الاختبار كتاب الطالب تدريب على الاختبار المعياري كتاب الطالب	

التقويم
التكويني

التقويم
الختامي

اشرح كيفية تحويل الكسور إلى أبسط صورة. أكد أنه يمكنك فقط قسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة - الحدود العامة ليست "لعبة عادلة". اشرح أنه لا يمكن تحليل 3 في 32 و 3 في 34 إلى العوامل الأولية لأن 3 ليست عاملاً. بشكل جماعي، حول التعبير النسبي لأبسط صورة. وضح أنه على الرغم من أن الحد x^2 يظهر في كل من البسط والمقام، إلا أنه لا يمكن تحليله إلى العوامل الأولية، حيث إن x^2 يمثل حدًا في هذا التعبير وليس عاملاً. استخدم الألوان لتحديد العوامل المشتركة.

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اكتب كسرًا وتعبيرًا نسبيًا على اللوحة. اطلب من الطلاب إيجاد كسرين يساوي مجموعهما الكسر الذي كتبه. ومن ثم اطلب من الطلاب استخدام نفس طريقة التفكير لإيجاد تعبيرين نسبين يساوي مجموعهما التعبير الذي كتبه. ولخلق أجواء مليئة بالتحدي، اطلب من الطلاب كتابة كسرين يختلف مقامهما عن الكسر الذي كتبه، ويكون مجموعهما مساويًا للكسر الذي كتبه. وأخيرًا، تحد الطلاب أن يقوموا بنفس الشيء مع التعبير النسبي الذي كتبه.

الخيار 1 توصيل المعلومة لجميع المتعلمين AL OL BL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من أربعة أفراد. نظرًا لوجود العديد من المهام المتضمنة في التمثيل البياني لدوال المقلوب بالشكل $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ ، اطلب من أفراد المجموعة أن يقرروا ما المهام التي ينبغي عليهم إتمامها من أجل التمثيل البياني لدالة محددة. على سبيل المثال، يمكن أن يكون فرد ما مسؤولاً عن إيجاد قيم a و h و k ، بينما يمكن لآخر تحديد خطوط التقارب، ويمكن لآخر استبدال القيم من أجل تحديد النقاط على التمثيل البياني، ويمكن لفرد رابع أن يمثل النقاط بيانيًا وأن يرسم منحنى الدالة.

أصحاب النمط المنطقي أثناء شرحك لأنواع دوال التغير العديدة، اطلب من الطلاب أن يقوموا بنسخ وإكمال الجدول التالي لمساعدتهم في التعرف على جميع الأنواع التي تمت دراستها.

التغير	المعادلة	التمثيل البياني
الطردي		
المشترك		
العكسي		
مرتب		

الخيار 2 قريب من المستوى AL

اكتب الكسر والتعبير النسبي التاليين على اللوحة.

$$\frac{32}{34} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 17} = \frac{16}{17}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \frac{(x-3)}{(x-5)}$$

التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

معاينة درس تلو الآخر

قبل الوحدة 2

موضوعات ذات صلة من الجبر 1

- استخدام خواص التبديل والتجميع والتوزيع لتحويل التعابير الجبرية لأبسط صورة
- التعرف على المجال والمدى في الرياضيات وتحديد المجال والمدى الصحيح لمواقف محددة
- حل المسائل التي تتضمن تغيرًا تناسبياً

موضوعات سابقة من الجبر 2

- رسم تمثيلات بيانية لدوال أم بما في ذلك الدوال الخطية
- استخدام الأدوات التي تشمل التحليل إلى العوامل لتحويل المعادلات وحلها

الوحدة 2

موضوعات ذات صلة من الجبر 2

- تحديد خواص دوال المقلوب وتمثيل تحولاتها بيانياً
- استخدام خطوط التقارب لوصف التمثيلات البيانية للدوال النسبية ووصف حدود المجال والمدى ودراسة سلوك خطوط التقارب
- تحديد قيم المجال والمدى الصحيحة للدوال النسبية وتحديد مدى صحة الحلول للمعادلات والمتباينات النسبية
- تحليل موقف ممثل بواسطة دالة نسبية وصياغة معادلة مكونة من دالة خطية أو تربيعية وحل المسألة
- استخدام الدوال لصياغة وعمل التوقعات في مواقف المسائل التي تتضمن التغير الطردي والعكسي

بعد الوحدة 2

الإعداد لها قبل حساب التفاضل والتكامل

- تحديد مجال الدوال ومداها باستخدام التمثيلات البيانية والجداول والرموز
- استكشاف مفاهيم الاتصال والسلوك الطرفي وخطوط التقارب وربط هذه الخواص بالدوال الممثلة بيانياً وعددياً

2-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

- في هذا الدرس، يطبق الطلاب معرفتهم السابقة عن الكسور على التعابير النسبية (نسبة تعبيرين من التعابير كثيرة الحدود)
- يكون الكسر غير معرف إذا كان المقام صفراً. يفحص الطلاب كثيرات الحدود في مقامات التعابير النسبية ويحددون قيم المتغيرات التي تكون مقاماتها صفراً.
 - يمكن تحويل كسر لأبسط صورة عن طريق تبديل ناتج قسمة العوامل المشتركة في البسط والمقام بالعدد 1.
 - في التعابير النسبية، قد تكون العوامل المشتركة كثيرات الحدود. ينبغي على الطلاب أيضاً إدراك أن ناتج قسمة العوامل ذات الشكل $b - a$ و $a - b$ يمكن استبدالها بالعدد -1.
 - لضرب الكسور، اقسم ناتج ضرب البسوط على ناتج ضرب المقامات. يتم ضرب التعابير النسبية بنفس الطريقة.
 - للقسمة على كسر، اضرب في معكوسه الضربي. افعل الشيء نفسه للقسمة على تعبير نسبي.
 - لتحويل كسر مركب إلى أبسط صورة، أعد كتابته وعامله على أنه تعبير قسمة. وينطبق الشيء نفسه عندما يتضمن الكسر المركب تعابير نسبية.

2-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

- جمع التعابير النسبية وطرحها عمليتان مشابهتان لجمع الكسور وطرحها. يمكن إيجاد المضاعفات المشتركة الأصغر من خلال مقارنة التحليل إلى عوامل أولية. في حال التحليل إلى عاملين أو أكثر من كثيرات الحدود إلى العوامل الأولية، سيُشمل مضاعفها المشترك الأصغر كافة العوامل ذات الأس الذي يشير إلى أقصى عدد من المرات التي يظهر فيها العامل في إحدى كثيرات الحدود.
- لجمع التعابير النسبية وطرحها:

- تأكد من وجود مقامات مشتركة في التعابير. وإن لم يكن ذلك، جِد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات المحددة وأعد كتابة كل التعابير النسبية باعتبارها تعابير مكافئة يكون المضاعف المشترك الأصغر مقامها.
- يتساوى مجموع (أو فارق) التعابير النسبية مع المقامات المشتركة مع تعبير يكون فيه المقام هو المقام المشترك والبسط هو مجموع (أو فارق) البسوط.

2-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

- يكون لدالة المقلوب معادلة على شكل $f(x) = \frac{1}{a(x)}$. حيث تكون $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.
- قد تشتمل دوال المقلوب على انقطاعات في الاتصال للحصول على القيم المستثناة من المجال، وقد تتضمن بعضها خطأ تقارباً. وهو الخط الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

2-5 حل المعادلات والمتباينات النسبية

تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبير نسبي واحد أو أكثر باسم المعادلات النسبية. تُستخدم نفس المفاهيم والمهارات المستخدمة في حل المعادلات الخطية لحل المعادلات النسبية بمجرد اختزال الكسور باستخدام المضاعف المشترك الأصغر. ويجب التحقق من كافة الحلول في المعادلة الأصلية لتحديد أي حلول دخيلة.

يمكن كتابة المعادلات النسبية لحل مسائل المتوسط المرجح. المتوسط المرجح لمجموعة بيانات هو مجموع ناتج ضرب عدد الوحدات والقيمة لكل وحدة مقسومًا على مجموع عدد الوحدات. تشتمل هذه الأنواع من المسائل على مسائل المزج والعمل والمساحة والاهتمام.

■ يوضح خط التقارب الرأسي أين تكون الدالة غير معرفة. تكون دالة المقلوب غير معرفة بالنسبة لقيم x التي تُشكل $a(x) = 0$.

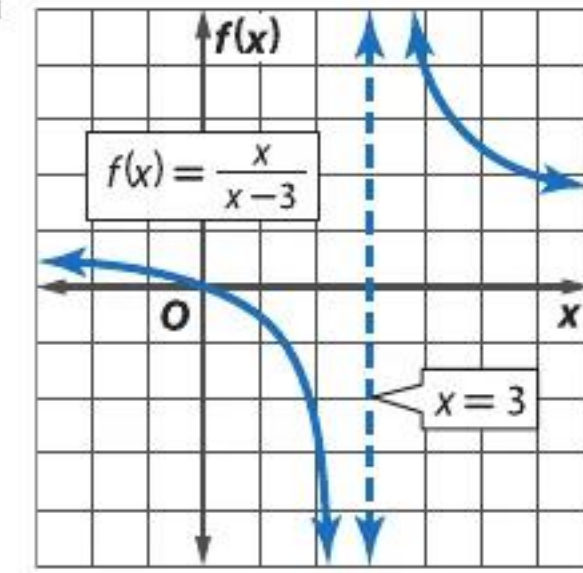
■ يوضح خط التقارب الأفقي السلوك الطرفي للتمثيل البياني. تكون الدالة الأم لدوال المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$. يُمكن تطبيق الأساليب ذاتها المستخدمة في تحويل التمثيلات البيانية للدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية لدوال المقلوب.

2-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

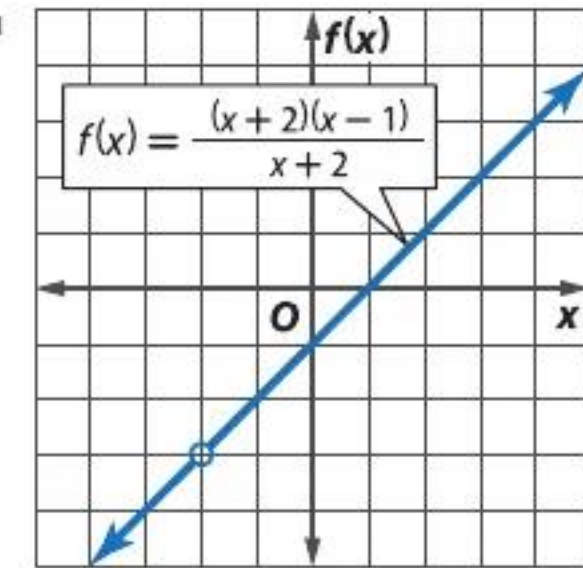
تكون للدالة النسبية معادلة من الصيغة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث تكون $a(x)$ و $b(x)$ دوال كثيرات الحدود و $b(x) \neq 0$.

تشتمل بعض التمثيلات البيانية للدوال النسبية على انقطاعات في الاتصال. قد يظهر الانفصال في الاتصال في شكل:

■ خط تقارب رأسي عندما تكون $b(x) = 0$.



■ نقطة الانفصال، فجوة في التمثيل البياني. يظهر هذا النوع من الانفصال عند $x = c$ عندما تكون $x - c$ هي عامل لكل من $a(x)$ و $b(x)$.



تشتمل الدالة النسبية على خط تقارب أفقي واحد كحد أقصى. وهو:

■ الخط $y = 0$. عندما تكون درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$.

■ الخط $y = \frac{\text{المعامل الرئيسي في } a(x)}{\text{المعامل الرئيسي في } b(x)}$. عندما تكون درجة $a(x)$ مساوية لدرجة $b(x)$.

■ إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$. فلا يوجد خط تقارب أفقي.

يظهر خط التقارب المائل في الدوال النسبية التي تشتمل على بسط كثير الحدود أعلى درجة واحدة من مقام كثير الحدود. يمكن للطلاب تحديد خطوط تقارب لدالة واستخدامها مع جدول قيم لتمثيل الدالة بيانيًا.

الدوال والعلاقات النسبية

2 الوحدة

مشروع الوحدة

توقف واستنشق رائحة الورود

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن الدوال النسبية لإكمال مشروع.

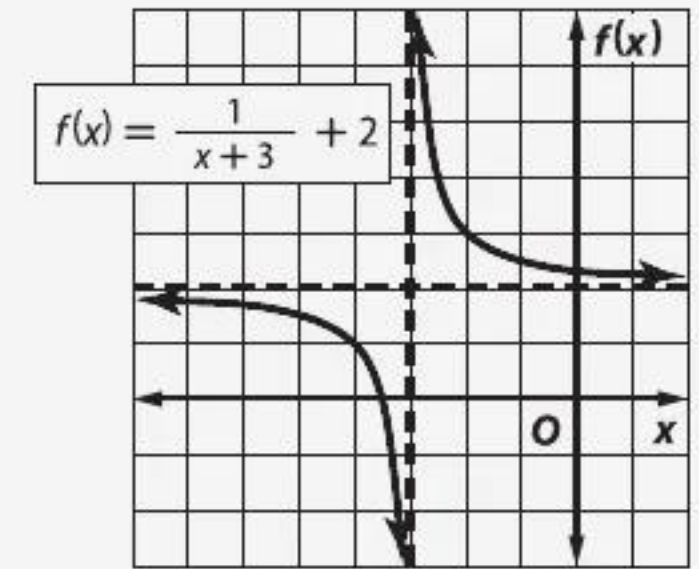
يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة المالية، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن الحادي والعشرين.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعا النظام التالي.

عرّف: خط التقارب هو خط يقترب منه التمثيل البياني.

مثال:

يوضح التمثيل البياني خطوط تقارب عند $x = -3$ و $f(x) = 2$.



اسأل: ما الذي يوضحه خط تقارب رأسي؟ حيث تكون الدالة غير معرفة

لماذا؟ ▲

السفر سواء إذا كنت تسافر بمركب أو سيارة أو دراجة أو طائرة، يمكن استخدام الدوال النسبية لإيجاد المسافة المقطوعة والوقت المستغرق في السفر والسرعة. إذا كنت ترغب في الوصول إلى وجهة ما في الوقت المحدد، فيمكن العلاقات النسبية إخبارك بالسرعة التي تحتاجها في السفر للوصول إلى هدفك. وعند تمثيل الدوال النسبية بيانياً فإنك ترى بوضوح السرعة التي تسافر بها وتأثيرها على الزمن المستغرق للوصول.

الحالي ..

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
 - تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.
 - تمثيل الدوال النسبية بيانياً.
 - حل مسائل التغير الطردي والمشتك والعكسي.
 - حل المعادلات والمتباينات النسبية.

السابق ..

- استخدام التحليل إلى العوامل لحل المعادلات التربيعية وتمثيل المعادلات التربيعية بيانياً.

السؤال المهم

- لماذا يكون التمثيل البياني مفيداً؟
- الإجابة النموذجية: التمثيلات البيانية مفيدة لأنها قد تساعدك في تمثيل العلاقات بين الكميات في الحياة اليومية. ويمكن استخدامها أيضاً في تقدير قيم الدالة.

الاستعداد للوحدة

1

خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة	تدريب سريع
مثال 1 (مستخدم في الدرس 2-1) حلّ التناسب $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$. اكتب في أبسط صورة. $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$ $\frac{72}{11} = 7r$ بضرب كل طرف في 8. $\frac{72}{11} = r$ بقسمة كل طرف على 7. بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 72 و 77 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.	حلّ كل من المعادلات التالية. اكتب في أبسط صورة. 1. $\frac{5}{14} = \frac{1}{3}x$ $x = \frac{15}{14}$ 2. $\frac{1}{8}m = \frac{7}{3}$ $m = \frac{56}{3}$ 3. $\frac{8}{5} = \frac{1}{4}k$ $k = \frac{32}{5}$ 4. $\frac{10}{9}p = 7$ $p = \frac{63}{10}$ 5. شاحنات استهلك مازن $\frac{1}{3}$ خزان الوقود في شاحنته للذهاب إلى العمل. بدأ مازن طريقه بخزان وقود ممتلئ. فإذا كان قد تبقى لديه 18 L من البنزين، فكم عدد اللترات التي بسعها الخزان؟ 27 gal
مثال 2 (مستخدم في الدرس 2-2) حوّل لأبسط صورة $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$. $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$ المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 3 و 4 و 6 هو 12. $= \frac{1(4)}{12} + \frac{3(3)}{12} - \frac{5(2)}{12}$ بسّط. $= \frac{4}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$ بالجمع والطرح. $= \frac{3}{12}$ بسّط. $= \frac{3 \div 3}{12 \div 3} \text{ أو } \frac{1}{4}$	حوّل كل تعبير لأبسط صورة. 6. $\frac{3}{4} - \frac{7}{8} - \frac{1}{8}$ 7. $\frac{8}{9} - \frac{7}{6} + \frac{1}{3}$ $\frac{1}{18}$ 8. $\frac{9}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$ $\frac{29}{30}$ 9. $\frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 3$ $\frac{43}{6}$ 10. الخبز قامت ياسمين بخبز كعك لبيع المخبوزات. لقد استخدمت $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لإحدى الوصفتين و $4\frac{1}{2}$ أكواب من الدقيق للوصفة الأخرى. فكم عدد الأكواب التي استخدمتها إجمالاً؟ $5\frac{1}{6}c$
مثال 3 (مستخدم في الدرس 2-4) جد حل $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$. $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$ كتابة المعادلة. $5(11) = 8u$ بالضرب التبادلي. $55 = 8u$ بسّط. $\frac{55}{8} = u$ بقسمة كل طرف على 8. بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 55 و 8 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة. $u = \frac{55}{8} \text{ أو } 6\frac{7}{8}$	حلّ كلاً من التناسبات التالية. 11. $\frac{9}{12} = \frac{p}{36}$ $p = 27$ 12. $\frac{9}{18} = \frac{6}{m}$ $m = 12$ 13. $\frac{2}{7} = \frac{5}{k}$ $k = 17.5$ 14. ضريبة المبيعات تدفع سهيلة AED 4.40 ضريبة على الملابس بقيمة 55 AED. فما مقدار الضريبة التي ستدفعها على ملابس بقيمة 35 AED؟ AED 2.80

مطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زاويك®

التركيز يكتب الطلاب ملاحظات عن الدوال والعلاقات النسبية في هذه الوحدة.

التدريس اطلب من الطلاب عمل المطويات وتسميتها حسبما هو موضح. ينبغي أن يستخدم الطلاب السطور المناسبة لتدوين ملاحظاتهم وأمثلةهم الخاصة بالمفاهيم في كل درس من الوحدة.

وقت الاستخدام شجّع الطلاب على إضافة المزيد إلى المطويات أثناء دراسة الوحدة وعلى استخدام تلك المطويات عند المراجعة للاستعداد لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

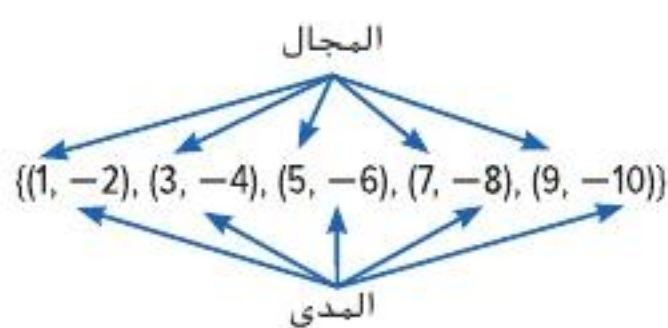
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك. قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

المفردات الجديدة

تعبير نسبي rational expression
كسر مركب complex fraction
دالة المقلوب reciprocal function
القطع الزائد hyperbola
دالة نسبية rational function
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
نقطة انفصال discontinuity point
تغير طردي direct variation
ثابت التغير constant of variation
التغير المشترك joint variation
التغير العكسي inverse variation
التغير المتوافق combined variation
معادلة نسبية rational equation
المتوسط الحسابي المرجح weighted average
متباينة نسبية rational inequality

مراجعة المفردات

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من عناصر المدى



المضاعف المشترك الأصغر هو أصغر عدد مضاعف مشترك لعددين أو أكثر

العدد النسبي هو عدد يمكن كتابته بالصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$

مطويات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات النسبية اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظتك عن الوحدة 2 عن الدوال والعلاقات النسبية. ابدأ بورقة رسم بياني مقاس $11 \times 8\frac{1}{2}$.



1 اطوها إلى ثلاثة بالطول.



2 اطو الطرف العلوي للأسفل بحيث تصنع تبويباً بالأعلى طوله 2". قص التبويبات بالطول.



3 سمّ التبويبات الخارجية بالمصطلحات التعابير، والدوال، والمعادلات. استخدم التبويبات الداخلية لكتابة التعريف والملاحظات.



4 اكتب مثلاً عن كل موضوع في المساحة أسفل كل تبويب.

ضرب التعابير النسبية وقسمتها

2-1

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-1 تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها.

الدرس 2-1 تبسيط التعابير النسبية. تحويل الكسور المركبة.

بعد الدرس 2-1 إيجاد حل المعادلات النسبية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

■ كيف يمكن للمصطلح تعبير نسبي أن يساعدك في تحديد ما يعنيه؟ "نسبي" يشتمل على كلمة "نسبة".

■ ما النسبة الموجودة في الدالة

$$T(d) = \frac{1700}{d-10}$$



إذا نزل غواص إلى أعماق أكبر من 10 متراً، فإن الدالة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d-10}$ تمثل أقصى مدة يستطيع الغواص خلالها البقاء في هذه الأعماق والصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف. تمثل $T(d)$ مدة الغطس بالدقائق، وتمثل d العمق بالمتري.

لماذا؟

الحالي

السابق

● التحليل إلى عوامل كثيرات الحدود.

1 تبسيط التعابير النسبية.

2 تبسيط الكسور الجبرية المركبة المتضمنة تعابير نسبية.

1 تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة بطلق على النسبة بين تعبيرين كثيري الحدود مثل $\frac{1700}{d-33}$ اسم تعبير نسبي.

ونظراً لأن المتغيرات في الجبر غالباً ما تمثل أعداداً حقيقية، فإن العمليات على الأعداد النسبية والتعابير النسبية متشابهة، ومثلها هو الأمر مع اختزال الكسور، فإنك تقوم بقسمة البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر لتحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \frac{(x-3)}{(x-5)}$$

العامل المشترك الأكبر = 4

العامل المشترك الأكبر = (x-1)

مثال 1 تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة

a. حوّل لأبسط صورة $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)}$

تحليل البسط والمقام إلى العوامل.

$$\begin{aligned} \frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)} &= \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \cdot \frac{(x+3)}{(x+3)} \\ &= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \end{aligned}$$

اختصار العوامل المشتركة.

بسط

b. تحت أي ظروف يكون هذا التعبير غير معرف؟

المقام الأصلي الذي تم تحليله إلى عوامله هو $(x-6)(x+3)(x-3)$.

حدد القيم التي تجعل المقام مساوياً للصفر.

هذه القيم هي 6 أو -3 أو 3، إذاً يكون التعبير غير معرف عندما تكون $x = 6$ أو -3 أو 3.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. تحت أي ظروف يكون التعبير غير معرف؟

1A. $\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$

1B. $\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

مفردات جديدة

التعبير النسبي

(rational expression)

الكسر المركب

(complex fraction)

ممارسات في الرياضيات

8 البحث عن التوافق في

الاستنتاجات المتكررة

والتعبير عن ذلك.

مثال 2 على الاختبار المعياري استخدام الاستبعاد

أي قيم تكون $\frac{x^2(x^2 - 5x - 14)}{4x(x^2 + 6x + 8)}$ غير معرفة؟

- A -2, -4
B -2, 7

- C 0, -2, -4
D 0, -2, -4, 7

قراءة فترة الاختبار

أنت تريد تحديد قيم x التي تجعل المقام يساوي صفراً.

حل فترة الاختبار

بوجود $4x$ في المقام، لا يمكن أن تساوي x صفراً. إذاً، يمكن استبعاد الخيارين A و B. بعد ذلك، حلل عوامل المقام.
 $4x(x + 2)(x + 4)$ إذاً يكون المقام $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$
نظراً لأن المقام يساوي 0 عندما تكون $x = 0, -2, -4$ ، فإن الإجابة هي C.

تمرين موجّه

2. أي قيم x تكون $\frac{x(x^2 + 8x + 12)}{-6(x^2 - 3x - 10)}$ غير معرفة؟

- F 0, 5, -2 G 5, -2 H 0, -2, -6 J 5, -2, -6

يمكنك في بعض الأحيان استبعاد -1 في البسط أو المقام للمساعدة في تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

مثال 3 التحويل لأبسط صورة باستخدام -1

حوّل لأبسط صورة $\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$

$$\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)} = \frac{w(4w - 3y)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$$

التحليل إلى العوامل.

$$= \frac{w(-1)(3y - 4w)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)} = \frac{(-w)(w + y)}{5w + y}$$

$$4w - 3y = -1(3y - 4w)$$

بسط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3A. $\frac{(xz - 4z)}{z^2(4 - x)} - \frac{1}{z}$

3B. $\frac{ab^2 - 5ab}{(5 + b)(5 - b)} - \frac{ab}{(5 + b)}$

تصلح الطريقة المستخدمة في ضرب الكسور وقسمتها مع التعابير النسبية أيضاً. تذكر أنك لضرب كسرين تقوم بضرب البسطين معاً والمقامين معاً. لقسمة كسرين، فإنك تضرب في المعكوس الضربي أو مقلوب الكسر المعكوس عليه.

الضرب

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

القسمة

$$\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7}{2}$$

1 تبسيط التعابير النسبية

المثال 1 يوضح كيفية تحويل تعبير نسبي لأبسط صورة وتحديد القيم المستثناة.
مثال 2 يوضح كيفية استخدام الاختزال للإجابة على فترة الاختبار. **مثال 3** يوضح كيفية تحليل -1 إلى العوامل الأولية من أجل تحويل تعبير نسبي إلى أبسط صورة. **مثال 4** يوضح كيفية ضرب التعابير النسبية وقسمتها. **مثال 5** يوضح كيفية تحويل التعبير النسبي الذي يشتمل على كثيرات الحدود لأبسط صورة.

التقويم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجّه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. a. حوّل $\frac{3y(y + 7)}{(y + 7)(y^2 - 9)}$ إلى أبسط صورة.

b. تحت أي ظروف يكون هذا التعبير غير معرف؟ عندما تكون $y = -7$. $y = -3$ أو $y = 3$

2 مثال على الاختبار المعياري بأي

قيمة (قيم) تكون $\frac{p^2 + 2p - 3}{p^2 - 2p - 15}$ غير معرفة؟ B

- A 5 C 3, -5
B -3, 5 D 5, 1, -3

3. حوّل $\frac{a^4b - 2a^4}{2a^3 - a^3b}$ لأبسط صورة. -a

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السمورة البيضاء التفاعلية استخدم السمورة البيضاء للمساعدة في توضيح حذف العوامل المشتركة. اشطب على العوامل المشتركة أثناء تحويل التعبير لأبسط صورة. واسحب العوامل المتبقية لتكوين تعبير مبسط.

انتبه!

مفاهيم خاطئة شائعة وضح أن التعابير النسبية عادة ما تُستخدم دون استبعاد تلك القيم التي تجعل التعبير غير معرف بشكل محدد. من المعلوم أنه لم يتم تضمين تلك القيم التي تجعل للتعبير معنى.

المفهوم الأساسي	
ضرب التعابير النسبية	
الشرح	لضرب التعابير النسبية، اضرب البسوط معاً واضرب المقامات معاً.
الرموز	لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
قسمة التعابير النسبية	
الشرح	لقسمة التعابير النسبية، اضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.
الرموز	لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، و $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

نصيحة دراسية

حذف العوامل المشتركة
تأكد من حذف العوامل
المشتركة من البسط والمقام.

مثال 4 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

التحليل إلى العوامل.

$$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

اختصار العوامل المشتركة.

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot c \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

بسط.

$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$$

بسط.

$$= \frac{9c^2d}{4a}$$

b. $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

الضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.

$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$$

التحليل إلى العوامل.

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}$$

اختصار العوامل المشتركة.

$$= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}$$

بسط.

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot y \cdot y}{2 \cdot b \cdot x}$$

بسط.

$$= \frac{15y^2}{2bx}$$

تمرين موجّه

4A. $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$ acd

4B. $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$ $\frac{7a^2}{15b^2x^3}$

4C. $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$ $\frac{2t^2}{9a^2bm^2}$

4D. $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$ $\frac{4x^3}{5a^2b^4y^2}$

التركيز على محتوى الرياضيات

تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة

المهارة الأساسية اللازمة لضرب التعابير النسبية وقسمتها هي التحويل لأبسط صورة. بعد تغيير القسمة إلى ضرب عن طريق المعكوس الضربي للمقسوم، وضرب البسوط والمقامات، أكمل المسألة من خلال القسمة على العوامل المشتركة.

مثال إضافي

4 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{8x}{21y^3} \times \frac{7y^2}{16x^3} \cdot \frac{1}{6x^2y}$

b. $\frac{10mk^2}{3c^2d} \div \frac{5m^5}{6c^2d^2} \cdot \frac{4dk^2}{m^4}$

نصيحة للمعلمين الجدد

الاستفادة من المعرفة السابقة لمساعدة الطلاب في فهم السبب الذي يجعل القسمة عملية تعادل الضرب في المعكوس الضربي. ناقش أمثلة بسيطة مثل هذه: قسمة 18 كرة زجاجية على شخصين يعني أن يحصل كل شخص على نصف العدد أو 9 من الكرات الزجاجية.

التركيز على محتوى الرياضيات

القسمة على صفر بالتعريف، $\frac{a}{b} = c$ إذا كانت $a = bc$. إذا كان الطلاب يعتقدون أن $\frac{6}{0} = 0$ ، فاستخدم التعريف لإيضاح أن $\frac{6}{0} = 0$ إذا كانت $6 = 0 \times 0$. وهذا خطأ.

في بعض الأحيان، يتوجب عليك تحليل البسط و/أو المقام إلى العوامل أولاً قبل أن تتمكن من تحويل ناتج ضرب أو ناتج قسمة تعبير نسبي إلى أبسط صورة.

مثال 5 كثيرات الحدود في البسط والمقام

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6}$

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 8)(x + 2)}{(x - 8)(x - 8)} \cdot \frac{x - 8}{(x + 3)(x + 2)}$$

التحليل إلى العوامل

$$= \frac{\cancel{(x - 8)} \cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x - 8)} \cancel{(x - 8)}} \cdot \frac{\cancel{x - 8}}{(x + 3) \cancel{(x + 2)}}$$

اختصار العوامل المشتركة.

$$= \frac{1}{x + 3}$$

بسط.

b. $\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18}$

$$\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} = \frac{x^2 - 16}{12y + 36} \cdot \frac{y^2 - 3y - 18}{x^2 - 12x + 32}$$

الضرب في المعكوس الضربي.

$$= \frac{(x + 4)(x - 4)}{12(y + 3)} \cdot \frac{(y - 6)(y + 3)}{(x - 4)(x - 8)}$$

التحليل إلى العوامل

$$= \frac{(x + 4) \cancel{(x - 4)}}{12 \cancel{(y + 3)}} \cdot \frac{\cancel{(y - 6)} \cancel{(y + 3)}}{\cancel{(x - 4)} (x - 8)}$$

اختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{(x + 4)(y - 6)}{12(x - 8)}$$

بسط.

تمرين موجّه $\frac{2x - 5}{(x + 2)(x + 7)}$

5A. $\frac{8x - 20}{x^2 + 2x - 35} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{4x^2 - 16}$

5B. $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 21} \div \frac{x^2 - x - 12}{6x + 42} \cdot \frac{6x - 30}{(x + 3)^2}$

2 تحويل الكسور المركبة إلى أبسط صورة **الكسر المركب** هو تعبير نسبي له بسط و/أو مقام عبارة عن تعبير نسبي أيضاً. التعابير الآتية عبارة عن كسور مركبة.

$$\frac{\frac{c}{6}}{5d} \quad \frac{\frac{8}{x}}{x - 2} \quad \frac{\frac{x - 3}{8}}{\frac{x - 2}{x + 4}} \quad \frac{\frac{4}{a} + 6}{\frac{12}{a} - 3}$$

لتحويل كسر مركب إلى أبسط صورة، أعد كتابته أولاً على هيئة تعبير قسمة.

مثال 6 تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{\frac{a + b}{4}}{\frac{a^2 + b^2}{4}}$

$$\frac{\frac{a + b}{4}}{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{a + b}{4} \div \frac{a^2 + b^2}{4}$$

كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

$$= \frac{a + b}{4} \cdot \frac{4}{a^2 + b^2}$$

الضرب في المعكوس الضربي.

$$= \frac{a + b}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{a^2 + b^2} \text{ or } \frac{a + b}{a^2 + b^2}$$

بسط.

نصيحة دراسية

الانتظام عند تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة، فإن العوامل الموجودة إحدى كثيرات الحدود غالباً ما تظهر في كثيرات الحدود الأخرى. ففي المثال 5a، يظهر العامل $x - 8$ أربع مرات. استخدم هذه النصيحة كدليل عند تحليل عوامل كثيرات الحدود الصعبة.

مثال إضافي

5 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{k - 3}{k + 1} \times \frac{1 - k^2}{k^2 - 4k + 3} \quad -1$

b. $\frac{2d + 6}{d^2 + d - 2} \div \frac{d + 3}{d^2 + 3d + 2}$

$$\frac{2(d + 1)}{d - 1}$$

تدريس الممارسات في الرياضيات

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات إذا كانت العمليات الحسابية متكررة ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة مغلًا. شجّع الطلاب على فحص كافة العوامل المتضمنة، وليس فقط العوامل الموجودة في كل تعبير بشكل منفرد.

2 تبسيط الكسور الجبرية المركبة المتضمنة تعابير نسبية

مثال 6 يوضح كيفية تبسيط كسر مركب يتضمن تعبير نسبي عن طريق إعادة كتابته باعتباره تعبير قسمة.

إذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في التعامل مع هذه المسائل،

إذا شجعهم على استخدام العديد من الخطوات، مع كتابة كل واحدة تحت السابقة والحفاظ على إبقاء كل خط تحت الخط السابق له. نبههم إلى إجراء تغيير واحد فقط في كل خطوة.

مثال إضافي

6 حوّل لأبسط صورة

$$\frac{\frac{x^2}{9x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^3}{2y - 3x}}{\frac{-1}{3x^2 + 2xy}}$$

نصيحة للمعلمين الجدد

الاستنتاج ساعد الطلاب في فهم سبب كون ناتج قسمة كل من $(x - y)$ و $(y - x)$ يكون -1 بالإشارة إلى أن هذين التعبيرين متقابلين (أو معكوسين جمعيين)، تمامًا مثل 2 و -2 .

تدريس الممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا جواب صحيح؟"

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 12 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

b. $\frac{\frac{x^2}{x^2 - y^2}}{\frac{4x}{y - x}}$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x^2}{x^2 - y^2}}{\frac{4x}{y - x}} &= \frac{x^2}{x^2 - y^2} \div \frac{4x}{y - x} \\ &= \frac{x^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{y - x}{4x} \\ &= \frac{x \cdot x}{(x + y)(x - y)} \cdot \frac{(-1)(x - y)}{4x} \\ &= \frac{x \cdot \cancel{x}}{(x + y)(\cancel{x - y})} \cdot \frac{(-1)(\cancel{x - y})}{4\cancel{x}} \\ &= \frac{-x}{4(x + y)} \end{aligned}$$

كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

الضرب في المعكوس الضربي.

التحليل إلى العوامل.

اختصار العوامل المشتركة

بسط

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\frac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}} \quad \frac{(2x-5)(x-2)}{(x+2)(x-4)(x-1)}$

6B. $\frac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}} \quad \frac{-x-y}{y-7}$

التحقق من فهمك

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

مثال 1

1. $\frac{x^2 - 5x - 24}{x^2 - 64} \cdot \frac{x+3}{x+8}$

2. $\frac{c+d}{3c^2-3d^2} \cdot \frac{1}{3(c-d)}$

3. الاختيار من متعدد حدد جميع قيم x التي يكون عندها $\frac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرفة. D

مثال 2

A -7, 4

B 7, 4

C 4, -7, 7

D -4, 7

الأمثلة 3-6 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

4. $\frac{y^2 + 3y - 40}{25 - y^2} \cdot \frac{y+8}{y+5}$

5. $\frac{a^2x - b^2x}{by - ay} \cdot \frac{-x(a+b)}{y}$

6. $\frac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \frac{8z}{9xy^3} \cdot \frac{3x}{2z^2}$

7. $\frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b} \cdot \frac{2x^2}{3aby^2}$

8. $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 6x + 8} \cdot \frac{x-4}{x^2 - 2x - 35} \cdot \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$

9. $\frac{a^2 - b^2}{3a^2 - 6a + 3} \div \frac{4a + 4b}{a^2 - 1} \cdot \frac{(a-b)(a+1)}{12(a-1)}$

10. $\frac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}} \cdot \frac{ab^2x}{y^3}$

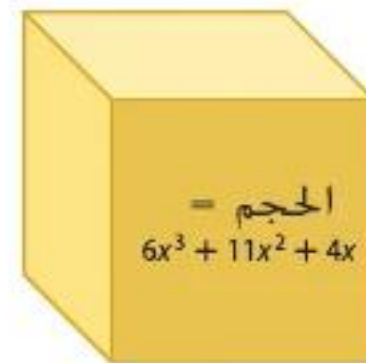
11. $\frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}} \cdot 4$

12. **التبرير المنطقي** يمكن تمثيل حجم حاويات الشحن ذات شكل متوازي مستطيلات بـ $6x^3 + 11x^2 + 4x$ حيث يكون الارتفاع x .

a. جد طول الحاوية وعرضها. $2x + 1, 3x + 4$

b. جد النسبة بين الأبعاد الثلاثة للحاوية عندما تكون $x = 2$. $2 : 5 : 10$

c. هل ستكون النسبة بين الأبعاد الثلاثة واحدة لجميع قيم x ؟ لا



تدريس المهارات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. يستتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلاً منطقيًا للمسألة التي يحلها؛ والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

مثال 1

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

13. $\frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12} \cdot \frac{x(x+6)}{x+4}$ 14. $\frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)} \cdot \frac{y(y+1)}{2(y-4)}$
15. $\frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)} \cdot \frac{(x+3)(x-z)}{4}$ 16. $\frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)} \cdot \frac{1}{x+8}$
17. $\frac{x^2(x+2)(x-4)}{6x(x^2+x-20)} \cdot \frac{x(x+2)}{6(x+5)}$ 18. $\frac{3y(y-8)(y^2+2y-24)}{15y^2(y^2-12y+32)} \cdot \frac{(y+6)}{5y}$

مثال 2

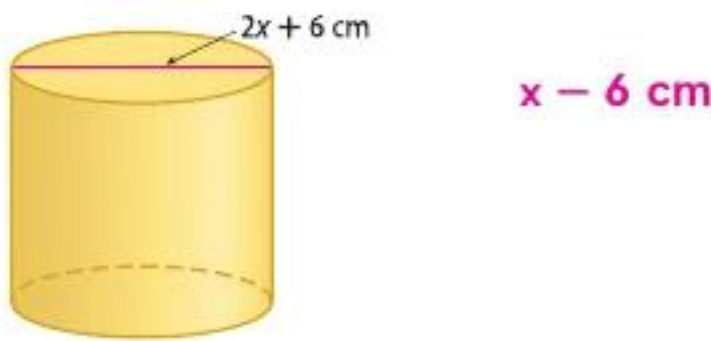
19. اختيار من متعدد حدد جميع قيم x التي تكون عندها $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة.

- F 3, -6 G 4, 6 H -6, 6 J -6, 3, 4, 6

مثال 3

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

20. $\frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2} \cdot \frac{x+2}{x+4}$ 21. $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54} \cdot \frac{x^2}{x+6}$
22. $\frac{(x-4)(x^2+2x-48)}{(36-x^2)(x^2+4x-32)} \cdot \frac{1}{x+6}$ 23. $\frac{16-c^2}{c^2+c-20} \cdot \frac{c+4}{c+5}$



24. الهندسة يبلغ حجم الأسطوانة الموضحة على اليسار $(x+3)(x^2-3x-18)\pi \text{ cm}^3$. جد ارتفاع الأسطوانة.

الأمثلة 4-6 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

25. $\frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f} \cdot \frac{c}{4ab^2f^2}$ 26. $\frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z} \cdot \frac{7z^2}{18w^5y}$
27. $\frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2} \cdot \frac{32b}{3ac^3f^2}$ 28. $\frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2} \cdot \frac{15y^3}{2xz}$
29. $\frac{15a^2b^2}{21ac} \cdot \frac{14a^4c^2}{6ab^3} \cdot \frac{5a^4c}{3b}$ 30. $\frac{14c^2f^5}{9a^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3} \cdot \frac{4b^3cf}{5a}$
31. $\frac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \frac{y^2-9y+18}{y^2-9} \cdot y+5$ 32. $\frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d} \cdot \frac{c+2}{c(c-d)}$
33. $\frac{x^2+9x+20}{8x+16} \cdot \frac{4x^2+16x+16}{x^2-25} \cdot \frac{(x+4)(x+2)}{2(x-5)}$ 34. $\frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4} \cdot \frac{(a+1)(a-2)}{4(a-5)(a-1)}$
35. $\frac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}} \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{6(x+7)}$ 36. $\frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}} \cdot \frac{6}{z}$
37. $\frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}} \cdot \frac{-a^2(a+b)}{b^4}$ 38. $\frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}} \cdot \frac{b-a}{x+y}$

39. التبرير في نهاية مسيرته من لعبة كرة السلة بالمدرسة الثانوية، أحرز مجيد 33 هدفًا من 121 محاولة.

a. اكتب نسبة تعبر عن النسبة بين عدد الأهداف المحرزة إلى محاولات التسديد لمجيد في نهاية مسيرته كلاعب بالمدرسة الثانوية. $\frac{33}{121}$

b. افترض أن مجيد حاول إحراز عدد a من الأهداف ونجح في تسديد m أهداف خلال عامه الأول بالمدرسة. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين عدد الأهداف المحرزة في مسيرته إلى عدد الأهداف التي حاول تسديدها في نهاية عامه الأول بالمدرسة. $\frac{33+m}{121+a}$

70 | الدرس 2-1 | ضرب التعابير النسبية وقسمتها

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

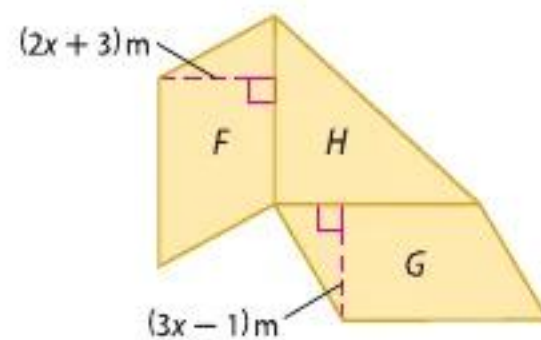
المستوى	الواجب	خيار اليومي
AL مبتدئ	13-39, 59-60, 62-86	13-39, 66-69, 66-69, 66-69
OL أساسي	13-39, 40, 41-55, 56-60, 62-86	13-39, 66-69, 66-69, 66-69
BL متقدم	40-80, (اختياري: 81-86)	

ملاحظات لحل التمرين

القانون بالنسبة للتمرين 52، سيحتاج الطلاب لمعرفة قانون حجم منشور مستطيل، $V = Bh$ ، حيث إن B هي مساحة القاعدة، و h هي الارتفاع. بالنسبة للتمرين 80، سيحتاج الطلاب إلى معرفة قانون حجم منشور مستطيل، $V = \ell wh$ ، حيث إن ℓ هي الطول، و w هي العرض، و h هي الارتفاع.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف، ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.



40. الهندسة مساحة متوازي الأضلاع F تبلغ $8x^2 + 10x - 3$ متر مربع وارتفاعه $2x + 3$ متر. أما متوازي الأضلاع G فتبلغ مساحته $6x^2 + 13x - 5$ متر مربع وارتفاعه $3x - 1$ متر. جد مساحة المثلث H .

$$\frac{1}{2} (8x^2 + 18x - 5) m^2$$

41. التلوث تمثل الدالة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُكَّ تسرب نفطي من أنبوب مكسور بأحد الحفارات، حيث T هي سُمك البقعة النفطية بالمليمتر، و x هي البُعد عن مكان الكسر بالأمتار.

a. حوّل الدالة لأبسط صورة. $T(x) = \frac{0.4}{x+3}$

b. كم يبلغ سُمك البقعة التي على بُعد 100 m من مكان الكسر؟ حوالي 3.9 mm

$$44. \frac{(3-x)(2x-1)}{(x+3)(2x+1)}$$

45. حوّل كل تعبير لأبسط صورة. $\frac{x(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-7)}$

$$47. \frac{15y^3}{4a^2cxz}$$

$$42. \frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \times \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4} \times \frac{x-2}{3(2x+1)}$$

$$43. \frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3} \times \frac{1}{4}$$

$$49. \frac{2(4x+1)(2x+1)}{5(2x-1)(x+2)}$$

$$44. \frac{9-x^2}{x^2-4x-21} \times \left(\frac{2x^2+7x+3}{2x^2-15x+7} \right)^{-1}$$

$$45. \left(\frac{2x^2+2x-12}{x^2+4x-5} \right)^{-1} \times \frac{2x^3-8x}{x^2-2x-35}$$

$$46. \left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2} \right)^3 \times \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3} \times \frac{18y^8}{5a^2cx^4}$$

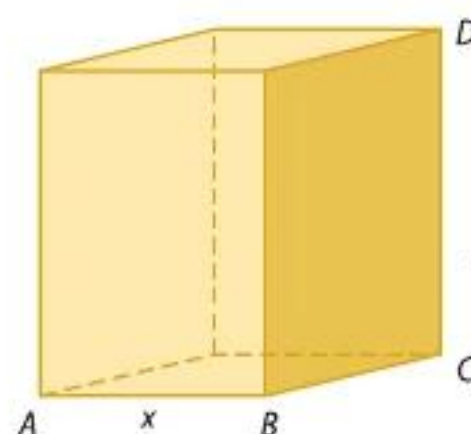
$$47. \frac{20x^2y^6z^{-2}}{3a^3c^2} \times \left(\frac{16x^3y^3}{9acz} \right)^{-1}$$

$$\frac{3bc^2}{8y^2}$$

$$49. \frac{\frac{8x^2-10x-3}{10x^2+35x-20}}{\frac{2x^2+x-6}{4x^2+18x+8}}$$

$$50. \frac{\frac{2x^2+7x-30}{-6x^2+13x+5}}{\frac{4x^2+12x-72}{3x^2-11x-4}} \times \frac{x-4}{-4(x-3)}$$

$$\frac{2x+1}{-9x(x+2)}$$



52. الهندسة تبلغ مساحة قاعدة متوازي المستطيلات الموجود على اليسار 20 cm^2

a. جد طول $\overline{BC}$ بدلالة x . $\frac{20}{x}$

b. إذا كان $DC = 3BC$ فحدد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x . $\frac{1200}{x}$

c. حدد حجم المتوازي بدلالة x .

$$56b. \frac{25}{27}$$

الإجابة النموذجية:
تقطع الطائرة الثانية مسافة أكبر قليلاً عن الطائرة الأولى.
56c. $x = -6$

الإجابة النموذجية:
عندما تكون $x = -6$ ، فسوف تسافر الطائرة الأولى لمدة 0 ساعة وسوف تسافر الطائرة الثانية بمعدل 0 km/h

$$53. \frac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \times \frac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \frac{6x^2-18x-60}{x^3-4x}$$

$$\frac{x(x-2)(x+8)}{2(2x-1)(3x+1)}$$

$$54. \frac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \frac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \times \frac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24}$$

$$\frac{(4x-1)^2(3x+1)(x+1)}{12(x+2)(x-4)(x^2-10x+6)}$$

$$55. \frac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \frac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \frac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12}$$

$$\frac{-2(x-8)(x+4)(x-2)(x+1)}{(2x+1)^2(x^2+2x-6)}$$

56. المثابرة استخدم الصيغة $d = rt$ والمعلومات التالية.

تسافر طائرة بمعدل r من 500 km/h لمدة t من $(6+x)$ ساعات.

وتسافر طائرة أخرى بمعدل r من $(540+90x)$ km/h لمدة t من 6 ساعات.

a. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين المسافة المخطوعة d للطائرة الأولى والمسافة المخطوعة d للطائرة الثانية.

b. حوّل التعبير النسبي لأبسط صورة. ما الذي يخبرك به هذا التعبير عن المسافتين المخطوعتين لكلتا الطائرتين؟

c. تحت أي ظرف يكون التعبير النسبي غير معرف؟ صف ما يخبرك به هذا الظرف عن الطائرتين.

$$\frac{(500)(6+x)}{(540+90x)(6)}$$

تدريس الممارسات في الرياضيات

النقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين فعالية فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم أو القويم وبين المنطق الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، يستطيعون توضيح ماهية هذا الخطأ.

إجابات إضافية

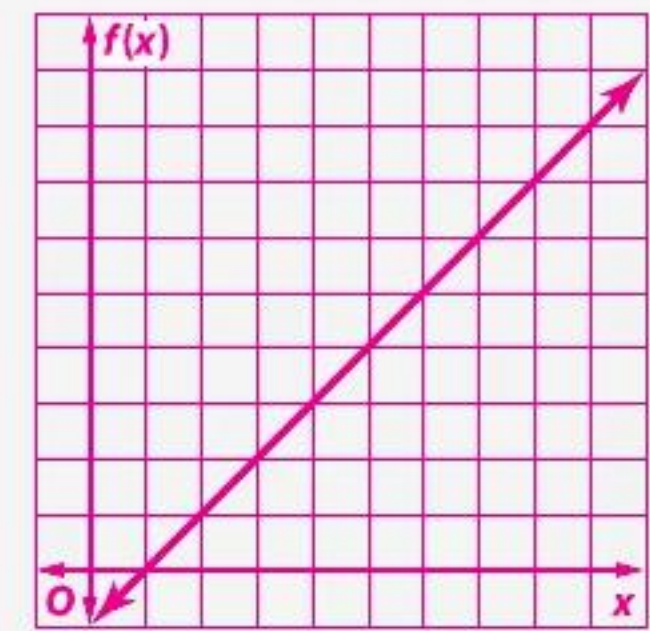
58b.

x	0	1	2	3
f(x)	-1	0	1	2
g(x)	-1	0	1	2

x	4	5	6	7
f(x)	ERR	4	5	6
g(x)	3	4	5	6

x	8	9	10
f(x)	7	8	9
g(x)	7	8	9

58d.



تبدو التمثيلات البيانية متشابهة على حاسبة التمثيل البياني. لكن $f(x)$ غير معرفة لكل من $f(4)$ و $g(4) = 3$.

62. $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ لا تنتمي

لثلاثة الأخرى. التعابير الثلاثة الأخرى تعابير نسبية.

بما أن مقام $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$

ليس كثير الحدود، $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ لا يعتبر

تعبير نسبي.

63. الإجابة النموذجية: أحيانًا، مع مقام مثل $x^2 + 2$ ، حيث لا يساوي المقام 0، يمكن تعريف التعبير النسبي لكافة قيم x .

65. الإجابة النموذجية: عندما يكون التعبير الأصلي مُحَوَّلًا لأبسط صورة، يتم الحصول على العامل x من المقام. إذا كانت x تساوي 0، فعندئذ سيكون التعبير غير معرف. وبالتالي، فإن التعبير المحول لأبسط صورة يعتبر أيضًا غير معرف لـ x .

57. **القطارات** في محاولة للوصول إلى ساحة القطارات، كانت جميع القطارات متوقفة في صف لمسافة 3.2 km على طول نظام الخطوط. افترض أن كل عربة تشغل مسافة متوسطها 22.9 m من الخط وأن ساحة القطارات تضم 5 خطوط.

a. اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لتحديد عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين.

b. كم عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين؟ 704. $557a$ مسارات. $\frac{2 \text{ mi}}{\text{مسار واحد}} \cdot \frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}} \cdot \frac{1 \text{ سيارة}}{75 \text{ ft}}$

c. افترض أن هناك 8 مراقبين يقومون على إجراء فحوصات السلامة لكل عربة وأن فحص كل عربة يستغرق متوسط 45 ثانية. فكم عدد الساعات بالتقريب التي سيستغرقها فحص جميع العربات في الصف حتى يتم إخراجها؟ 70.4 h

58. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف تمثيل الدالة النسبية بيانيًا. b, d. انظر الهامش.

a. جبريًا حوّل لأبسط صورة $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

b. جدوليًا افترض أن $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$. استخدم التعبير الذي كتبته

في الجزء a لكتابة الدالة ذات الصلة $g(x)$. استخدم حاسبة التمثيل البياني

لعمل جدول لكلتا الدالتين عندما يكون $0 \leq x \leq 10$.

c. تحليليًا ما قيمة $f(4)$ و $g(4)$ ؟ اشرح أهمية هذه القيم.

d. بيانيًا مثل بياني الدالتين على حاسبة التمثيل البياني. استخدم وظيفة TRACE

لاستكشاف كل تمثيل بياني مستخدمًا المفاتيح $\blacktriangle$ و $\blacktriangledown$ للتنقل بين التمثيلات البيانية. قارن بين التمثيلات البيانية وبيّن الفرق بينها.

e. لفظيًا ما الذي يمكنك استنتاجه عن التعابير والدوال؟

التعابير والدوال متكافئة ما عدا عندما تكون $x = 4$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

59. **التبرير** قارن بين $(x-6)(x+2)$ و $(x-6)(x+2)(x+3)$ ووضح الفرق بينهما.

60. **التفكير النقدي** قام حميد وحماّد بتحويل $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$ لأبسط صورة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

$$\begin{aligned} \text{حماّد} \\ \frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} &= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4} \\ &= \frac{x+y}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حميد} \\ \frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} &= \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x} \\ &= \frac{-4}{x+y} \end{aligned}$$

61. **التحدي** جد التعبير الذي يجعل العبارة التالية حقيقية. $x^2 + x - 6$

$$\frac{x-6}{x+3} \cdot \frac{x}{x-6} = x-2$$

62. أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة؟ حدد التعبير الذي لا ينتمي إلى التعابير الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

$$\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x-5}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$$

$$\frac{x^2 + 1}{3}$$

63. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

تكون الدالة النسبية التي تحتوي على متغير في المقام مُعرّفة لجميع قيم x الحقيقية.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا نسبيًا ليصبح $\frac{x-1}{x+4}$ بعد تحويله لأبسط صورة. **الإجابة النموذجية:** $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$

65. **الكتابة في الرياضيات** تم تحويل التعبير النسبي $\frac{x^2 + 3x}{4x}$ لأبسط صورة فأصبح $\frac{x+3}{4}$. اشرح لماذا يكون التعبير الجديد غير مُعرّف لجميع قيم x . انظر الهامش.

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب وصف كيف يعتقدون أن ممارستهم لضرب التعابير النسبية وتحويلها لأبسط صورة ستساعدتهم عند جمع أو طرح التعابير النسبية.

68. تبلغ تكلفة خطة الهاتف المحمول الشهرية AED 39.99 مقابل 300 دقيقة و 20 فلسًا لكل دقيقة بعد ذلك. أي مما يلي يمثل إجمالي الفاتورة الشهرية (بالدرهم) عند التحدث لمدة x دقيقة إذا كانت x أكبر من 300؟ **B**
- A $39.99 + 0.20(300 - x)$
B $39.99 + 0.20(x - 300)$
C $39.99 + 0.20x$
D $39.99 + 20x$

69. **إجابة مختصرة** بكم متر مربع تتجاوز مساحة دائرة يبلغ قطرها 6 m المساحة المجتمعة لدائرة قطرها 4 m ودائرة قطرها 2 m معًا؟ **4π**

تمرين على الاختبار المعياري

66. SAT/ACT ترغب عائلة ناصر في قطع مسافة متوسطة 250 km في اليوم أثناء إجازتهم. في أول خمسة أيام، قطعوا 220 km و 300 km و 210 km و 275 km و 240 km. فكم عدد الكيلومترات التي يجب عليهم قطعها في اليوم السادس لتحقيق هدفهم؟ **C**
- 235 km A
251 km B
255 km C
275 km D
315 km E

67. أي من المعادلات التالية يعبر عن العلاقة بين T و N في الجدول؟ **J**

N	1	2	3	4	5	6
T	1	4	7	10	13	16

- F $T = 2 - N$ H $T = 3N + 1$
G $T = 4 - 3N$ J $T = 3N - 2$

مراجعة شاملة

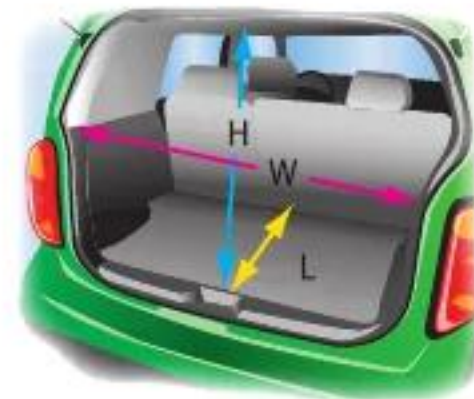
70. **أنتروبولوجيا** وجد أحد علماء الأنثروبولوجيا الدارسين لعظام الإنسان الأول أن هناك كمية ضئيلة جدًا من (الكربون-14) متبقية في العظام بحيث لا تستطيع الأدوات قياسها. وهذا يعني أن هناك أقل من 5.0% من كمية (الكربون-14) التي احتوت عليها العظام عندما كان الإنسان على قيد الحياة. إذا كان عمر النصف (للكربون-14) هو 5760 عامًا، فمتى توفي ذلك الإنسان؟ **منذ أكثر من 44.000 عام**
- حل كل من المعادلات التالية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

71. $3e^x + 1 = 5$ **0.2877** 72. $2e^x - 1 = 0$ **-0.6931** 73. $-3e^{4x} + 11 = 2$ **0.2747** 74. $8 + 3e^{3x} = 26$ **0.5973**

75. **قانون الضوضاء** تم اقتراح قانون للمدينة بجرم إصدار صوت في منطقة سكنية بشدة تتجاوز 72 ديسيبل خلال النهار و 55 خلال الليل. بكم ضعف تزيد شدة مستوى الضوضاء المسموح به خلال النهار عن الليل؟ **$10^{1.7}$ أو حوالي 50 ضعفًا**

حوّل لأبسط صورة.

76. $\sqrt{50x^4} \cdot 5x^2 \cdot \sqrt{2}$ 77. $\sqrt[3]{16y^3} \cdot 2y^3 \cdot \sqrt{2}$ 78. $\sqrt{18x^2y^3} \cdot 3|x|y\sqrt{2y}$ 79. $\sqrt{40a^3b^4} \cdot 2ab^2 \cdot \sqrt{10a}$



80. **السيارات** طول مساحة الشحن في سيارة رياضية متعددة الأغراض أكبر من ارتفاع تلك المساحة بـ 10.16 cm. ويقل عرض المساحة عن ضعف الارتفاع بـ 40.6 cm. إذا كان الحجم الإجمالي لمساحة الشحن $906,139.1 \text{ cm}^3$

$$a. V = 2h^3 - 8h^2 - 64h$$

a. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل حجم مساحة الشحن.

b. هل ستتنسج مساحة الشحن لو وضع صندوق طوله 61 cm وعرضه 111.8 cm وارتفاعه 86.4 cm؟ اشرح.

لا؛ فأبعاد المساحة هي 32 cm، 48 cm، 36 cm. لذا سيكون الصندوق عاليًا جدًا ليتناسب معها.

مراجعة المهارات

- حوّل لأبسط صورة. 82. $-3x^2 - 7x + 8$ 83. $-3y - 3y^2$ 86. $x^3 - x^2 + x + 3$
81. $(2a + 3b) + (8a - 5b)$ **$10a - 2b$** 82. $(x^2 - 4x + 3) - (4x^2 + 3x - 5)$ 83. $(5y + 3y^2) + (-8y - 6y^2)$
84. $2x(3y + 9)$ **$6xy + 18x$** 85. $(x + 6)(x + 3)$ **$x^2 + 9x + 18$** 86. $(x + 1)(x^2 - 2x + 3)$

التدريس المتميز

التوسع لإعداد الطلاب للدرس التالي وبناء قاعدة قوية للعمل المستقبلي مع التعابير النسبية. أعطهم تعبيرًا مثل $\frac{5x^2(x^2 + 3)}{5x(x + 3)}$. اطلب منهم الشرح بالتفصيل ونقل أساسيات الحساب، ولماذا يمكن قسمة الخمسات وليس الثلاثات. وأيضًا وضح لماذا يمكن قسمة أول x^2 و x على x للتحويل لأبسط صورة. ولكن ليس تلك الموجودة بين قوسين. ينبغي أن تذكر تفسيرات الطلاب أنه يمكن قسمة العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام، ولكن ليس المصطلحات التي تعتبر أجزاء من كثيرات الحدود. استبدال عدد مثل 2 بالرمز x قد يساعد بعض الطلاب في الوصول إلى هذا الفهم.

جمع التعابير النسبية وطرحها

2-2

لماذا

الحالي

السابق



• بينما تتحرك سيارة إطفاء تجاه شخص، فإن حدة صوت الصافرة تكون أعلى إلى ذلك الشخص عما تكون عليه عندما تكون السيارة ساكنة. وهذا يرجع إلى أن الموجات الصوتية تتضاغط مقتربة من بعضها البعض. وهو ما يُشار إليه باسم تأثير دوبلر. يمكن تمثيل تأثير دوبلر بالتعبير النسبي $P_0 \left(\frac{s_0}{s_0 - v} \right)$ حيث P_0 هو حدة الصوت الفعلية للصارف، و v هو سرعة سيارة الإطفاء، و s_0 هو سرعة الصوت في الهواء.

1 تحديد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود.

2 جمع التعابير النسبية وطرحها.

3 جمع وطرح التعابير كثيرة الحدود.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-2 جمع التعابير كثيرة الحدود وطرحها.

الدرس 2-2 تحديد العامل المشترك الأصغر لكثيرات الحدود. جمع التعابير النسبية وطرحها.

بعد الدرس 2-2 حل المعادلات والمتباينات النسبية.

مهارسات في الرياضيات
3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- هل يمكن التحليل إلى عوامل $\frac{s_0}{s_0 - v}$ إلى $s_0 \left(\frac{1}{1 - v} \right)$ ؟ اشرح. لا؛ s_0 ليس عامل مشترك.
- لضرب P_0 مرات في $\frac{s_0}{s_0 - v}$ ، هل تحتاج إلى مقام مشترك؟ لا

1 المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد العامل المشترك الأصغر لمجموعة من كثيرات الحدود.

1 المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود مثلما هو الحال مع الأعداد النسبية التي لها شكل كسري. يجب إيجاد المقام المشترك الأصغر لجمع أو طرح تعبيرين نسبيين لهما مقامان مختلفان. والمقام المشترك الأصغر هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.

عند إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعدد من أكثر أو لكثيري حدود، فحللها إلى عواملها. يحتوي المضاعف المشترك الأصغر على كل عامل بأكبر عدد مرات يمكن أن تظهر فيها كعامل.

كثيرات الحدود

$$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$$

أعداد

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$$

المضاعف المشترك الأصغر لـ 6 و 9 هو 18 = 2 × 3 × 3
المضاعف المشترك الأصغر لـ 2 و 2x² - 2 هو 2x² - 2 = 2 × (x - 1)(x + 1)
المضاعف المشترك الأصغر لـ 2x² - 3x + 2 و x² - 3x + 2 هو 2(x - 1)(x - 2)(x + 1)

مثال 1 المضاعف المشترك الأصغر لأحاديات الحدود وكثيرات الحدود

جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

a. $6xy$ و $15x^2$ و $9xy^4$

$$6xy = 2 \times 3 \times x \times y$$

$$15x^2 = 3 \times 5 \times x^2$$

$$9xy^4 = 3 \times 3 \times x \times y^4$$

استخدم كل عامل بأكبر عدد مرات يظهر به. $x^2 \times y^4 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2$ = المضاعف المشترك الأصغر = $90x^2y^4$ ثم بسّط.

التحليل إلى العوامل لأحادية الحدود الأولى.

التحليل إلى العوامل لأحادية الحدود الثانية.

التحليل إلى العوامل لأحادية الحدود الثالثة.

b. $y^4 + 8y^3 + 15y^2$ و $y^2 - 3y - 40$

$$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$$

$$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$$

استخدم كل عامل أكبر عدد مرات يظهر به. $y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$ = المضاعف المشترك الأصغر

التحليل إلى العوامل كثيرة الحدود الأولى.

التحليل إلى العوامل كثيرة الحدود الثانية.

استخدم كل عامل أكبر عدد مرات يظهر به.

تمرين موجّه $4a(a - 4)(a - 5)(a + 1)$

1A. $12a^2b$, $15abc$, $8b^3c^4$ $120a^2b^3c^4$

1B. $4a^2 - 12a - 16$ و $a^3 - 9a^2 + 20a$

2 جمع التعابير النسبية وطرحها مثلما هو الحال مع الكسور، يجب أن يكون للتعابير النسبية مقامات مشتركة لكي يمكن جمعها أو طرحها.

المفهوم الأساسي

جمع التعابير النسبية	
الشرح	لجمع التعابير النسبية، جد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجر عملية الجمع.
الرموز	لجميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، حيث $d \neq 0$ و $b \neq 0$ ، $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
طرح التعابير النسبية	
الشرح	لطرح التعابير النسبية، جد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجر عملية الطرح.
الرموز	لجميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، حيث $d \neq 0$ و $b \neq 0$ ، $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

مثال إضافي

- 1 أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.
- a. $15a^2bc^3$ و $16b^5c^2$ و $20a^3c^6$ **$240a^3b^5c^6$**
- b. $x^3 - x^2 - 2x$ و $x^2 - 4x + 4$ **$x(x+1)(x-2)^2$**

2 جمع التعابير النسبية وطرحها

المثال 2 يوضح كيفية جمع تعبيرين نسبيين مع مقامات أحادية الحد. **المثال 3** يوضح كيفية طرح تعبيرين نسبيين مع مقامات كثيرة الحدود. **المثال 4** و **المثال 5** يوضحان كيفية تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

أمثلة إضافية

- 2 حوّل $\frac{5a^2}{6b} + \frac{9}{14a^2b^2}$ لأبسط صورة. **$\frac{35a^4b + 27}{42a^2b^2}$**
- 3 حوّل $\frac{x+10}{3x-15} - \frac{3x+15}{6x-30}$ لأبسط صورة. **$-\frac{1}{6}$**

مثال 2 المقامات أحادية الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$

المقام المشترك الأصغر $8x^3y^2$

$$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} = \frac{3y}{2x^3} \times \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \times \frac{x^2}{x^2}$$

ضرب الكسور.

$$= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$

جمع البسط.

$$= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2}$$

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

2A. $\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$ **$\frac{8 + 9a^2bc}{10a^3b^2}$**

2B. $\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$ **$\frac{15a^5 - 128bx}{80a^3b^2}$**

ويستخدم أيضًا المقام المشترك الأصغر لدمج تعابير نسبية ذات مقامات كثيرة الحدود.

مثال 3 المقامات كثيرة الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

تحليل المقامين إلى عواملهما.

$$\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6} = \frac{5}{6(x-3)} - \frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$

الضرب في العوامل المفقودة.

$$= \frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)} - \frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$

طرح البسط.

$$= \frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)} = \frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$

بسط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3A. $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$ **$\frac{x+7}{5(x+2)(x-3)}$**

3B. $\frac{x-8}{4x^2+21x+5} + \frac{6}{12x+3}$ **$\frac{3x+2}{(4x+1)(x+5)}$**

نصيحة دراسية

تبسيط التعابير النسبية يعدّ جمع أو طرح تعابير نسبية، قد يكون تبسيط التعبير الناتج أمرًا ممكنًا.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر العديد من الطلاب للعمل على أمثلة أمام الصف الدراسي. تأكد من شرحهم لكيفية إيجاد العامل المشترك الأصغر بوضوح.

انتبه!

تجنّب الأخطاء اطلب من الطلاب مناقشة الفروق بين إجراءات جمع وضرب الكسور. من الضروري أن يتعرفوا لماذا تكون المقامات المشتركة مطلوبة للجمع ولكن ليس للضرب.

أمثلة إضافية

4 حوّل $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ لأبسط صورة.

$\frac{a+b}{a-ab}$ أو $\frac{a+b}{a(1-b)}$

5 حوّل $\frac{2}{x} - 1$ لأبسط صورة.

$\frac{2y-xy}{x-3y}$

التركيز على محتوى الرياضيات

التعابير المكافئة عندما تحصل التعابير النسبية على نفس المقامات استعدادًا للجمع أو الطرح، فإنها تكون مكافئة للتعابير الأصلية. ضرب تعبير نسبي في صيغة من صيغ 1 مثل $\frac{6x}{6x}$ أو $\frac{y-3}{y-3}$ لا يغير من قيمة التعبير.

نصيحة دراسية

حدود غير معروفة تذكر أن هناك قيودًا على المتغيرات الموجودة في المقام.

مثال 4 الكسور المركبة ذات مقامات مشتركة صغرى مختلفة

حوّل لأبسط صورة $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} &= \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{y}{y} - \frac{x}{y}} \\ &= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}} \\ &= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y} \\ &= \frac{x+1}{x} \times \frac{y}{y-x} \\ &= \frac{xy+y}{xy-x^2} \end{aligned}$$

المقام المشترك الأصغر للبسط هو x .
المقام المشترك الأصغر للمقام هو y .

تحويل البسط والمقام لأبسط صورة.

الكتابة على هيئة تعبير قسمة.

الضرب في المعكوس الضربي للمقام عليه.

بسط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

4A. $\frac{1 - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} \cdot \frac{xy - y^2}{x + y}$

4B. $\frac{\frac{c}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{d}{c} + 2} \cdot \frac{c^2 - d^2}{d^2 + 2cd}$

طريقة أخرى لتحويل الكسر المركب إلى أبسط صورة هي إيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات. وبعد ذلك، يتم اختزال جميع المقامات بضربها في المقام المشترك الأصغر.

مثال 5 الكسور المركبة ذات مقامات مشتركة صغرى متماثلة

حوّل لأبسط صورة $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot xy}{\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot xy} \\ &= \frac{xy + y}{xy - x^2} \end{aligned}$$

المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات هو xy .
بالضرب في $\frac{xy}{xy}$

توزيع xy

لاحظ أن المسألة ذاتها قد خلّت في المثالين 4 و 5 باستخدام طرق مختلفة، وكلتاها نتجت عنه الإجابة نفسها. وبالتالي، فإن طريقة حل المسائل المشابهة لتلك متروكة لاختيارك.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

5A. $\frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{y} - \frac{4}{x}} \cdot \frac{xy + 2y}{3x - 4y}$

5B. $\frac{\frac{1}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{1}{c} + 6} \cdot \frac{c - d^2}{d + 6cd}$

5C. $\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \cdot \frac{x + y}{x - y}$

5D. $\frac{\frac{a}{b} + 1}{1 - \frac{b}{a}} \cdot \frac{a(a + b)}{b(a - b)}$

التدريس المتميّز

إذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في جمع التعابير النسبية وطرحها.

إذا اطلب من الطلاب العمل مع زميل، واحد في دور المدرب والآخر في دور الرياضي. يعمل الرياضي على مسألة ما باستخدام الخطوات ويشرح طريقة التفكير، فيما يستمع المدرب ويتربص الأخطاء، ويصححها متى أمكن. ثم يقوم الزميلان بتبادل الأدوار.

مثال 1

جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

1. $16x, 8x^2y^3, 5x^3y, 80x^3y^3$
2. $7a^2, 9ab^3, 21abc^4, 63a^2b^3c^4$
3. $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15, 3y(y-3)(y-5)$
4. $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4, x(x+2)(x-2)(x-8)$

المثالان 2-3 حول كل تعبير لأبسط صورة.

5. $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3} = \frac{48y^4 + 25x^2}{20xy^3}$
6. $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3} = \frac{35a^2 + 9b^3}{42a^3b}$
7. $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3} = \frac{21b^4 - 2}{36ab^3}$
8. $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d} = \frac{7c^2y^2 - 12dx}{56c^4d^2}$
9. $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x+6} = \frac{9x+15}{(x+3)(x+6)}$
10. $\frac{8}{y-3} + \frac{2y-5}{y^2-12y+27} = \frac{10y-77}{(y-3)(y-9)}$
11. $\frac{4}{3x+6} - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x-11}{3(x+2)(x-2)}$
12. $\frac{3a+2}{a^2-16} - \frac{7}{6a+24} = \frac{11a+40}{6(a+4)(a-4)}$

13. هندسة جد محيط المستطيل.

$$\frac{14x-10}{(x+1)(x-2)} \quad \frac{3}{x-2} \quad \frac{4}{x+1}$$

المثالان 4-5 حول كل تعبير لأبسط صورة.

14. $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{4x+2}{3x-2}$
15. $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}} = \frac{3y+2}{y+3}$
16. $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}} = \frac{3y+2x}{xy+4x}$
17. $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}} = \frac{2a+5b}{3b-8a}$

تمرين وحل المسائل

مثال 1

جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

18. $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3, 120a^2bc^3d^4$
19. $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2, 180x^2y^4z^2$
20. $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$
21. $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24, 28, \frac{17x+58}{(x-8)(x+2)(x+5)}$

المثالان 2-3 المثابة حول كل تعبير لأبسط صورة.

22. $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3} = \frac{15abc^3 + 2af}{72bc^4f^4}$
23. $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z} = \frac{28by^2z - 9bx}{105x^3y^4z}$
24. $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2} = \frac{25ab^3 + 9b^3 + 60a}{30a^2b^2}$
25. $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy} = \frac{20x^2y + 120y + 6x^2}{15x^3y}$
26. $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2} = \frac{240y + 20y^2 - 27}{90y^2}$
27. $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3} = \frac{15b^3 + 100ab^2 - 216a}{240ab^3}$
28. $\frac{8}{x^2-6x-16} + \frac{9}{x^2-3x-40}$
29. $\frac{6}{y^2-2y-35} + \frac{4}{y^2+9y+20} = \frac{10y-4}{(y-7)(y+5)(y+4)}$
30. $\frac{12}{3y^2-10y-8} - \frac{3}{y^2-6y+8}$
31. $\frac{6}{2x^2+11x-6} - \frac{8}{x^2+3x-18} = \frac{-10x-10}{(2x-1)(x+6)(x-3)}$
32. $\frac{2x}{4x^2+9x+2} + \frac{3}{2x^2-8x-24}$
33. $\frac{4x}{3x^2+3x-18} - \frac{2x}{2x^2+11x+15} = \frac{2x^2+32x}{3(x-2)(x+3)(2x+5)}$

34. علم الأحياء بعدما يتناول الشخص شيئاً ما، فإن الرقم الهيدروجيني أو مستوى الحمض A في الدم

يمكن تحديده بالصيغة $6.5 + A = \frac{20.4t}{t^2 + 36}$ ، حيث t هو عدد الدقائق المنقضية منذ أن تناول الطعام.

a. حول المعادلة لأبسط صورة.

b. ماذا سيكون مستوى الحمض بعد 30 دقيقة؟ ≈ 7.2

$$30. \frac{3y-30}{(3y+2)(y-4)(y-2)}$$

$$32. \frac{4x^2-12x+3}{2(x-6)(4x+1)(x+2)}$$

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	18-39, 64-90	18-38 زوجي, 64-66, 71-90
OL أساسي	19-39, 40-57, 59-62, 64-90	18-39, 67-70
BL متقدم	40-84. (اختياري: 85-90)	

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 17 للتحقق من الاستيعاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مساراً للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

ملاحظات لحل التمرين

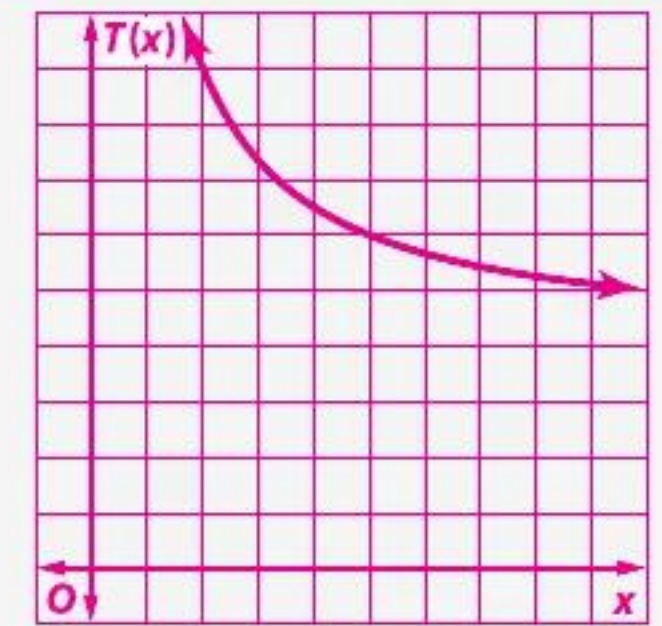
القوانين بالنسبة للتمرين 35، سيحتاج الطلاب إلى معرفة قانون مساحة المثلث، $A = \frac{1}{2}bh$.

ورق مربعات بالنسبة للتمرين 75 إلى 80 و 85 إلى 90، سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

تدريس الممارسات في الرياضيات

استخدام النماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الرياضيات التي يعرفونها لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات من منطلق الرياضيات لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائج الرياضيات في سياق الحال.

إجابات إضافية



x	T(x)
20	4.5
50	4.2
100	4.1
200	4.05
400	4.025

64. الإجابة النموذجية: تكون مجموعة التعابير النسبية مغلقة في ظل كافة هذه العمليات لأن مجموع وفرق وناتج ضرب وناتج قسمة تعبيرين نسبيين هو تعبير نسبي.

66. الإجابة النموذجية: أولاً، قم بتحليل إلى العوامل المقامات لكافة التعابير. أوجد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات. حوّل كل تعبير بحيث يكون له مضاعف مشترك أصغر. اجمع أو اطرح البسطين. ثم حوّل لأبسط صورة. هو نفسه.

35. الهندسة كلا المثلثين في الشكل الموجود باليسار متساوي الأضلاع. إذا كانت مساحة المثلث الأصغر 200 cm^2 وكانت مساحة المثلث الأكبر 300 cm^2 ، فجد أقصر مسافة من A إلى B بدلالة x و y وحوّل لأبسط صورة.

المثالان 4-5 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$36. \frac{\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3} - \frac{4x}{x^2-9}} = \frac{5x+6}{-x-9}$$

$$37. \frac{\frac{4}{x+5} + \frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6} - \frac{8}{x+5}} = \frac{13x+21}{-3x+73}$$

$$38. \frac{\frac{5}{x+6} - \frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1} + \frac{4}{x+6}} = \frac{-2x^2-2x-5}{x^2+14x-4}$$

$$39. \frac{\frac{8}{x-9} - \frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2} + \frac{4x}{x-9}} = \frac{-x^2+33x+16}{12x^2+11x-27}$$

40. إنتاج النفط قدير مديرو إحدى شركات النفط بأنه سيتم ضخ النفط من بئر معينة بمعدل يستند إلى الدالة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$ ، حيث $R(x)$ هو معدل الإنتاج بآلاف البراميل في العام بعد مرور x أعوام من بدء الضخ. **a.** حوّل $R(x)$ لأبسط صورة. $R(x) = \frac{260x^2+400}{3x^3+20x}$ **b.** ما معدل ضخ النفط من البئر بعد 50 عامًا؟ **حوالي 1730 برميلاً/عام**

جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

$$41. 12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3 \quad 420x^5y^4z^3$$

$$42. -6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3 \quad -360a^4b^3c^2$$

$$43. x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16 \quad (x+4)(x-4)(2x+1)(x-7)$$

$$44. x^2-5x-24, x^2-9, 3x^2+8x-3 \quad (x+3)(x-3)(x-8)(3x-1)$$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$45. \frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2} = \frac{360a^2+5a-36}{60a^2}$$

$$46. \frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y} = \frac{15x^2-192x^2y^2-128y}{48x^2y^2}$$

$$47. \frac{5}{6x^2+46x-16} + \frac{2}{6x^2+57x+72}$$

$$48. \frac{1}{8x^2-20x-12} + \frac{4}{6x^2+27x+12}$$

$$49. \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y} = 0$$

$$50. \frac{x^2+x}{x^2-9x+8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8} = \frac{x^2+2x-29}{x^2-9x+8}$$

$$51. \frac{\frac{2}{a-1} + \frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}} = \frac{5a-11}{6}$$

$$52. \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x+y)} = \frac{1}{y-x}$$

53. الهندسة التعبير الذي يمثل طول أحد المستطيلات هو $\frac{x^2-9}{x-2}$ ، ويُعبر عن طول مستطيل مشابه بالتعبير $\frac{x+3}{x^2-4}$ ، فما عامل قياس طولي المستطيلين؟ اكتبه في أبسط صورة. $(x-3)(x+2)$

54. التمثيل بالنماذج ذهب سعيد في رحلة تجديف مسافتها 20 km. قطع نصف المسافة بمعدل ما، وقطع المسافة المتبقية بمعدل أبطأ بمقدار 2 km/h.

a. إذا كانت x تمثل الوتيرة الأسرع بالكيلومتر في الساعة، فاكتب تعبيراً يمثل الزمن المنقضي بهذه الوتيرة. $\frac{10}{x}$
b. اكتب تعبيراً يمثل مقدار الوقت المنقضي بالسرعة الأبطأ. $\frac{10}{x-2}$
c. اكتب تعبيراً يمثل مقدار الوقت الذي يحتاجه سعيد لإكمال رحلته. $\frac{20(x-1)}{x(x-2)}$

جد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

$$55. A\left(\frac{2}{p}, \frac{1}{2}\right) \text{ و } B\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{p}\right) \quad -\frac{3}{2}$$

$$56. C\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{q}\right) \text{ و } D\left(\frac{5}{q}, \frac{1}{5}\right) \quad -\frac{4}{5}$$

$$57. E\left(\frac{7}{w}, \frac{1}{7}\right) \text{ و } F\left(\frac{1}{7}, \frac{7}{w}\right) \quad -1$$

$$58. G\left(\frac{6}{n}, \frac{1}{6}\right) \text{ و } H\left(\frac{1}{6}, \frac{6}{n}\right) \quad -1$$

التدريس المتميز

التوسع يُعد تحليل الكسور الجزئية مهارة من المهارات الجبرية المفيدة في مناهج الرياضيات المتقدمة. بما في ذلك حساب التفاضل والتكامل. أعط الطلاب تعبيراً نسبياً مثل $\frac{5x+3}{x(x+1)}$ واسألهم ما أنواع الكسور الأبسط التي يمكن جمعها للحصول على هذا التعبير. إذا كان يمكنهم تحديد x و 1 + x باعتبارها مقامات لمثل هذه "الكسور الجزئية"، فاطلب منهم أن يحاولوا إيجاد قيم A و B التي ستجعل المعادلة $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$ عبارة حقيقية لأي قيمة x. $A = 3$ و $B = 2$

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقاً في إنشاء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبينون تقدماً منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

59. **التصوير الفوتوغرافي** يحدد الطول البؤري للعدسة مجال رؤية الكاميرا. فكلما قصر الطول البؤري، كان مجال الرؤية أكبر. فالتركيز بكاميرا لها طول بؤري ثابت 70 mm على جسم يبعد x mm من العدسة، يجب وضع الفيلم على مسافة y من العدسة. ويُمثل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}$.
59b. الإجابة النموذجية: عندما يكون الجسم على بُعد 70 mm، يتعين أن تكون y تساوي 0، وهو أمر مستحيل.
a. عرّف عن y كدالة لـ x . $y = \frac{70x}{x - 70}$
b. ماذا يحدث لمسافة التركيز عندما يكون الجسم على بُعد 70 mm؟

60. **الصيدة** يتناول أحد المرضى عقارين. يغير عن تركيز كل عقار في مجرى الدم بالدالتين $f(t) = \frac{2t}{3t^2 + 9t + 6}$ و $g(t) = \frac{3t}{2t^2 + 6t + 4}$ حيث أن t تمثل الزمن المنقضي بالساعات بعد تناول العقارين.

a. اجمع الدالتين معاً لتحديد دالة تعبر عن التركيز الكلي للعقارين في مجرى الدم للمريض. $h(t) = \frac{13t}{6t^2 + 18t + 12}$
b. ما تركيز العقارين بعد مرور 8 ساعات؟ **حوالي 0.19**
61a. $\frac{P_0 s_0 x - P_0 s_0 y}{(s_0 - x)(s_0 - y)}$

61. **تأثير دوبلر** راجع التطبيق في بداية الدرس. يقف أحمد على مسافة متساوية من سيارتي إطفاء تتحركان في اتجاهيه من اتجاهين متعاكسين.

a. لنفرض أن x هي سرعة سيارة الإطفاء الأسرع، و y هي سرعة سيارة الإطفاء الأبطأ. اكتب تعبيراً نسبياً يمثل اختلاف حدة الصوت بين صافرتي السيارتين بالنسبة لأحمد وحوّله لأبسط صورة.

b. إذا كانت إحدى السيارتين تسير بسرعة 45 m/s، والأخرى تسير بسرعة 70 m/s، فما الاختلاف بين حدة الصوتين بالنسبة لأحمد؟ علماً بأن سرعة الصوت في الهواء 332 m/s، وكلتا السيارتين لها صافرة بحدة 500 Hz. **حوالي 55.2 Hz**

62. **بحث** أجرى طالب يدرس سلوكيات التعلم تجربة أرسل خلالها فأراً إلى متاهة عدة مرات. تم تحديد الزمن الذي استغرقه الفأر لإكمال المتاهة بالدالة النسبية $T(x) = 4 + \frac{10}{x}$ ، حيث x تمثل عدد مرات المحاولة. **b, c. انظر الهامش.**

a. ما مجال الدالة؟ $x \neq 0$

b. مثل الدالة بيانياً حيث $0 \leq x \leq 10$.

c. كوّن جدولاً للدالة حيث 400 و 200 و 100 و 50 و 20 x .

d. لو كان إجراء عدد لا نهائي من المحاولات أمراً ممكناً، ففي رأيك ماذا سيكون الزمن الأمثل للفأر؟ اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: 4؛ يقترب الكسر من 0 مع اقتراب x من اللانهاية؛ $4 + 0 = 4$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **التحدي** حوّل لأبسط صورة $\frac{5x^{-2} - \frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}} + 6x^{-1}}$ $\frac{-3x^3 - 2x^2 + 16x - 5}{4x^3 + 18x^2 - 6x}$

64. **فرضيات** مجموع أي عددين نسبيين دائماً يساوي عدداً نسبياً. لذا، يقال إن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الجمع. حدد ما إذا كانت مجموعة التعابير النسبية مغلقة تحت عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على تعبير نسبي غير صفري. علل استنتاجك. **انظر الهامش.**

الإجابة النموذجية: $9abc$ ، $15ab^6$ ، $20a^4b^2c$

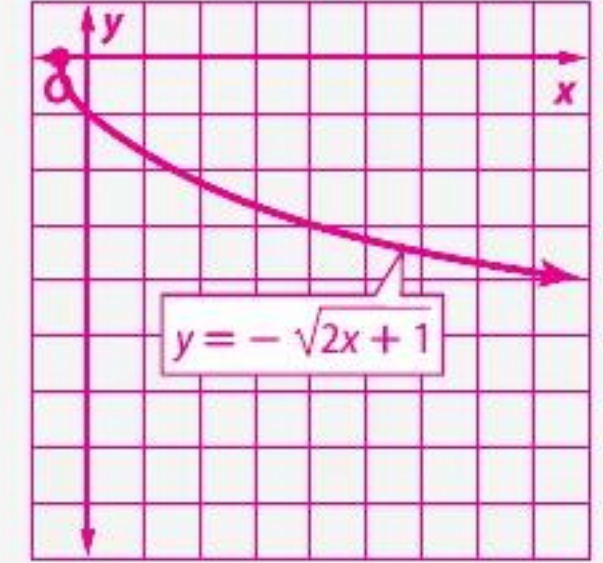
65. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثلاث أحاديّات الحدود بمضاعف مشترك أصغر $180a^4b^6c$.

66. **الكتابة في الرياضيات** اكتب دليلاً يشرح طريقة جمع التعابير النسبية ذات المقامات المختلفة. وكيف نقارن ذلك بجميع الأعداد النسبية؟ **انظر الهامش.**

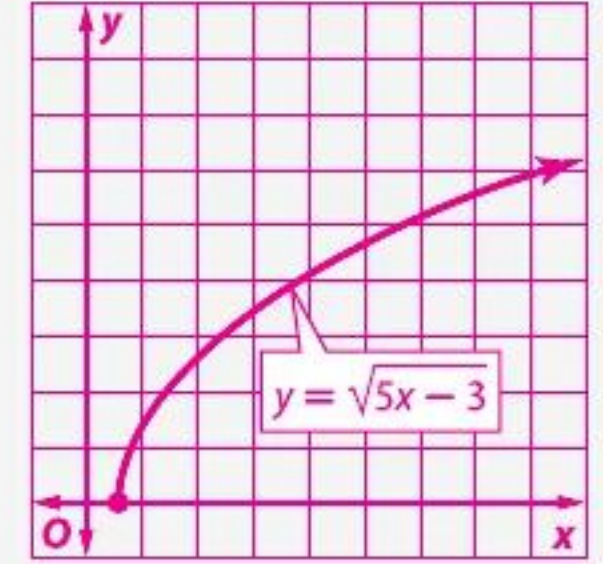
حصاد الأمس اطلب من الطلاب وصف كيف ساعدهم درس الأمس حول ضرب وقسمة التعابير النسبية في الاستعداد لدرس اليوم حول جمع التعابير النسبية وطرحها.

إجابات إضافية

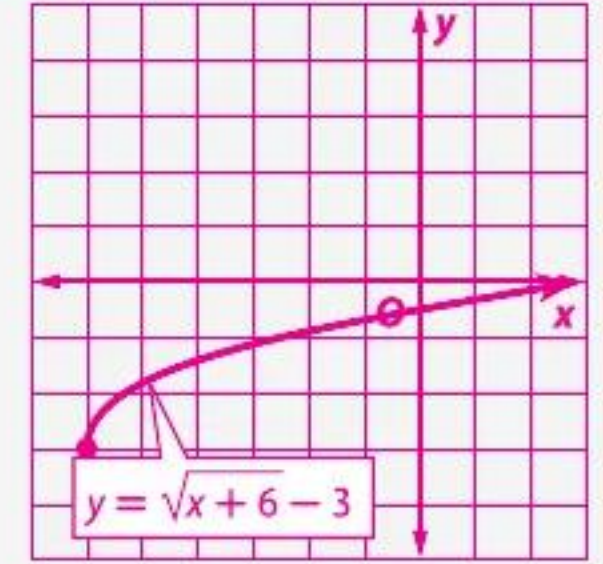
75. $D = \{x | x \geq -0.5\}$, $R = \{y | y \leq 0\}$



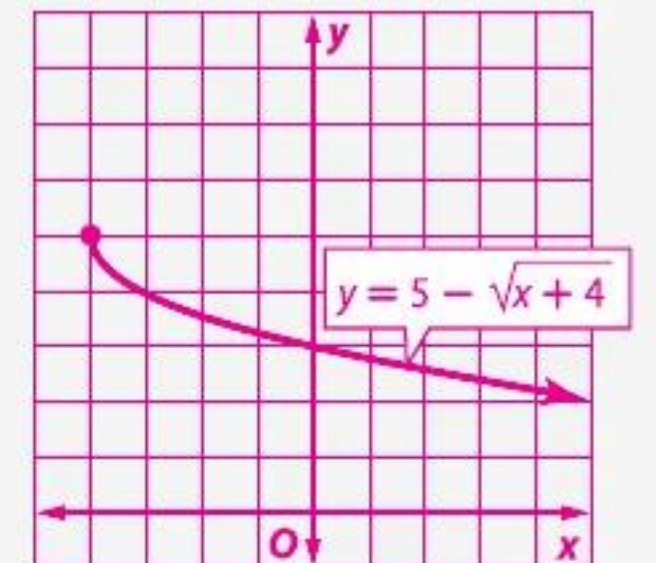
76. $D = \{x | x \geq 0.6\}$, $R = \{y | y \geq 0\}$



77. $D = \{x | x \geq -6\}$, $R = \{y | y \geq -3\}$



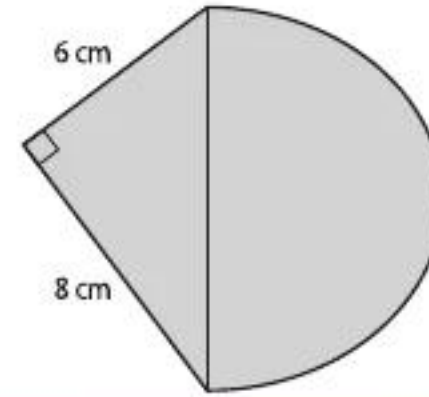
78. $D = \{x | x \geq -4\}$, $R = \{y | y \leq 5\}$



67. **الاحتمال** سيتم إقامة سحب لاختيار الفائز بدراجة جديدة. يوجد 100 من طلاب الصف الثاني عشر و 150 من طلاب الصف العاشر و 200 من طلاب الصف الحادي عشر لديهم إيداعات صحيحة. سيحتوي السحب على 3 تذاكر لكل اسم من طلاب الصف الثاني عشر، وتذكرتين لكل طالب بالصف العاشر، وتذكرة لكل طالب بالصف الحادي عشر. فما احتمال اختيار تذكرة طالب من طلاب الصف الثاني عشر؟ **D**

- A $\frac{1}{8}$ C $\frac{2}{7}$
B $\frac{2}{9}$ D $\frac{3}{8}$

68. **إجابة مختصرة** جد مساحة الشكل. $5\pi \text{ cm}^2$



69. **SAT/ACT** إذا حصل سعيد على عدد b من الكتب بالإضافة إلى عدد الكتب التي لديه بالفعل، فسيكون لديه t أضعاف العدد الذي لديه في الأساس. بدلالة b و t ، كم عدد الكتب التي كانت مع ناصر في البداية؟ **F**

- F $\frac{b}{t-1}$ J $\frac{b}{t}$
G $\frac{b}{t+1}$ K $\frac{t}{b}$
H $\frac{t+1}{b}$

70. إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$ ، فإن $a =$ **B**

- A 2 C $\frac{1}{8}$
B $\frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{8}$

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-1)

71. $\frac{-4ab}{21c} \cdot \frac{14c^2}{22a^2} - \frac{4bc}{33a}$ 72. $\frac{x^2 - y^2}{6y} \div \frac{x + y}{36y^2} = 6y(x - y)$ 73. $\frac{n^2 - n - 12}{n + 2} \div \frac{n - 4}{n^2 - 4n - 12} = \frac{(n + 3)(n - 6)}{(n - 4)(n + 3)}$

74. **علم الأحياء** تتكاثر الجراثيم عادة بعملية تعرف باسم الانقسام الثنائي. في هذا النوع من التكاثر، تنقسم الجرثومة الواحدة مكونة جرثومتين. في ظل الظروف المثالية، تتكاثر بعض الجراثيم كل 20 دقيقة. **حوالي 0.0347**
a. جد الثابت k لهذا النوع من الجراثيم في ظل الظروف المثالية.
b. اكتب معادلة تمثل نموذجاً للنمو الأسّي لهذه الجراثيم. **$y = ae^{0.0347t}$**

مثّل كل دالة بيانيًا. حدد المجال والهدى لكل دالة. 75-80. انظر الهامش.

75. $y = -\sqrt{2x + 1}$ 76. $y = \sqrt{5x - 3}$ 77. $y = \sqrt{x + 6} - 3$
78. $y = 5 - \sqrt{x + 4}$ 79. $y = \sqrt{3x - 6} + 4$ 80. $y = 2\sqrt{3 - 4x} + 3$

حلّ كل من المعادلات التالية. اذكر عدد الجذور ونوعها 82. $\frac{5 \pm i\sqrt{71}}{4}$: 2 تخيلي

81. $3x + 8 = 0$ 82. $2x^2 - 5x + 12 = 0$ 83. $x^3 + 9x = 0$ 84. $x^4 - 81 = 0$
85. $3i, -3i, 0$: 1 حقيقي، 2 تخيلي 86. $3, -3, 0, 3i, -3i$: 2 حقيقي، 2 تخيلي 87. $3, -3, 0, 3i, -3i$: 2 حقيقي، 2 تخيلي 88. $3, -3, 0, 3i, -3i$: 2 حقيقي، 2 تخيلي

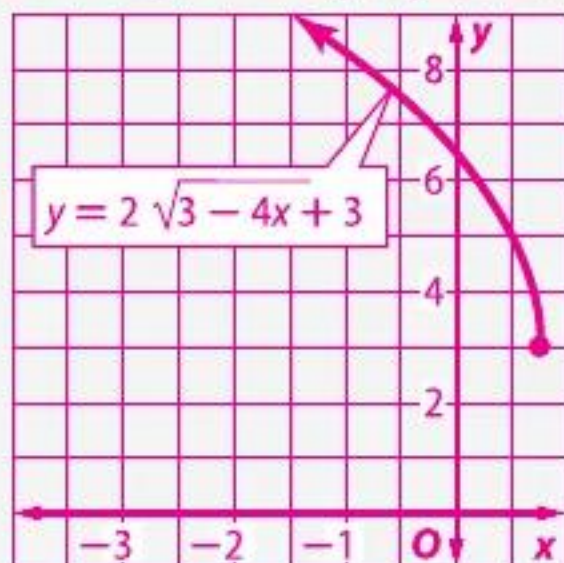
مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًا. 85-90. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

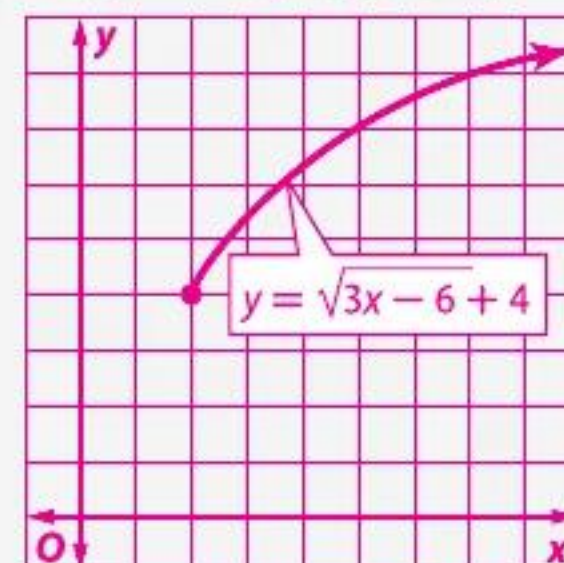
85. $y = 4(x + 3)^2 + 1$ 86. $y = -(x - 5)^2 - 3$ 87. $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$
88. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 5$ 89. $y = x^2 + 6x + 2$ 90. $y = x^2 - 8x + 18$

80 | **الدرس 2-2** | جمع التعابير النسبية وطرحها

80. $D = \{x | x \leq 0.75\}$, $R = \{y | y \geq 3\}$



79. $D = \{x | x \geq 2\}$, $R = \{y | y \geq 4\}$



تمثيل دوال المقلوب بيانياً

2-3 الدرس

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-3 تمثيل الدوال النسبية بيانياً.

الدرس 2-3 تحديد خواص دوال المقلوب. التمثيل البياني لتحويلات دوال المقلوب.

بعد الدرس 2-3 التمثيل البياني للدوال النسبية باستخدام خطوط التقارب.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

أسأل:

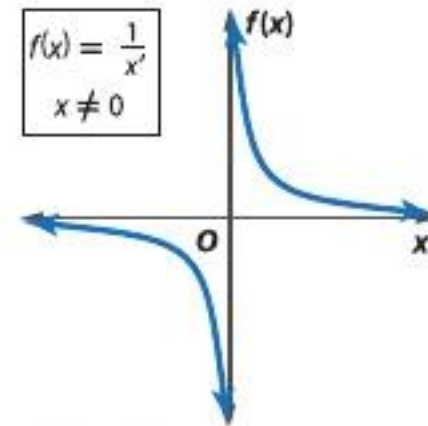
- على أي شيء يعتمد عدد قطع الحلوى التي على كل طالب بيعها؟ عدد الطلاب المشاركين
- ماذا يحدث لقيمة c مع زيادة قيمة n ؟ تنخفض.
- ما العدد الكلي الذي يجب أن يكون المتغير n أكبر منه أو مساوياً له؟ 1
- ما العدد الكلي الذي يجب أن يكون المتغير n أقل منه أو مساوياً له؟ عدد الطلاب في الكورال



- | السابق | الحالي | لماذا |
|---|---------------------------------------|--|
| تمت بتمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً. | 1 تحديد خصائص دوال المقلوب. | يود فريق إنشاء مدرسة الخالدية الثانوية جمع 5000 AED لتمويل رحلة إلى المسابقة الوطنية في دبي. وقد قرروا بيع قطع الحلوى. سيحقق الفريق أرباحاً بمقدار 1 AED لكل قطعة حلوى يبيعونها. ولذا سيحتاجون إلى بيع 5000 قطعة حلوى. |
| | 2 تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانياً. | فإذا كانت c تمثل عدد قطع الحلوى التي ينبغي على الطلاب بيعها و n تمثل عدد الطلاب، فإن $c = \frac{5000}{n}$ |

1 خطوط التقارب الرأسية والأفقية تعتبر الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب. وتضم دالة المقلوب معادلة لها الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسية لدوال المقلوب



- | | |
|----------------------|--------------------------------------|
| الدالة الرئيسية: | $f(x) = \frac{1}{x}$ |
| نوع التمثيل البياني: | قطع زائد |
| المجال والمدى: | جميع الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر |
| خطوط التقارب: | $x = 0$ و $y = 0$ |
| نقاط التقاطع: | لا يوجد |
| غير معرّفة: | $x = 0$ |

يتفقد مجال دالة المقلوب بالقيم التي تكون الدالة عندها معرّفة. الدوال: $f(x) = \frac{-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{4}{x-5}$, $h(x) = \frac{3}{x}$. غير معرّفة عند: $x = -2$, $x = 5$, $x = 0$.

مثال 1 القيود على المجال

حدد قيمة x التي تكون عندها $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرّفة.

جد القيمة التي تجعل مقام التعبير يساوي 0.

$$\frac{3}{2x+5} \rightarrow 2x+5=0$$

الدالة غير معرّفة عندما تكون $x = -\frac{5}{2}$

تمرين موجّه

حدد قيمة x التي تجعل كل دالة غير معرّفة.

1A. $f(x) = \frac{2}{x-1}$ $x = 1$

1B. $f(x) = \frac{7}{3x+2}$ $x = -\frac{2}{3}$

مفردات جديدة
دالة المقلوب
reciprocal function
قطع زائد hyperbola

ممارسات في الرياضيات
2 التفكير بطريقة تجريدية
وكمية.

1 خطوط التقارب الرأسية والأفقية

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد الحدود على مجال دالة نسبية. **المثال 2** يوضح كيفية تحديد خواص دوال المقلوب.

التقويم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

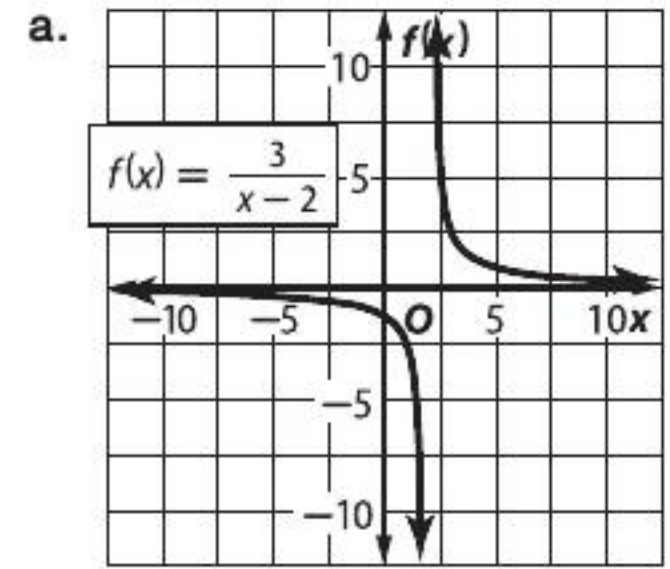
أمثلة إضافية

1 حدد قيم x والتي تكون عندها

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 5x - 24}$$

معرفه. $x = 3$ و $x = -8$

2 حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.



خطوط التقارب:

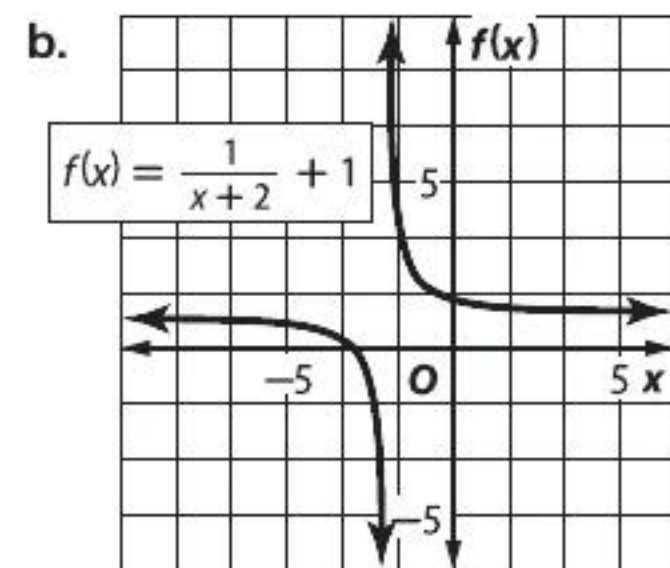
$x = 2$ و $y = 0$: المجال:

كافة الأعداد الحقيقية غير

المساوية للعدد 2: المدى:

كافة الأعداد الحقيقية غير

المساوية للعدد 0



خطوط التقارب:

$x = -2$ و $y = 1$: المجال:

كافة الأعداد

الحقيقية غير المساوية

للعدد -2: المدى:

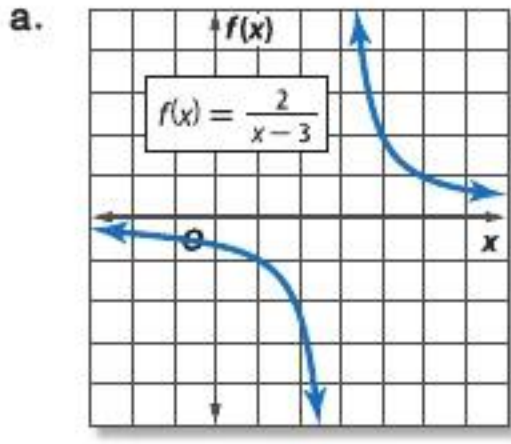
كافة الأعداد الحقيقية غير

المساوية للعدد 1

قد يحتوي التمثيل البياني لدالة المقلوب على انفصالات عند القيم المستثناة. وقد يحتوي البعض على خط تقارب، وهو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

مثال 2 تحديد خصائص دوال المقلوب

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.



حدد قيم x التي تكون فيها $f(x)$ غير معرفه.

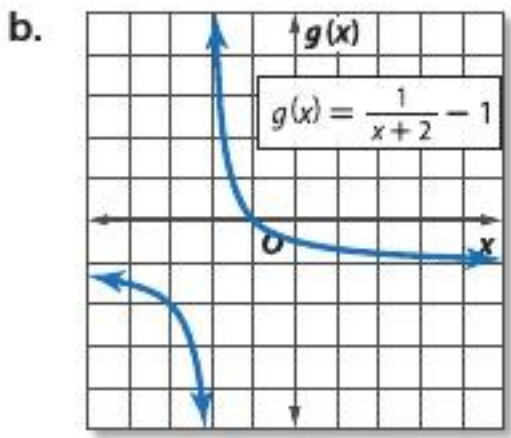
$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

تكون الدالة $f(x)$ غير معرفه إذا كانت $x = 3$. إذا، يوجد خط تقارب عند $x = 3$.

من $x = 3$ ، مع تناقص قيم x ، تقترب قيم $f(x)$ من 0. ومع تزايد قيم x ، تقترب قيم $f(x)$ من 0. إذا، يوجد خط تقارب عند $y = 0$.

المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 3 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 0.



حدد قيم x التي تكون فيها $g(x)$ غير معرفه.

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

تكون الدالة $g(x)$ غير معرفه إذا كانت $x = -2$. إذا، يوجد خط تقارب عند $x = -2$.

من $x = -2$ ، بينما تتناقص قيم x ، تقترب قيم $g(x)$ من -1. وبينما تزايد قيم x ، تقترب قيم $g(x)$ من -1. إذا، يوجد خط تقارب عند $y = -1$.

المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -2 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -1.

$$x = -1, g(x) = 5;$$

$$D = \{x | x \neq -1\};$$

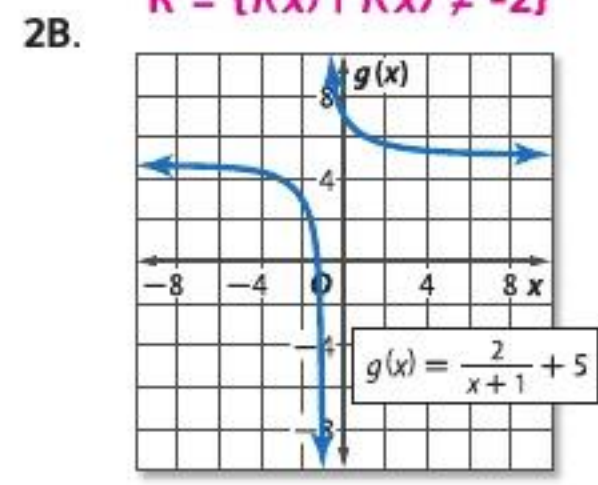
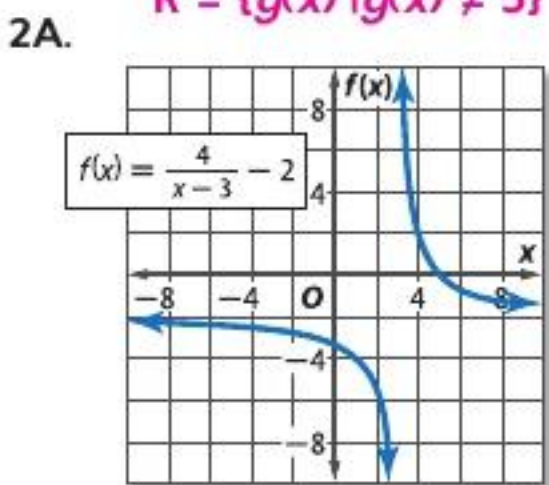
$$R = \{g(x) | g(x) \neq 5\}$$

$$x = 3, f(x) = -2;$$

$$D = \{x | x \neq 3\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq -2\}$$

تمرين موجه



التدريس المتميز

BL

OL

التوسع أخبر الطلاب بالتالي:

■ يُطلق على الدالة دالة زوجية إذا كانت $f(-x) = f(x)$ لكافة قيم x في مجالها. يكون التمثيل البياني لدالة زوجية متماثلًا بالنسبة إلى المحور y .

■ يُطلق على الدالة دالة فردية إذا كانت $f(-x) = -f(x)$ لكافة قيم x في مجالها. يكون التمثيل البياني لدالة فردية متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل.

اسأل الطلاب ما إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ دالة فردية أم زوجية. فردية

2 تحويلات دوال المقلوب يمكن تطبيق الأساليب ذاتها المستخدمة في تحويل منحنيات الدوال الأخرى التي درستها على منحنيات دوال المقلوب. في المثال 2، لاحظ أن خط التقارب تم تحريكه مع التمثيل البياني للدوال.

المفهوم الأساسي تحويلات دوال المقلوب

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$$

k - الإزاحة الرأسية	h - الإزاحة الأفقية
k وحدات لأعلى إذا كانت k موجبة $ k $ وحدات لأسفل إذا كانت k سالبة يوجد خط تقارب أفقي عند $y = k$.	h وحدات جهة اليمين إذا كانت h موجبة $ h $ وحدات جهة اليسار إذا كانت h سالبة يوجد خط تقارب رأسي عند $x = h$.

a - الاتجاه والشكل

إذا كانت $a < 0$ ، فإن المنحنى ينعكس حول المحور x .
إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن المنحنى يمتد رأسيًا.
إذا كانت $|a| < 1$ ، فإن المنحنى ينضغط رأسيًا.

نصيحة دراسية

خطوط التقارب تتحرك خطوط التقارب لدالة المقلوب مع منحنى الدالة وتقاطع عند النقطة (h, k) .

تدريس الممارسات في الرياضيات

البنية يدقق الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات لتمييز نمط أو بنية. شجع الطلاب على مقارنة معادلات خطوط التقارب بالاتصال وسلوك الدالة.

2 تحويلات دوال المقلوب

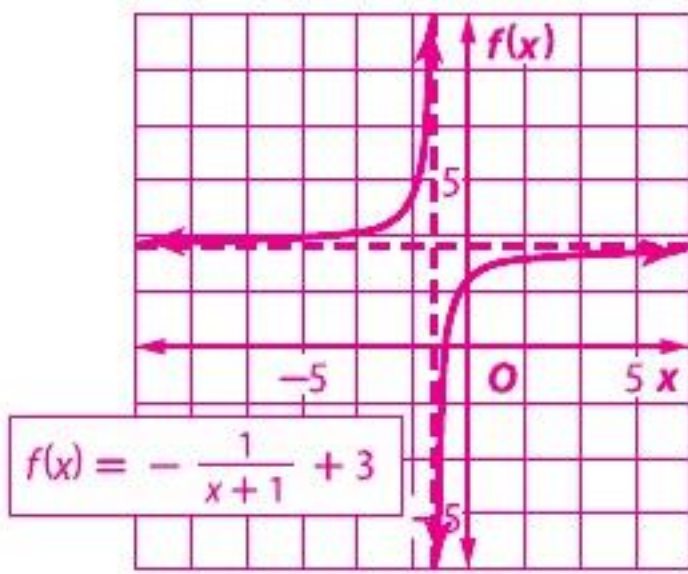
المثال 3 يوضح تحويلات التمثيل البياني.

المثال 4 عبارة عن مسألة من الحياة اليومية توضح أنه عندما يتم استخدام دالة لتمثيل موقف حقيقي، فإن مجال ذو المعنى قد يكون أصغر من مجال الرياضيات.

مثال إضافي

3 مثل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

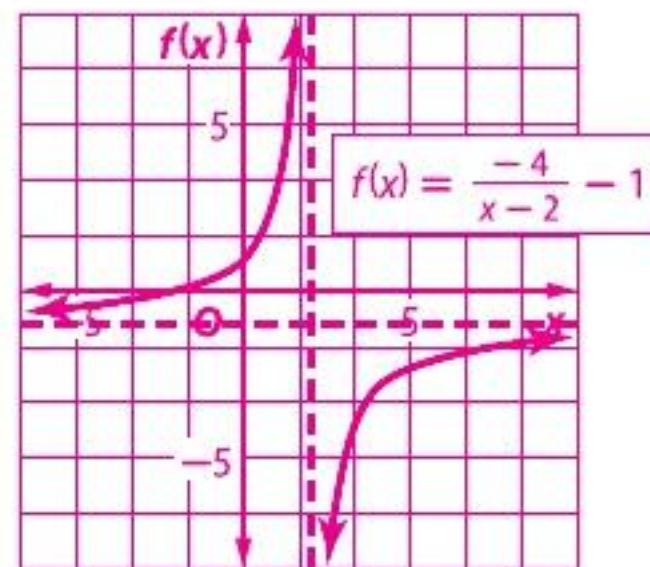
a. $f(x) = -\frac{1}{x+1} + 3$



$$D = \{x \mid x \neq -1\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 3\}$$

b. $f(x) = \frac{-4}{x-2} - 1$



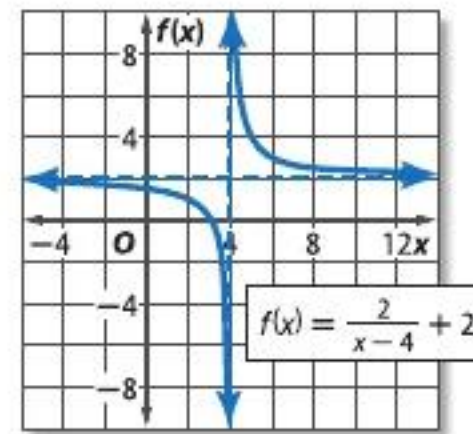
$$D = \{x \mid x \neq 2\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$$

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

مثل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

a. $f(x) = \frac{2}{x-4} + 2$



يمثل هذا تحويلًا للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = 2$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا.

$h = 4$: تمت إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لليمين.

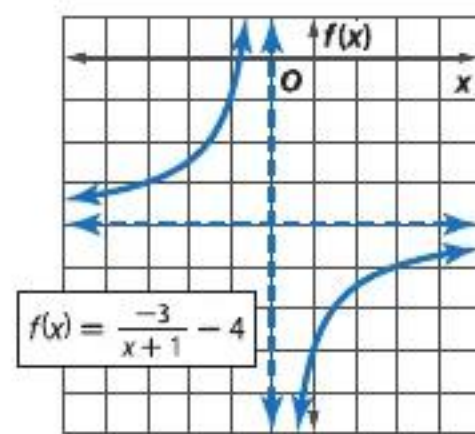
يوجد خط تقارب عند $x = 4$.

$k = 2$: تمت إزاحة التمثيل البياني وحدتين لأعلى.

يوجد خط تقارب عند $y = 2$.

المجال: $\{x \mid x \neq 4\}$ المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$

b. $f(x) = \frac{-3}{x+1} - 4$



يمثل هذا تحويلًا للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = -3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا وينعكس حول المحور x .

$h = -1$: تمت إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة لليسار.

يوجد خط تقارب عند $x = -1$.

$k = -4$: تمت إزاحة الرسم البياني 4 وحدات لأسفل.

يوجد خط تقارب عند $y = -4$.

المجال: $\{x \mid x \neq -1\}$ المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -4\}$

تمرين موجّه

3A، 3B. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

3A. $f(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$

3B. $g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$

83

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة البيضاء التفاعلية استخدم برنامج

تمثيل بياني لعرض شبكة إحداثيات الدالة $f(x)$

وتمثيلها البياني. اختر العديد من الطلاب للتوجه

للوحة البيضاء ورسم الشكل الذي يتوقعونه

للتمثيل البياني للدالة $\frac{1}{f(x)}$. ثم استخدم

برنامج التمثيل البياني لعرض التمثيل البياني

للدالة $\frac{1}{f(x)}$. وقارنه بالتمثيلات البيانية للطلاب.

انتبه!

تجنب الأخطاء اقترح على الطلاب اختيار

وحدة كبيرة على ورق المربعات وتقدير

إحداثيات النقطة لأقرب عشرة. وضح أنهم

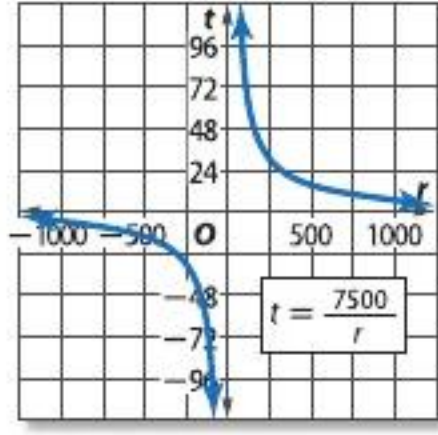
قد لا يتمكنون من رؤية شكل التمثيل البياني

ككل ما لم يقوموا باستخدام حاسبة التمثيل

البياني أو برنامج حاسب آلي.

السفر لدى أحد خطوط الطيران رحلة يومية دون توقف بين مدينة A ومدينة B. وتبلغ مسافة رحلة الذهاب فقط نحو 7500 km.

a. اكتب معادلة لتمثل وقت السفر من A إلى B كدالة لسرعة الرحلة الجوية. ثم مثل المعادلة بيانيًا.



جد حل $rt = d$ لإيجاد قيمة t .

المعادلة الأصلية

اقسم كل طرف على r .

$$t = \frac{d}{r}$$

$$d = 7500$$

$$t = \frac{7500}{r}$$

مثل $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًا.

b. اشرح أي حدود على المجال أو المدى في هذا الموقف.

في هذا الموقف، يكون المجال والمدى محددين بكافة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن صفر لأن القيم السالبة ليس لها معنى. سيكون هناك المزيد من القيود على المجال لأن الطائرة لها حد أقصى وحد أدنى للسرعات التي يمكنها السفر بها.

تمرين موجّه

4. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

4. التخرج يمول مسؤولو الصفين العاشر والثاني عشر حفل تخرج. وتبلغ التكلفة الإجمالية للمرافق والطعام AED 45 للشخص بالإضافة إلى AED 2500 كمبلغ تأميني. اكتب معادلة تمثل متوسط التكلفة للشخص الواحد ومثلها بيانيًا. ثم اشرح أي حدود على المجال والمدى.

مهنة من الحياة اليومية

وكيل الرحلات يقيم وكلاء الرحلات احتياجات الشركات والأفراد ليساعدوهم على تنظيم أفضل ترتيبات سفر ممكنة. وقد تنوع تخصصاتهم بحسب نوع السفر مثل السفر بغرض الترفيه أو العمل أو بحسب الوجهة مثل أوروبا وإفريقيا. يتطلب العمل شهادة مدرسة ثانوية، ويفضل الحصول على تدريب مهني.

مثال إضافي

4

التنقل اليومي يقدم قطار المسافرين يوميًا خدمة لا تتوقف من مدينة إلى أخرى. لمسافة تبلغ حوالي 25 km.

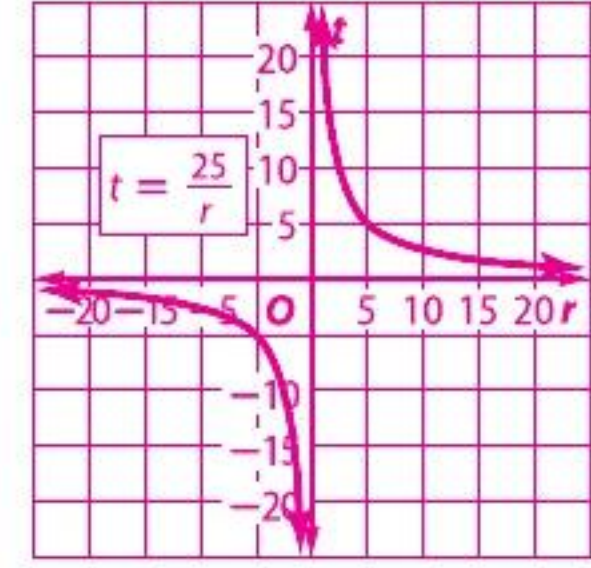
a. اكتب معادلة لتمثل وقت

السفر بين هاتين المدينتين

باعتبارها دالة لسرعة

القطار. ثم مثل المعادلة

$$t = \frac{25}{r}$$



b. اشرح أي حدود للمجال

والمدى في هذا

الموقف. يكون المجال

والمدى محددين لكافة

الأعداد الحقيقية التي تزيد

عن 0 لأن القيم السالبة

ليس لها معنى. ستكون

هناك المزيد من القيود على

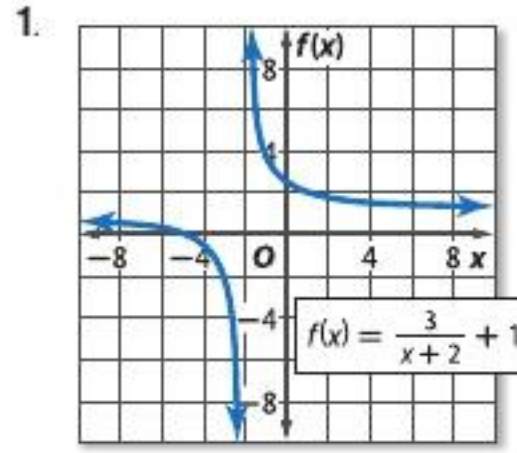
المجال لأن القطار له حد

أقصى وحد أدنى للسرعات

التي يمكنه السفر بها.

التحقق من فهمك

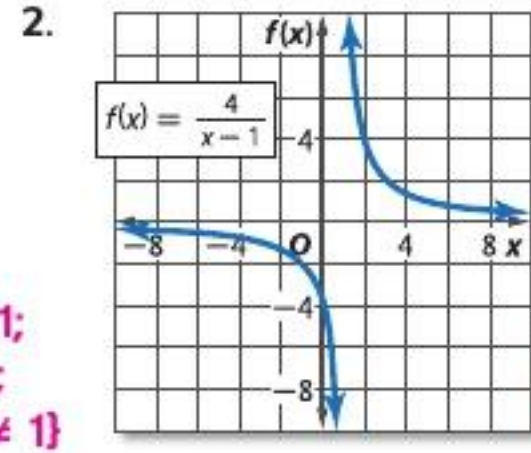
المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.



$$x = -2, f(x) = 1;$$

$$D = \{x | x \neq -2\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq 1\}$$



$$x = 1, f(x) = 0;$$

$$D = \{x | x \neq 1\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq 0\}$$

مثال 3 مثل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى. 3-5. انظر الهامش.

$$3. f(x) = \frac{5}{x}$$

$$4. f(x) = \frac{2}{x+3}$$

$$5. f(x) = \frac{-1}{x-2} + 4$$

6. مثال 4 التبرير المنطقي تخطط مجموعة من الأصدقاء لتقديم قسيمة هدية لفائدة المجموعة الشبابة لفضاء يوم في منتجع صحي. تبلغ تكلفة القسيمة AED 150.

a. إذا كانت c تمثل التكلفة على كل صديق وكانت f تمثل عدد الأصدقاء، فاكتب معادلة لتمثيل التكلفة على كل صديق كدالة لعدد الأصدقاء الذين قدموا المال.

$$c = \frac{150}{f}$$

c. في هذا الموقف، يكون المجال والمدى محددين بكافة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن صفر لأن القيم السالبة ليس لها معنى.

b. مثل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

c. وضّح أي قيود على المجال أو المدى في هذا الموقف.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-6 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل يبدأ الطلاب المتفوقون في

الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث

عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود

والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في

الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة

مختلفة، ويسألون أنفسهم باستمرار: "هل هذا جواب

صحيح؟"

التدريس المتميز

OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب

من الطلاب التمثيل بيانيًا لواحدة من الدوال من

الدرس على ورقة كبيرة من لوحة الملتصقات

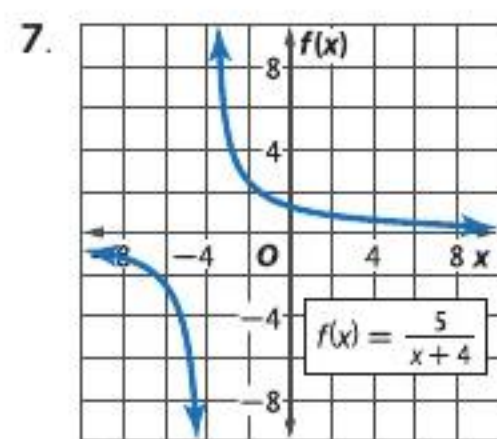
ليشرحوا بوضوح كيف يقترب التمثيل البياني من

خط التقارب ولكنه لا يصل له مطلقًا. شجع

الطلاب على استخدام مجموعة متنوعة من أقلام

التحديد الملونة؟

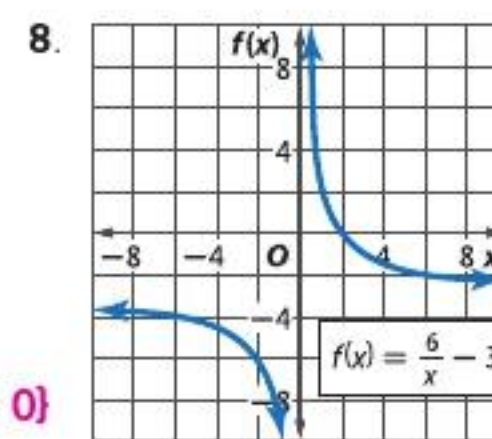
المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدي لكل دالة.



$$x = -4, y = 0;$$

$$D = \{x | x \neq -4\};$$

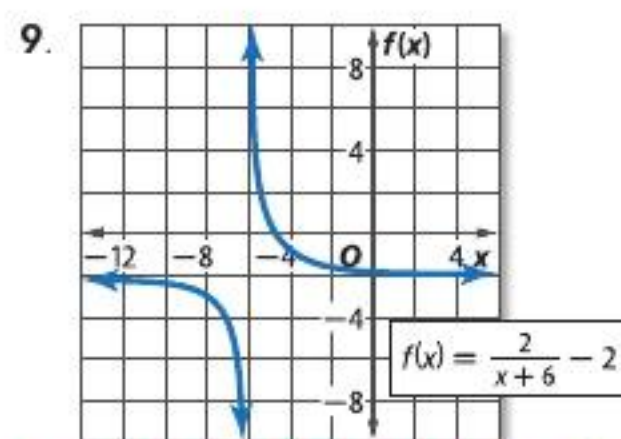
$$R = \{f(x) | f(x) \neq 0\}$$



$$x = 0, y = -3;$$

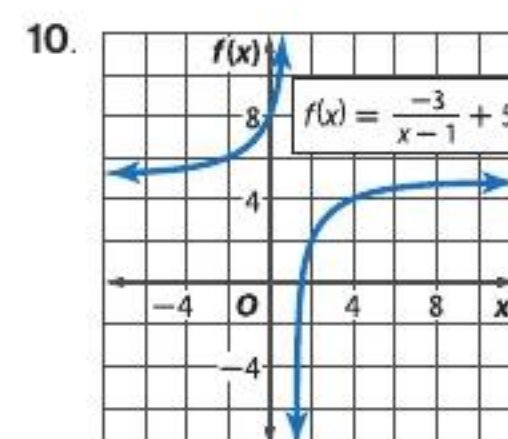
$$D = \{x | x \neq 0\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq -3\}$$



$$x = -6, y = -2; D = \{x | x \neq -6\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq -2\}$$



$$x = 1, y = 5;$$

$$D = \{x | x \neq 1\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq 5\}$$

مثال 3 مثل كل دالة بيانًا. واذكر المجال والمدي.

11. $f(x) = \frac{3}{x}$ 12. $f(x) = \frac{-4}{x+2}$ 13. $f(x) = \frac{2}{x-6}$
14. $f(x) = \frac{6}{x} - 5$ 15. $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ 16. $f(x) = \frac{8}{x}$
17. $f(x) = \frac{-2}{x-5}$ 18. $f(x) = \frac{3}{x-7} - 8$ 19. $f(x) = \frac{9}{x+3} + 6$
20. $f(x) = \frac{8}{x+3}$ 21. $f(x) = \frac{-6}{x+4} - 2$ 22. $f(x) = \frac{-5}{x-2} + 2$

مثال 4 23. قيادة الدراجات اتخذ أيوب قرارًا بالعام الجديد أن يقود دراجته 5000 km.

a. إذا كانت m تمثل عدد الكيلو مترات التي يقودها أيوب يوميًا وتمثل d عدد الأيام، فاكتب معادلة تمثل عدد الكيلو مترات يوميًا كدالة لعدد الأيام التي يقود فيها.

$$m = \frac{5000}{d}$$

b. مثل الدالة بيانًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

c. إذا قاد منير دراجته في كل يوم من العام، فكم عدد الكيلو مترات التي ينبغي عليه أن يقطعها كل يوم لتحقيق هدفه. 13.7 km

24. التمثيل بالنماذج لدى منصور 200 g من سائل مجهول. ستساعده معرفة الكثافة على اكتشاف ماهية السائل.

a. يتم إيجاد كثافة أي سائل عن طريق قسمة الكتلة على الحجم. اكتب معادلة تمثل كثافة هذا السائل المجهول كدالة للحجم.

$$d = \frac{200}{v}$$

b. مثل الدالة بيانًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

c. من التمثيل البياني، حدد خطوط التقارب ومجال ومدي الدالة. $v = 0, d = 0; D = \{v | v \neq 0\}; R = \{d | d \neq 0\}$

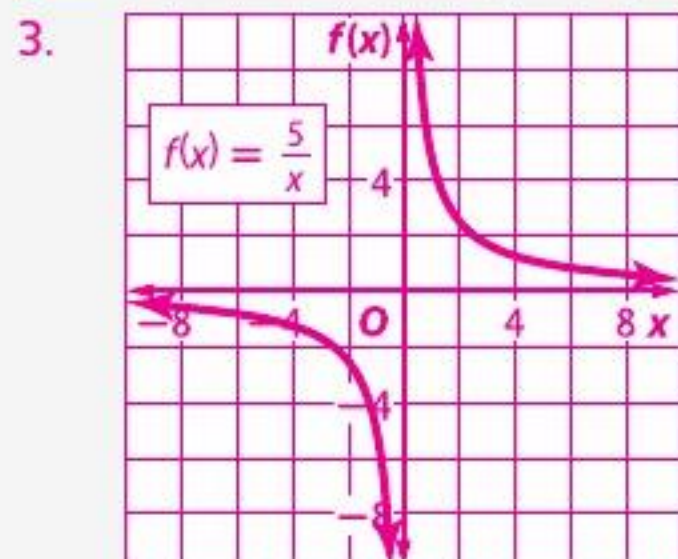
مثال B مثل كل دالة بيانًا. واذكر المجال والمدي.

25. $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ 26. $f(x) = \frac{5}{3x}$ 27. $f(x) = \frac{2}{4x+1}$ 28. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

ملاحظات لحل التمرين

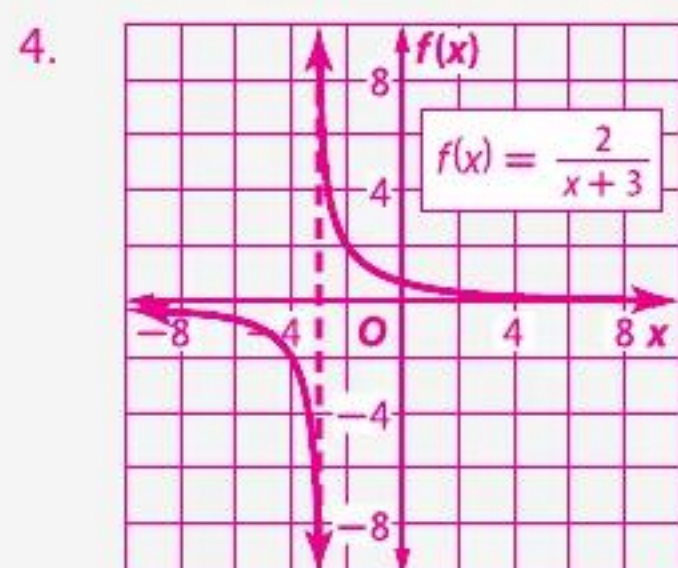
ورق المربعات بالنسبة للتمارين من 3 إلى 6 ومن 11 إلى 39 و41 ومن 52 إلى 55 ومن 60 إلى 61. سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

إجابات إضافية



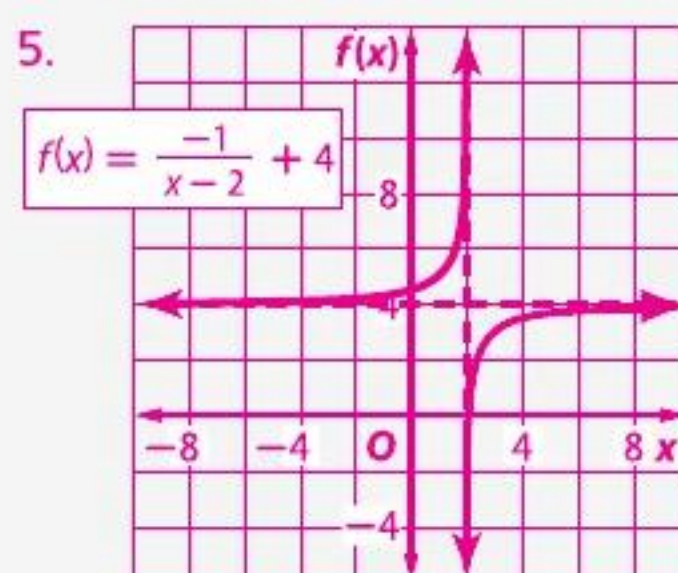
$$D = \{x | x \neq 0\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq 0\}$$



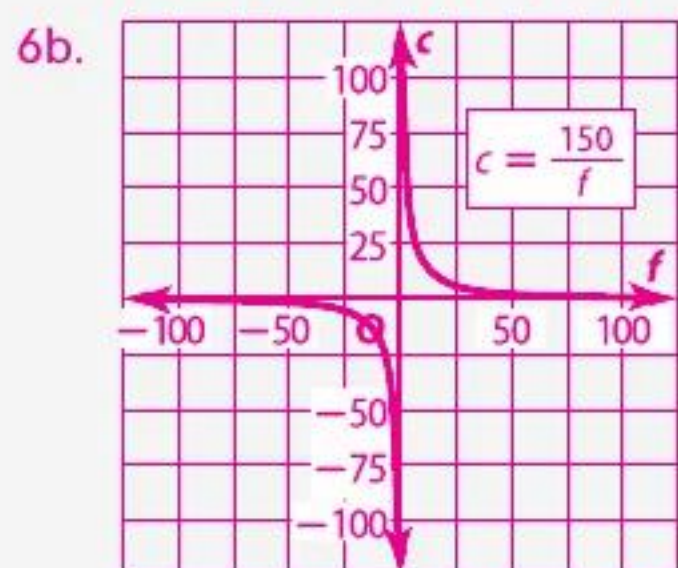
$$D = \{x | x \neq -3\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq 0\}$$



$$D = \{x | x \neq 2\};$$

$$R = \{f(x) | f(x) \neq 4\}$$



خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	7-24, 38-40, 42-61	8-24 زوجي, 38-40, 42, 48-61
OL أساسي	7-35, 36-40, 42-61	7-24, 43-47
BL متقدم	25-59, (اختياري: 60-61)	25-40, 42, 48-61

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في إنشاء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

29. **البيسبول** تبلغ المسافة بين مكان الرامي والقاعدة الرئيسية 18.4 m.

a. إذا كانت r تمثل سرعة الرمي وكانت t تمثل الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى القاعدة، فاكتب معادلة لتمثيل السرعة كدالة للزمن. $r = \frac{60.5}{t}$

b. مثل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

c. إذا وصلت كرة بيسبول مضروبة بطريقة الإصبعين في 0.48 ثانية، فماذا كانت سرعتها؟ 126 m/s

مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى وحدد خطوط التقارب. 30-35. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

$$30. f(x) = \frac{-3}{x+7} - 1 \quad 31. f(x) = \frac{-4}{x+2} - 5 \quad 32. f(x) = \frac{6}{x-1} + 2$$

$$33. f(x) = \frac{2}{x-4} + 3 \quad 34. f(x) = \frac{-7}{x-8} - 9 \quad 35. f(x) = \frac{-6}{x-7} - 8$$

36. **المعرفة المالية** انطلقت سيارة لميس 440 mi مستهلكة خزانًا واحدًا من الوقود.

a. إذا كانت g تمثل عدد الأميال بالنسبة إلى الجالون الذي استهلكته السيارة وكانت t تمثل حجم خزان الوقود، فاكتب معادلة لتمثيل النسبة بين الأميال والجالونات كدالة لحجم الخزان. $g = \frac{440}{t}$

b. مثل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

c. كم عدد الأميال التي تقطعها السيارة لكل جالون إذا كان بها خزان وقود بسعة 15 gal؟ $29\frac{1}{3}$ mi/gal

37. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة ستستكشف أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة. a-f. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

a. **الجدولة** ضع جدولاً بالغيم لـ $a(x) = x^2$ و $b(x) = x^{-2}$ و $c(x) = x^3$ و $d(x) = x^{-3}$.

b. **التمثيل البياني** مثل $a(x)$ و $b(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.

c. **الصيغ اللغزية** قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $a(x)$ و $b(x)$.

d. **التمثيل البياني** مثل $c(x)$ و $d(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.

e. **الصيغ اللغزية** قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $c(x)$ و $d(x)$.

f. **التحليلات** ما الاستنتاجات التي توصلت إليها بشأن أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38. **مسألة غير محددة** الإجابة اكتب دالة مطلوبة يحتوي فيها التمثيل البياني على خط تقارب رأسي

عند $x = -4$ وخط التقارب الأفقي عند $y = 6$. **الإجابة النموذجية:** $f(x) = \frac{1}{x+4} + 6$

39. **التبوير** قارن وبين الفرق بين التمثيل البياني لكل زوجين من المعادلات.

$$a. y = \frac{1}{x} \text{ و } y - 7 = \frac{1}{x} \quad b. y = \frac{1}{x} \text{ و } y = 4\left(\frac{1}{x}\right) \quad c. y = \frac{1}{x} \text{ و } y = \frac{1}{x+5}$$

d. بدون وضع جدول بالقيم، استخدم ما لاحظته في الأجزاء a-c لرسم تمثيل بياني لـ

$$y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right) \quad \text{a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.}$$

40. **الفرضيات** جد الدالة التي لا تنتمي للمجموعة. اشرح.

$$f(x) = \frac{3}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$

$$h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$$

$$j(x) = \frac{20}{x-7}$$

الإجابة النموذجية: $g(x)$ ؛ جميع الخيارات الأخرى تحتوي على قيم مجهولة في المقام فقط.

41. **التحدي** اكتب دالتي مطلوبة مختلفتين بحيث يحتوي تمثيلهما البياني على نفس خطوط التقارب الرأسية والأفقية. ثم مثل الدالتين بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

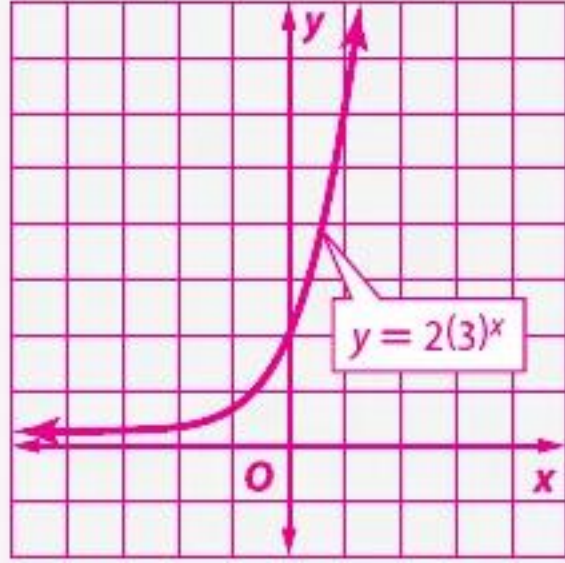
42. **الكتابة في الرياضيات** راجع بداية الدرس. اشرح كيفية استخدام الدوال النسبية في جمع الأموال. اشرح السبب وراء كون جزء واحد من التمثيل البياني ذا معنى في سياق المسألة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

4 التقويم

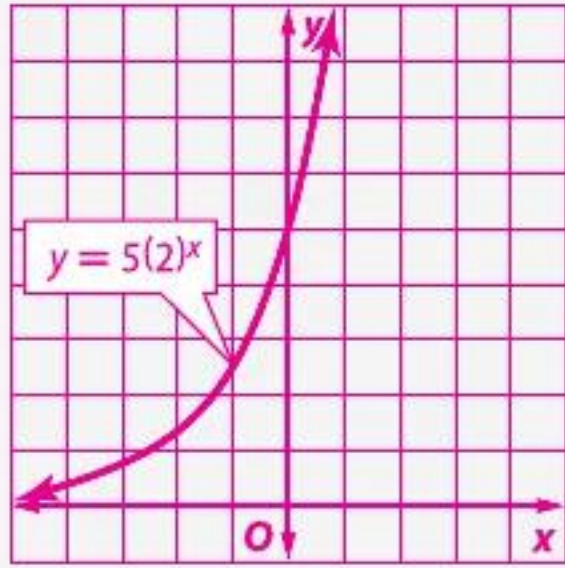
الكرة البلورية اطلب من الطلاب وصف كيف يعتقدون أن ممارستهم لضرب التعابير النسبية وتحويلها لأبسط صورة ستساعدهم عند جمع أو طرح التعابير النسبية.

إجابات إضافية

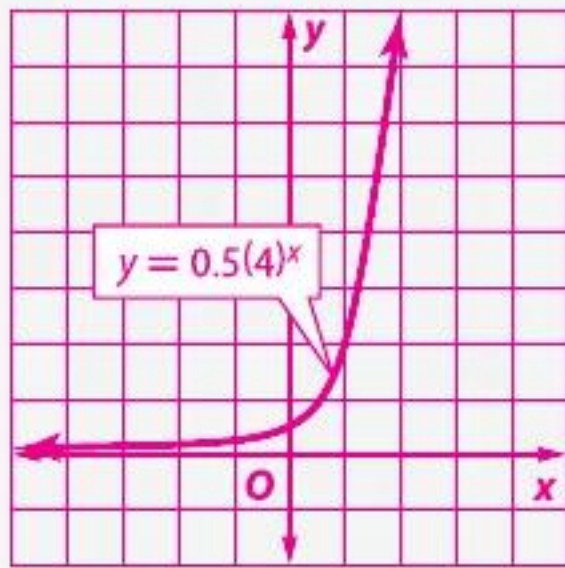
52. $D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}$,
 $R = \{y \mid y > 0\}$



53. $D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}$,
 $R = \{y \mid y > 0\}$



54. $D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}$,
 $R = \{y \mid y > 0\}$



46. SAT/ACT. تتحرك سيارة مسافة m km بمعدل t km/h. فكم عدد الساعات التي تستغرقها الرحلة؟

F $\frac{m}{t}$ J $\frac{t}{m}$ F
 G $m - t$ K $t - m$
 H mt

47. إذا كانت $-1 < a < b < 0$ ، فأني مما يلي له القيمة الأكبر؟

B A $a - b$ C $a + b$
 B $b - a$ D $2b - a$

43. إجابة مختصرة ما قيمة $(x + y)(x + y)$ إذا كانت $x^2 + y^2 = 10$ و $xy = -3$ ؟

4

44. إجابة شبيهة إذا كانت $x = 2y$ و $y = 4z$ و $2z = w$ و $w \neq 0$ ، فإن $\frac{x}{w} =$ ؟

4

45. إذا كانت $c = 1 + \frac{1}{d}$ و $d > 1$ ، فإن c قد تساوي .

A $\frac{5}{7}$ C $\frac{15}{7}$
 B $\frac{9}{7}$ D $\frac{19}{7}$

مراجعة شاملة

48. الأعمال التجارية قررت شركة صغيرة تقسيم 8% من أرباحها على مديريها الستة. يوجد في الشركة مديرا مبيعات وأربعة مديرين آخرين. سيتم تقسيم خمسين بالمائة بالتساوي على المديرين الستة، بينما سيتم تقسيم الـ 50% الأخرى على المديرين الأربعة الذين لا يعملون في المبيعات. افترض أن P تمثل الأرباح. (الدرس 2-2)

a. اكتب تعبيراً لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير لا يعمل في المبيعات. $\frac{0.5(0.08p)}{6} + \frac{0.5(0.08p)}{4}$
 b. حوّل التعبير لأبسط صورة. $\frac{0.05p}{3}$
 c. اكتب تعبيراً في أبسط صورة لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير مبيعات. $\frac{0.02p}{3}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-1)

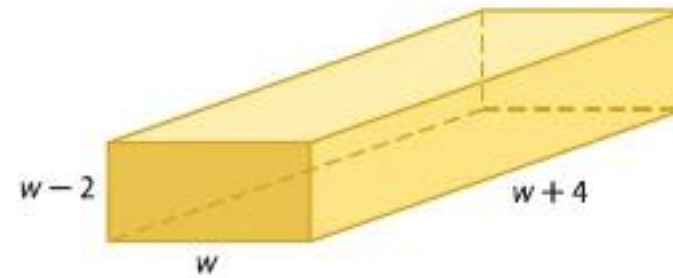
49. $\frac{p^3}{2n} - 2p$ 50. $\frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}} \cdot \frac{m+q}{m^2+q^2}$ 51. $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}} \cdot \frac{2x+y}{2x-y}$

مثّل كل دالة بيانياً. واذكر المجال والمداى. 52-55. انظر الهامش.

52. $y = 2(3)^{-x}$ 53. $y = 5(2)^x$ 54. $y = 0.5(4)^x$ 55. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

جد قيمة $(f+g)(x)$ ، و $(f-g)(x)$ ، و $(f \times g)(x)$ ، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$. 56-58. انظر الهامش.

56. $f(x) = x + 9$ 57. $f(x) = 2x - 3$ 58. $f(x) = 2x^2$
 $g(x) = x - 9$ $g(x) = 4x + 9$ $g(x) = 8 - x$



59. الهندسة يبلغ عرض متوازي المستطيلات w cm. ويقل ارتفاعه عن عرضه بـ 2 cm. ويزيد طوله عن عرضه بـ 4 cm. إذا كان حجم المتوازي يساوي 8 أمثال قياس طوله، فجد أبعاد المتوازي.

$w = 4$ cm, $\ell = 8$ cm, $h = 2$ cm

مراجعة المهارات

مثل بيانياً كل دالة كثيرة الحدود. قدر إحداثيات المحور الأفقي x التي تحدث عندها القيمتان العظمى والصغرى النسبيتان. حدد المجال والمداى لكل من الدوال التالية. 60، 61. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

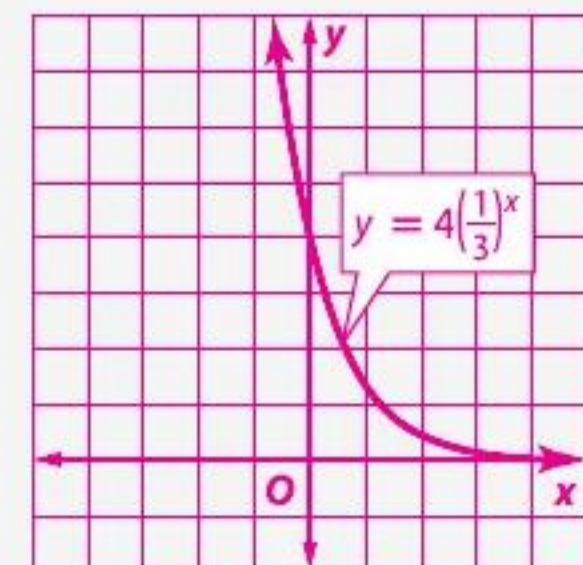
60. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ 61. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

56. $(f+g)(x) = 2x$; $(f-g)(x) = 18$;
 $(f \times g)(x) = x^2 - 81$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+9}{x-9}$, $x \neq 9$

57. $(f+g)(x) = 6x + 6$; $(f-g)(x) = -2x - 12$; $(f \times g)(x) = 8x^2 + 6x - 27$;
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-3}{4x+9}$, $x \neq -\frac{9}{4}$

58. $(f+g)(x) = 2x^2 - x + 8$; $(f-g)(x) = 2x^2 + x - 8$; $(f \times g)(x) = -2x^3 + 16x^2$;
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2}{8-x}$, $x \neq 8$

55. $D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}$,
 $R = \{y \mid y > 0\}$



اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 2-1 إلى 2-3

التقويم التكويني

استخدم اختبار منتصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في الجزء الأول من الوحدة.

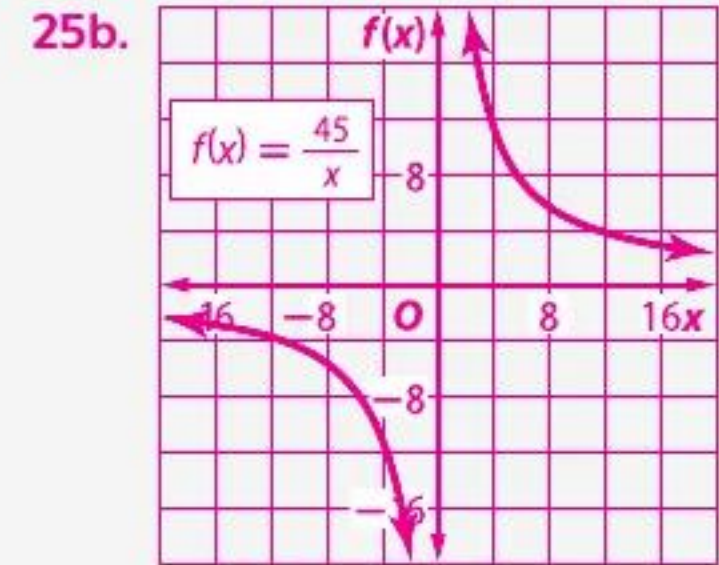
بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

مطويات[®] منظم الدراسة

مطويات دينا زايك[®]

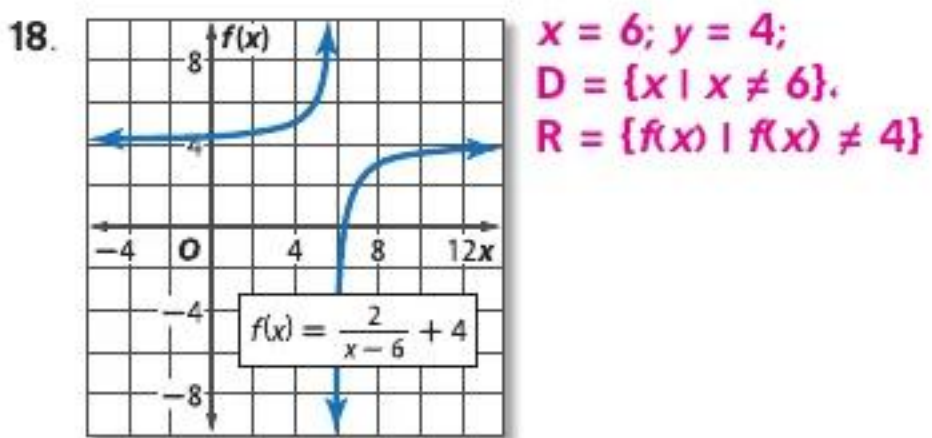
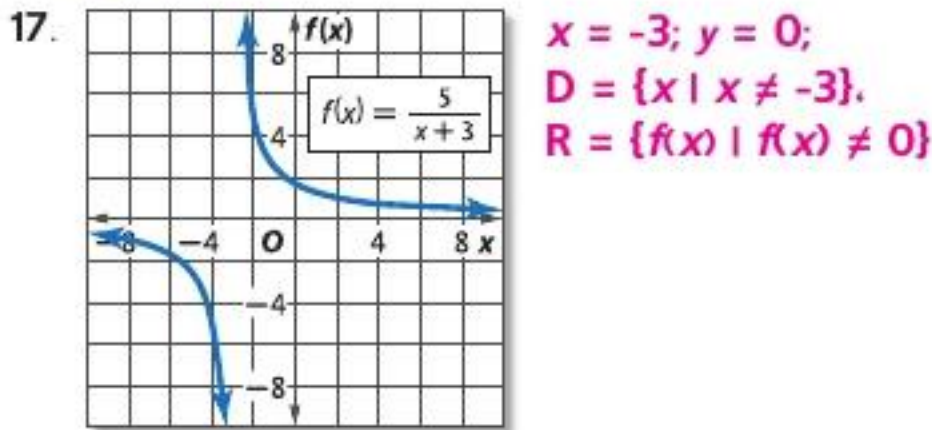
قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 2-1 إلى 2-3 المكتوبة في مطوياتهم.

إجابة إضافية



16. **السفر** تذهب وفاء إلى شاطئ يبعد 100 km. قطعت نصف المسافة بمعدل ما، وقطعت المسافة المتبقية بمعدل أبداً بمقدار 15 km/h. (الدرس 2-2)
- a. $\frac{50}{x} h$
- إذا كانت x تمثل الوتيرة الأسرع بالكيلومتر في الساعة، فاكتب تعبيراً يمثل الوقت المتبقي بهذه الوتيرة. $\frac{50}{x-15} h$
- b. اكتب تعبيراً يمثل مقدار الزمن المتبقي بالسرعة الأبطأ.
- c. اكتب تعبيراً يمثل مقدار الزمن الذي تحتاجه وفاء لإكمال رحلتها. $\frac{100(x-7.5)}{x(x-15)}$

حدّد خطوط التقارب والمجال والمدي لكل دالة. (الدرس 2-3)



مثل بياناً كل دالة مقلوب. واذكر المجال والمدي. (الدرس 2-3)

19-24. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

19. $f(x) = \frac{4}{x}$
20. $f(x) = \frac{1}{3x}$
21. $f(x) = \frac{6}{x-1}$
22. $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$
23. $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$
24. $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

25. **الشطائر** تصنع مجموعة 45 شطيرة لتناولها في نزهة. يعتمد عدد الشطائر التي يستطيع كل فرد تناولها على عدد الأشخاص المشاركين في الرحلة. (الدرس 2-3)

- a. اكتب دالة لتمثيل هذه الحالة. $f(x) = \frac{45}{x}$
- b. مثل الدالة بياناً. انظر الهامش.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-1)

4. $\frac{(m+2)(m+5)}{3}$
1. $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y} \cdot \frac{2y^4z}{9x^4}$
2. $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c} \cdot \frac{2a^4b^2}{5}$
3. $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18} \cdot \frac{2}{x+3}$
4. $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$
5. $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}} \cdot r+3$
6. $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}} \cdot \frac{2y(y-2)}{3(y+2)}$

7. الاختيار من متعدد لجميع قيم $r \neq \pm 2$. $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4} = \frac{r-2}{r+4}$

- A $\frac{r-2}{r+4}$
- B $\frac{r+4}{r-2}$
- C $\frac{r+2}{r-4}$
- D $\frac{r+4}{r+2}$

8. الاختيار من متعدد حدد جميع قيم x التي تكون عندها

$$\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$$

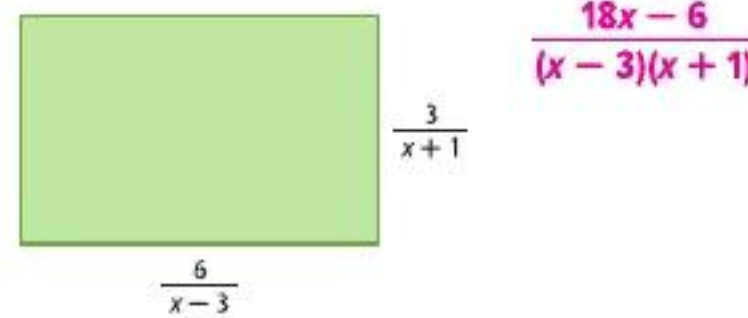
- F -3, -1
- G 3, 1, -9
- H -3, -1, 9
- J -1

9. ما المضاعف المشترك الأصغر لكل من $3x^2 - x$ و $3 - 3x$ ؟ $-3x(x-1)$ (الدرس 2-2)

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-2)

10. $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3} \cdot \frac{6xy^2+4x^2}{12x^2y^3}$
11. $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n} \cdot \frac{9n^2+8-48mn}{12mn^2}$
12. $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6} \cdot \frac{5r-6}{(r-6)(r+3)(r-2)}$
13. $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y} \cdot \frac{3x}{x+y}$
14. $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8} \cdot \frac{x^2+4x-7}{2(x-4)(x+1)}$

15. حدد محيط المستطيل. (الدرس 2-2)



التمثيل البياني للدوال النسبية

2-4

الدرس

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-4 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا.

الدرس 2-4 التمثيل البياني للدوال النسبية ذات خطوط التقارب الأفقية والرأسية. التمثيل البياني للدوال النسبية ذات خط التقارب المائل ونقطة الانفصال.

بعد الدرس 2-4 حل المعادلات النسبية باستخدام التمثيل البياني.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

أسأل:

- على ماذا يعتمد متوسط تكلفة طباعة الصور؟ **عدد الصور المطبوعة**
- ماذا يحدث لقيمة $C(p)$ مع زيادة قيمة p ؟ **تنخفض.**
- هل يمكن أن تكون $p = 0$ ؟ **لا**
- هل يمكن $C(p)$ أن تساوي 0؟ **نعم.**

تشتمل الدالة على صفر عند $p = -\frac{350}{0.47}$ ، أو حوالي -744.68. مع ذلك، لا تكون القيم السالبة واقعية لسياق الموقف.

لماذا؟

الحالي

السابق



- اشترت رنا آلة تصوير ذات عدسة أحادية عاكسة وطابعة صور مقابل AED 350. ويزعم المصنع أن الحبر وورقة الصورة تكلف AED 0.47 للصورة الواحدة. ويمكن استخدام الدالة النسبية $C(p) = \frac{0.47p + 350}{p}$ لتحديد متوسط التكلفة لطباعة p صورة.

- تمثيل الدوال النسبية ذات خطوط التقارب الأفقية والرأسية بيانيًا
- تمثيل الدوال النسبية ذات خط التقارب المائل ونقطة الانفصال بيانيًا.

- تمثّل الدوال النسبية بيانيًا.

1 خطوط التقارب الأفقية والرأسية لإحدى الدوال النسبية معادلة مكتوبة في الصيغة

$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث إن $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$. ولتمثيل دالة نسبية بيانيًا، فمن المفيد تحديد موقع الأصفار وخطوط التقارب. يقع صفر الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ عند أي قيمة لـ x يكون فيها $a(x) = 0$.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب الأفقية والرأسية

إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1، وكان $b(x) \neq 0$ ، فإن:

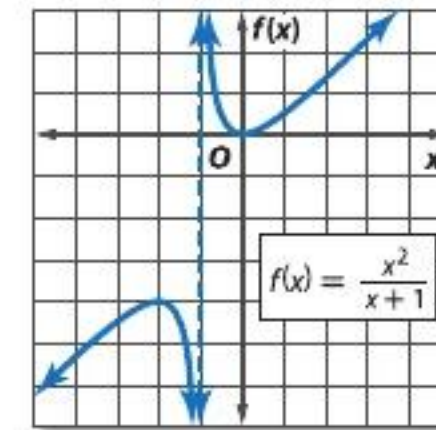
- $f(x)$ لها **خط تقارب رأسي** عندما تكون $b(x) = 0$.
- $f(x)$ لها **خط تقارب أفقي** واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ ، فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ ، فسيكون خط التقارب الأفقي هو الخط $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ ، فسيكون خط التقارب

$$\frac{\text{المعامل الرئيسي لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيسي لـ } b(x)} = y \text{ هو الخط الأفقي}$$

الشرح

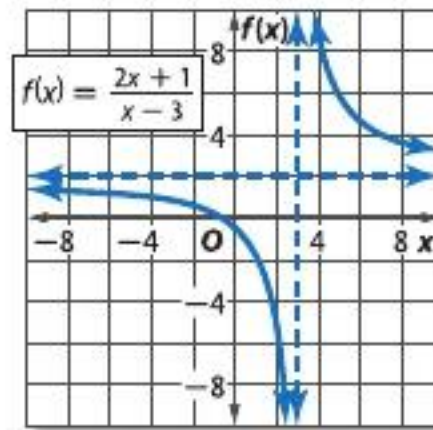
أمثلة

لا يوجد خط تقارب أفقي

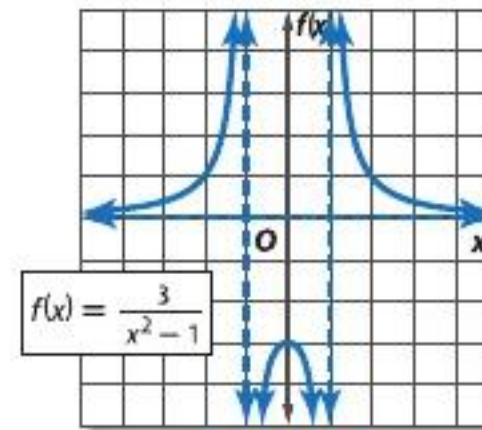


خط التقارب الرأسي:
 $x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خط التقارب الرأسي:
 $x = 3$
خط التقارب الأفقي:
 $y = 2$



خطوط التقارب الرأسية:
 $x = -1, x = 1$
خط التقارب الأفقي:
 $y = 0$

مفردات جديدة

دالة نسبية rational function
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
نقطة الانفصال (عدم الاتصال) point discontinuity

ممارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها

يمكن استخدام خط التقارب للدالة النسبية لرسم التمثيل البياني للدالة. إضافة إلى ذلك، يمكن استخدام خطوط التقارب لفئة التمثيل البياني إلى مناطق لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني.

أفقيه!

الأصناف مقابل خطوط التقارب الرأسية
الدالة النسبية عند القيم التي تجعل البسط مساوياً للصفر. وتقع خطوط التقارب الرأسية عند القيم التي تجعل المقام مساوياً للصفر.

مثال 1 التمثيل البياني بدون خط تقارب أفقي

$$\text{مثّل } f(x) = \frac{x^3}{x-1} \text{ بيانياً.}$$

الخطوة 1 جد الأصناف.

اجعل $a(x) = 0$.
 $x^3 = 0$
 $x = 0$

يوجد صفر عند $x = 0$.

الخطوة 2 ارسم خط التقارب.

جد خط التقارب الرأسية.

افترض أن $b(x) = 0$.
 $x - 1 = 0$
 $x = 1$

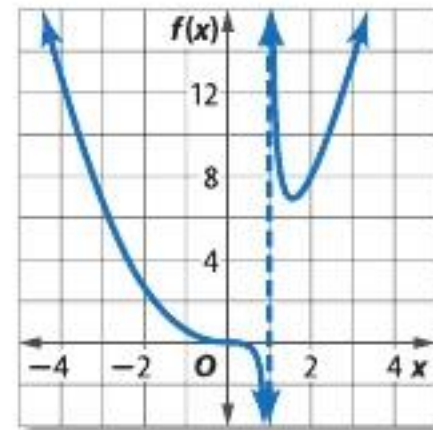
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 1$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام، إذاً لا يوجد خط تقارب أفقي.

الخطوة 3 ارسم التمثيل البياني.

استخدم الجدول لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني. ثم صل النقاط ببعضها البعض.

x	f(x)
-3	6.75
-2	2.67
-1	0.5
0	0
0.5	-0.25
1.5	6.75
2	8
3	13.5

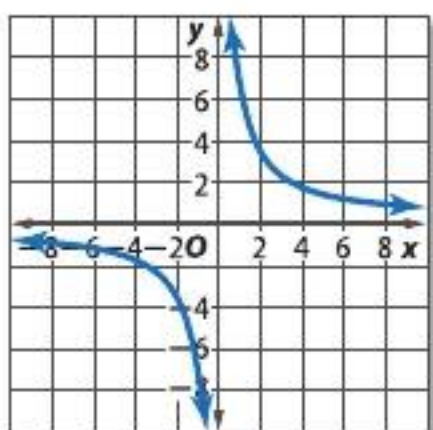


تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانياً. 1A, 1B. انظر الهامش.

1A. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$

1B. $f(x) = \frac{(x + 1)^3}{(x + 2)^2}$



وفي الحياة اليومية، في بعض الأحيان تكون القيم الموجودة على التمثيل البياني لدالة نسبية غير ذات معنى. في التمثيل البياني الموجود على اليسار، لا يمكن أن تكون قيم x مثل الزمن والمسافة وعدد الأشخاص سالبة في سياق المسألة، لذا لن تحتاج إلى اعتبار هذا الجزء من التمثيل البياني.

90 | الدرس 2-4 | التمثيل البياني للدوال النسبية

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب عمل تسجيلات فيديو توضح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانياً. اطلب من الطلاب وصف كيفية إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية، ومن ثم استخدم جدول قيم لرسم التمثيل البياني.

1 خطوط التقارب الأفقية والرأسية

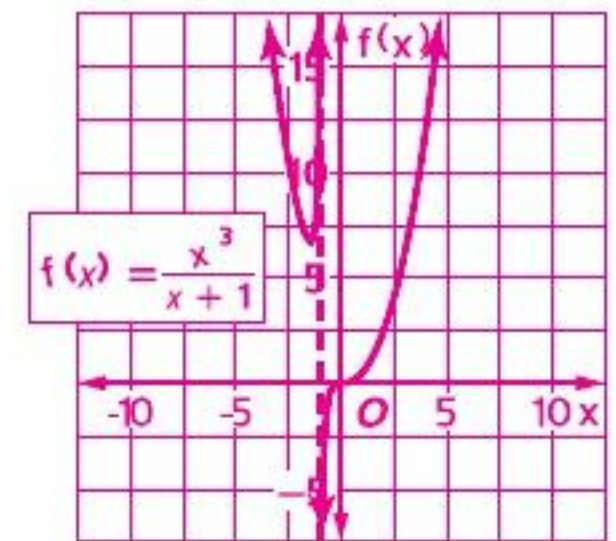
المثال 1 يوضح كيفية تحديد وتمثيل الدوال النسبية بيانياً التي ليس لها خطوط تقارب أفقية. **المثال 2** عبارة عن مسألة من الحياة اليومية توضح أنه عندما يتم استخدام دالة لتمثيل موقف حقيقي، فإن مجالها ذو المعنى قد يكون أصغر من مجال الرياضيات.

التقويم التكويني

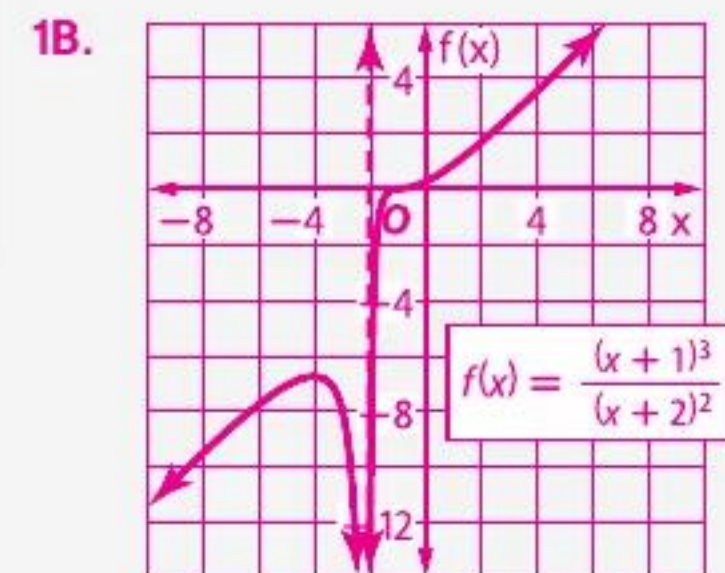
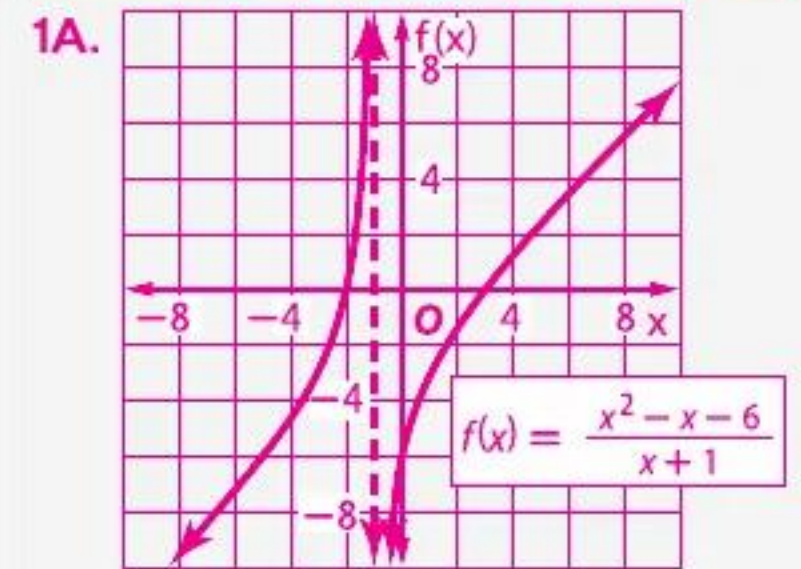
استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 مثّل $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ بيانياً.

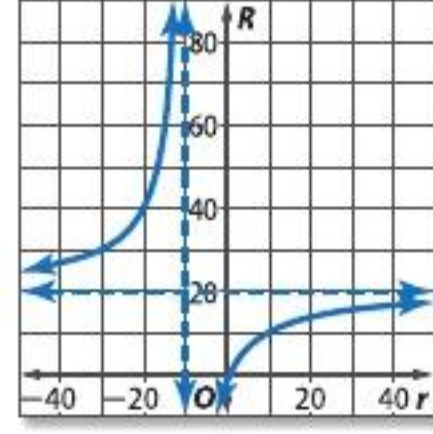


إجابات إضافية (تمرين موجه)



متوسط السرعة تحرك قارب عكس التيار بسرعة r_1 km/h. أثناء رحلة العودة إلى نقطة البدء الأصلية، تحرك القارب بسرعة r_2 km/h. وتقدم متوسط السرعة للرحلة كاملة R من خلال القانون $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

a. افترض أن r_1 هو المتغير المستقل وافترض أن R هو المتغير التابع. ارسم التمثيل البياني إذا كان $r_2 = 10$ km/h.



تكون الدالة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + 10}$ أو $R = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$ ويكون خط التقارب الرأسي $r_1 = -10$. مثل خط التقارب الرأسي والدالة بيانيًا. لاحظ أن خط التقارب الرأسي $R = 20$.

b. ما تقاطع R للتمثيل البياني؟
التقاطع مع R هو 0.

c. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، قيم السرعات غير سالبة. وبالتالي تكون جميع قيم r_1 الأكبر من أو تساوي 0 وقيم R التي تقع بين العددين 0 و 20 ذات معنى.

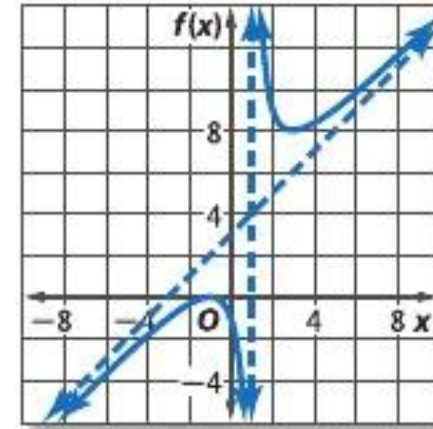
تمرين موجه

2. الرواتب تستخدم إحدى الشركات القانون $S(x) = \frac{45x + 25}{x + 1}$ لتحديد الراتب السنوي بآلاف الدراهم للموظف أثناء عامه x . مثل $S(x)$ بيانيًا. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ وما معنى خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني؟ انظر الهامش.

2 خطوط التقارب المائلة ونقطة عدم الاتصال يعتبر **خط التقارب المائل** والذي يطلق عليه في بعض الأحيان خط التقارب المنحدر خطًا ليس أفقي ولا رأسي.

المفهوم الأساسي خط التقارب المائل

الشرح إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1 وكانت $b(x) \neq 0$. فإن $f(x)$ لها خط تقارب مائل إذا كانت درجة $a(x)$ مطروحا منها درجة $b(x)$ تساوي 1. وتكون معادلة خط التقارب هي $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ بدون باقي.



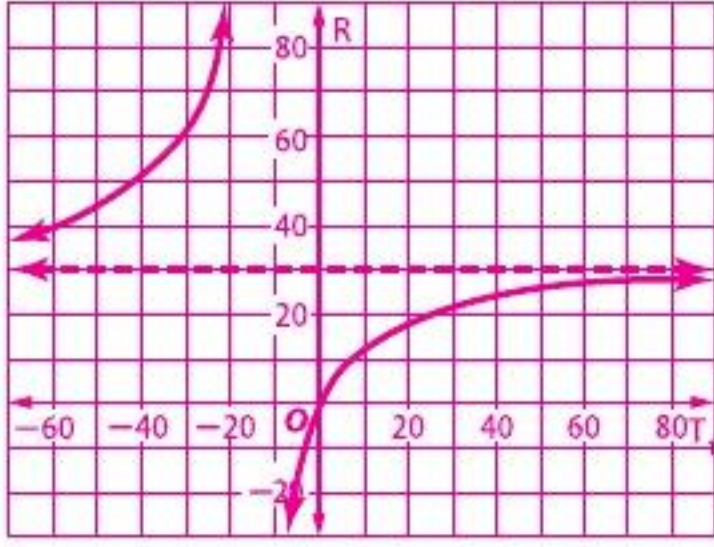
$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3}{x^3 - 1}$$

خط التقارب الرأسي: $x = 1$
خط التقارب المائل: $y = x + 3$

مثال

مثال إضافي

2 **متوسط السرعة** استخدم الموقف والصيغة المقدمة في المثال 2. a. ارسم التمثيل البياني إذا كان $r_2 = 15$ mi/h.



b. ما تقاطع R للتمثيل

البياني؟ التقاطع R هو 0.

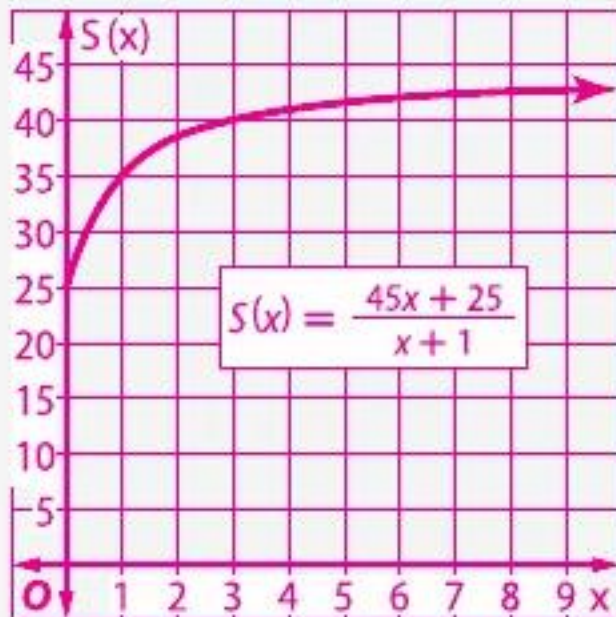
c. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ تكون قيم r_1 أكبر من أو مساوية للعدد 0 وقيم R بين 0 و 30 تكون ذات معنى.

2 خطوط التقارب المائلة ونقطة عدم الاتصال

المثال 3 يوضح كيفية تمثيل دالة بيانيًا مع خطوط تقارب مائلة. المثال 4 يوضح تمثيل بياني مع نقطة انفصال.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

2. يجب أن يكون عدد سنوات العمل أكبر من أو مساويًا للعدد 0. ويجب أن تكون قيم الراتب بين 25 و 45. يمثل خط التقارب سقف راتب AED 45,000.



التوسع تحدى الطلاب لشرح قواعد إيجاد خطوط التقارب الأفقية والمائلة. على الرغم من توضيح الوحدة للطلاب كيفية إيجادها، يمكن ترك شرح سبب عمل القواعد للطلاب الأكثر قدرة. ادمج مجهودات الطلاب عن طريق الطلب منهم بأن يفحصوا تمثيلات بيانية ذات درجات متفاوتة في البسط والمقام والبحث عن أنماط عامة في خطوط التقارب.

مثال 3 تحديد خط التقارب المائل

مثّل $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x - 1}$ بيانيًا.

الخطوة 1 جد الأصفار.

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

اجعل $a(x) = 0$

$$(x + 2)^2 = 0$$

بالتحليل إلى العوامل.

$$x + 2 = 0$$

بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

$$x = -2$$

اطرح 2 من كل طرف.

يوجد صفر عند $x = -2$.

الخطوة 2 جد خط التقارب.

$$2x - 1 = 0$$

اجعل $b(x) = 0$

$$2x = 1$$

اجمع 1 إلى كل طرف.

$$x = \frac{1}{2}$$

اقسم كل طرف على 2.

يوجد خط تقارب رأسي عند $x = \frac{1}{2}$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام، إذا لا يوجد خط تقارب أفقي.

حيث إن الفارق بين درجة البسط ودرجة المقام يساوي 1.

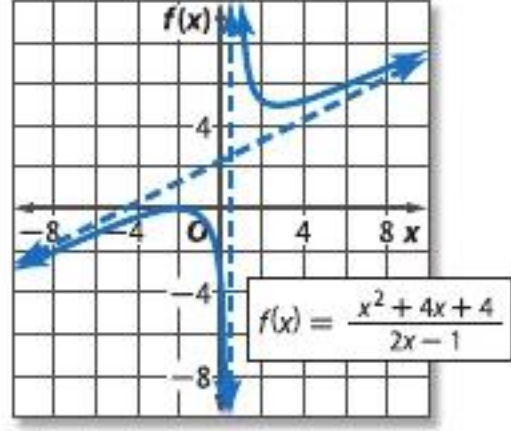
إذا يوجد خط تقارب مائل.

اقسم البسط على المقام لتحديد معادلة خط التقارب المائل.

إن معادلة خط التقارب هي ناتج القسمة باستثناء أي باق.

وبالتالي، فإن خط التقارب المائل هو الخط $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} \\ 2x - 1 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{(-)x^2 - \frac{1}{2}x} \\ \frac{9}{2}x + 4 \\ \underline{(-)\frac{9}{2}x - \frac{9}{4}} \\ \frac{25}{4} \end{array}$$



الخطوة 3 ارسم خط التقارب. ثم استخدم قيم الجدول لتمثيل الدالة بيانيًا.

تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا. 3A, 3B. انظر الهامش.

3A. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

3B. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$

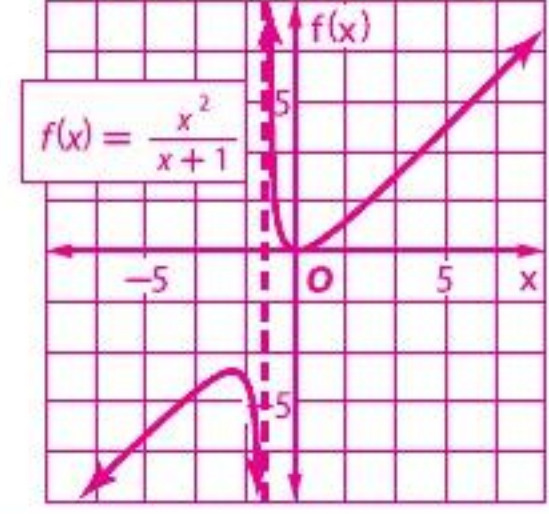
وفي بعض الحالات، قد يحتوي التمثيل البياني للدوال النسبية على **نقطة انفصال**، والتي تشبه الفجوة في المنحنى. ويرجع ذلك إلى أن الدالة تكون غير محددة في هذه النقطة.

نصيحة دراسية

خط التقارب المائل يقع النسبة التي تشتمل على بسط كثير الحدود أعلى درجة واحدة من مقام كثير الحدود.

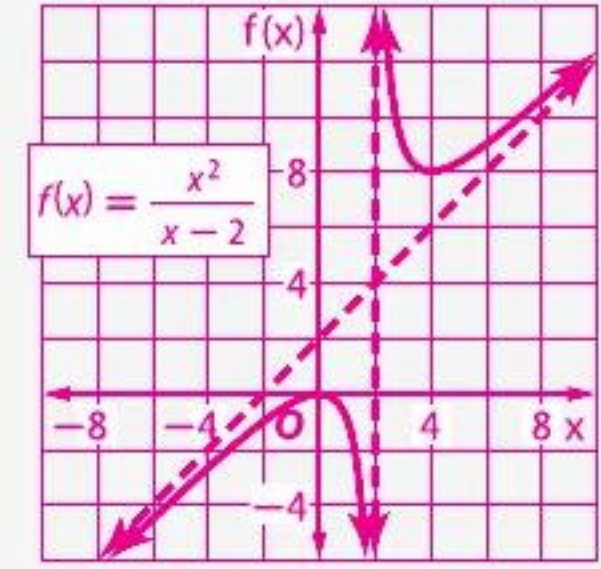
مثال إضافي

3 مثّل $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ بيانيًا.

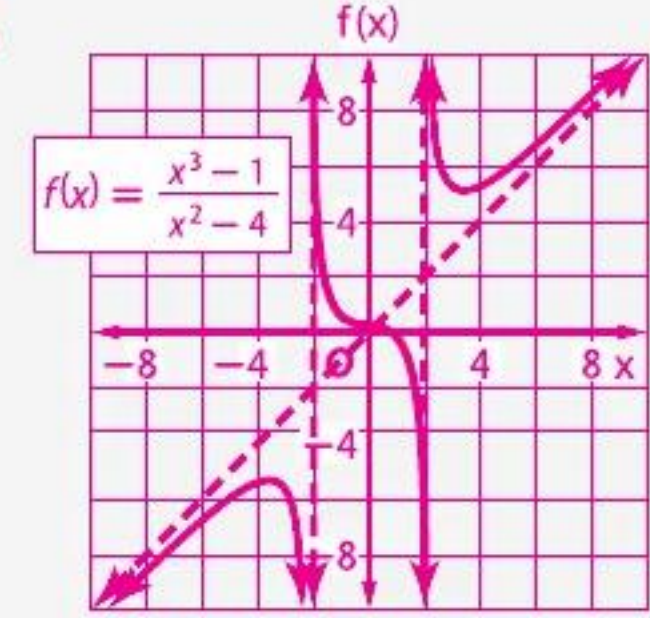


إجابات إضافية (تمرين موجّه)

3A.

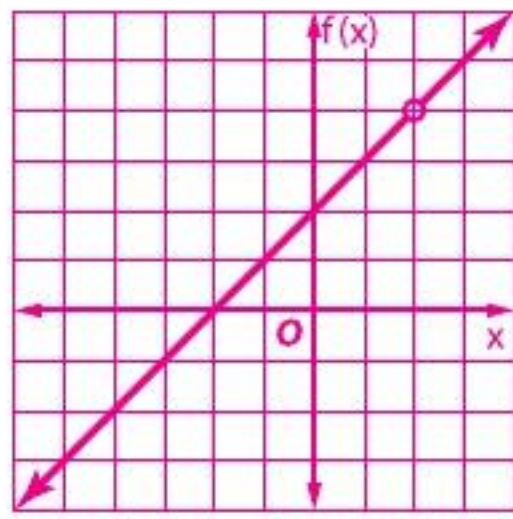


3B.



مثال إضافي

4 مثل $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ بيانيًا.



3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. يستتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلًا منطقيًا للمسألة التي يحلها؛ والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

ملاحظات لحل التمرين

ورق مربعات بالنسبة للتمارين 1 إلى 42 و 51 إلى 53 سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

المتابعة

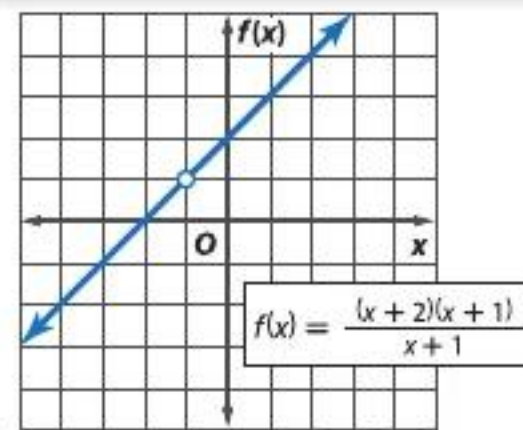
لقد استكشف الطلاب التعبيرات والدوال النسبية.

أسأل:

■ كيف تنعكس خواص دالة نسبية في تمثيلها البياني؟

الإجابة النموذجية: تحدث خطوط التقارب الرأسية عند القيم التي تجعل المقام 0؛ وتحدث خطوط التقارب الأفقية عندما تكون درجة البسط أقل من أو مساوية لدرجة المقام؛ وتحدث خطوط التقارب المائلة عندما تختلف درجات البسط والمقام بعدد 1؛ وتحدث الفجوات عندما يتشارك البسط والمقام في عامل ذو حدين.

المفهوم الأساسي نقطة الانفصال



الشرح إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، $b(x) \neq 0$ ، $x = c$ عامل لكل من $a(x)$ و $b(x)$ ، فسيوجد نقطة انفصال عند $x = c$.

مثال $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} = x+2$ ، $x \neq -1$

مثال 4 التمثيل بيانيًا مع نقطة الانفصال

مثل $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانيًا.

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4$$

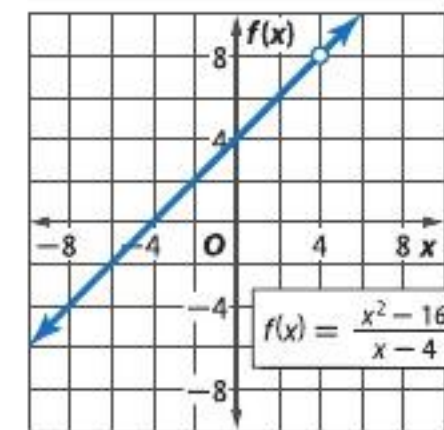
لاحظ أن $f(x) = x+4$ هو التمثيل البياني $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ وبالتالي، فإن التمثيل البياني $f(x) = x+4$ مع فجوة عند $x = 4$.

تمرين موجّه 4A، 4B. انظر الهامش.

مثل كل دالة بيانيًا.

$$4A. f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$$

$$4B. f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9}$$



انتبه! الفجوات تذكر أن العامل المشترك بين البسط والمقام يمكن أن يشير لوجود فجوة.

التحقق من فهمك

مثل كل دالة بيانيًا. 1، 2 انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

مثال 1

$$1. f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2 - 1}$$

$$2. f(x) = \frac{x^3}{x + 2}$$

3. **التبرير** يتخذ فهد موقع المهاجم بفريق كرة القدم لمدرسه. وفي هذا الموسم، حقق حتى الآن 7 من 11 هدفًا. ويود تحسين نسبة الأهداف الخاصة به. فإذا كان بإمكانه تحقيق X هدفًا متتابعًا، فيمكن تحديد نسبة أهدافه باستخدام الدالة $P(x) = \frac{7+x}{11+x}$.

مثال 2

a. مثل الدالة بيانيًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذي معنى في سياق المسألة؟ الجزء الموجود في الربع الأول

c. اذكر معنى تقاطع المحاور الرأسي. 3c. يمثل نسبة أهدافه الأصلية في الملعب وهي 63.6%

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة أهداف فهد. $y = 1$ ويمثل هذا نسبة 100%

والتي يتعذر عليه تحقيقها نظرًا لتنويته 4 أهداف بالفعل.

مثل كل دالة بيانيًا. 4-7. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

الأمثلة 3-4

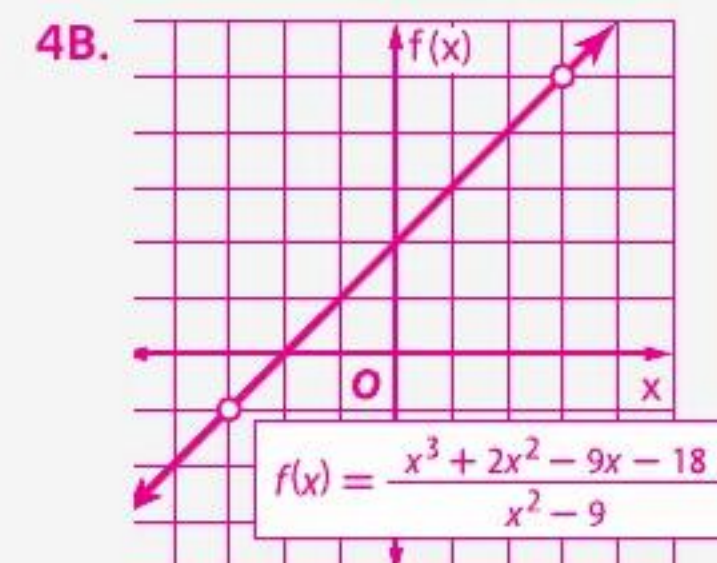
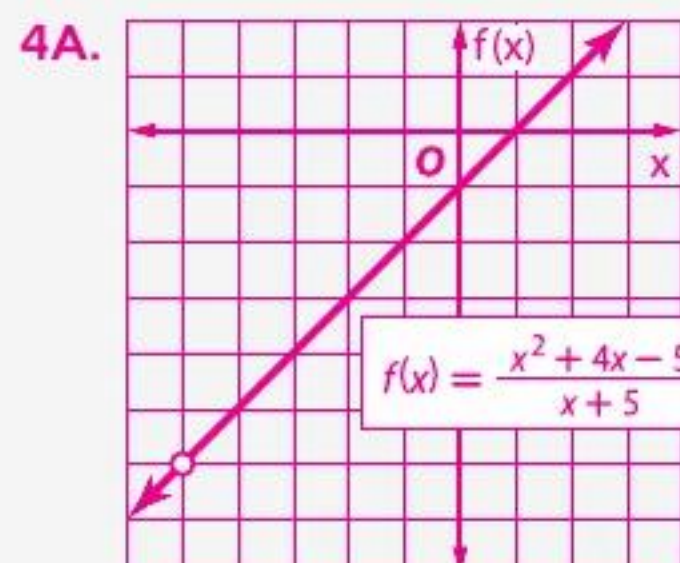
$$4. f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 2}{x}$$

$$5. f(x) = \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 2}$$

$$6. f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$$

$$7. f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$$

إجابات إضافية (تمرين موجه)



مثال 1

مثل كل دالة بيانيًا. 8-11. انظر الهامش.

$$8. f(x) = \frac{x^4}{6x + 12}$$

$$9. f(x) = \frac{x^3}{8x - 4}$$

$$10. f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}$$

$$11. f(x) = \frac{x^3 + 64}{16x - 24}$$

$$12a. c(t) = \frac{9.5t - 75}{t - 15}$$

انظر إلى الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.

مثال 2

12. الروح المدرسية بصفتها رئيسة لمجلس الطلاب، أمرت أمير بصنع قميصان لتجميع طلاب تشجيعي. ويكلف كل قميص AED 9.50، كما يوجد رسوم إدارية بمبلغ AED 75. ويخطط مجلس الطلاب لبيع القمصان، ولكن سيحصل كل من أعضاء مجلس الطلاب البالغ عددهم 15 طالبًا على قميص مجانيًا.

a. اكتب دالة لمتوسط تكلفة القميص الذي سيباع. مثل الدالة بيانيًا.

b. ما متوسط التكلفة إذا تم طلب 200 قميص؟ وإذا تم طلب 500 قميص؟ AED 10.68؛ AED 9.59

c. كم عدد القمصان التي يجب طلبها ليصبح متوسط التكلفة أقل من AED 9.75؟ أكثر من 885

مثال 3-2

مثال كل دالة بيانيًا. 13-26. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

$$13. f(x) = \frac{x}{x + 2}$$

$$14. f(x) = \frac{5}{(x - 1)(x + 4)}$$

$$15. f(x) = \frac{4}{(x - 2)^2}$$

$$16. f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$$

$$17. f(x) = \frac{1}{(x + 4)^2}$$

$$18. f(x) = \frac{2x}{(x + 2)(x - 5)}$$

$$19. f(x) = \frac{(x - 4)^2}{x + 2}$$

$$20. f(x) = \frac{(x + 3)^2}{x - 5}$$

$$21. f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$$

$$22. f(x) = \frac{4x^3}{2x^2 + x - 1}$$

$$23. f(x) = \frac{3x^2 + 8}{2x - 1}$$

$$24. f(x) = \frac{2x^2 + 5}{3x + 4}$$

$$25. f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 + 2}$$

$$26. f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 12}{x^3 - 6}$$

27. المثابرة يوضح التيار بالأمبير في دائرة كهربائية بها ثلاثة أجهزة مقاومة موصولين على التوالي من خلال المعادلة $I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$ ، حيث إن V هو الجهد بالفولت في الدائرة وكل من R_1 و R_2 و R_3 هي مقاومات أجهزة المقاومة الثلاثة بالأموم.

a. افترض أن R_1 هو المتغير المستقل وافترض أن V هو المتغير التابع. مثل الدالة بيانيًا إذا كان فولت $V = 120$ و $R_2 = 25$ أوم و $R_3 = 75$ أوم.

انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

b. اذكر معادلة خط التقارب الرأسي ونقاط تقاطع R_1 و V للتمثيل البياني. $R_1 = -100$ ؛ لا يوجد تقاطع لـ R_1 ؛ 1.2

c. جد قيمة V عندما تكون قيمة R_1 140 أوم. 0.5 أمبير

d. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ $R_1 \geq 0$ و $0 < I \leq 1.2$

مثال 4

مثال كل دالة بيانيًا. 28-35. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

$$28. f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$$

$$29. f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$$

$$30. f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$$

$$31. f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$$

$$32. f(x) = \frac{(x - 4)(x^2 - 4)}{x^2 - 6x + 8}$$

$$33. f(x) = \frac{(x + 5)(x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 8x + 15}$$

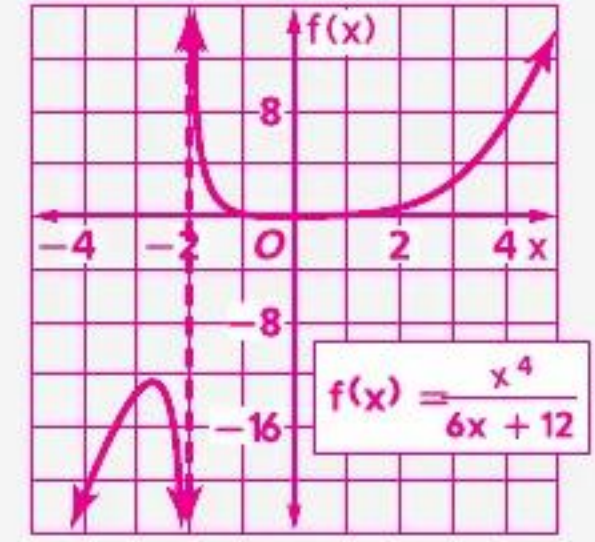
$$34. f(x) = \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$35. f(x) = \frac{2x^4 + 10x^3 + 12x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

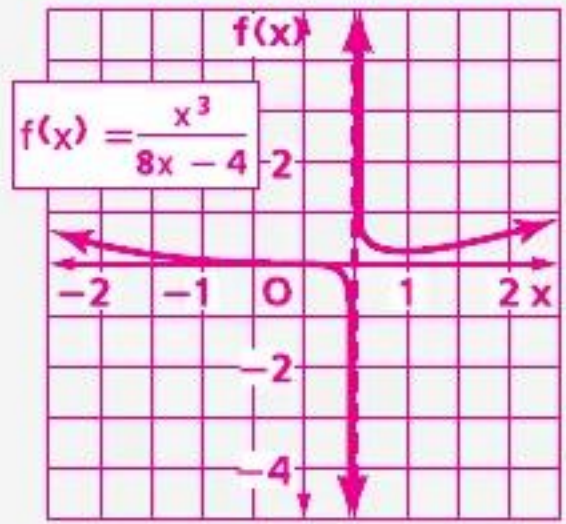
94 | الدرس 2-4 | التمثيل البياني للدوال النسبية

إجابات إضافية

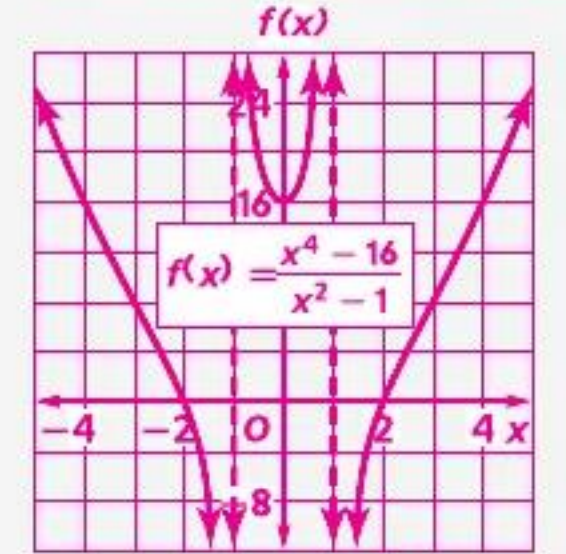
8.



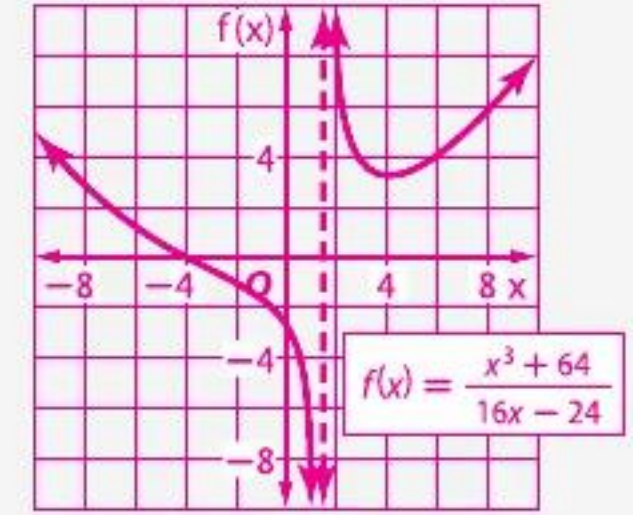
9.



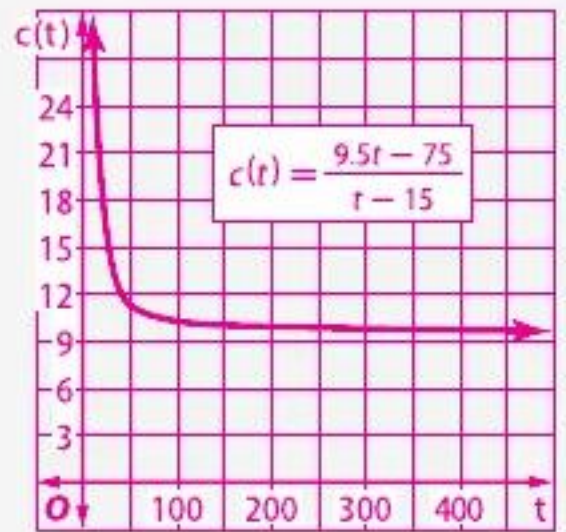
10.



11.



12a.



43. أوجه التشابه: يشتمل كلاهما على خطوط

تقارب رأسية عند $x = 0$. يقترب كلاهما من 0 حيث تقترب x من $-\infty$ وتقترب من 0 حيث تقترب x من ∞ . أوجه الاختلاف: $f(x)$ لديها فجوات عند $x = 1$ و $x = -1$ ، بينما $g(x)$ تشتمل على خطوط تقارب رأسية عند $x = \sqrt{2}$ و $x = -\sqrt{2}$ لا تشتمل $f(x)$ على أصفار، ولكن $g(x)$ تشتمل على أصفار عند $x = 1$ و $x = -1$.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	8-35, 42, 44-61, 62	47-50, 42, 51-62, زوجي 8-34
OL أساسي	9-35, 36-39, 41-42, 44-62	47-50, 36-42, 44-46, 51-62
BL متقدم	(62 اختياري), 36-61	

B 36. **الأعمال التجارية** اشترى علي ناقلة للسيارات الصغيرة مقابل AED 4500 ويعمل على نقل السيارات من مواقف المدينة. وفي كل مرة ينقل سيارة صغيرة من الموقف، يتكبد تكلفة قدرها AED 50 للبنزين والصيانة.

37c. **الإجابة النموذجية: لا يمكن أن يكون عدد الشهور أو متوسط التكلفة قيمة سالبة.**

36c. **الإجابة النموذجية: لا يمكن أن يكون عدد مواقف السيارات سالبًا.**

- a. اكتب الدالة النسبية التي تمثلها متوسط التكلفة لكل سيارة كدالة لعدد السيارات ثم مثلها بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**
b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟ $x = 0$ و $f(x) = 50$
c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟
d. كم عدد إجمالي السيارات التي يحتاج علي لنقلها ليصبح متوسط تكلفة النقل أقل من AED 80. **150**

37. **المعرفة المالية** اشترت هنا هاتفًا خلويًا جديدًا يتوفر فيه الوصول إلى الإنترنت. وقد كانت تكلفة الهاتف AED 150. وقد كانت تكلفة الاستخدام الشهرية AED 30 بالإضافة إلى AED 10 تكلفة الوصول إلى الإنترنت.

- a. اكتب الدالة النسبية التي تمثل متوسط التكلفة الشهرية كدالة لعدد الشهور التي استخدمت فيها هنا الهاتف ثم مثلها بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**
b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟ $x = 0$ و $f(x) = 40$
c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟
d. كم عدد الشهور التي سيصبح بعدها متوسط التكلفة الشهرية AED 45؟ **30**

C 38. **التبرير المنطقي** تلعب ليلي رياضة الكرة اللينة لمدرسة البرشاء الثانوية. وأثناء هذا الموسم حققت حتى الآن 4 ضربات من 12 من موقع الضارب. وهي عازمة على تحسين متوسط ضرباتها. فإذا كان بإمكانها الحصول على x ضربة متتالية، يمكن تحديد متوسط ضرباتها باستخدام $B(x) = \frac{4+x}{12+x}$. **c. تمثل متوسط ضربات الأصلي لها وهي 333.**

38d. **$y = 1$ ؛ يمثل هذا 100% وهي نسبة لا يمكنها تحقيقها حيث إنها أضاعت فرصة تحقيق ضربات 8 مرات.**

- a. مثل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**
b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذا معنى في سياق المسألة؟ **الجزء الموجود في الربع الأول**
c. اذكر معنى تقاطع المحور الرأسي.
d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة ضربات سالي.
مثل كل دالة بيانيًا. 39-41. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

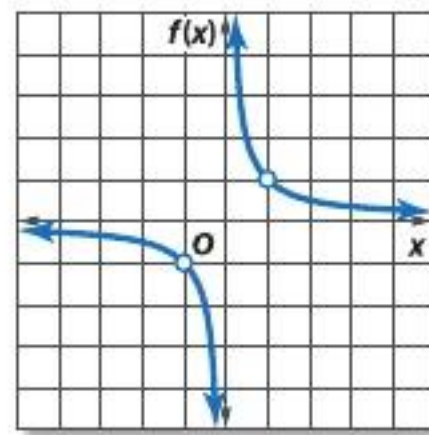
39. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+6x+5}$

40. $f(x) = \frac{x^2-10x-24}{x+2}$

41. $f(x) = \frac{6x^2+4x+2}{x+2}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم منحنى الدالة النسبية بخط تقارب أفقي $y = 1$ وخط تقارب رأسي $x = -2$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**



43. **التحدي** فارجن وبين الفرق بين $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2-2)}$ و $g(x)$ الموضحة إلى اليسار. **انظر الهامش.**

44. **التبرير** ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالة $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{x+3}$ ؟

45. **الإثبات** دالة نسبية تعطى بالصيغة

$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث إن $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$. برهن أن $f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ دالة نسبية. **45. $f(x) = \frac{x}{a-b} + \frac{c(a-b)}{(a-b)} \rightarrow \frac{x+ca-cb}{a-b}$**

46. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكن استخدام التحليل إلى العوامل لتحديد خط التقارب الرأسي أو نقطة الانفصال للدالة النسبية؟ **انظر الهامش.**

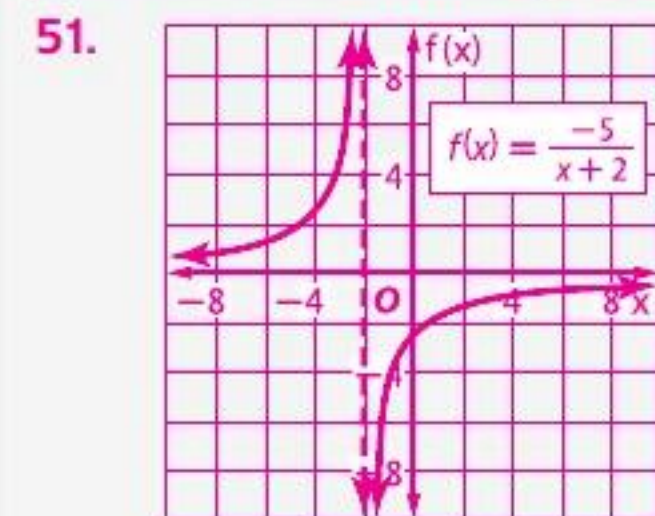
إجابة إضافية

46. **الإجابة النموذجية:** يمكنك تحديد خطوط التقارب لدالة نسبية من خلال التحليل إلى العوامل مقام دالة نسبية وتحديد القيم التي تجعل كل عامل مساوي لصفر. بعد التحليل إلى العوامل كل من بسط ومقام دالة نسبية، في حال وجود عامل مشترك $x - c$ ، إذا توجد نقطة انفصال عند $x = c$.

4 التقويم

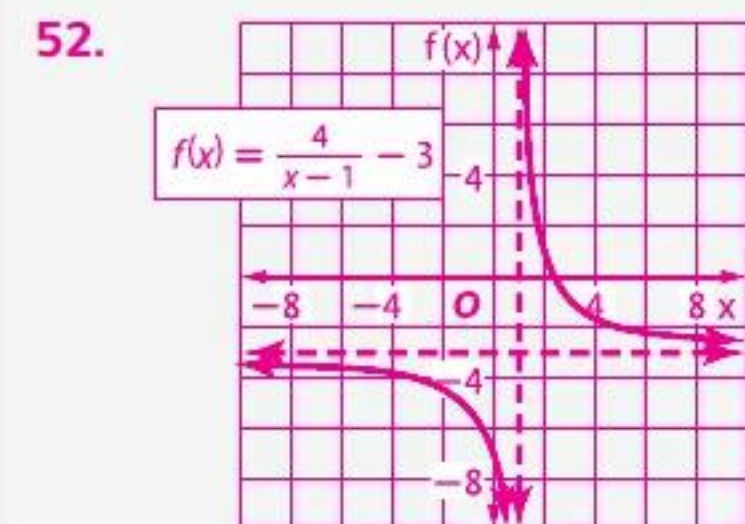
تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة الأمثلة الخاصة بهم للدوال النسبية وتمثيلها بيانيًا، مع توضيح أي خطوط تقارب أو نقاط انفصال.

إجابات إضافية



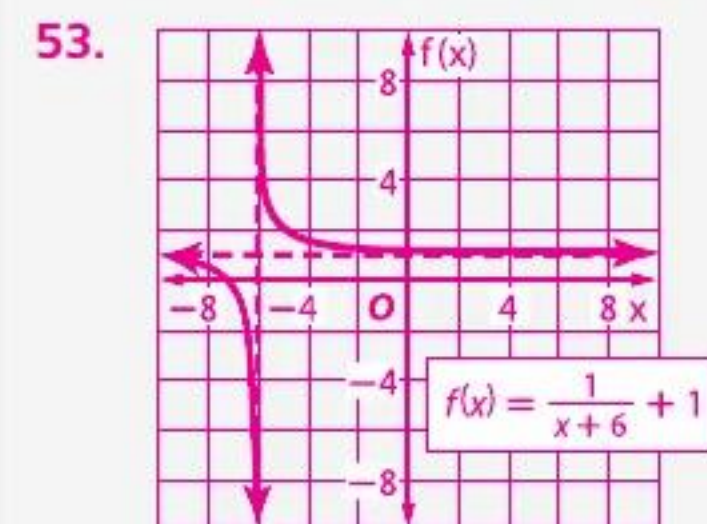
$$D = \{x \mid x \neq -2\},$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



$$D = \{x \mid x \neq 1\},$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -3\}$$



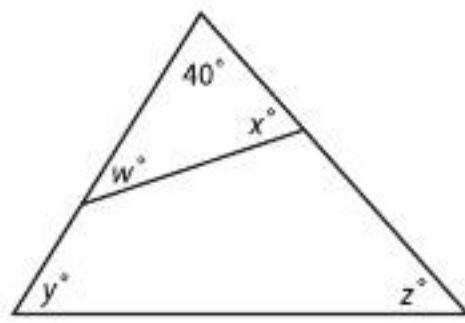
$$D = \{x \mid x \neq -6\},$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$$

تمرين على الاختبار المعياري

49. **إجابة شبيهة** تقع خمس نقاط مختلفة في مستوى بحيث كان 3 من النقاط على المستقيم ℓ و 3 من النقاط على مستقيم آخر m . ما إجمالي عدد المستقيبات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل مستقيم بنقطتين من النقاط الـ 5؟ **4**

50. **الهندسة** في الشكل أدناه، ما قيمة $w + x + y + z$ ؟ **B**



- A 140
B 280
C 320
D 360

47. **الاحتمالات** من بين الدورات الست التي يقدمها قسم الموسيقى في مدرسة خولة، يجب أن تختار خولة اثنتين بالضبط منهما. فكم عدد التوافيق المحتملة للدورتين التي ستختارهما خولة إذا لم يكن هناك قيود على الدورات التي يمكنها اختيارها؟ **C**

- A 48
B 18
C 15
D 12

48. يتم تقديم المبيعات المتوقعة للعبة من خلال المعادلة $S(p) = \frac{3000}{2p + a}$. حيث إن $S(p)$ هو عدد اللعب المباعة بالآلاف، و p هو سعر اللعبة بالدرهم و a هو ثابت. إذا تم بيع 100,000 لعبة مقابل AED 10 للعبة، فكم عدد اللعب التي سيتم بيعها بمقابل AED 20 للعبة؟ **H**

- F 20,000
G 50,000
H 60,000
J 150,000

مراجعة شاملة

مثل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى. (الدرس 2-3) 51-53. انظر الهامش.

51. $f(x) = \frac{-5}{x+2}$ 52. $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$ 53. $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-2)

54. $\frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6} = \frac{5m-4}{3(m+2)(m-2)}$ 55. $\frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9} = \frac{y(y-9)}{(y+3)(y-3)}$

56. $\frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14} = \frac{7x+38}{2(x-7)(x+4)}$ 57. $\frac{d-4}{d^2+2d-8} - \frac{d+2}{d^2-16} = \frac{-8d+20}{(d-4)(d+4)(d-2)}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

58. $y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{7}{3}} = y^4$ 59. $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{9}{4}} = x^3$ 60. $\left(\frac{1}{b^3}\right)^{\frac{2}{5}} = b^{\frac{1}{5}}$ 61. $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{9}}$

مراجعة المهارات

62. **الانتقال** يأخذ السيد أحمد ابنته مها إلى الكلية. يوضح الجدول مسافاتهم من المنزل بعد أزمنة مختلفة.

- a. جد متوسط معدل التغيير في مسافاتهم من المنزل بين ساعة واحدة إلى 3 ساعات بعد مغادرة المنزل. **55 km/h**
- b. جد متوسط معدل التغيير في مسافاتهم من المنزل بين 0 ساعة واحدة إلى 5 ساعات بعد مغادرة المنزل. **45 km/h**

المسافة (km)	الزمن (h)
0	0
55	1
110	2
165	3
165	4
225	5

96 | الدرس 2-4 | التمثيل البياني للدوال النسبية

التدريس المتميز

التوسع ارسم خطًا مستقيمًا على اللوحة، ولكن اترك فجوة في المستقيم لبعض القيم الحقيقية للرمز x . على سبيل المثال، ارسم المستقيم ليمثل $y = x - 2$ ، ولكن اترك الفجوة عند النقطة $(-1, 1)$ اطلب من الطلاب كتابة دوال نسبية محتملة يمكن وصفها من خلال التمثيل البياني. توجد عدة إجابات ممكنة. طالما $x = 1$ تعتبر قيمة مستبعدة وتكون الصيغة المحولة لأبسط صورة للدالة هي $f(x) = x - 2$.

الإجابة النموذجية $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ أو $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$

2-4

97

حل المعادلات والمتباينات النسبية

2-5

السابق

الحالي

لماذا؟



• تبلغ تكلفة العضوية لأحد النوادي الرياضية AED 20 في الشهر. وينبغي على الأعضاء كذلك دفع AED 5 في كل مرة يزورون فيها النادي. فإذا زار أحد الأعضاء النادي x مرات في شهر واحد، فستكون تكلفة هذا الشهر $20 + 5x$. وستكون التكلفة الفعلية لكل زيارة $\frac{20 + 5x}{x}$. لتحديد عدد الزيارات التي ينبغي القيام بها لتصبح تكلفة الزيارة AED 6، فستحتاج إلى حل المعادلة $\frac{20 + 5x}{x} = 6$.

1 حل المعادلات النسبية.

• حوّلت التعبيرات النسبية إلى أبسط صورة.

2 حل المتباينات النسبية.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-5 تبسيط التعبيرات النسبية.

بعد الدرس 2-5 حل المعادلات النسبية. حل المتباينات النسبية.

بعد الدرس 2-5 حل معادلات تتضمن الأسس النسبية.

مفردات جديدة

معادلة نسبية
rational equation
المتوسط الحسابي
المرجح
weighted average
متباينة نسبية
rational inequality

ممارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما تكلفة الزيارة إذا أجرى فرد 10 زيارات في شهر محدد؟ **AED 7**
- إذا أجرى فرد 10 زيارات للنادي في شهر محدد، فكم تبلغ رسوم العضوية الشهرية بالإضافة إلى تكلفة كل زيارة؟ **تضيف الرسوم AED 2 لكل زيارة.**
- إذا أجرى فرد عدد x من الزيارات في شهر محدد، فكم ستضيف رسوم العضوية الشهرية لتكلفة كل زيارة؟ **تضيف الرسوم $\frac{20}{x}$ دراهم لكل زيارة.**

1 حل المعادلات النسبية تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبير نسبي واحد أو أكثر باسم **المعادلات النسبية**. وتكون هذه المعادلات في أغلب الأحيان أسهل في الحل ما أن يتم التخلص من الكسور. ويمكن التخلص من الكسور بضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$. تحقق من حلك.

المقام المشترك الأصغر يساوي $18(x+3)$.

المعادلة الأصلية

اضرب في المقام المشترك الأصغر.

اختصر العوامل المشتركة.

اضرب.

بسط.

اطرح $15x$ و 69 .

اقسم.

المعادلة الأصلية

$x = 6$

بسط.

بسط.

اجمع.

التحقق

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

1A. $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10}$ 2

1B. $\frac{7}{12} + \frac{9}{x-4} = \frac{55}{48}$ 20

قد يؤدي ضرب كل طرف من المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتعبير النسبية إلى نتائج لا تعتبر حلولاً للمعادلة الأصلية. وتسمى هذه بالحلول الدخيلة.

1 حل المعادلات النسبية

المثال 1 يوضح كيفية حل معادلة نسبية.
المثال 2 يوضح كيفية حل معادلة نسبية واختزال أي حلول دخيلة. **الأمثلة 3-5** توضح كيفية استخدام معادلات نسبية لحل مشكلات المزيغ والمسافة والعمل.

التقويم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حل $\frac{5}{24} + \frac{2}{3-x} = \frac{1}{4}$ تحقق من حلك. $x = -45$

2 حل $\frac{p^2 - p - 5}{p+1} = \frac{p^2 - 7}{p-1} + p$ تحقق من حلك. $p = -3, -2, 2$

التركيز على محتوى الرياضيات

حل المعادلات النسبية خلال عملية الحل، عادةً ما يتم تحويل المعادلة النسبية إلى نوع آخر من المعادلات. قد يتطلب حل معادلة نسبية حل معادلة خطية أو تربيعية أو نوعاً آخرًا من المعادلات.

مثال 2 حل معادلة نسبية

حلّ $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$ تحقق من صحة الحل.

المقام المشترك الأصغر للحدود هو $(x+3)(x+5)$.

المعادلة الأصلية $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$

اضرب في المقام المشترك الأصغر. $\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2 - x - 10)}{x^2 + 8x + 15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$

إختصر العوامل المشتركة. $\frac{(x+3)\cancel{(x+5)}(2x)}{\cancel{x+5}} - \frac{(x+3)\cancel{(x+5)}(x^2 - x - 10)}{x^2 + 8x + 15} = \frac{(x+5)\cancel{(x+3)}3}{\cancel{x+3}}$

بسط. $(x+3)(2x) - (x^2 - x - 10) = 3(x+5)$

وزع. $2x^2 + 6x - x^2 + x + 10 = 3x + 15$

بسط. $x^2 + 7x + 10 = 3x + 15$

اطرح $3x + 15$. $x^2 + 4x - 5 = 0$

حل إلى العوامل. $(x+5)(x-1) = 0$

خاصية ناتج الضرب الصفري $x+5=0$ أو $x-1=0$

$x = -5$ $x = 1$

التحقق جرب $x = -5$

$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$
 $\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$
 $\frac{-10}{0} - \frac{25+5-10}{25-40+15} \neq -\frac{3}{2}$ ✗

جرب $x = 1$

$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$
 $\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$
 $\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$
 $\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$
 $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

عند حل المعادلة النسبية، فإن أي حل محتمل يؤدي إلى صفر في المقام يجب استثنائه من قائمة الحلول.

حيث إن $x = -5$ تؤدي إلى صفر في المقام، فهي حل دخيل. استبعد -5 من قائمة الحلول. الحل يساوي 1.

تمرين موجه

لا يوجد حلول

2A. $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$ 8

2B. $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

2C. $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$ $-\frac{1}{2}, 3$

2D. $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$ $\frac{7}{3}$

الربط بتاريخ الرياضيات
بروك تايلور (1685-1731)
عالم الرياضيات الذي وضع نظرية استخدمت في التفاضل والتكامل وتعرف بنظرية تايلور وتعتمد على الباقي بعد العمليات الحسابية على التعبيرات النسبية.

مراجعة المفردات
حل دخيل (extraneous solution) هو حل لا يحقق المعادلة الأصلية

انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة ذكّر الطلاب أنه يجب دومًا التحقق من الحل المحتمل في المعادلة الأصلية بدلًا من أي من الخطوات الموجودة في الحل. ومع ذلك، لا يُسمح باستبدال الحل بمتغير ومن ثم ضرب كلا جانبي المعادلة في المقام المشترك الأصغر لأنه يتم اختبار حقيقة المعادلة.

مثال إضافي

3 محلول ملحي أضاف أحمد 80% من محلول ملحي (الملح والمياه) إلى 16 أوقية من المحلول الذي يحتوي على 10% محلول ملحي. كم من المحلول ينبغي إضافته لعمل محلول يحتوي على 50% محلول ملحي؟ $21\frac{1}{3}$ أوقية

التمثيل باستخدام الرياضيات

بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات تحديد الكميات المهمة في موقف عملي ورسم مخطط بالعلاقات باستخدام أدوات مثل الرسوم التخطيطية، والجداول بمدخلين، والتمثيلات البيانية والمخططات الانسيابية والمعادلات. شجّع الطلاب على استخدام التمثيلات المتعددة في تحليل الدوال تحليلاً أفضل.

نصيحة دراسية

التمثيل بالنماذج تكون الجداول مثل المذكور في المثال 3 مفيدة في ترتيب وحل مسائل المزيج والعمل والمتوسط الحسابي المبرج والمساواة.

المتوسط الحسابي المبرج هو طريقة لإيجاد المتوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد يكون لبعض العناصر فيها أهمية أكبر أو ترجيح عن الأخرى. تتضمن العديد من مسائل الحياة اليومية المزج والعمل والمسافات والفائدة والتي يمكن حلها باستخدام المعادلات النسبية.

مثال 3 من الحياة اليومية مسائل المزج

الكيمياء تضيف موزة محلول حمضي بنسبة 70% إلى 12 mL نسبة المحلول الحمضي فيه 15%. كم ينبغي إضافته من المحلول الحمضي بنسبة 70% لعمل محلول حمضي بنسبة 60%؟

الفهم تحتاج موزة إلى أن تعرف المقدار اللازم إضافته من المحلول للمحلول الأصلي لصنع محلول جديد.

التخطيط يحتوي كل محلول على نسبة معينة من الحمض. يجب أن تكون نسبة الحمض في المحلول الأخير مساوية لمقدار الحمض مقسوماً على إجمالي المحلول.

الأصلي	المضاف	الجديد
0.15(12)	0.7(x)	0.15(12) + 0.7x
12	x	12 + x
إجمالي المحلول		

نسبة الحمض في المحلول = نسبة الحمض إجمالي المحلول

الحل اكتب علاقة تناسب. $\frac{\text{مقدار الحمض}}{\text{إجمالي المحلول}} = \frac{\text{النسبة}}{100}$

$$\frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x} = \frac{60}{100}$$

$$\frac{1.8 + 0.7x}{12 + x} = \frac{60}{100}$$

$$100(12 + x) \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x} = 100(12 + x) \frac{60}{100}$$

$$100(12 + x) \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x} = 100(12 + x) \frac{60}{100}$$

$$(12 + x)60 = 100(1.8 + 0.7x)$$

$$720 + 60x = 180 + 70x$$

$$540 = 10x$$

$$54 = x$$

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$$

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7(54)}{12 + 54}$$

$$\frac{60}{100} = \frac{37.8}{66}$$

$$0.6 = 0.6 \checkmark$$

تحتاج موزة إلى إضافة 54 mL من المحلول الحمضي بنسبة 70%.

تعزيز موجه

3. يضيف عبد الله محلول عصير فاكهة بتركيز 65% إلى 15 mL من شراب عصير فاكهة بتركيز 10%. فكم ينبغي إضافته من محلول عصير الفاكهة تركيز 65% لصنع عصير فاكهة بتركيز 35%؟ 12.5 mL

يمكن استخدام القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل المعادلات النسبية. ويعتبر الاستخدام الأكثر شيوعاً هو $d = rt$. ومع ذلك يمكن تمثيلها عن طريق $r = \frac{d}{t}$ و $t = \frac{d}{r}$.

مثال إضافي

4 السباحة تسبح ليلي لمدة 5

ساعات في جدول ذو تيار بسرعة 1 ميل في الساعة. وقد تركت الرصيف البحري وسبحت ضد التيار لمسافة ميلين ومن ثم سبحت عائدة للرصيف. ما سرعتها في السباحة في المياه الراكدة؟ حوالي 1.5 mi/h

انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة في المثال 4. تأكد من أن الطلاب استوعبوا الفرق بين الحلول في المعادلة التربيعية (التي يوجد منها اثنان) وحل المسألة (الذي لا يوجد منه إلا واحد فقط)

تجنب الأخطاء عند حل المعادلات النسبية. غالباً ما ينسى الطلاب أنه يجب ضرب كافة حدود المعادلة في المقام المشترك الأصغر. ذكّرهم بالقيام بذلك من أجل الحصول على معادلات متكافئة.

مثال 4 من الحياة اليومية مسائل المسافة

التجديف يجذف غاية على زورق في خور دبي. ويبلغ معدل سرعته في الماء الراكد 6 km/h. ويستغرق غاية 3 ساعات ليقيم برحلة ذهاب وإياب بمسافة 10 km. بفرض أن غاية قام بالتجديف بمعدل ثابت للسرعة، فجد معدل التيار.

الفهم الآن لدينا سرعة ناصر في الماء الراكد والزمن الذي يستغرقه للتحرك مع التيار وضده. ونحتاج إلى تحديد سرعة التيار.

التخطيط تحرك ناصر 5 km في اتجاه التيار و 5 km عكسه. ويعتبر القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن هو $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$.

إجمالي الزمن	الزمن المستغرق عكس التيار	الزمن المستغرق في اتجاه التيار
3 ساعات	$\frac{5}{6-r}$	$\frac{5}{6+r}$

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

$$(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$$

$$(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$$

$$(6-r)5 + (6+r)5 = (36-r^2)3$$

$$30 - 5r + 30 + 5r = 108 - 3r^2$$

$$60 = 108 - 3r^2$$

$$0 = -3r^2 + 48$$

$$0 = -3(r+4)(r-4)$$

$$0 = (r+4)(r-4)$$

$$r = 4 \text{ أو } -4$$

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

$$\frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} \checkmark$$

الحل اكتب المعادلة.

المقام المشترك الأصغر $(6+r)(6-r)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر.

إختصر العوامل المشتركة.

بسط.

بسط.

بسط.

اطرح $10r$.

حلل إلى العوامل.

اقسم كل طرف على -3 .

خاصية ناتج الضرب الصفري

التحقق المعادلة الأصلية

$$r = 4$$

بسط.

بسط.

حيث إنه لا يمكن أن تكون السرعة سالبة، تكون سرعة التيار 4 km/h.

تمرين موجّه

4. **الطيران** تبلغ سرعة الرياح 20 km/h. فإذا استغرقت طائرة 7 ساعات لتقطع رحلة ذهاب وعودة بمسافة 2368 km، فحدد سرعة الطائرة في الهواء الساكن.

339.5 km/h

نصيحة دراسية
مسائل المسافة عندما تتضمن المسافة رحلة ذهاب وعودة، تساوي المسافة في إحدى الاتجاهين المسافة في الاتجاه المقابل.

مثال 5 من الحياة اليومية مسائل العمل

الخدمة المجتمعية في كل عام، يبنّي طلاب الصفين الحادي والثاني عشر في مدرسة المنذر الثانوية منزلاً للحى. فإذا احتاج طلاب الصف الثاني عشر 24 يوماً لإكمال منزل و 18 يوماً إذا قاموا بالعمل مع طلاب الصف الحادي عشر، فكم سيستغرق الصف الثاني عشر لإكمال منزل إذا قاموا بالعمل وحدهم؟

الفهم تتلخص المعطيات التي لدينا في المدة المستغرقة عندما يعمل طلاب الصف الثالث الثانوي وحدهم والوقت المستغرق عندما يعمل الصفين معاً. ونحتاج لتحديد المدة المستغرقة عند عمل طلاب الصف الثاني وحدهم.

التخطيط يستطيع طلاب الصف الثاني عشر إكمال منزل واحد في 24 يوماً، وبالتالي يكون معدل إنجازهم $\frac{1}{24}$ منزل في اليوم. ويبلغ معدل إنجاز الصف الحادي عشر $\frac{1}{18}$. ويبلغ المعدل المركب لكلا الصفين $\frac{1}{18}$.

معدل طلاب الصف الثاني عشر	معدل طلاب الصف الحادي عشر	المعدل المركب
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{18} = \frac{1}{18}$$

جد الحل اكتب المعادلة.

$$72j \cdot \frac{1}{24} + 72j \cdot \frac{1}{18} = 72j \cdot \frac{1}{18}$$

المقام المشترك الأصغر $72j =$
اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$$3j + 72 = 4j$$

اختصر العوامل المشتركة.

$$72 = j$$

وزّع

اطرح $3j$.

التحقق يوجد طريقتان محتملتان.

الطريقة 1 التعويض عن القيم.

المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{72} = \frac{1}{18}$$

$$j = 72$$

$$\frac{3}{72} + \frac{1}{72} = \frac{4}{72}$$

المقام المشترك الأصغر $72 =$

$$\frac{4}{72} = \frac{4}{72} \checkmark$$

بسط.

سيستغرق طلاب الصف الحادي عشر 72 يوماً لإكمال المنزل وحدهم.

تمرين موجّه

5A. استغرق عدنان وطارق 6 ساعات لجرف الأوراق معاً في العام الماضي. وفي العام الماضي استغرق طارق 10 ساعات ليقوم بذلك وحده. فكم سيستغرق عدنان من الزمن ليقوم بذلك وحده هذا العام؟ **15 ساعة**

5B. يقوم عمر وعلي بطلاء المنازل معاً. إذا تمكن عمر من طلاء أحد المنازل في 6 أيام وتمكن علي من طلاء نفس المنزل في 5 أيام. فكم سيستغرق طلاء المنزل إذا قاما بالطلاء معاً؟ **$\frac{8}{11}$ يوم**



الربط بالحياة اليومية

منذ 1997، يقضي طلاب مدرسة روك بوينت في برلنغتون فيرمونت أسبوعاً في خدمة المجتمعات في جميع أنحاء العالم. وأثناء العمل مع مؤسسة هابيتات فور هيومانيتي، يقضي الطلاب الزمن في ريف نينيسي، حيث يبدؤون ويكملون سقف منزل من منازل هابيتات في أسبوع واحد. **المصدر:** معهد المجتمع المحلي بولاية فيرمونت لشؤون العمل

انتبه!

تجنب الأخطاء اقترح في حال وجود مسألة تتضمن إكمال جزء من مهمة أثناء العمل معاً، أن يفكر الطلاب في أي جزء من العمل تم إنجازه في يوم واحد أو سنة واحدة أو وحدة وقت واحدة.

مثال إضافي

5 قص العشب يقص عمر وسعيد العشب معاً. عندما يعمل عمر وحده يمكنه إنجاز مهمة محددة في 4.5 ساعات ويمكن لسعيد وحده إنجازها في 3.7 ساعات. كم سيستغرقون من الوقت لإنجاز المهمة معاً؟ **نحو ساعتين**

نصيحة للمعلمين الجدد

طريقة بديلة يجب أيضاً حل المعادلة في المثال 5 من خلال أولاً طرح $\frac{1}{24}$ من كلا الطرفين. ثم إيجاد الضرب التقاطعي والحل.

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب التفكير في الفرق بين الرياضيات "البحتة"، مثل حل معادلة، والرياضيات "التطبيقية"، مثل حل مسألة من الحياة اليومية. اطلب منهم ذكر بعض الطرق التي يتشابه فيها هذان النوعان وبعض الطرق التي يختلفان فيها.

المفهوم الأساسي حل المتباينات النسبية

الخطوة 1 اذكر القيم المستثناة. وهي القيم التي تجعل المقام يساوي 0.

الخطوة 2 حل المعادلة ذات الصلة.

الخطوة 3 استخدم القيم المحددة بواسطة الخطوات السابقة لقسمه خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4 اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحديد أي الفترات تحتوي على قيم تحقق المتباينة.

2 حل المتباينات النسبية

المثال 6 يوضح كيفية حل متباينة نسبية.

مثال إضافي

6 حل $\frac{1}{3k} + \frac{2}{9k} < \frac{2}{3}$

$k < 0$ أو $k > \frac{5}{6}$

انتبه!

تجنب الأخطاء اقترح أن يقوم الطلاب أيضًا بالتأكد مما إذا كان الحد المُشار إليه في حل المعادلة موجودًا أو غير موجود في حل المتباينة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر طالبًا لشرح وتوضيح كيفية حل متباينة نسبية. تأكد من توضيح الطالب لكيفية استخدام نقاط الاختبار ومخطط العلامات لإيجاد مجموعة الحل.

مثال 6 حل متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$

الخطوة 1 القيمة المستثناة لهذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2 حل المعادلة ذات الصلة.

المعادلة ذات الصلة

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} &= \frac{x+1}{4} \\ 12(x-2) \cdot \frac{x}{3} - 12(x-2) \cdot \frac{1}{x-2} &= 12(x-2) \cdot \frac{x+1}{4} \\ 4x^2 - 8x - 12 &= 3x^2 - 3x - 6 \\ x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ (x-6)(x+1) &= 0 \\ x &= 6 \text{ or } -1 \end{aligned}$$

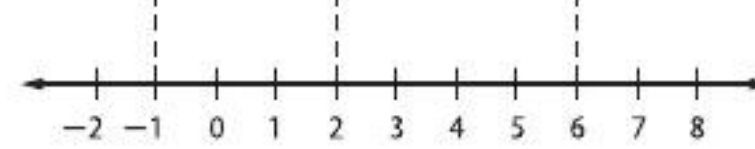
المقام المشترك الأصغر يساوي 12 (x-2) اضرب في المقام المشترك الأصغر. وزع.

اطرح $3x^2 - 3x - 6$.

حلل إلى العوامل.

خاصية حاصل الضرب الصفري

الخطوة 3 ارسم مستقيمت رأسية عند القيم المستثناة وعند الحلول لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.



الخطوة 4 والآن اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحديد ما إذا كانت القيم في الفترة تحقق المتباينة أم لا.

اختبر $x = -3$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = 4$	اختبر $x = 8$
$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \stackrel{?}{<} \frac{-3+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \stackrel{?}{<} \frac{0+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \stackrel{?}{<} \frac{4+1}{4}$	$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \stackrel{?}{<} \frac{8+1}{4}$
$-1 + \frac{1}{5} \stackrel{?}{<} -\frac{2}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{5}{4}$	$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \stackrel{?}{<} \frac{27}{12}$
$-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$ ✓	$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$	$\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$ ✓	$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

تكون العبارة صحيحة لكل من $x = -3$ و $x = 4$. وبالتالي، فالحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تمرين موجّه حل كل متباينة مما يلي.

6A. $\frac{5}{x} + \frac{6}{5} > \frac{2}{3}$ $x > 0$ أو $x < -9.3$

6B. $\frac{4}{3} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$ $x < 0$ أو $x > 15$

نصيحة دراسية
المتباينات النسبية من المحتمل أن تؤدي جميع الفترات إلى عبارة صحيحة كما قد لا تؤدي منها إلى عبارة صحيحة.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 15 للتحقق من الاستيعاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

البنية يدقق الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات لتمييز نمط أو بنية. ويمكنهم رؤية الأشياء المعقدة، مثل بعض التعابير الجبرية، كأشياء مفردة أو تتألف من عدة أشياء.

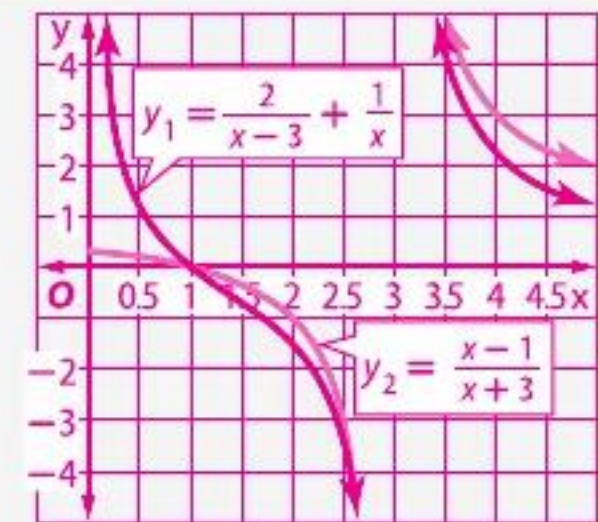
ملاحظات لحل التمرين

ورق مربعات بالنسبة للتمرين 33 و 47 إلى 49، سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 33، سيستخدم الطلاب التمثيلات البيانية للدوال ذات الصلة للتحقق من حلول المعادلات النسبية.

إجابات إضافية



36. الإجابة النموذجية:

$$\frac{4}{x+3} = \frac{x}{x-4} + \frac{7}{4}$$

38. الإجابة النموذجية: القيمتان -2

و 3 هما قيمتان غير معرفتان. في التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ستكون هناك خطوط تقارب رأسية عند هاتين القيمتين.

39. الإجابة النموذجية: يمكن أن يؤدي ضرب كلا طرفي المعادلة أو المتباينة النسبية في المقام المشترك الأصغر إلى ظهور حلول دخيلة. وبالتالي، ينبغي عليك التحقق من كافة الحلول للتأكد من مناسبتها للمعادلة أو المتباينة الأصلية.

المثالان 1-2

حل كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

1. $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$ 11

2. $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$ 9

3. $\frac{10}{2x+1} + \frac{4}{3} = 2$ 7

4. $\frac{11}{4} - \frac{5}{y+3} = \frac{23}{12}$ 3

5. $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$ 8

6. $\frac{14}{x+3} + \frac{10}{x-2} = \frac{122}{x^2+x-6}$ 5

7. $\frac{14}{x-8} - \frac{5}{x-6} = \frac{82}{x^2-14x+48}$ 14

8. $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$ 14

مثال 3:

9. **البنية** لدى نورة 4.5 kg من الفاكهة المجففة وتبيع كل رطل منها مقابل AED 51. وتود أن تعرف كم تحتاج من رطل مزيج المكسرات المباعة مقابل AED 36.73 للبرطل لتصنع مزيجًا من المكسرات والفاكهة المجففة يباع مقابل 28.04 AED للبرطل.

a. افترض أن m = عدد كيلوجرام مزيج المكسرات. أكمل الجدول التالي.

الأرطال	السعر لكل رطل	السعر الإجمالي
4.5	AED 51	51(4.5)
m	AED 4.50	$4.5m$
$m + 10$	AED 5.00	$5(10 + m)$

b. اكتب معادلة نسبية مستخدمًا العمود الأخير من الجدول.

c. جد حل المعادلة لتحديد عدد الأرطال من مزيج المكسرات اللازم.

10. **المسافة** يبلغ متوسط سرعة قيادة موزة لدراجتها 11.5 km/h. وتقوم برحلة ذهاب وعودة بمسافة 40 km. وتستغرق ساعة و 20 دقيقة في نفس اتجاه الرياح وساعتين و 30 دقيقة عكس اتجاه الرياح.

a. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة في اتجاه الرياح.

b. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة عكس اتجاه الرياح.

c. كم يستغرق إكمال الرحلة؟ 3 h و 50 min

d. اكتب معادلة نسبية لتحديد سرعة الرياح وجد حلها.

3.5 km/h

مثال 4

11. **العمل** يعمل نهله وفارس في تلميع السيارات. ويستطيع أيوب تلميع إحدى السيارات في 60 دقيقة بينما يستطيع فارس تلميع نفس السيارة في 80 دقيقة. ويخطط الاثنان إلى تلميع نفس السيارة معًا ويودان معرفة كم من الزمن سيستغرق ذلك.

a. ما المقدار الذي سيكمله نهله في دقيقة؟

b. ما المقدار الذي سيكمله نهله في x دقيقة؟

c. ما المقدار الذي سيكمله فارس في دقيقة؟

d. ما المقدار الذي سيكمله فارس في x دقيقة؟

e. اكتب معادلة نسبية تمثل عمل أيوب وفارس معًا على السيارة.

f. جد حل المعادلة لتحديد الزمن المستغرق لإكمال تلميع السيارة.

حوالي 3.43 min

مثال 5

حل كل من المتباينات التالية. تحقق من صحة الحل.

مثال 6

12. $\frac{3}{5x} + \frac{1}{6x} > \frac{2}{3}$ $0 < x < 1.15$

13. $\frac{1}{4c} + \frac{1}{9c} < \frac{1}{2}$ $c < \frac{13}{18}$ أو $c < 0$

14. $\frac{4}{3y} + \frac{2}{5y} < \frac{3}{2}$ $y > \frac{52}{45}$ أو $y < 0$

15. $\frac{1}{3b} + \frac{1}{4b} < \frac{1}{5}$ $b < 0$ أو $b < \frac{35}{12}$

خيارات الواجب المنزلي المتباينة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	16-30, 36, 38-54	17-29, 40-43, 36, 38, 39, 44-54, زوجي 16-30
OL أساسي	17-29, 31-36, 38-54	16-30, 40-43, 31-36, 38, 39, 44-54
BL متقدم	31-51, (اختياري: 52-54)	

تدريس الممارسات في الرياضيات

الأدوات عند إنشاء نماذج الرياضيات، يدرك الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن التكنولوجيا قد تتيح لهم تصور نتائج الافتراضات المختلفة، واستكشاف عواقبها، ومقارنة التوقعات مع البيانات. ويمكنهم استعمال الأدوات التكنولوجية لاستكشاف المفاهيم وتعميق فهمهم لها.

المثالان 1-2 حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

$$16. \frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2 - 13x + 42} \quad 9$$

$$17. \frac{13}{y+3} - \frac{12}{y+4} = \frac{18}{y^2 + 7y + 12} \quad 2$$

$$18. \frac{14}{x-2} - \frac{18}{x+1} = \frac{22}{x^2 - x - 2} \quad 7$$

$$19. \frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2 + 7a + 10} \quad 1$$

$$20. \frac{x}{2x-1} + \frac{3}{x+4} = \frac{21}{2x^2 + 7x - 4} \quad -12, 2$$

$$21. \frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2 - 9y - 5} \quad \emptyset$$

الأمثلة 3-5 22. **الكيمياء** كم عدد ميليلترات محلول حمضي بتركيز 20% التي يجب إضافتها إلى 30 mL من محلول حمضي بتركيز 75% للحصول على محلول حمضي بتركيز 30%؟

23. **المقالة** اشترت سندية 1.4 kg من الموز مقابل AED 7.35 للرطل. فكم عدد كيلوجرام التفاح المباع بـ 10.20 AED لكل كيلوجرام التي يجب أن تشتريها بحيث تكون تكلفة كيلوجرام التفاح 76.3 AED؟ **1.2 kg**

24. **المباني** تستطيع مجموعة بدر التطوعية بناء مرآب في 12 ساعة. وتستطيع مجموعة شيماء بناء مرآب في 16 ساعة. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معاً؟ **حوالي 6.86 ساعات.**

حل كل من المتباينات التالية. تحقق من صحة الحل.

$$25. 3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x} \quad \text{أو } x < 0 \text{ أو } x > 1.75$$

$$26. \frac{5}{3a} - \frac{3}{4a} > \frac{5}{6} \quad 0 < a < 1.1$$

$$27. \frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2} \quad \text{أو } x < -2, \text{ أو } 2 < x < 14$$

$$28. \frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4} \quad \text{أو } x < -5 \text{ أو } 4 < x < \frac{17}{3}$$

$$29. \frac{x}{5} + \frac{2}{3} < \frac{3}{x-4} \quad \text{أو } x < -5 \text{ أو } 4 < x < \frac{17}{3}$$

$$30. \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-1} < \frac{3}{2} \quad 2 < x, -2 < x < 1, \text{ أو } x < -5$$

31. **السفر** جواً تستغرق إحدى الطائرات 20 ساعة لتطير إلى وجهتها عكس اتجاه الرياح. تستغرق رحلة العودة 16 ساعة. إذا كان متوسط سرعة الطائرة في الهواء الساكن 500 km/h، فما متوسط سرعة الرياح أثناء الرحلة؟ **55.56 km/h**

32. **المعرفة المالية** ترغب شيماء في استثمار AED 10,000 في حسابين مختلفين. ويمكن للحساب المحفوظ بالمخاطر أن يجني فائدة 9%، بينما يجني الحساب الآخر فائدة 5%. وتود أن تجني فائدة AED 750 هذا العام. من بين الجداول أو التمثيل البياني أو المعادلات، اختر أفضل طريقة تمثيل تلزمها لتحديد المقدار المفترض استثماره في كل حساب.

33. **التمثيلات المتعددة** فكر في $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x-3}$ في AED 6250 بفائدة 9% و AED 3750 بفائدة 5%

a. **الصيغ الجبرية** جد حل المعادلة لإيجاد x. هل كانت أي من قيم x دخيلة؟ **1؛ نعم؛ 3**

b. **التمثيل البياني** مثل $y_1 = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}$ و $y_2 = \frac{x-1}{x-3}$ بيانياً على نفس التمثيل البياني لـ $0 < x < 5$. **انظر الحاشية.**

c. **التحليلات** بأي قيم x تتقاطع؟ هل تتقاطع القيم عندما تكون x دخيلة بالنسبة لحل المعادلة الأصلية؟ **1؛ لا**

d. **الصيغ اللغوية** استخدم المعرفة لذكر كيفية استخدام تمثيل بياني لتحديد إن كانت الحلول المحتملة لمعادلة نسبية دخيلة أم لا. **مثل بيانياً كل من طرفي**

حل كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

المعادلة. في النقاط التي يتقاطع عندها التمثيل البياني، لا يوجد حل. فإذا لم تتقاطع، يكون الحل المحتمل دخليلاً.

$$34. \frac{2}{y+3} - \frac{3}{4-y} = \frac{2y-2}{y^2 - y - 12} \quad -1$$

$$35. \frac{2}{y+2} - \frac{y}{2-y} = \frac{y^2+4}{y^2-4} \quad \emptyset$$

مسائل مهارات التفكير العليا

36. **مسألة غير محددة** الإجابة قدم مثلاً على معادلة نسبية يمكن حلها بضرب كل طرف من طرفي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$. **انظر الحاشية.**

37. **التحدي** جد حل $\frac{1 + \frac{9}{x} + \frac{20}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{x+4}{x-5}$. **جميع الأعداد الحقيقية عدا 0، -5، 5.**

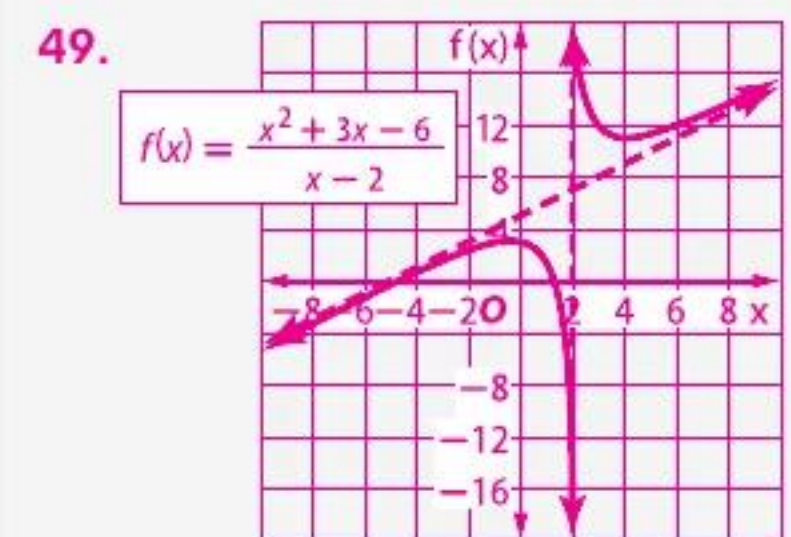
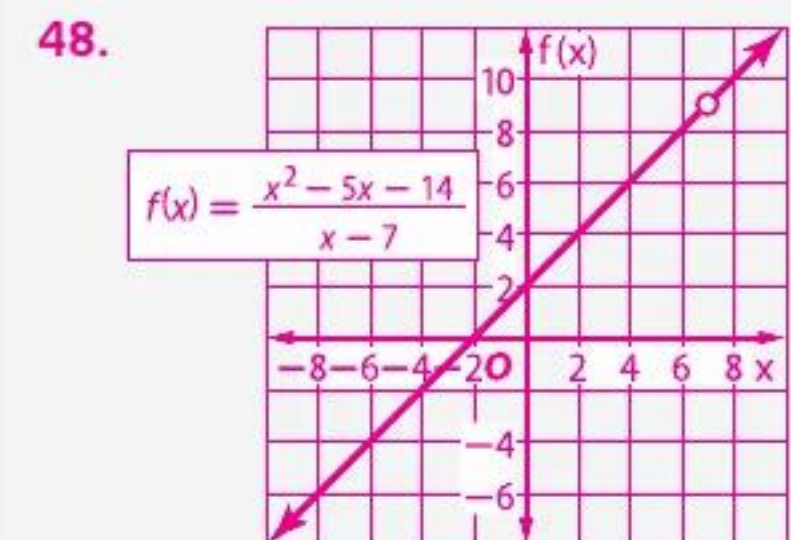
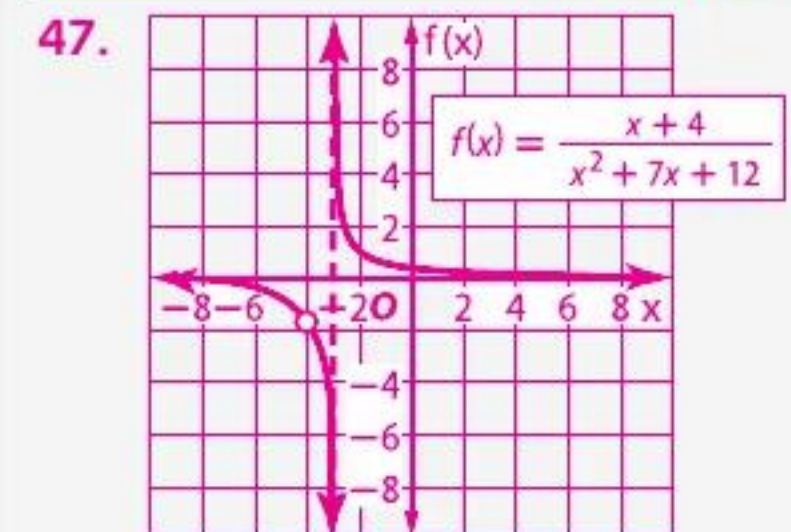
38. **الأدوات** عند استخدام خاصية Table على حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ ستظهر القيم -2 و 3 على الحاسبة "ERROR". وضح دلالتها. **انظر الحاشية.**

39. **الكتابة في الرياضيات** لماذا ينبغي عليك التحقق من حلولك للمعادلات والمتباينات النسبية؟ **انظر الحاشية.**

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة مسائل من الحياة اليومية تشبه تلك التي رأوها في هذا الدرس ولكن باستخدام البيانات الخاصة بهم. اطلب من الطلاب حل المسائل.

إجابات إضافية



تمرين على الاختبار المعياري

42. انطلقت حاملة طائرات في رحلة إلى مدينة ما ثم عادت. وقد استغرقت رحلة الذهاب ثلاث ساعات ورحلة العودة أربع ساعات. وقد كان متوسط السرعة في رحلة العودة 6 km/h. جـد متوسط سرعة للرحلة إلى غوام. **B**

- A 6 km/h C 10 km/h
B 8 km/h D 12 km/h

43. **إجابة قصيرة** إذا كان المستقيم ℓ عمودياً على قطعة مستقيمة CD في النقطة F و $CF = FD$. فكم عدد النقاط على المستقيم ℓ التي تكون مسافتها من النقطة C بنفس مسافتها من النقطة D؟ جميع النقاط

40. يحتوي 9 kg من مزيج المكسرات على 55% من الفول السوداني ممزوجاً بـ 6 kg من نوع آخر من مزيج المكسرات يحتوي على 40% من الفول السوداني. فكم نسبة الفول السوداني في المزيج الجديد؟ **C**

- A 58% B 51% C 49% D 47%

41. بالعمل وحده، يستطيع راشد حفر حفرة 10 ft في 10 ft في خمس ساعات. ويستطيع زايد حفر نفس الحفرة في ست ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملاً معاً؟ **J**

- F 1.5 ساعة G 2.34 ساعة
H 25.2 ساعة J 37.2 ساعة

مراجعة شاملة

حدد إن كانت كل علاقة توضح تغيراً طردياً أم عكسياً أم لا توضح أيًا منها. (الدرس 2-5)

44. لا هذا ولا ذاك

x	y
12	18
24	36
36	18
72	9

45. طردي

x	y
0.2	24
0.6	72
1.8	216
5.4	648

46. لا هذا ولا ذاك

x	y
14	3
28	1.5
56	0.75
112	0.375

مثّل كل دالة بيانياً. (الدرس 2-4) 47-49. انظر الحاشية.

47. $f(x) = \frac{x+4}{x^2+7x+12}$

48. $f(x) = \frac{x^2-5x-14}{x-7}$

49. $f(x) = \frac{x^2+3x-6}{x-2}$

50. **المناخ** يعبر عن الضغط الجوي P، بالبار. لارتفاع معين عن الأرض من خلال

القانون $P = a \cdot e^{-\frac{k}{H}}$ ، في القانون، a تمثل الضغط على سطح الأرض، والذي يبلغ نحو 1 بار، ويمثل k الارتفاع الذي تود إيجاد الضغط عنده بالكيلومترات بينما تبلغ H 7 كيلومترات دائئياً.

- a. جـد الضغط عند ارتفاع 2 km و 4 km و 7 km **0.75 بار؛ 0.56 بار؛ 0.37 بار**
b. ما الذي تلاحظه حول الضغط مع تزايد الارتفاع؟ **ينخفض الضغط كلما زاد الارتفاع**

51. **أجهزة الكمبيوتر** منذ أن تم اختراع أجهزة الكمبيوتر، تضاعفت السرعة الحاسوبية بعامل من 4 كل ثلاث سنوات.

- a. إذا كان جهاز الحاسب يعمل بسرعة حاسوبية s اليوم، فاكتب تعبيراً للسرعة التي تتوقع أن يعمل بها جهاز حاسب مكافئ بعد x فترات من ثلاث سنوات. **$s \times 4^x$**
b. افترض أن جهاز الحاسوب يعمل بسرعة معالجة 2.8 جيجا هرتز وترغب في جهاز حاسوب يمكنه العمل بسرعة 5.6 جيجا هرتز. كم تتوقع الانتظار حتى تستطيع شراء جهاز حاسب كهذا؟ **0.5 فترة من ثلاث سنوات أو 1.5 yr**

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان التالي أطوال محتملة لأضلاع مثلث قائم.

52. 5, 12, 13 **نعم**

53. 60, 80, 100 **نعم 54**

54. 7, 24, 25 **نعم**

التدريس المتميز

التوسع يُطلق على المعادلة $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{i}$ أحياناً "معادلة العدسة". توضح كيفية اتصال الطول البؤري f لعدسة ما بالمسافات d و i من العدسة إلى شيء ما ومن صورة الشيء كما تتم رؤيته عبر العدسة. على التوالي. اطلب من الطلاب إيجاد الطول البؤري لعدسة ما، بالنسبة لشيء محدد، إذا كان يبلغ قياس d 20 cm ويبلغ قياس i 12 cm. اطلب منهم حل معادلة العدسة لإيجاد f بالنسبة إلى d و i. **$7.5 \text{ cm}; f = \frac{di}{d+i}$**



مختبر تقنية التمثيل البياني

حل المعادلات والمتباينات النسبية

2-5

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- حاسبة التمثيل البياني

نصيحة للتدريس

عندما يدخل الطلاب الدوال في محرر الدالة (قائمة Y=)، ينبغي عليهم استخدام أقواس حول أي بسط أو مقام لا يكون رقم مفرد أو متغير.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية بحيث يمكنهم مساعدة بعضهم البعض في تصحيح أخطاء خطوات العملية على الحاسبة. اطلب من المجموعات إتمام النشاطين 1 و 2 والتمرينين 1 و 6.

نشاط 1

- عند استخدام خاصية التقاطع في الخطوة 2، ينبغي على الطلاب الضغط **ENTER** لاختيار التمثيل البياني الخاص بكل دالة. ومن ثم سيتم الاستفسار منهم عن **خمن؟** ينبغي عليهم تحريك السهم بالقرب من نقطة مقدره للتقاطع قبل الضغط على **ENTER** للمرة الثالثة.

- كبديل لاستخدام خاصية الجدول في الخطوة 3، يمكن للطلاب إثبات صحة الحل الخاص بكل دالة على الشاشة الرئيسية مباشرة. سينتج عن إدخال Y1 = (5/3) و Y2 = (5/3) نتائج 1.5.

ممارسات في الرياضيات

5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية Table. مثل كلا طرفي المعادلة بيانياً، وحدد موضع نقطة (نقاط) التقاطع.

نشاط 1 معادلة نسبية

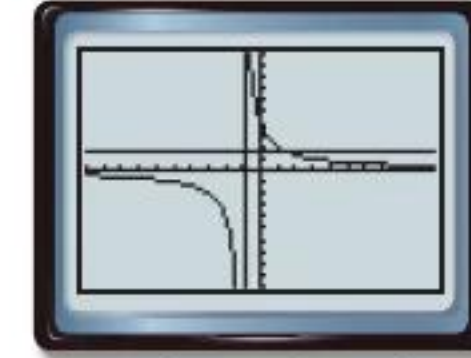
$$\text{حل المعادلة } \frac{4}{x+1} = \frac{3}{2}$$

الخطوة 1 مثل كل طرف من أطراف المعادلة بيانياً.

مثل كل طرف من أطراف المعادلة بيانياً كما لو كان دالة منفصلة. أدخل $\frac{4}{x+1}$ بالشكل Y1 و $\frac{3}{2}$ بالشكل Y2. ثم مثل المعادلتين بيانياً في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= 4 ÷ (X,T,θ,n + 1)
ENTER 3 ÷ 2 ZOOM 6



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

وحيث إن الحاسبة في وضع الاتصال، فقد يظهر خط عمودي يربط بين فرعي القطع الزائد. هذا الخط ليس جزءاً من التمثيل البياني.

الخطوة 3 استخدام خاصية TABLE (الجدول).

تحقق من الحل باستخدام خاصية TABLE (الجدول). رتب الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي $1\frac{2}{3}$.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [TBLSET] 0 ENTER 1 ÷ 3 ENTER 2nd [TABLE]
يعرض الجدول قيم x وقيم y المتباينة لها في كل تمثيل بياني. عند $x = 1\frac{2}{3}$ يكون لكلتا الدالتين قيمة y تساوي 1.5. لذلك، يكون حل المعادلة $1\frac{2}{3}$.

(يتبع في الصفحة التالية)

مختبر تقنية التمثيل البياني

حل المعادلات والمتباينات النسبية تابع

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات النسبية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

النشاط 2 المتباينة النسبية

حل المتباينة $9 > \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$

الخطوة 1 أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y > \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ أو $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} < y$. بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أصغر من،

فظلّل تحت المنحنى. أدخل الحد أولاً ثم استخدم الأزرار والأسهم

ENTER لاختبار أيقونة "التظليل تحت".

المتباينة الثانية هي $y > 9$. ظلّل تحت المنحنى بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أكبر من.

خطوات العملية على الحاسبة:

$Y=$ $\leftarrow$ $\leftarrow$ **ENTER** **ENTER** **ENTER** $\rightarrow$ $\rightarrow$ 3 $\div$ X,T,θ,n $+$ 7 $\div$ X,T,θ,n
ENTER $\leftarrow$ $\leftarrow$ **ENTER** **ENTER** $\rightarrow$ $\rightarrow$ 9

الخطوة 2 استخدم خاصية TABLE (الجدول).

تحقق باستخدام خاصية TABLE (الجدول). رتب الجدول

لإظهار قيم x بزيادات تساوي $\frac{1}{9}$.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [TBLSET] 0 **ENTER** 1 $\div$ 9 **ENTER**

2nd [TABLE]

X	Y1	Y2
.44444	22.5	9
.55556	18	9
.66667	15	9
.77778	12.857	9
.88889	11.25	9
1	10	9
1.11111	9	9

مرر عبر الجدول. لاحظ أنه في حالة قيم x .

الأكبر من 0 والأصغر من $1\frac{1}{9}$, $Y1 > Y2$. هذا

يؤكد بأن حل المتباينة هو $\{x | 0 < x < 1\frac{1}{9}\}$

الخطوة 1 تمثيل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: **GRAPH**



$[-10, 10] \text{ scl: } 1$ by $[-10, 10] \text{ scl: } 1$

مجموعة الحل للمتباينة الأصلية هي مجموعة قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة.

باستخدام خاصية **intersect** (التقاطع) في الحاسبة. يمكنك

استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x | 0 < x < 1\frac{1}{9}\}$

تمارين

حل كل معادلة أو متباينة.

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$ 2

4. $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1}$ 4. $\{x | x \neq 1\}$

7. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$

7. $\{x | x < 0 \text{ أو } \frac{2}{3} < x < 1\}$

2. $\frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2}$ 6

5. $\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x}$ 5. $\emptyset$

8. $1 + \frac{5}{x-1} \leq 0$ $\{x | -4 \leq x < 1\}$

3. $\frac{4}{x} = \frac{6}{x^2}$ 1.5

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$ $\{x | 0 < x < 0.3\}$

9. $2 + \frac{1}{x-1} \geq 0$ $\{x | x \leq 0.5 \text{ أو } x > 1\}$

نشاط 2

في النشاط 2، بما أن التمثيل البياني للمتباينة $y > 9$ يبدأ عند قمة شاشة النافذة القياسية، فقد يرغب الطلاب في تغيير النافذة للحصول على y من أجل $[-10, 20]$.

تمرين اجعل الطلاب يكملوا التمارين 2-5 و 7-9.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 2 لتقويم ما إذا كان يمكن للطلاب فهم كيفية إيجاد تقاطع التمثيلات البيانية على الطرفين الأيسر والأيمن للمعادلة النسبية.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب من الطلاب حل المعادلة $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$.

سيجدون أن التمثيلين البيانيين لكل من

$y = \frac{x}{2}$ و $y = \frac{8}{x}$ يتقاطعان في موضعين.

إنه من الضروري بشكل خاص في

الحالات مثل هذه أن يستخدموا خاصية

التقاطع بشكل صحيح. ردًا على خمن؟،

يجب عليهم أولاً اختيار إحدى نقاط

التقاطع، ومن ثم تكرار عملية **التقاطع**

واختيار النقطة الأخرى للتقاطع. **الحلان**

هما $x = 4$ و $x = -4$.

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

التعابير النسبية (الدرس 2-1 و 2-2)

- ضرب التعابير النسبية وقسمتها عمليتان مشابھتان لضرب الكسور وقسمتها.
- لتحويل الكسور المركبة إلى أبسط صورة، يمكن تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط التعبير الناتج.

الدوال النسبية ودوال المقلوب (الدروس 2-3 و 2-4)

- تأخذ دالة المقلوب الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x) \neq 0$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.
- تأخذ الدالة النسبية الصيغة $\frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$.

المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 2-5)

- تخلص من الكسور في المعادلات النسبية عبر ضرب كل طرف من طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر.
- يجب ألا تشمل الحلول الممكنة للمعادلة النسبية القيم التي ينتج عنها صفر في المقام.

مطويات منظم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

نقطة الانفصال point discontinuity	التغير المركب combined variation
معادلة نسبية rational equation	كسر مركب complex fraction
التعبير النسبي rational expression	ثابت التغير constant of variation
دالة نسبية rational function	التغير الطردي direct variation
متباينة نسبية rational inequality	خط تقارب أفقي horizontal asymptote
دالة المقلوب reciprocal function	قطع زائد hyperbola
خط تقارب رأسي vertical asymptote	خط تقارب مائل oblique asymptote
المتوسط الحسابي المرجح weighted average	

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه المصطلح الذي يكمل كل جملة أو عبارة بأفضل شكل.

- هو تعبير نسبي يحتوي بسطه و/ أو مقامه على تعبير نسبي.
- خط التقارب _____ هو خط تقارب خطي ليس أفقياً ولا رأسياً.
- تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبير نسبي واحد أو أكثر باسم _____.
- يحتوي التمثيل البياني لـ $y = \frac{x}{x+2}$ على _____ عند $x = -2$.
- يحدث _____ عندما تختلف كمية واحدة بشكل مباشر بوصفها ناتج ضرب لاثنتين أو أكثر من الكميات الأخرى.
- تبدو _____ مثل فجوة في التمثيل البياني لأن التمثيل البياني غير معرف عند تلك النقطة.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

مطويات منظم الدراسة

مطويات دينا زايك®

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة إلى مطوياتهم. اقترح على الطلاب الاحتفاظ بمطوياتهم بجانبهم أثناء إنجاز صفحات دليل الدراسة والمراجعة. وبين لهم أن المطويات تمثل أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة لاختبار الوحدة.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

2-1 ضرب التعبيرات النسبية وقسمتها

مثال 1

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$\frac{4a}{3b} \times \frac{9b^4}{2a^2} \text{ لأبسط صورة.}$$

$$\frac{4a}{3b} \times \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2 \times 2 \times a \times 3 \times 3 \times b \times b \times b \times b}{3 \times b \times 2 \times a \times a} = \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12}$$

$$\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12} = \frac{r^2 + 5r}{2r} \times \frac{6r - 12}{r^2 - 25}$$

$$= \frac{r(r+5)}{2r} \times \frac{6(r-2)}{(r+5)(r-5)}$$

$$= \frac{3(r-2)}{r-5}$$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$11. \frac{-16xy}{27z} \times \frac{15z^3}{8x^2} - \frac{10yz^2}{9x}$$

$$12. \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + x - 12} \times \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 7x + 10} \times \frac{x-4}{x+4}$$

$$13. \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 6x - 7} \times \frac{x-1}{x-2}$$

$$14. \frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2 - y^2}{3x^2} \times \frac{x}{5(x-y)}$$

$$15. \frac{x^2 + 3x - 18}{x+4} \times \frac{x-3}{x+1}$$

16. الهندسة تبلغ مساحة مثلث $(3x^2 + 9x - 54) \text{ cm}^2$. إذا كان ارتفاع المثلث $(x+6) \text{ cm}$ ، جـد طول القاعدة.

$6x - 18 \text{ cm}$

2-2 جمع التعبيرات النسبية وطرحها

مثال 3

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$\frac{3a}{a^2 - 4} - \frac{2}{a - 2}$$

$$\frac{3a}{a^2 - 4} - \frac{2}{a - 2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$$

$$= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{3a - 2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{3a - 2a - 4}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{a - 4}{(a-2)(a+2)}$$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$17. \frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2} \times \frac{27b + 10a^2}{12ab^2}$$

$$18. \frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4} \times \frac{-x+10}{4(x-2)(x+2)}$$

$$19. \frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2} \times \frac{3xy^3 + 8y^3 - 5x}{6x^2y^2}$$

$$20. \frac{2}{x^2 - 3x - 10} - \frac{6}{x^2 - 8x + 15} \times \frac{-4x - 18}{(x-5)(x+2)(x-3)}$$

$$21. \frac{3}{3x^2 + 2x - 8} + \frac{4x}{2x^2 + 6x + 4} \times \frac{12x^2 - 10x + 6}{2(x+2)(3x-4)(x+1)}$$

$$22. \frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1} \times \frac{-2x^2 + 3}{4x^2 + 11x + 5}$$

23. الهندسة ما محيط المستطيل؟

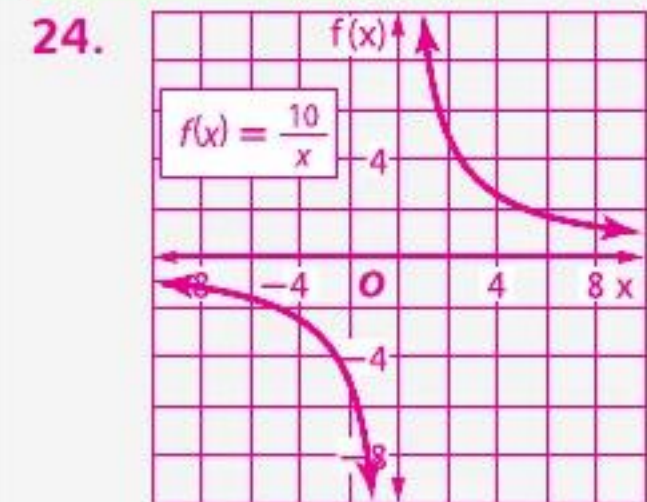
$$\frac{10x + 20}{(x+6)(x+1)}$$

$\frac{4}{x+6}$

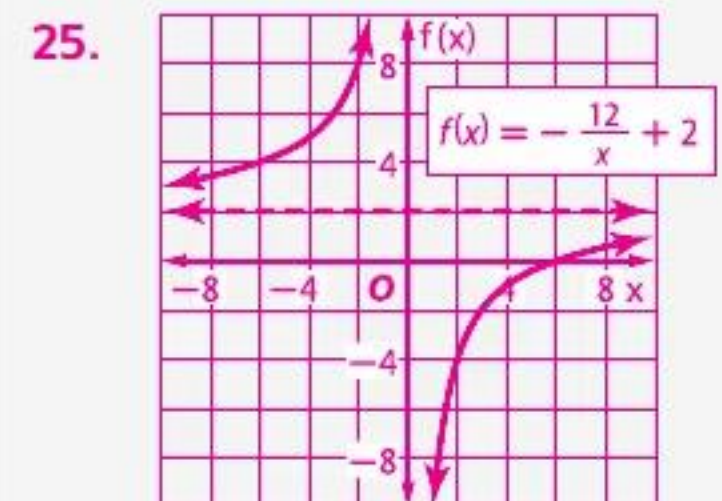
مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدكم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

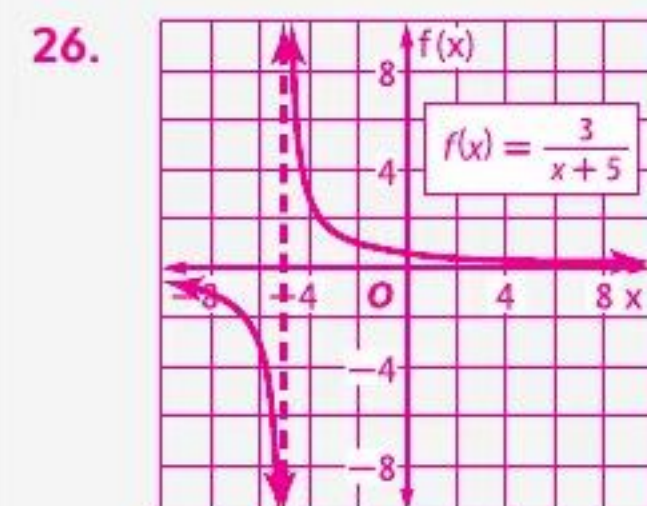
إجابات إضافية



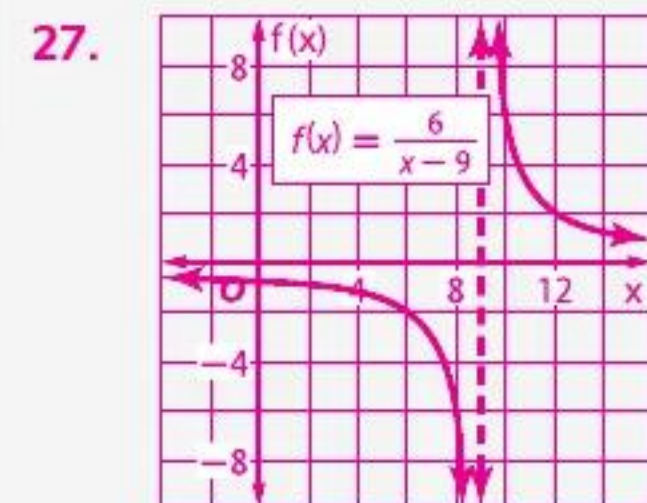
$D = \{x \mid x \geq 0\}$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$



$D = \{x \mid x \neq 0\}$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$

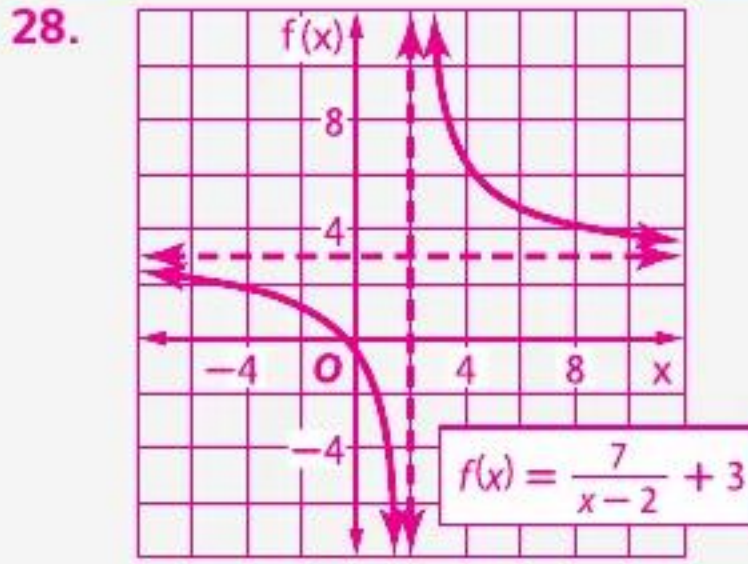


$D = \{x \mid x \neq -5\}$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



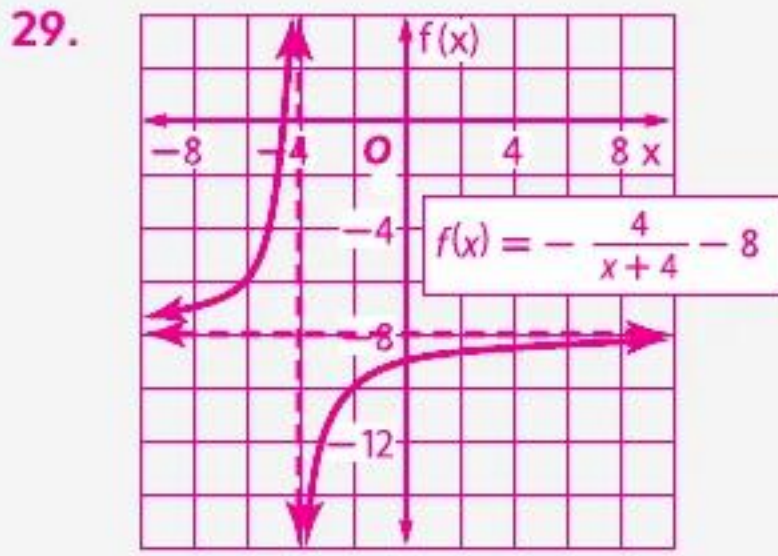
$D = \{x \mid x \neq 9\}$, $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

إجابات إضافية



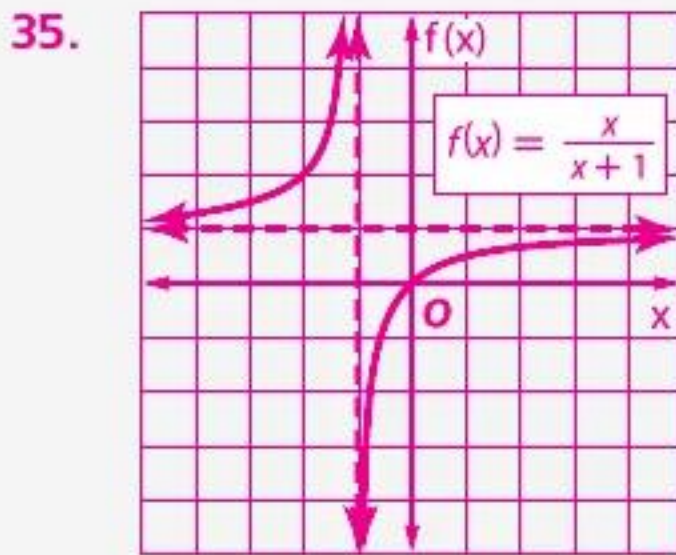
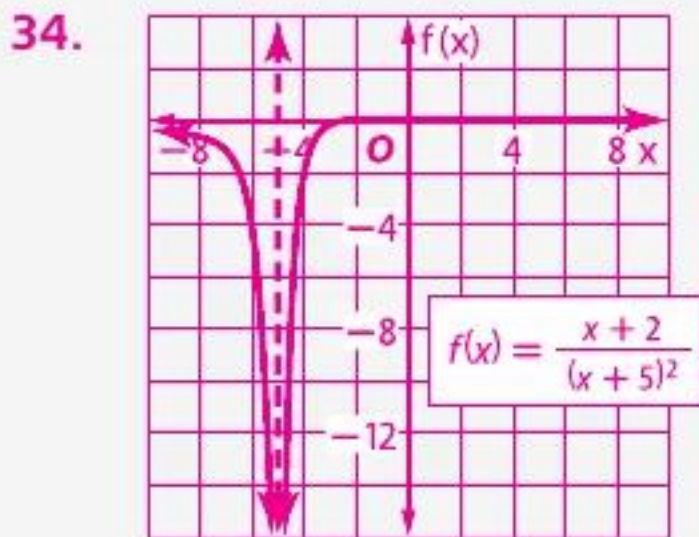
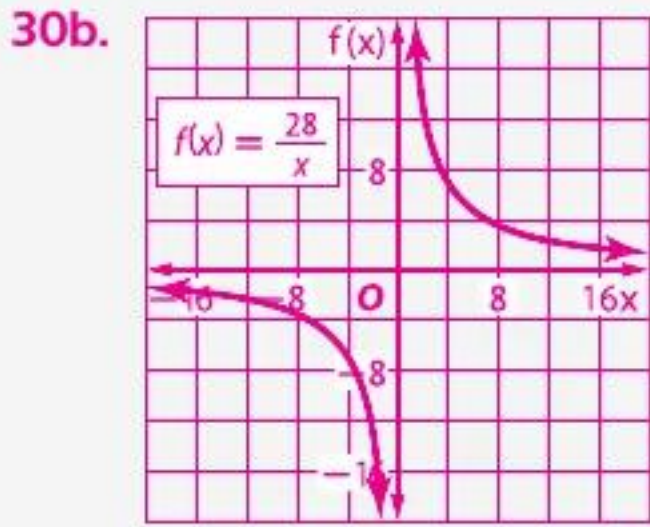
$$D = \{x \mid x \neq 2\},$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 3\}$$



$$D = \{x \mid x \neq -4\},$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -8\}$$



2-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

24. $f(x) = \frac{10}{x}$ 25. $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

26. $f(x) = \frac{3}{x+5}$ 27. $f(x) = \frac{6}{x-9}$

28. $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$ 29. $f(x) = \frac{4}{x+4} - 8$

24-29. انظر الهامش.

30. **الحفظ** يزرع مجلس الطلاب 28 شجرة لمشروع خدمي، ويعتمد عدد الأشجار التي سيزرعها كل شخص على عدد أعضاء مجلس الطلاب.

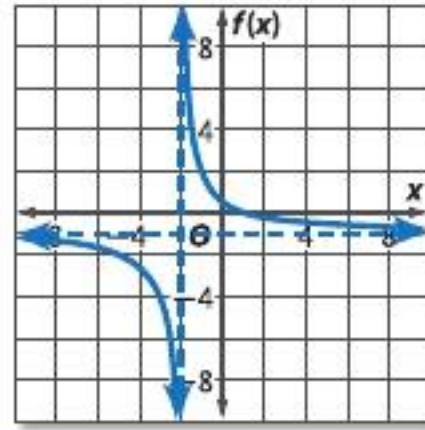
a. اكتب دالة لتمثيل هذه الحالة. $f(x) = \frac{28}{x}$

b. ارسم الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

مثال 4

مثّل $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

يتمدد التمثيل البياني رأسيًا. $a = 3$
أزيج الرسم البياني وحدتين لأسفل. $h = -2$
يوجد خط تقارب عند $x = -2$.
أزيج الرسم البياني وحدة واحدة لأسفل. $k = -1$
يوجد خط تقارب عند $f(x) = -1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$
المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

2-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

حدد معادلات أي خطوط تقارب رأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني لكل دالة نسبية.

31. $f(x) = \frac{3}{x^2+4}$ $x = -4, x = 0$

32. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+6x+8}$ $x = -4$; النجوة: $x = -2$

33. $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x-24}$ $x = 8$; النجوة: $x = -3$

مثل كل دالة نسبية بيانيًا. 34-37. انظر الهامش.

34. $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$ 35. $f(x) = \frac{x}{x+1}$

36. $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$ 37. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

38. **المبيعات** تتبع أمل اشتراكات لإحدى المجالات، من أول 15 منزلاً، باعت اشتراكات في 10 منها. لنفترض أن أمل ذهبت إلى مجموعة أخرى من المنازل يبلغ عددها x وباعت اشتراكات فيها جميعاً، يمكن تحديد نسبة المنازل التي باعت فيها من إجمالي المنازل باستخدام $P(x) = \frac{10+x}{15+x}$.

a. ارسم الدالة بيانيًا. انظر الهامش في الصفحة 584.

b. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

$$D = \{x \geq 0\}, R = \{0 \leq P(x) \leq 1.0\}$$

مثال 5

حدد معادلة أي خطوط تقارب رأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

الدالة غير معرّفة عندما $x = 1$ و $x = -3$.

بما أن $x = -3$ ، $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$ ، خط تقارب رأسي، و $x = 1$ تمثل فجوة في التمثيل البياني.

مثال 6

مثّل $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًا.

الدالة غير معرّفة عندما

$x = 1$ و $x = 0$ لأن

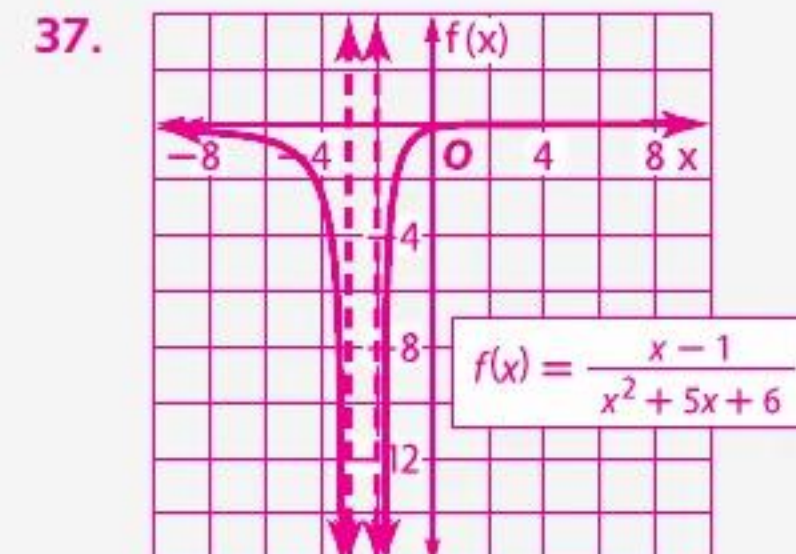
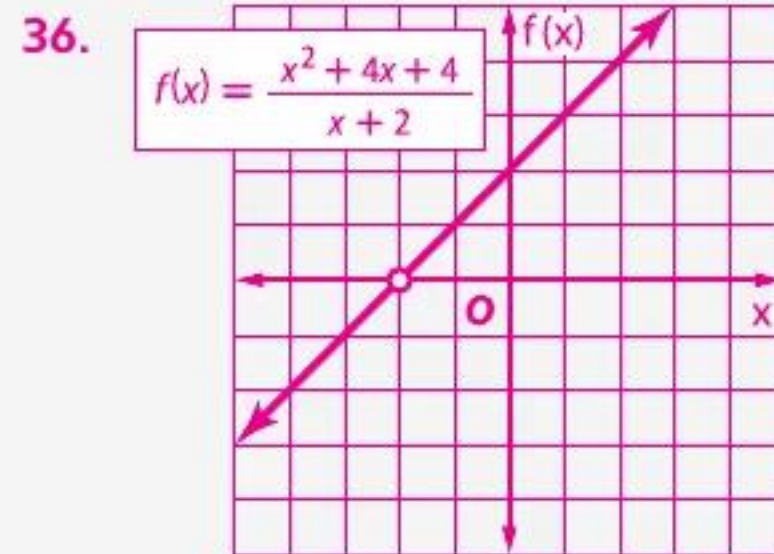
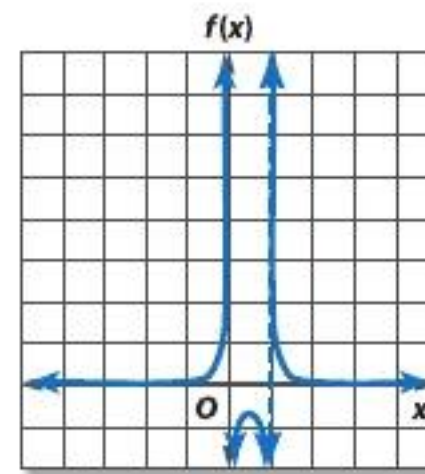
$\frac{1}{6x(x-1)}$ في أبسط

صيغة، $x = 1$ و $x = 0$.

خطان تقاربان رأسيان.

ارسم خطين تقاربين

وارسم التمثيل البياني.



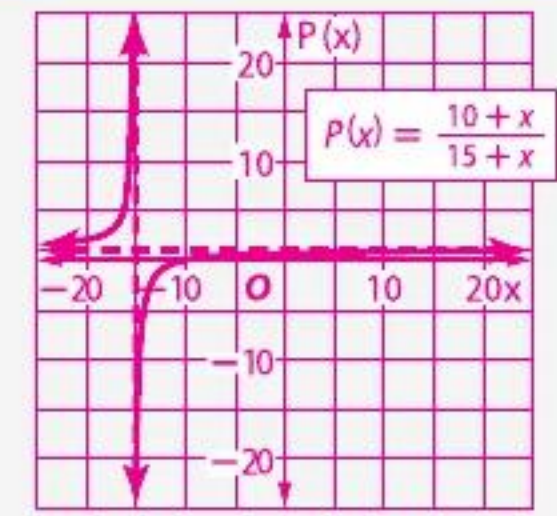
دليل الدراسة والمراجعة تب

2

الوحدة

إجابة إضافية

38a.



2-5 حل المعادلات والمتباينات النسبية

مثال 7

حلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$
المضاعف المشترك الأصغر هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$

$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$3(x) + 1(x+2) = 0$$

$$3x + x + 2 = 0$$

$$4x + 2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

حلّ كل معادلة أو متباينة. تحقق من حلولك.

$$39. \frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6 \quad x = \frac{46}{17}$$

$$40. \frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15} \quad x = 13$$

$$41. \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3} \quad x = -7$$

$$42. \frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3} \quad x = -\frac{1}{2}, -4$$

$$43. \frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3} \quad x = 8$$

$$44. \frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4} \quad x < 1$$

$$45. \frac{1}{2x} - \frac{4}{5x} > \frac{1}{3} \quad -\frac{9}{10} < x < 0$$

46. أعمال الحديقة تستطيع ياسمين أن تزرع حديقة خلال

3 ساعات. وتستطيع هالة زراعة الحديقة نفسها خلال

4 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

$1\frac{5}{7}h$

إجابات إضافية

5. $\frac{x+7}{3(2x+1)}$
 6. $\frac{-x+3}{2(x-1)(x+1)}$
 7. $\frac{4y^2+14y-21}{14y^2}$
 9. $x = -2; f(x) = -5;$
 $D = \{x \mid x \neq -2\},$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$

- حل كل معادلة أو متباينة.
 19. $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4} \quad x = -5$
 20. $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21} \quad m = -108$
 21. $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x} \quad -1 < x < 0$
 22. $r + \frac{6}{r} - 5 = 0 \quad r = 2, 3$
 23. $\frac{6}{7} - \frac{3m}{2m-1} = \frac{11}{7} \quad m = \frac{5}{31}$
 24. $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3} \quad r = -\frac{1}{4}$

25. ركوب الدراجات عندما تتركب سها دراجتها، تتغير المسافة التي تقطعها طرديًا مع مقدار وقت ركوبها للدراجة. لنفترض أنها تقطع بالدراجة مسافة 50 km خلال 2.5 ساعة. وفق هذا المعدل، كم ساعة سيستغرقها قطع مسافة 80 km بالدراجة؟ **4 ساعات**

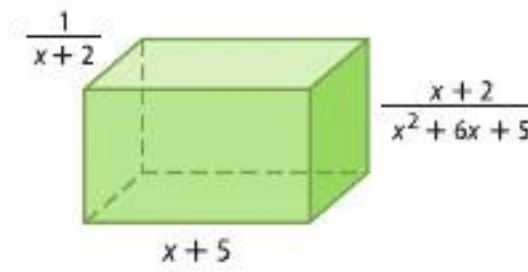
26. الطلاء يستطيع عمر طلاء منزل خلال 10 ساعات، ويستطيع عامر طلاء المنزل نفسه خلال 9 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

حوالي 4.7 ساعات.

27. الاختيار من متعدد كم عدد لترات محلول حمضي بتركيز 25% التي يجب إضافتها إلى 30 L من محلول حمضي بتركيز 80% للحصول على محلول حمضي بتركيز 50%؟ **H**

- F 18
 G 30
 H 36
 J 66

28. ما حجم المنشور المستطيل المرسوم أدناه؟

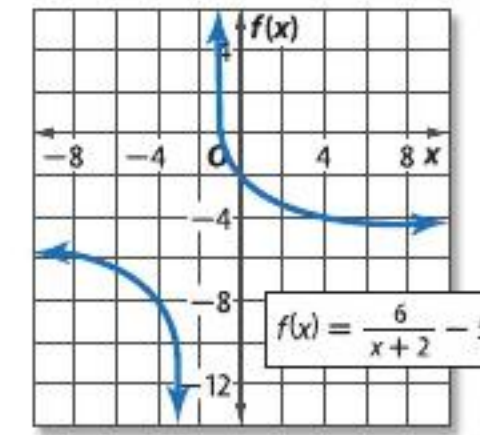


$\frac{1}{x+1}$ وحدات مكعبة.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. 5-7. انظر الهامش.

1. $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2} \quad 8r^2$
 2. $\frac{m^2-4}{3m^2} \times \frac{6m}{2-m} \quad -\frac{2(m+2)}{m}$
 3. $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3} \quad \frac{m+3}{n-3}$
 4. $\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15} \times \frac{x+4}{x-1} \quad \frac{x+4}{x-1}$
 5. $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1} \quad \frac{m+3}{n-3}$
 6. $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2} \quad \frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$
 7. $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$
 8. $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}} \quad \frac{2x+1}{5x-1}$

9. اذكر خطوط التقارب للدالة الممثلة بيانيًا ومجالها ومداها. انظر الهامش.



10. اختيار من متعدد ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$ ؟ **A**

- A $x = -2$
 B $x = -1$
 C $x = 1$
 D $x = 2$

مثّل كل دالة بيانيًا. 11-16. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

11. $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$
 12. $f(x) = \frac{2}{x+4}$
 13. $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$
 14. $f(x) = \frac{5x}{x+1}$
 15. $f(x) = \frac{x}{x-5}$
 16. $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$

17. حدد معادلات أي خطوط التقارب الرأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني

للدالة $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$. **خط تقارب رأسي**
الفجوة: $x = -5$; $x = 7$

18. حدد معادلات أي خطوط التقارب المائلة

في التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2+x-5}{x+3}$. **$f(x) = x - 2$**

التحضير للاختبارات المعيارية

2

1 التركيز

الهدف استخدام إستراتيجية الحل بترتيب عكسي لحل مسائل الاختبار المعيارية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اسأل:

- لماذا تعتبر طريقة التخمين والتحقق إستراتيجية جيدة لاستخدامها في الاختبارات المعيارية؟

الإجابة النموذجية: أنت تعرف أن

الإجابة الصحيحة موجودة ضمن

الخيارات المقدمة. بمجرد إجراء تخمين

منطقي، يمكنك التحقق منه في مقابل

المعلومات الموجودة في المسألة

لتحديد ما إذا كانت صحيحة أو ما

إذا كان ينبغي عليك الانتقال للتخمين

المنطقي التالي. ومن ثم يمكنك الوثوق

في إجابتك.

- متى ينبغي عليك استخدام إستراتيجية

التخمين والتحقق؟ الإجابة النموذجية:

يمكنك التخمين والتحقق في أي وقت

من الاختبار المعيارية. من الأمور

المفيدة للغاية عندما يمكن لخيارات

الإجابة أن تحل محل المعلومات

الواردة في المسألة، على سبيل المثال.

عندما تكون الخيارات قيم يمكن أن

تحل محل متغير في تعبير أو معادلة.

التخمين والتحقق

من المهم جدًا أن تتابع سرعتك وتتابع معها مقدار الوقت الذي يكون متاحًا لك عند إجراء اختبار معياري. إذا كان الوقت ينفذ، أو إذا كنت غير متأكد من كيفية حل إحدى المسائل، فإن إستراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على تحديد الإجابة الصحيحة بسرعة.

إستراتيجيات للتخمين والتحقق

الخطوة 1

أمعن النظر في كل اختبار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته. ألغ الإجابات الخاطئة.

اسأل نفسك:

- هل هناك أي خيارات إجابة غير صحيحة بشكل واضح؟
- هل أي من خيارات الإجابة ليست بالشكل الصحيح؟
- هل توجد أي خيارات إجابة لا تحتوي الوحدات المناسبة للإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

لخيارات الإجابة المتبقية، استخدام أسلوب التخمين والتحقق.

- المعادلات:** إذا كنت تحل معادلة، فاستبدل خيار الإجابة بالمتغير وانظر ما إذا كان هذا يؤدي إلى جملة عددية صحيحة.
- نظام المعادلات:** في نظام المعادلات، استبدل خيار الإجابة بجميع المتغيرات وتأكد أن جميع المعادلات تؤدي إلى جملة عددية صحيحة.

الخطوة 3

اختر خيار إجابة وانظر ما إذا كان يفي بقيود بيان المسألة. حدّد الإجابة الصحيحة.

- إذا كان خيار الإجابة الذي تختبره لا يحل المسألة، فانتقل إلى التخمين المعقول التالي، وتحقق منه.
- عندما تصل إلى خيار الإجابة الصحيح، توقف.

مثال على الاختبار المعيارية

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

$$\text{جد حل: } \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$$

- A -1
B 1

- C 5
D 7

مثال إضافي

تدريب على الاختبار المعياري افترض أن y تتغير بشكل مشترك مع x و z . أوجد y عندما تكون $x = 12$ و $z = 7$. إذا كانت $y = 40$ عندما تكون $z = 15$ و $x = 28$. A

- A 8
B 20
C 80
D 200

3 التقويم

استخدم التمارين من 1 إلى 4 لتقويم استيعاب الطلاب.

حل المعادلة النسبية سيكون عددًا حقيقيًا. وبما أن جميع خيارات الإجابة الأربعة أعداد حقيقية، فهي جميعًا إجابات صحيحة ممكنة ويجب التحقق منها. ابدأ بخيار الإجابة الأول وتحقق منه في المعادلة النسبية. تابع حتى تجد خيار الإجابة الذي ينتج عنه جملة عددية صحيحة.

التحقق:	
$\frac{2}{(-1)-3} - \frac{4}{(-1)+3} = \frac{8}{(-1)^2-9}$	التخمين: -1
$-\frac{5}{2} \neq -1$ X	

التحقق:	
$\frac{2}{1-3} - \frac{4}{1+3} = \frac{8}{(1)^2-9}$	التخمين: 1
$-2 \neq -1$ X	

التحقق:	
$\frac{2}{5-3} - \frac{4}{5+3} = \frac{8}{(5)^2-9}$	التخمين: 5
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓	

إذا كانت $x = 5$ ، فالنتيجة جملة عددية صحيحة. إذا، الإجابة الصحيحة هي C.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

1. جد حل: $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$ B

- A $\frac{1}{10}$
B $\frac{1}{5}$
C $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{2}$

2. مجموع أعمار خالد وأسماء ونورا يساوي 40. أسماء أكبر بعام واحد من مثلي عمر نورا. خالد أكبر من أسماء بـ 3 أعوام. كم عمر أسماء؟ H

- F 7
G 14
H 15
J 18

3. حدد النقطة (أو النقاط) التي تتقاطع عندها الدالة النسبية التالية مع المحور x . D

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+4}{3}$$

- A -5
B 4
C 2 أو 3
D -5 or 2

4. تبيع شركة المسرح التي يملكها عيسى التذاكر بقيمة AED 10. وبهذا السعر يبيعون 400 تذكرة. يقدر عيسى بأن المبيعات ستخفض بمقدار 40 تذكرة مع كل زيادة في السعر تبلغ AED 2. ما السعر الذي سينتج عنه أكبر مقدار من الإيرادات؟ H

- F 10
G 13
H 15
J 20

2 تدريب على الاختبار المعياري

تشخيص أخطاء الطلاب

اطلع على إجابات الطلاب عن كل سؤال. قد تشير توجهات الصف إلى وجود أخطاء أو سوء فهم شائعين بين الطلاب.

1. F وجد الاختلاف الصحيح، لكنه جمعه عندما كان ينبغي عليه الضرب فيه

G صحيح

H قسم على الفارق الصحيح بدلاً من الضرب فيه

J استخدم الضرب ولكن ليس الفارق الصحيح

2. A صحيح

B فسر بشكل خاطئ العدد 2 باعتباره التقاطع x

C لم يستخدم علامة + للإشارة لاتجاه التحول

D فسر بشكل خاطئ العدد 2 باعتباره التقاطع x

3. F تجاهل كلمة ليس في السؤال

G تجاهل كلمة ليس في السؤال

H تجاهل كلمة ليس في السؤال

J صحيح

4. A لم يحلل العامل $x^2 - 16$ بشكل صحيح

B حوّل الكسر لأبسط صورة بشكل غير صحيح

C صحيح

D حوّل الكسر المحوّل لأبسط صورة بشكل خاطئ

5. F فسر التمثيل البياني بشكل خاطئ صحيح

H فسر التمثيل البياني بشكل خاطئ

J فسر التمثيل البياني بشكل خاطئ

6. A صحيح

B في هذه الدالة عندما تكون x سالبة، تكون y سالبة

C في هذه الدالة عندما تكون x سالبة، تكون y غير معرفة

D في هذه الدالة عندما تكون x سالبة، تكون y سالبة

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. تختلف التكلفة الإجمالية لحجز موقع تخييم بشكل مباشر حسب عدد ليالي استئجار الموقع، كما هو موضح بالجدول.

الأيام	التكلفة الإجمالية
1	AED 24
2	AED 48
3	AED 72
4	AED 96

G أي معادلة تمثل الاختلاف المباشر؟

F $y = x + 24$

H $y = \frac{24}{x}$

G $y = 24x$

J $y = 96x$

2. في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ لينتج التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A

A الأعلى

B الأسفل

C اليمين

D اليسار

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 تحقق من الإجابة من خلال التعويض عن x بالأعداد 1 و 2 و 3 و 4 والتأكد من الحصول على القيم الموجودة بالجدول.

3. أي مما يلي ليس خطأ مقارناً

J للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$ ؟

F $f(x) = 0$

H $x = 7$

G $x = -7$

J $f(x) = 1$

4. حوّل الكسر المجمع لأبسط صورة. C

$$\frac{(x+3)^2}{x^2-16} \cdot \frac{x+3}{x+4}$$

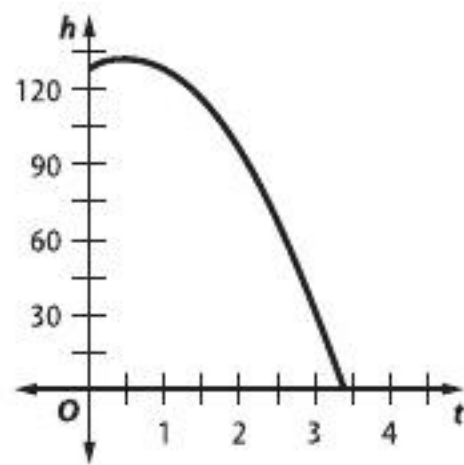
A $\frac{x+3}{x+4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

B $\frac{1}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5. تم قذف كرة لأعلى بسرعة ابتدائية 16 ft/s من أعلى بناية ارتفاعها 128 ft. ارتفاعها h بالقدم فوق سطح الأرض بعد t ثانية سيكون $h = 128 + 16t - 16t^2$.



فما الاستنتاج الأمثل عن حركة الكرة؟

F ظلت الكرة فوق ارتفاع 128 ft لأكثر من 3 ثوانٍ. G

G عادت الكرة إلى سطح الأرض في أقل من 4 ثوانٍ.

H تحركت الكرة لأعلى مسافة أكبر من تحركها لأسفل.

J تحركت الكرة أقل من 128 ft في 3.4 ثوانٍ.

6. أي هذه المعادلات يصف علاقة تناظر فيها كل عدد حقيقي

سالبة x عدداً حقيقياً غير سالب y ؟ A

A $y = -x$

C $y = \sqrt{x}$

B $y = x$

D $y = x^3$

ورقة إجابات التمارين

اطلب من الطلاب المحاكاة عن طريق إجراء اختبار معياري من خلال تسجيل إجاباتهم في أوراق تسجيل التمرين.

إجابات إضافية

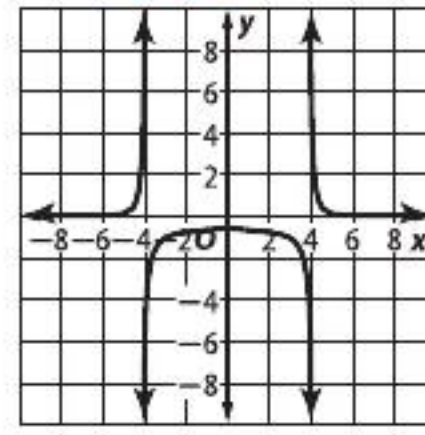
12a. الإجابة النموذجية:

خطوط تقارب رأسية عند $x = -4$ و $x = 4$: خط تقارب أفقي عند $y = 0$

$$12b. y = \frac{1}{x^2 - 16}$$

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا. 14a, b



انظر الهامش.

12. استخدم التمثيل البياني للدالة النسبية الموضحة لحل كل معادلة.

a. صف خطي التقرب الرأسي والأفقي للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة الدالة النسبية. اشرح كيف توصلت لإجابتك.

13. فكّر في الدالة كثيرة الحدود

$$f(x) = 3x^4 + 19x^3 + 7x^2 - 11x - 2.$$

a. ما درجة الدالة؟ 4

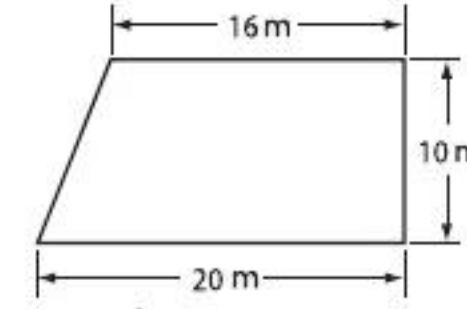
b. ما المعامل الرئيسي للدالة؟

c. جد قيمة $f(-2)$, $f(1)$, و $f(2a)$. اكتب الحل هنا.

$$16; -56; 48a^4 + 152a^3 + 28a^2 - 22a - 2$$

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.



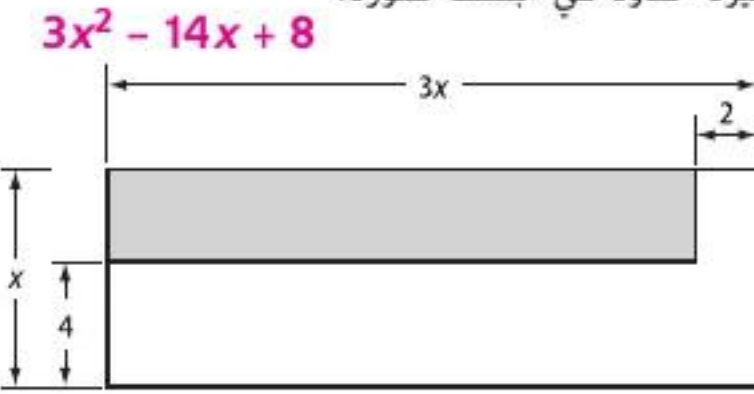
7. تحيط شريحة الحديقة

الموضحة في الصورة بممر حجري. كم عدد أمتار الحجارة اللازمة تقريبًا؟ 56.8 m

8. إجابة شبكية ادخرت فاطمة بعض المال لعطلة مدتها أسبوع. أنفقت في اليوم الأول من العطلة AED 125 على الطعام والفندق. وفي اليوم الثاني، أعطتها أختها AED 80 كنفقات. وحينها تبقى لدى فاطمة AED 635 لباقي العطلة. فكم درهماً كان لديها في بداية العطلة؟ 680

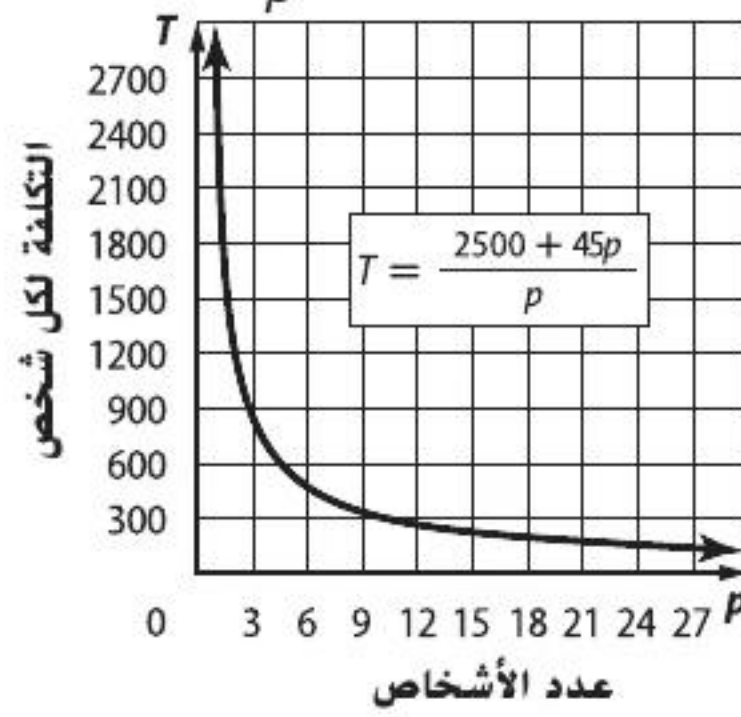
9 إجابة شبكية يمكن تمثيل عدد سكان دولة بالمعادلة $P(t) = 40e^{0.02t}$. حيث يمثل P عدد السكان بالمليون ويمثل t عدد الأعوام منذ 2005. متى سيكون عدد السكان 400 مليون؟ 2120

10. ما مساحة المنطقة المظللة من المستطيل المعبر عنها ككثيرة حدود في أبسط صورة؟



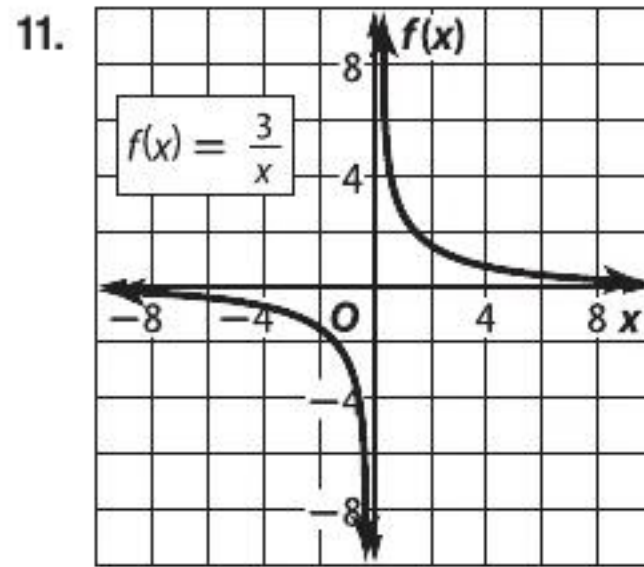
11. إجابة شبكية افترض أن y تتناسب عكسيًا حيث x و $y = 4$ عندما $x = 12$. ما قيمة y عندما x تساوي 5؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. 9.6

4. $T = \frac{2500 + 45p}{p}$

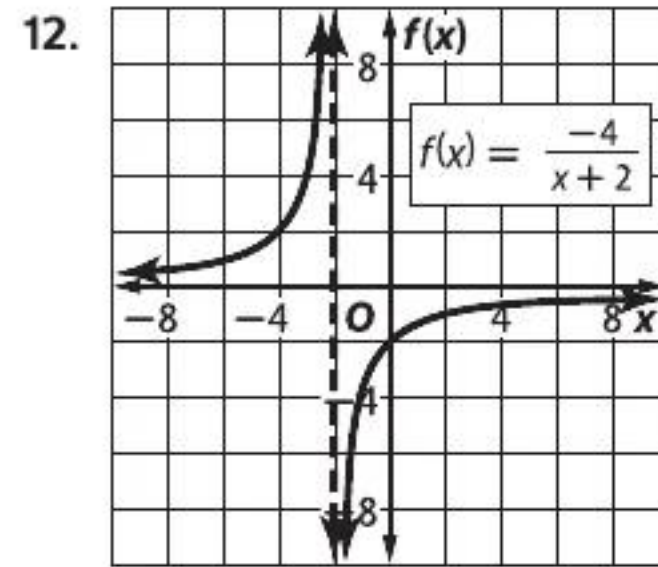


لن يصل المجال للصفر لأنه يجب أن يتواجد شخص ما في الحفلة. لن يصل المدى للصفر لأنه حتى وإن وجد آلاف الأشخاص هناك، فإنهم سيتكبدون بعض التكاليف. لن تكون أي قيمة سالبة لأنه لا يمكن وجود تكلفة سالبة أو عدد سالب من الأشخاص.

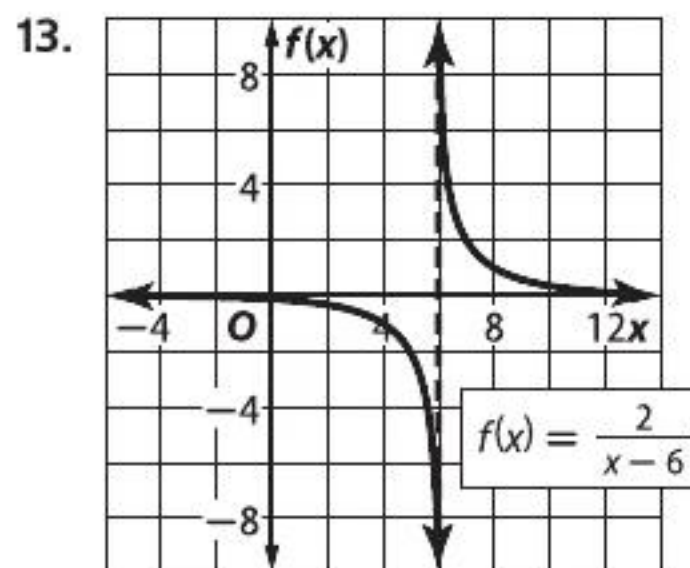
الدرس 2-3



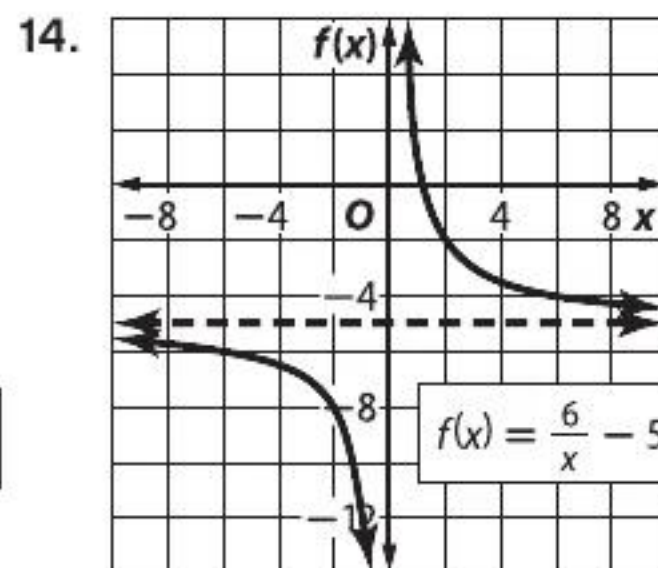
$D = \{x \mid x \neq 0\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



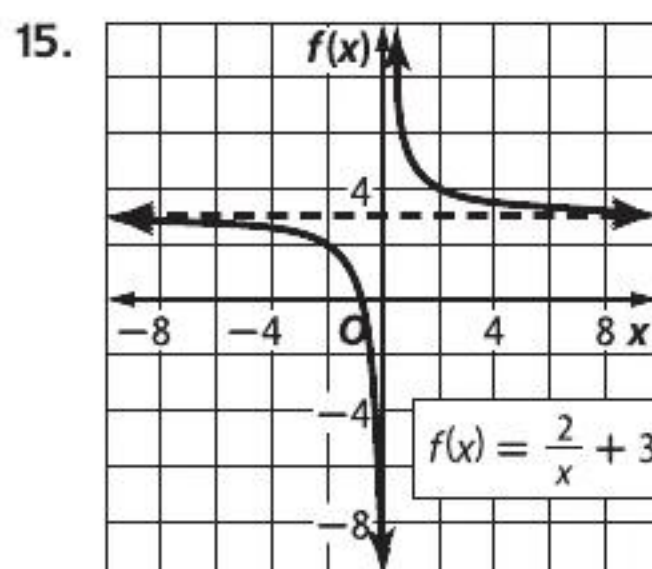
$D = \{x \mid x \neq -2\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



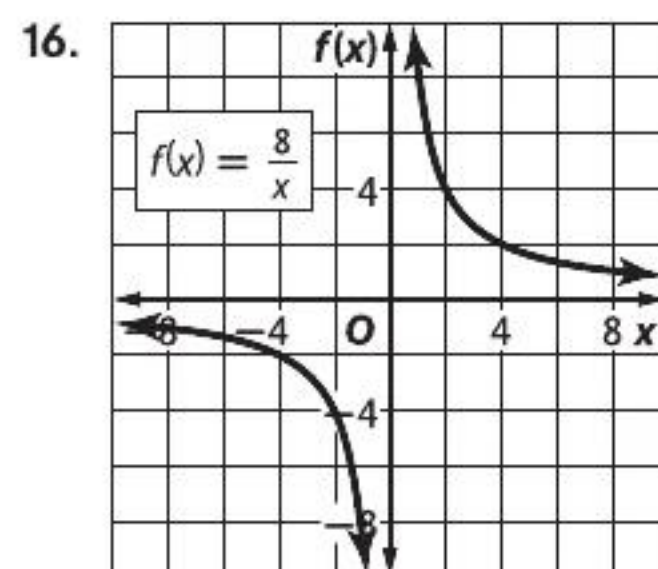
$D = \{x \mid x \neq 6\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



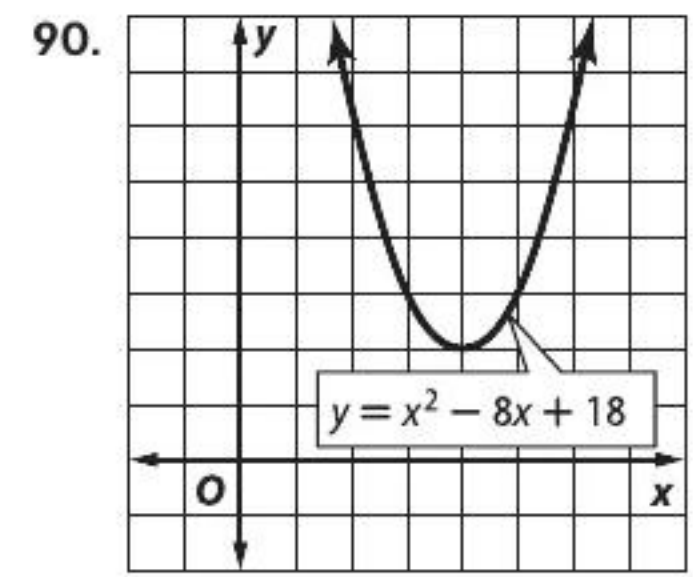
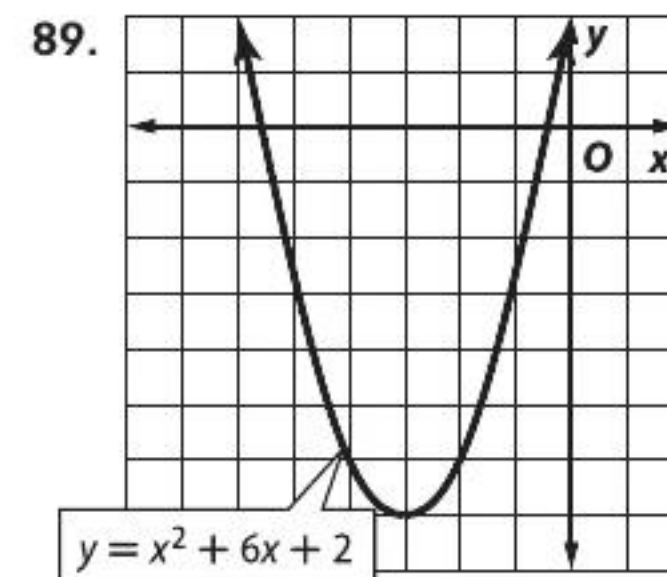
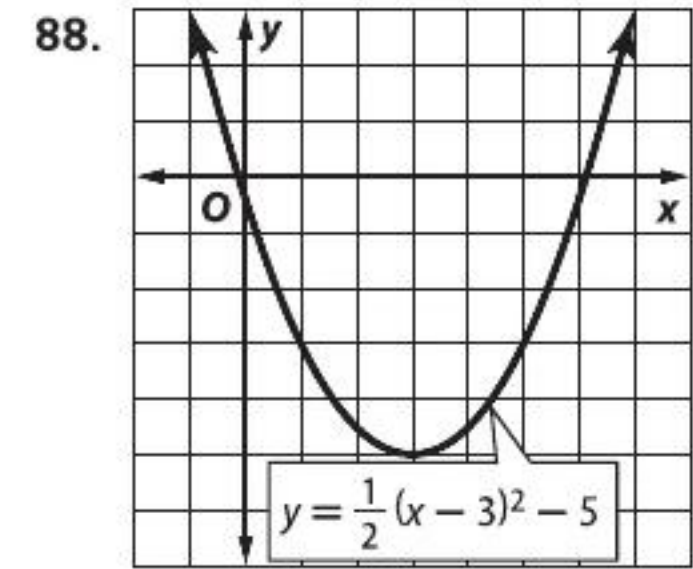
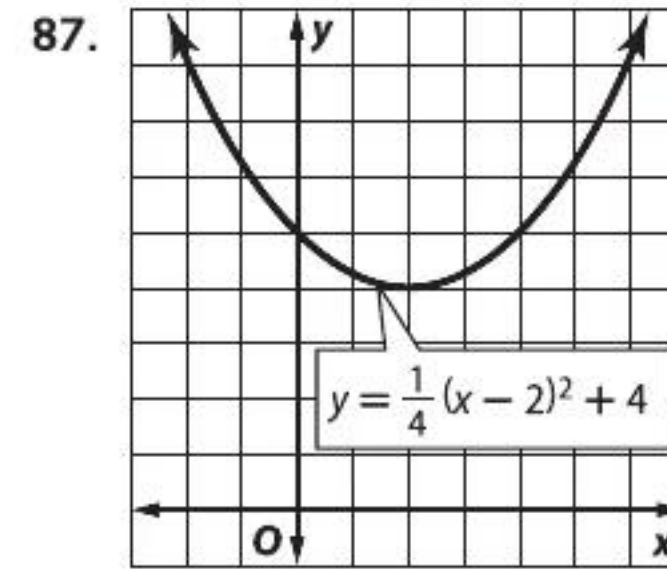
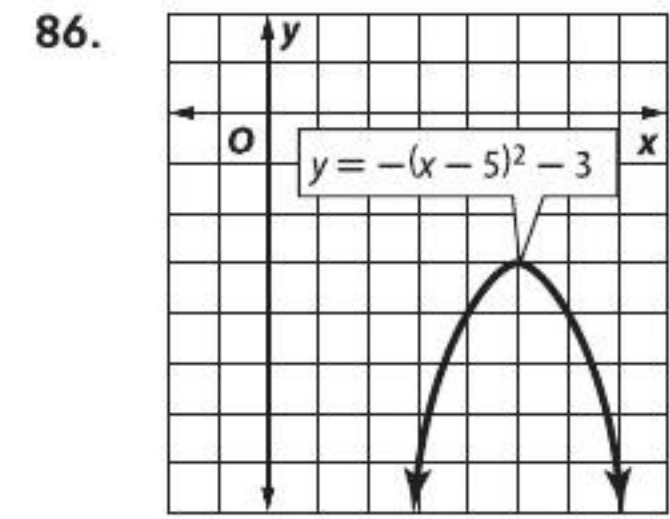
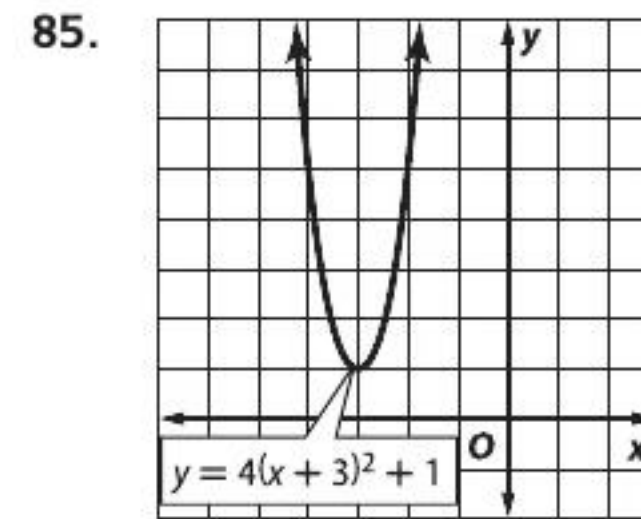
$D = \{x \mid x \neq 0\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$



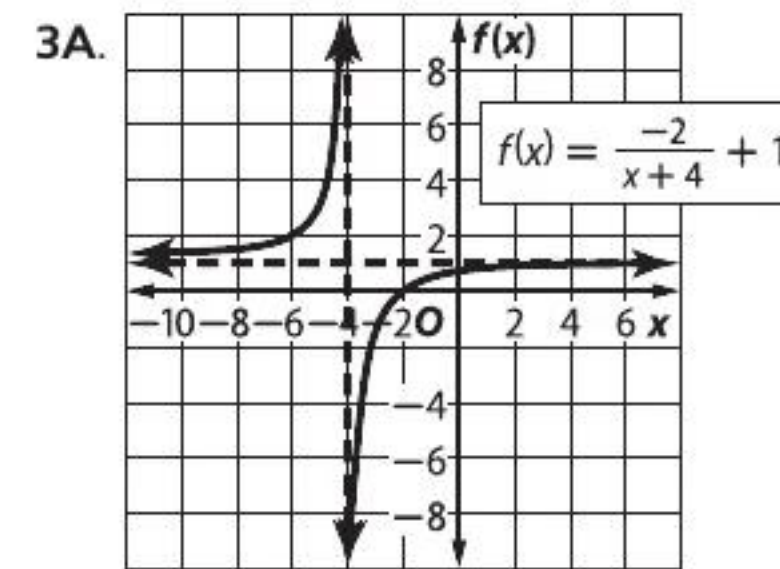
$D = \{x \mid x \neq 0\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 3\}$



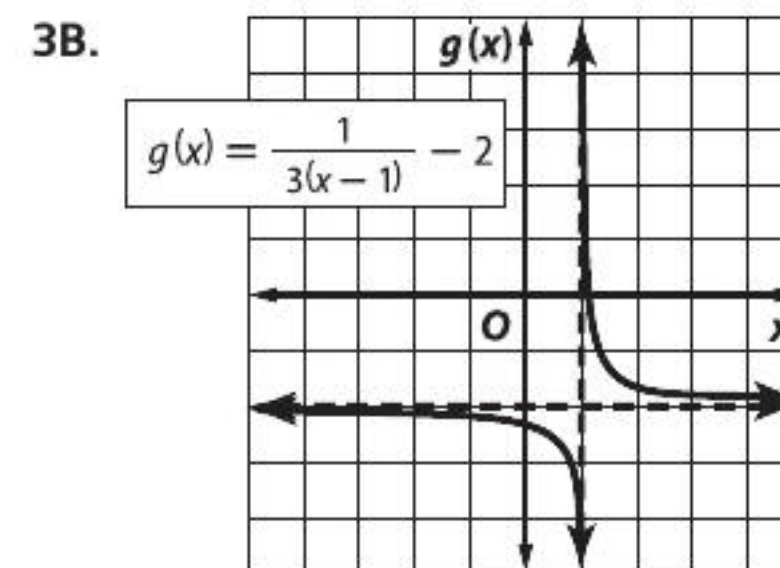
$D = \{x \mid x \neq 0\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



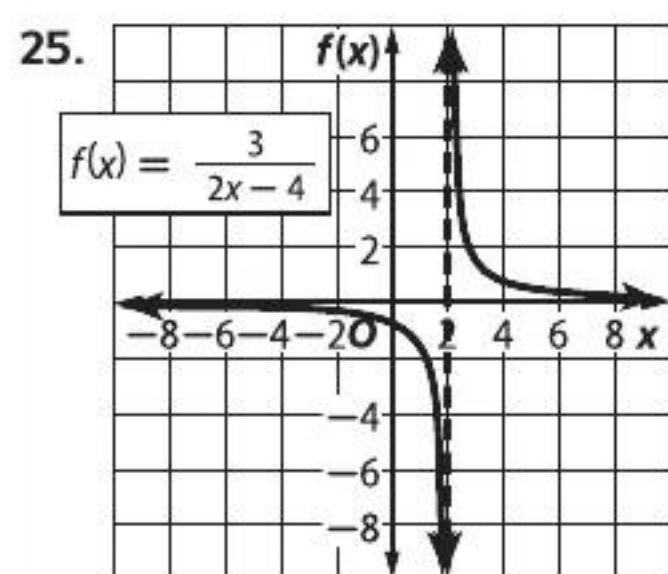
الدرس 2-3 (تمرين موجه)



$D = \{x \mid x \neq -4\}; R = \{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$

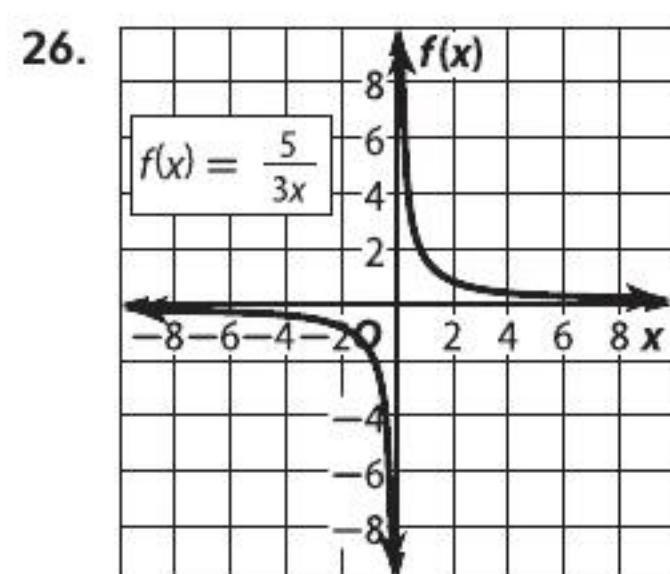


$D = \{x \mid x \neq 1\}; R = \{g(x) \mid g(x) \neq -2\}$



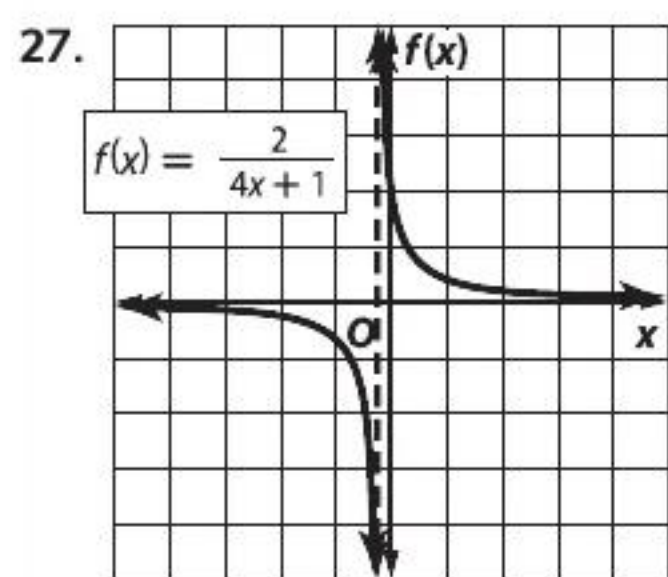
$$D = \{x \mid x \neq 2\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



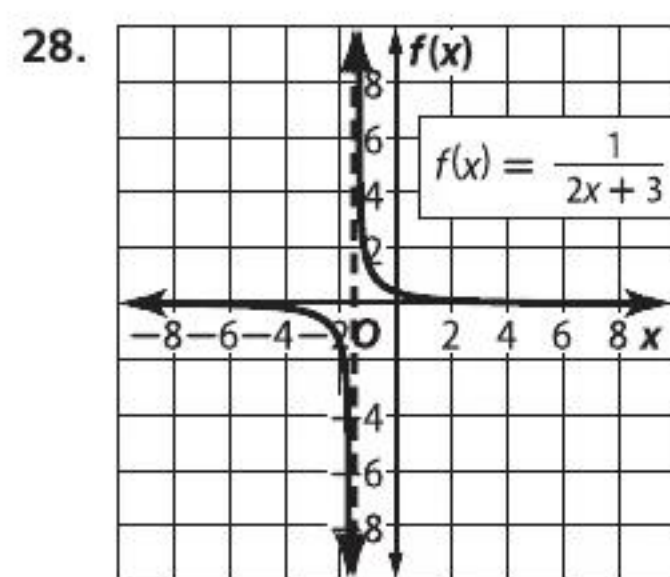
$$D = \{x \mid x \neq 0\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



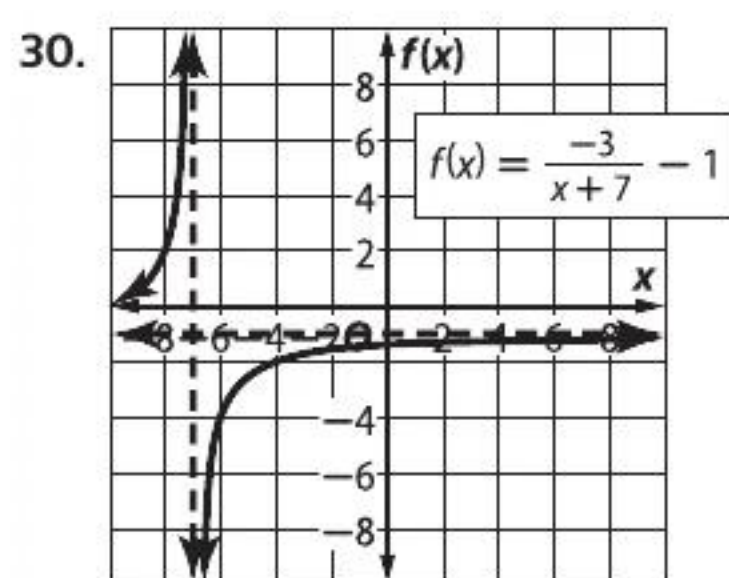
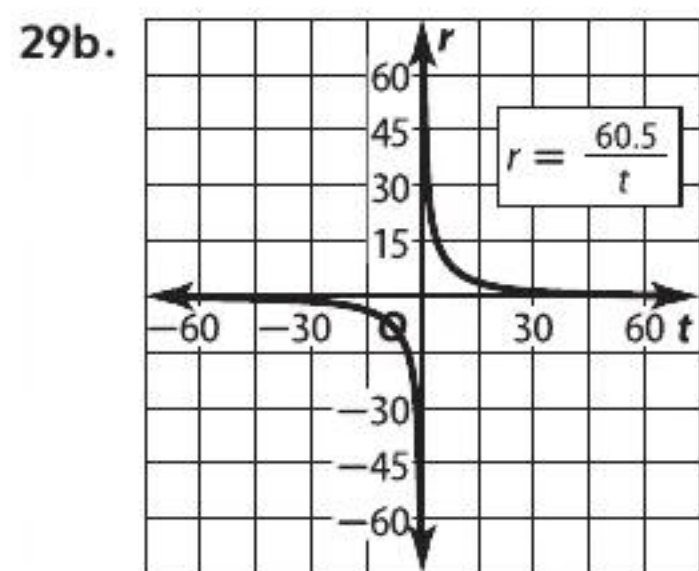
$$D = \left\{x \mid x \neq -\frac{1}{4}\right\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$

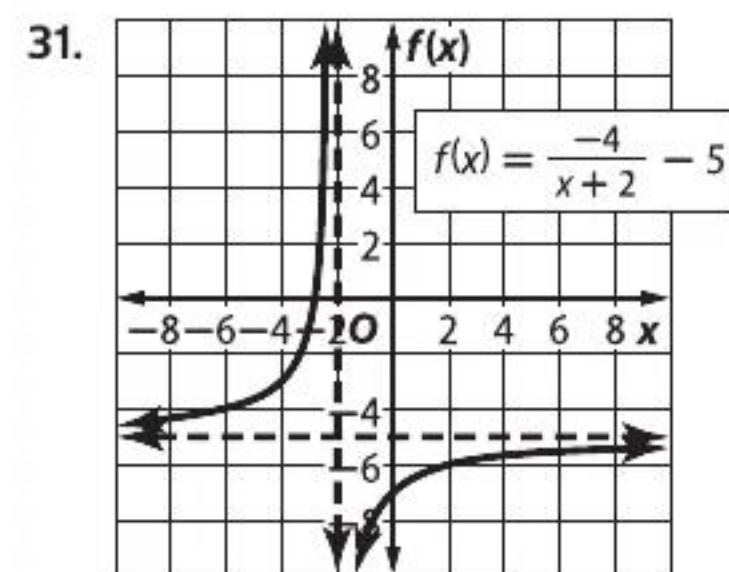


$$D = \left\{x \mid x \neq -\frac{3}{2}\right\};$$

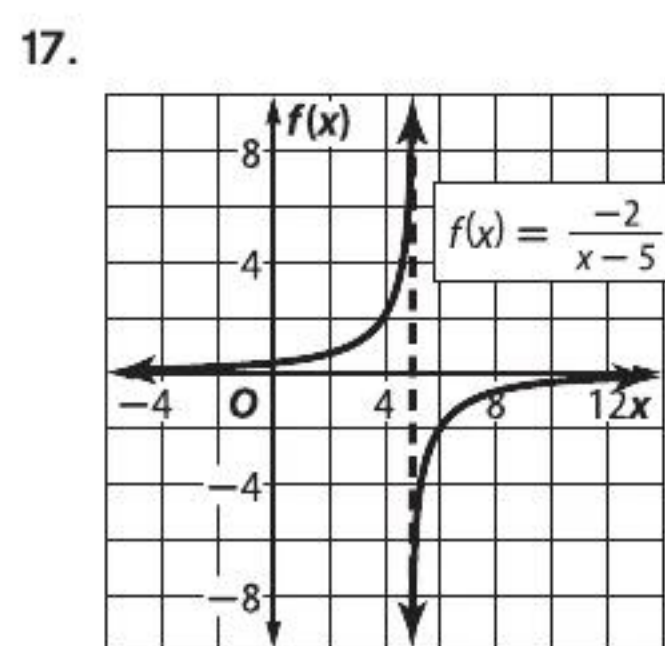
$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



$$D = \{x \mid x \neq -7\}; R = \{f(x) \mid f(x) \neq -1\}; x = -7, f(x) = -1$$

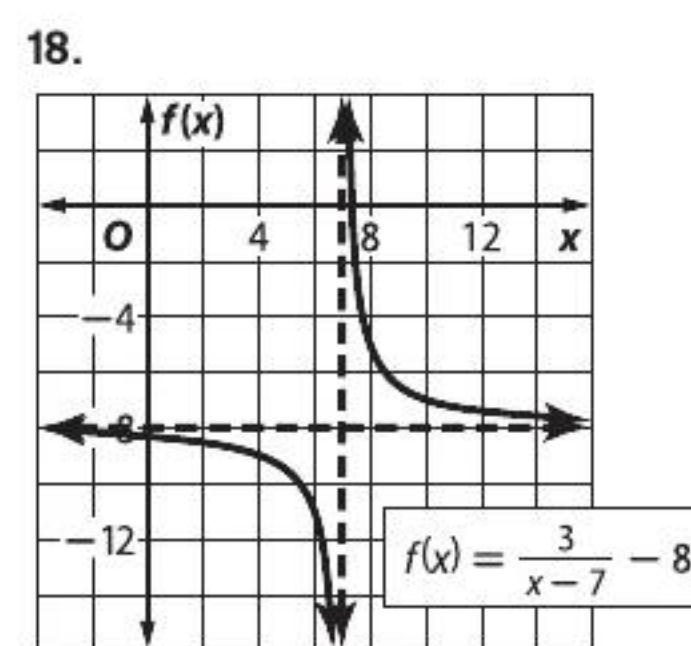


$$D = \{x \mid x \neq -2\}; R = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}; x = -2, f(x) = -5$$



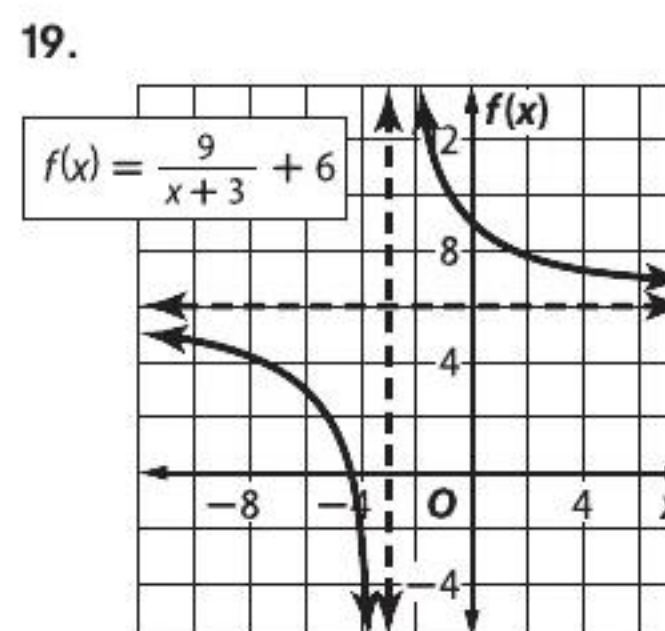
$$D = \{x \mid x \neq 5\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



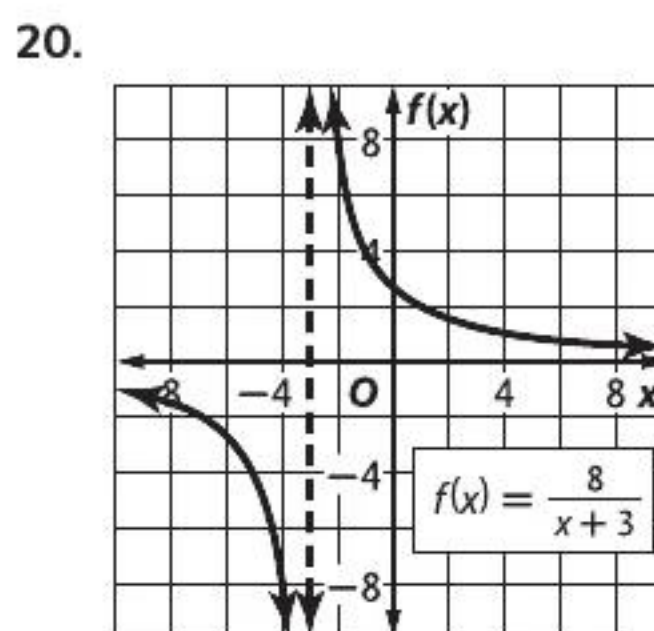
$$D = \{x \mid x \neq 7\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -8\}$$



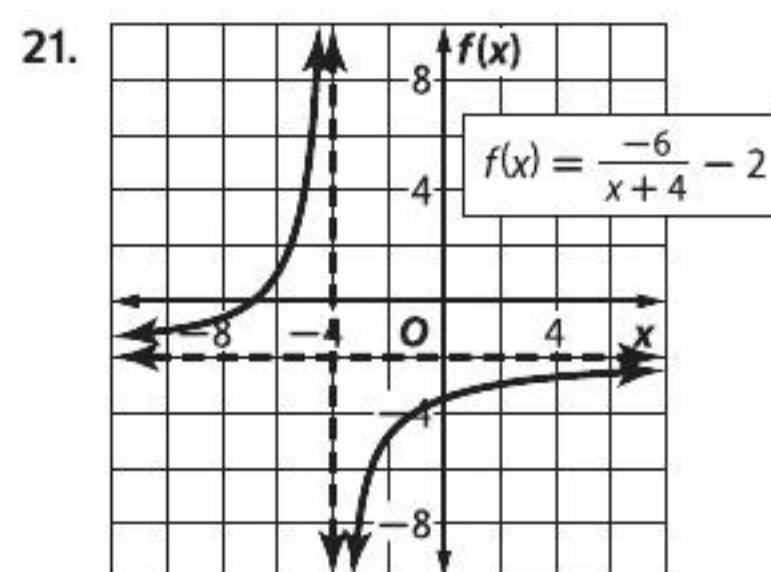
$$D = \{x \mid x \neq -3\};$$

$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 6\}$$

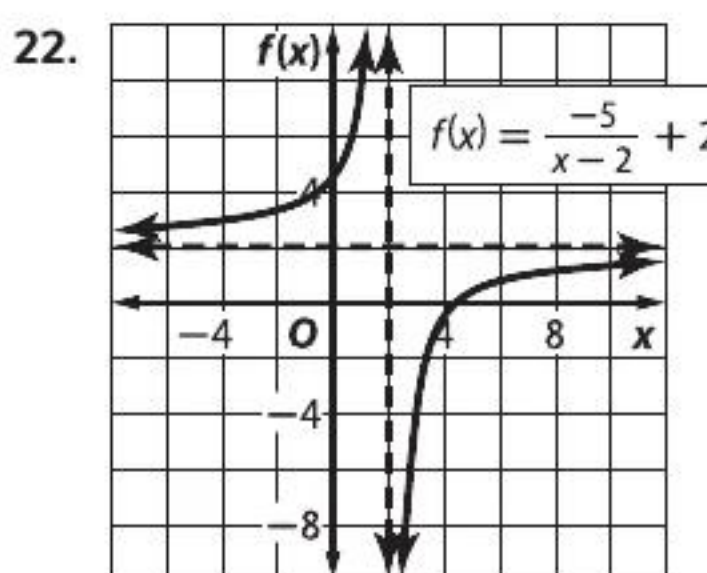


$$D = \{x \mid x \neq -3\};$$

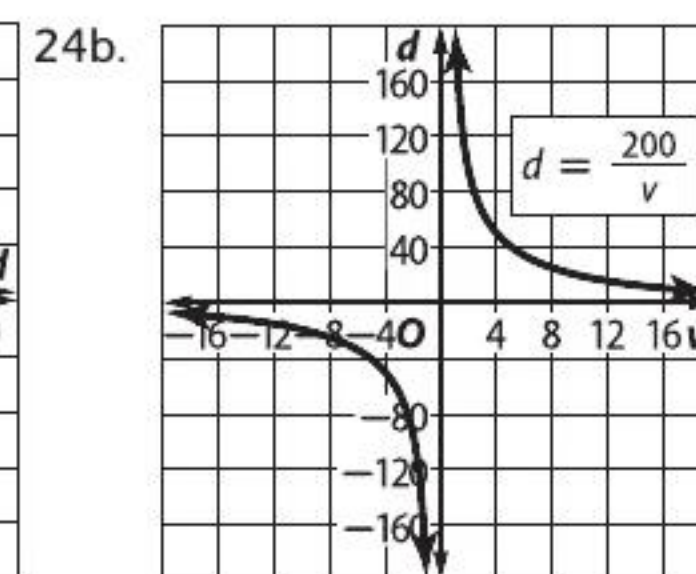
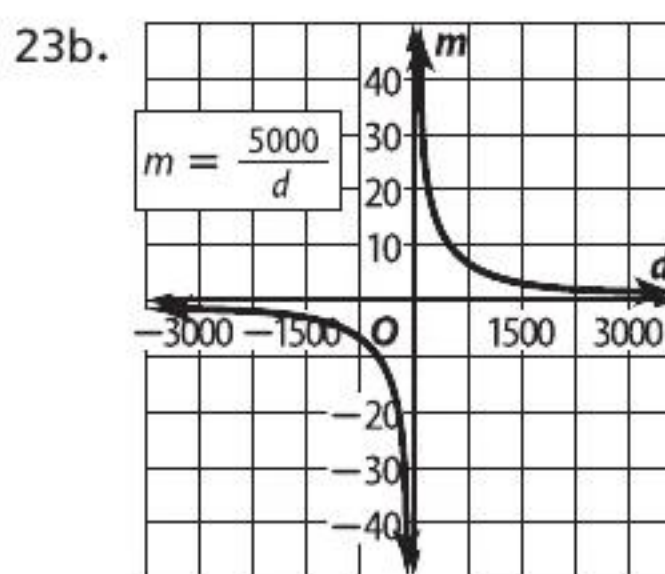
$$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



$$D = \{x \mid x \neq -4\}; R = \{f(x) \mid f(x) \neq -2\}$$

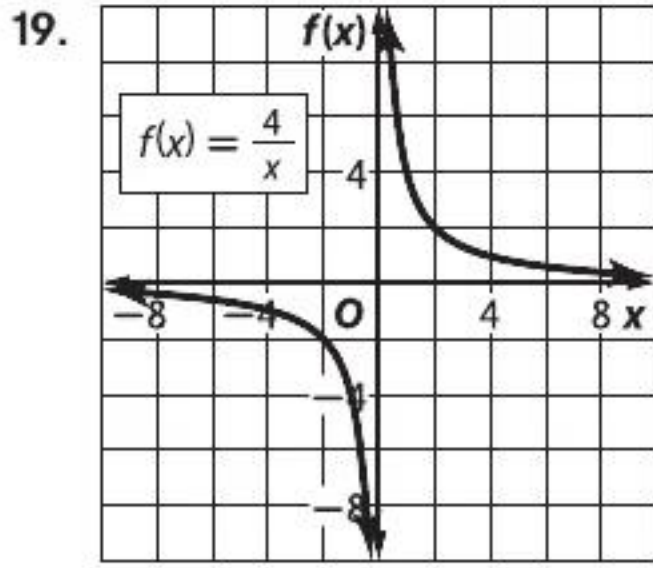


$$D = \{x \mid x \neq 2\}; R = \{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$$

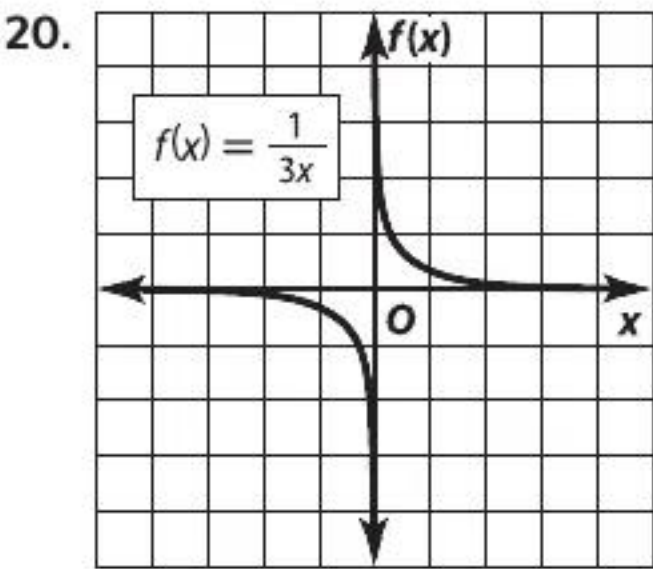


القيمة العظمى النسبية عند $x = 0$ ، القيمة الصغرى النسبية عند $x = -2$ وعند $x = 2$: $D = \{x \mid x = 2\}$ ، $R = \{f(x) \mid f(x) \geq -6\}$ ، $\{ \text{كافة الأعداد الحقيقية} \}$ ، $\{f(x)\}$

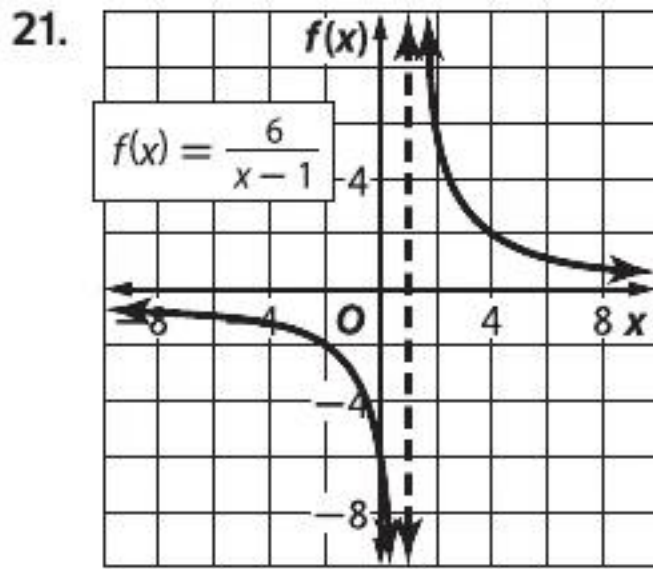
اختبار منتصف الوحدة



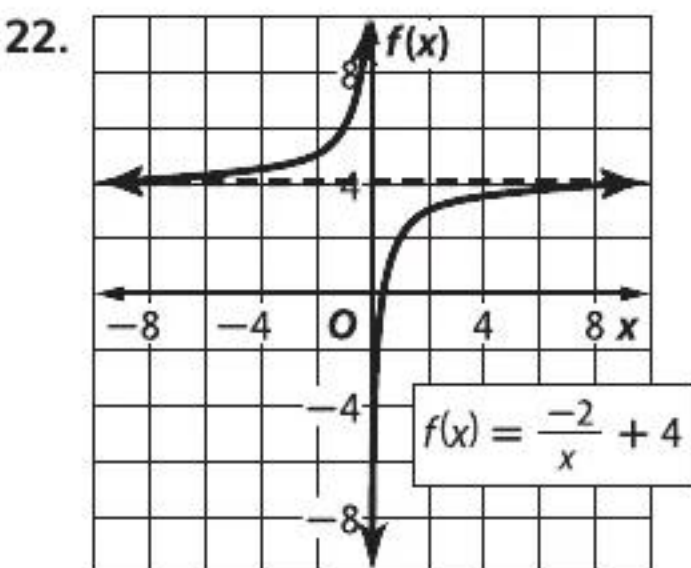
$$D = \{x \mid x \neq 0\}, R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



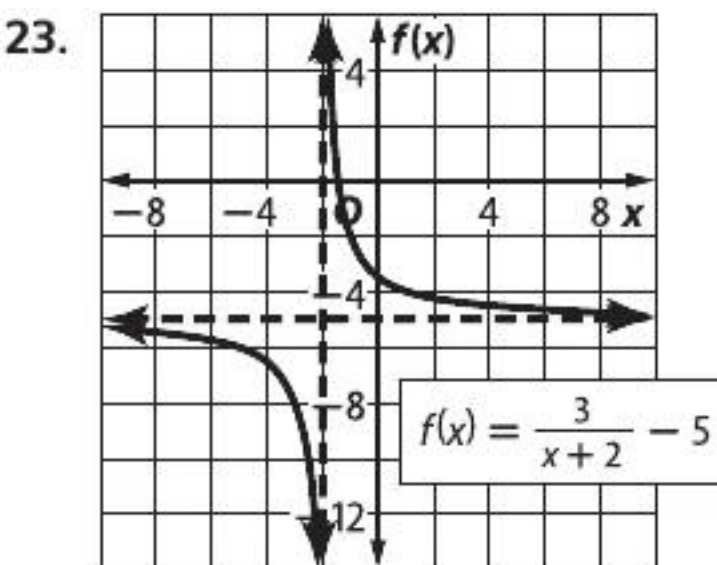
$$D = \{x \mid x \neq 0\}, R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



$$D = \{x \mid x \neq 1\}, R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



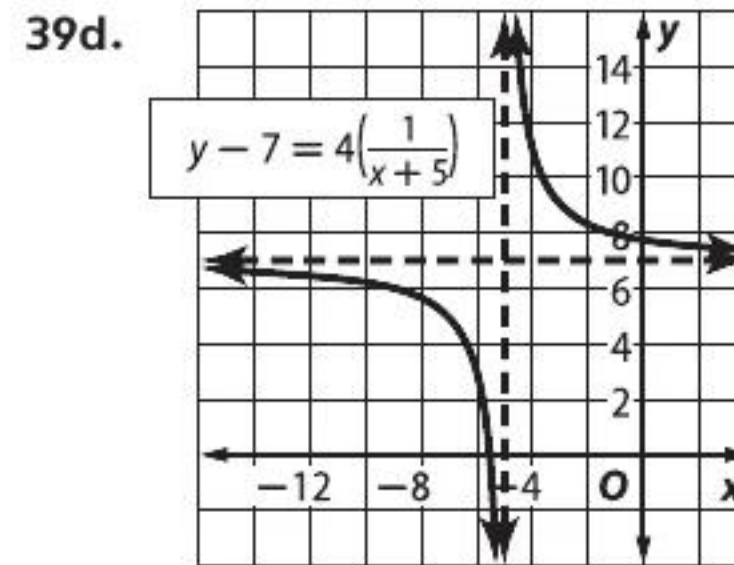
$$D = \{x \mid x \neq 0\}, R = \{f(x) \mid f(x) \neq 4\}$$



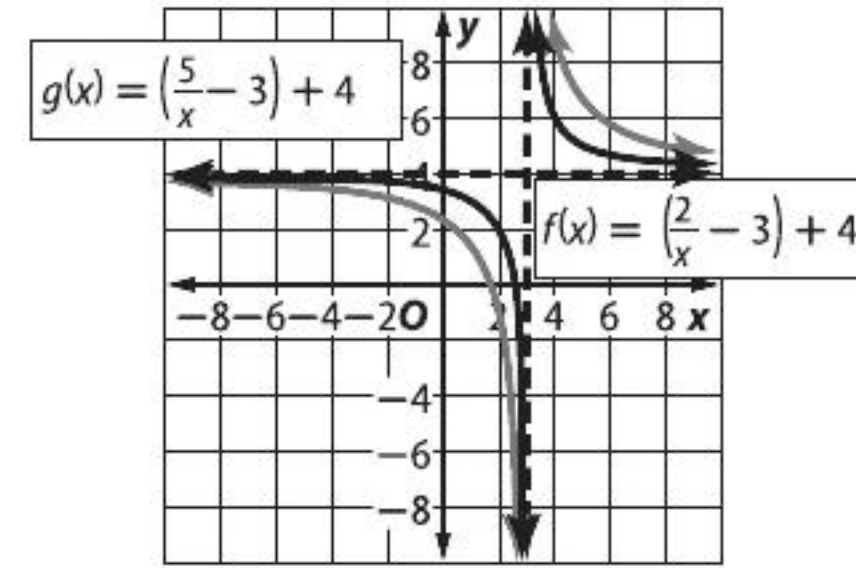
$$D = \{x \mid x \neq -2\}, R = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$$

39b. يشتمل كلا التمثيلين البيانيين على خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وعلى خط تقارب أفقي عند $y = 0$. التمثيل البياني الثاني متسع حسب العامل 4.

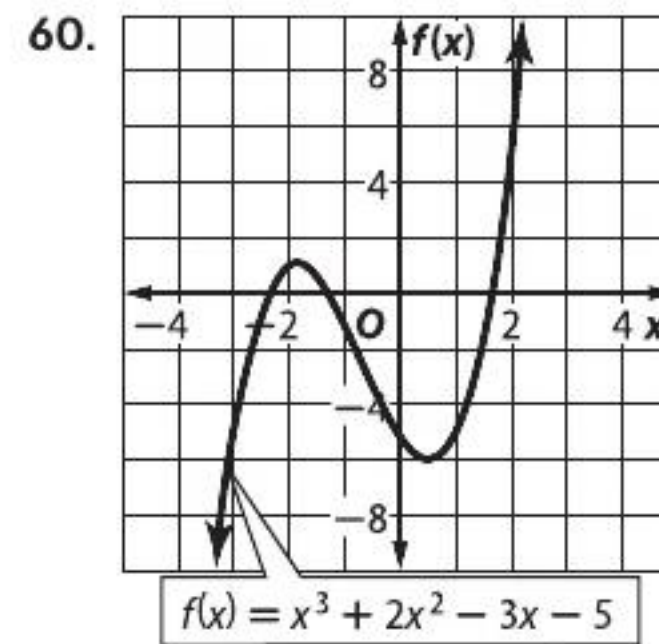
39c. يشتمل التمثيل البياني الأول على خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وعلى خط تقارب أفقي عند $y = 0$. يُزاح التمثيل البياني الثاني 5 وحدات لأعلى ويشتمل على خط تقارب رأسي عند $x = -5$ وعلى خط تقارب أفقي عند $y = 0$.



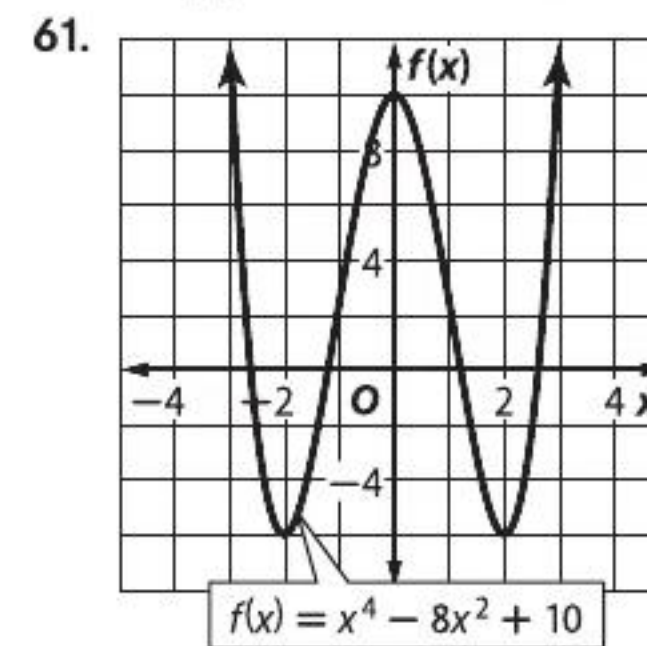
41. الإجابة النموذجية $g(x) = \frac{5}{x-3} + 4$ و $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$

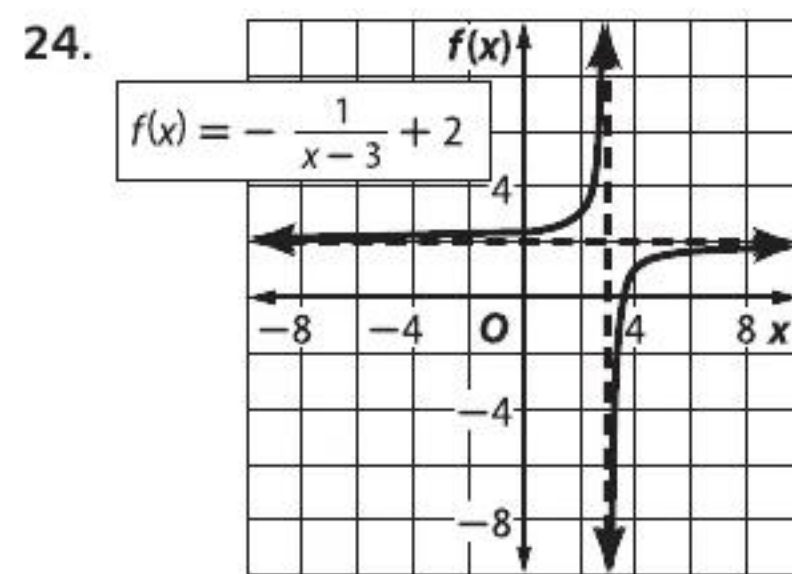
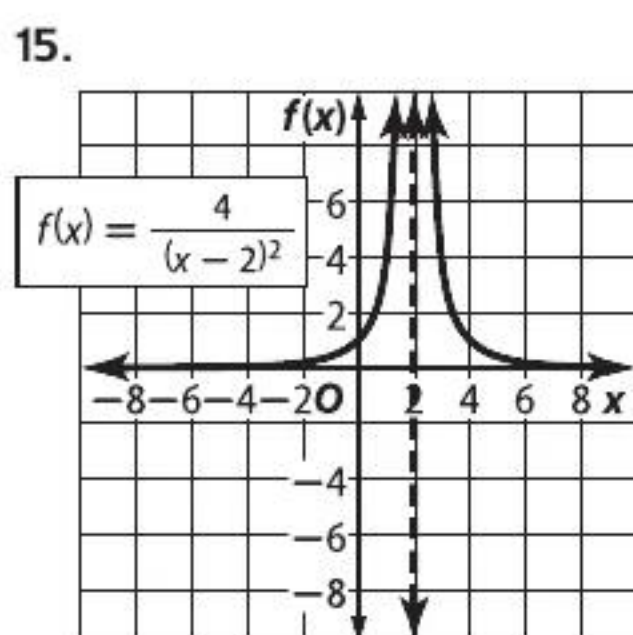
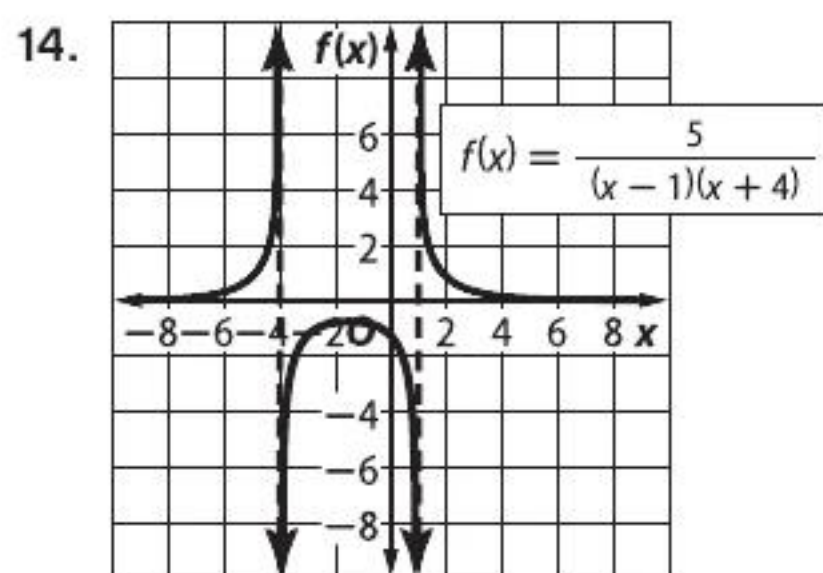
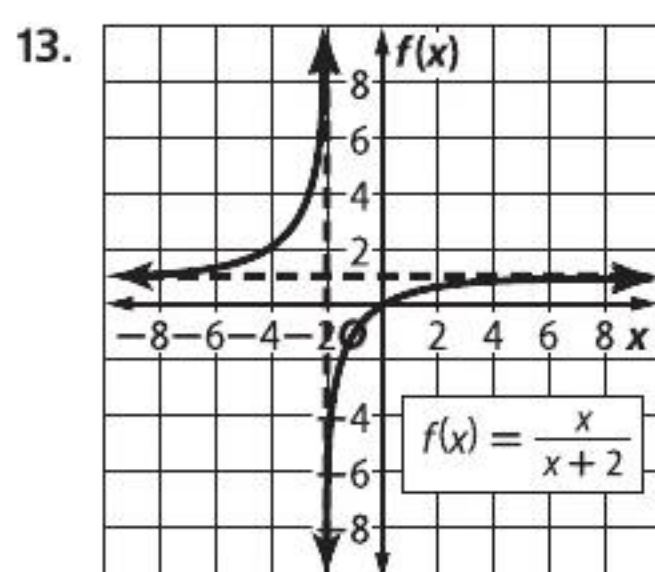
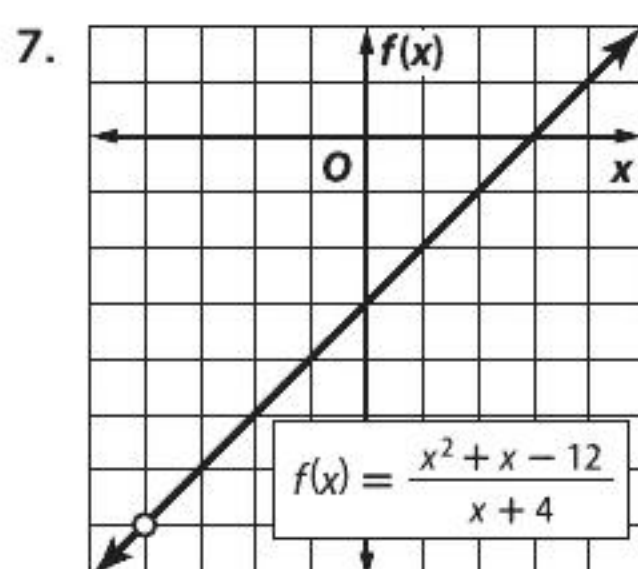
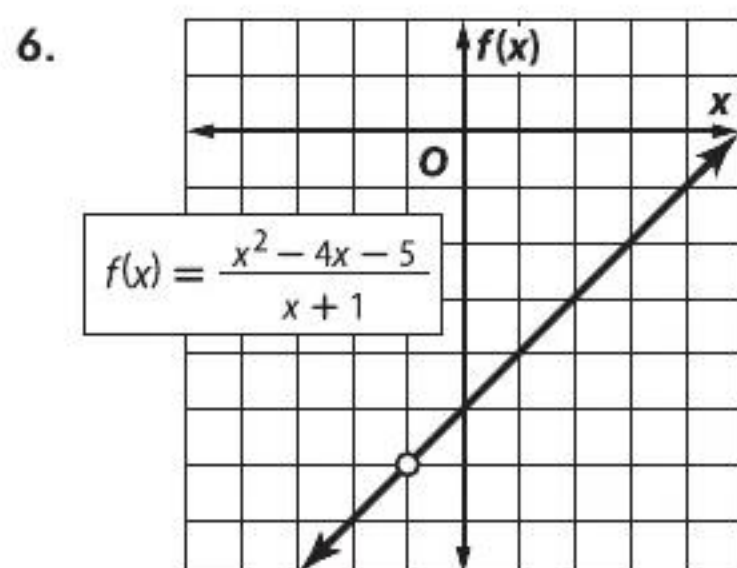
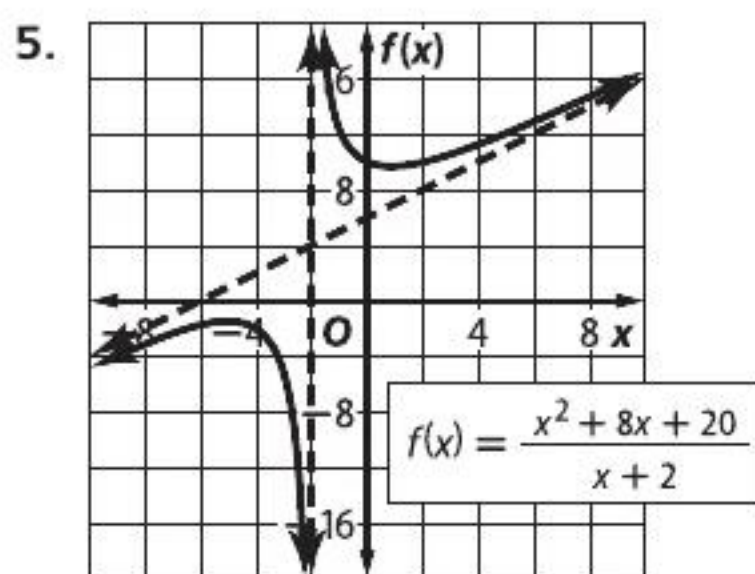


42. يمكن استخدام الدالة النسبية لتحديد ما يحتاج كل شخص إلى بيعه إذا كانت تكلفة الرحلة وعدد الأشخاص الزاهبين إلى الرحلة وبيع الحلوى يساوي s . يجب أن يكون كل من عدد الأشخاص الذين يقومون بالبيع وعدد القوالب لكل شخص أعداد غير سالبة، كما يجب أن يكون كلاهما أعدادًا صحيحة. وبالتالي، فإن الجزء التربيعي الأول من التمثيل البياني يعتبر ذو معنى في سياق المسألة.



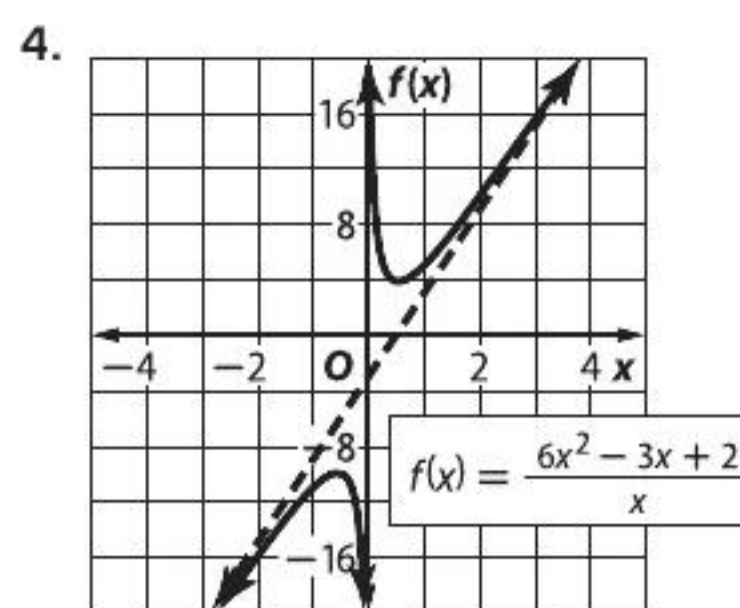
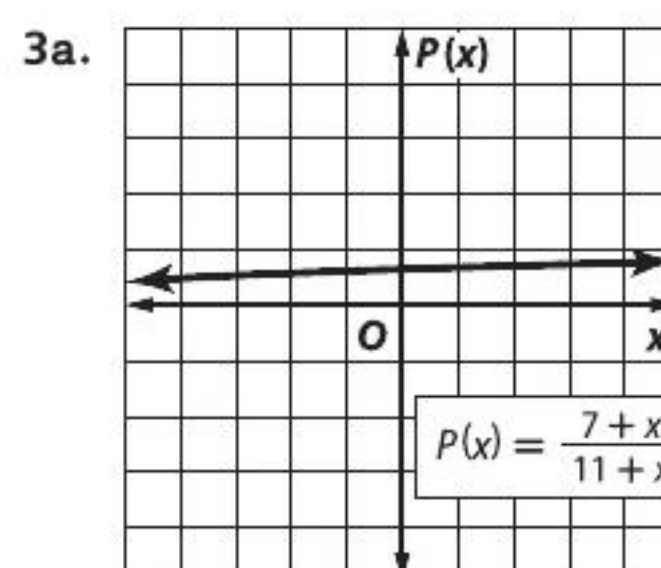
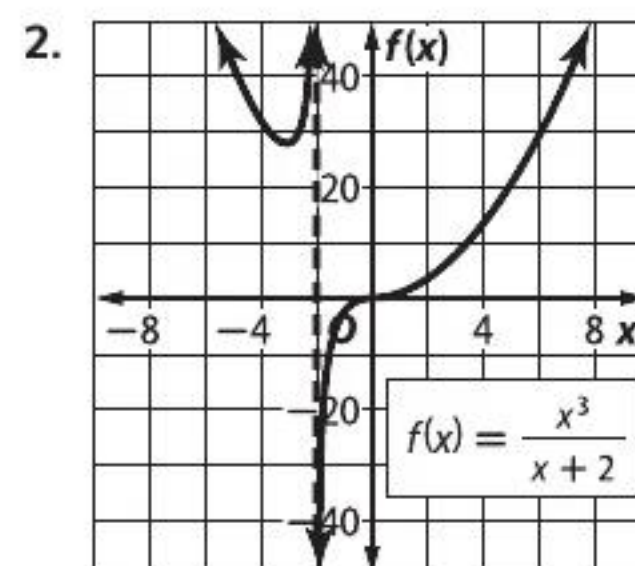
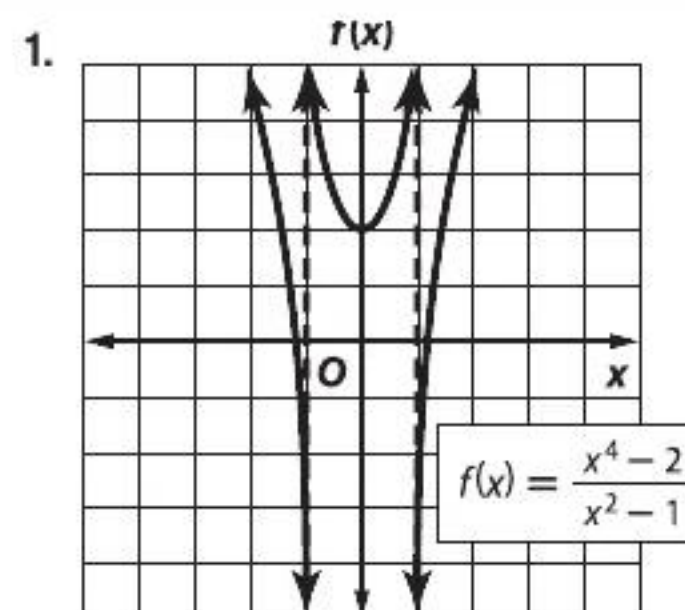
القيمة العظمى النسبية عند $x = -2$ ، القيمة الصغرى النسبية عند $x = 0.5$: $D = \{ \text{كافة الأعداد الحقيقية} \}$ ، $R = \{ \text{كافة الأعداد الحقيقية} \}$

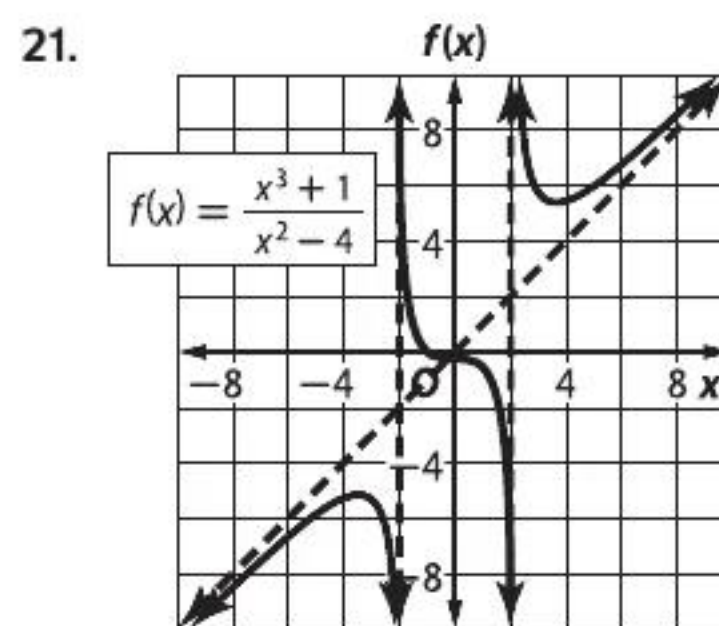
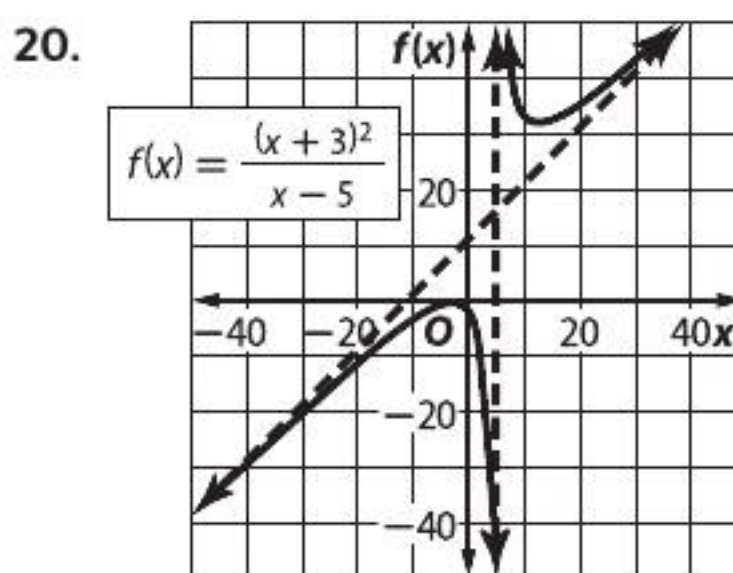
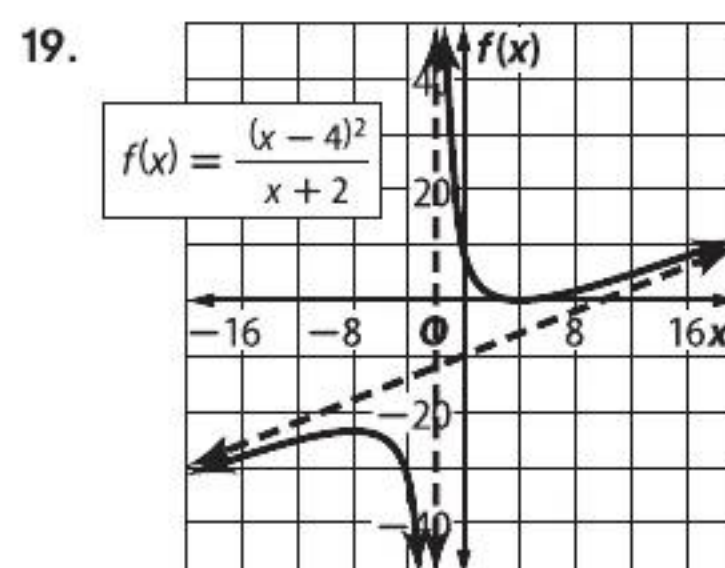
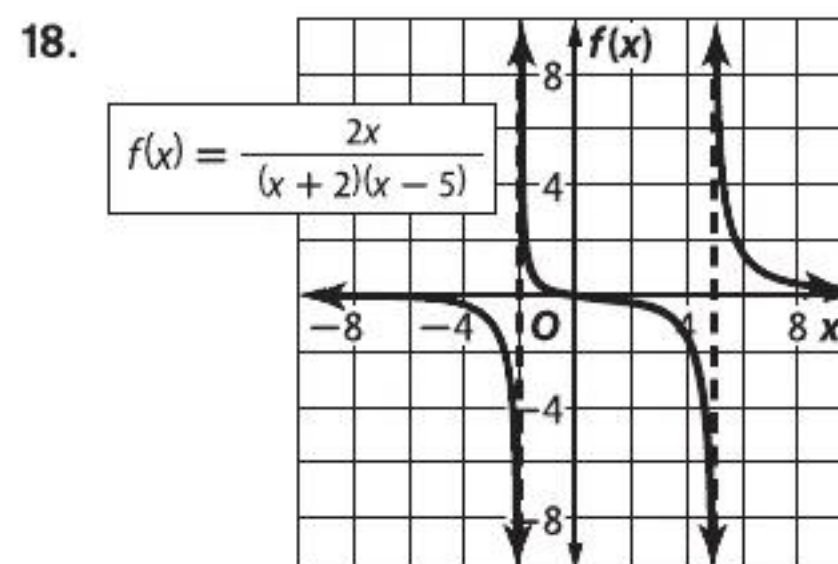
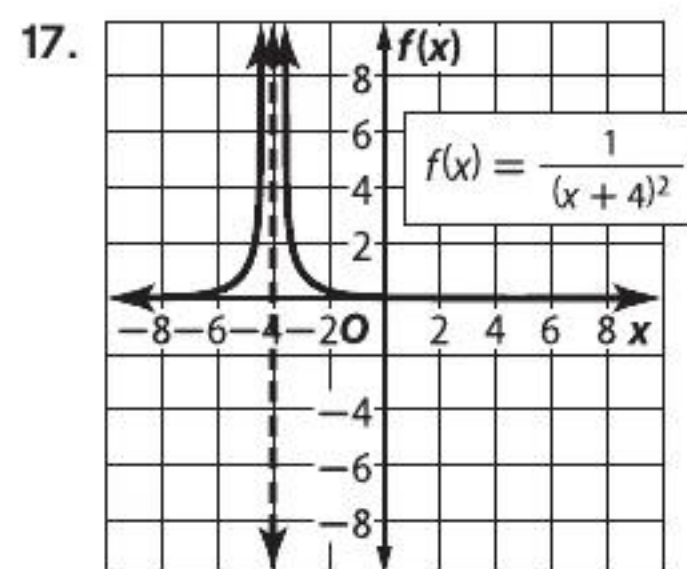
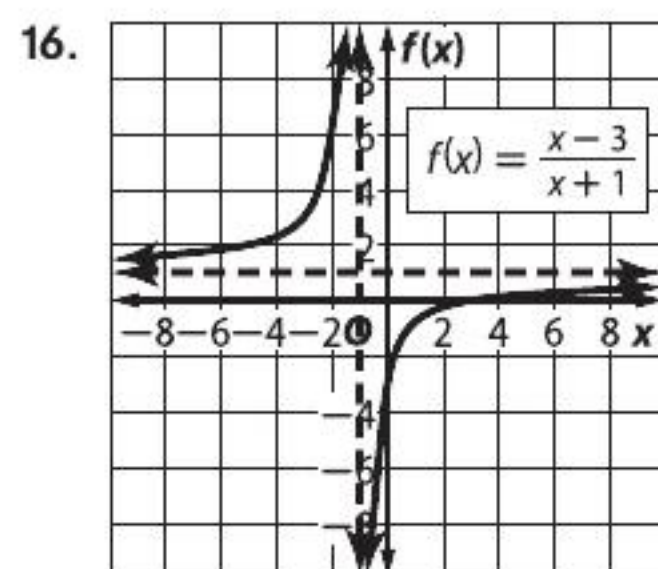
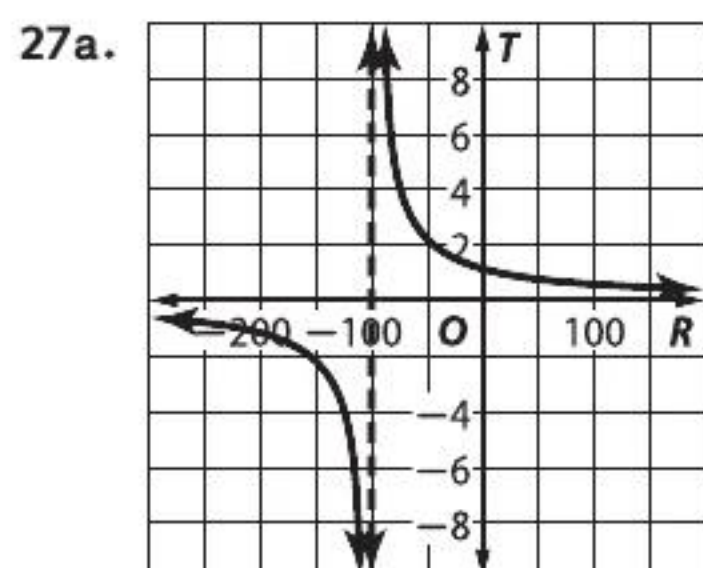
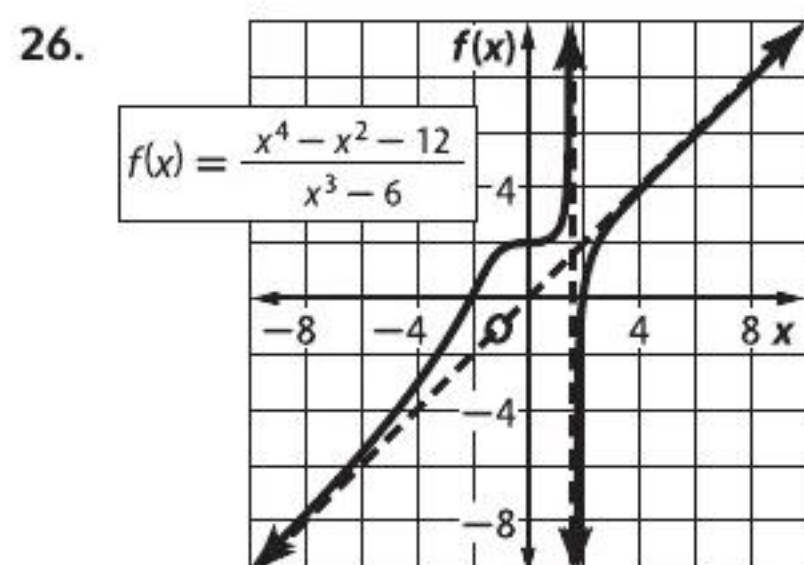
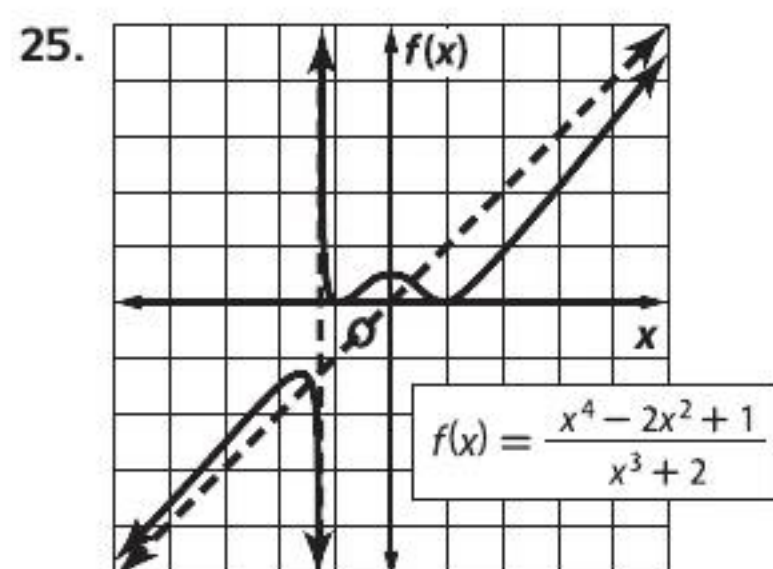
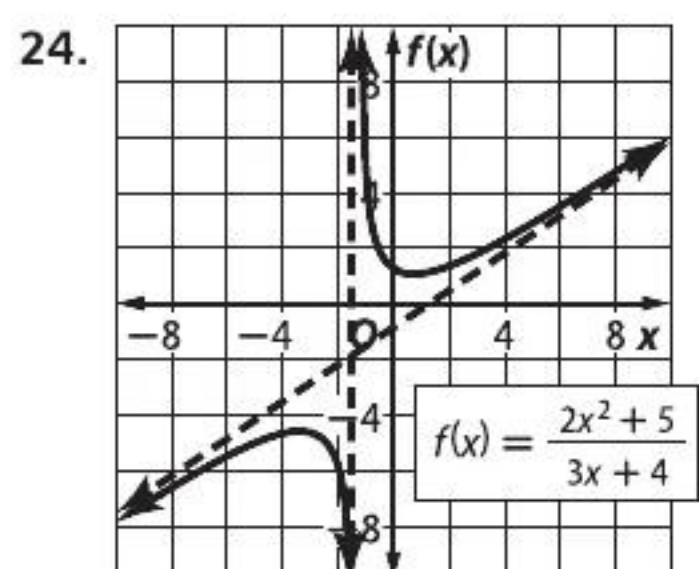
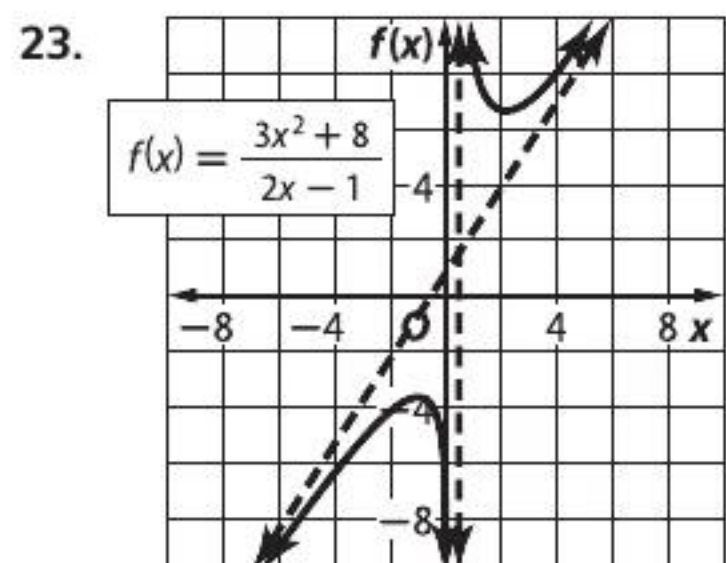
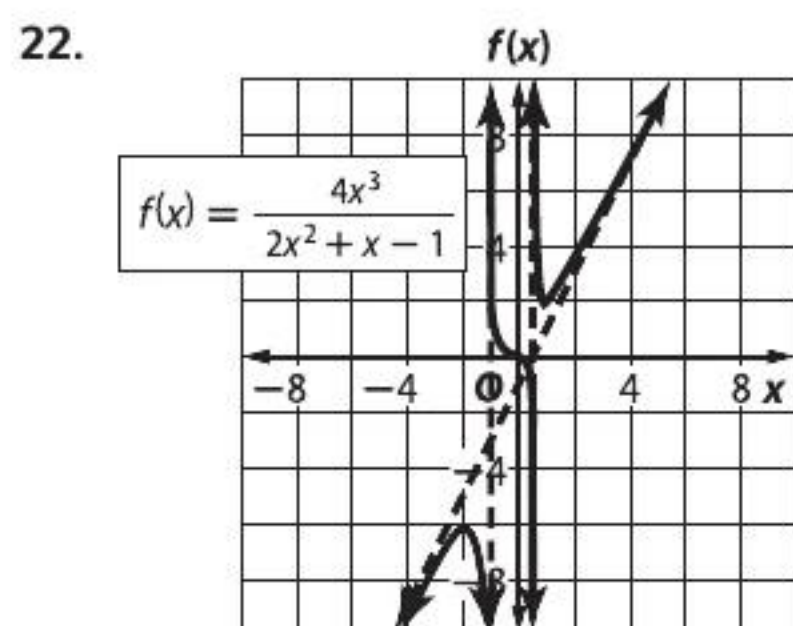


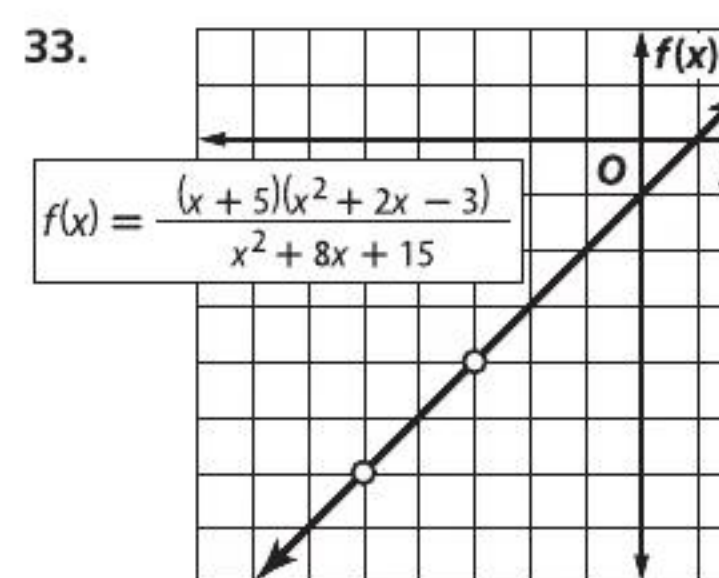
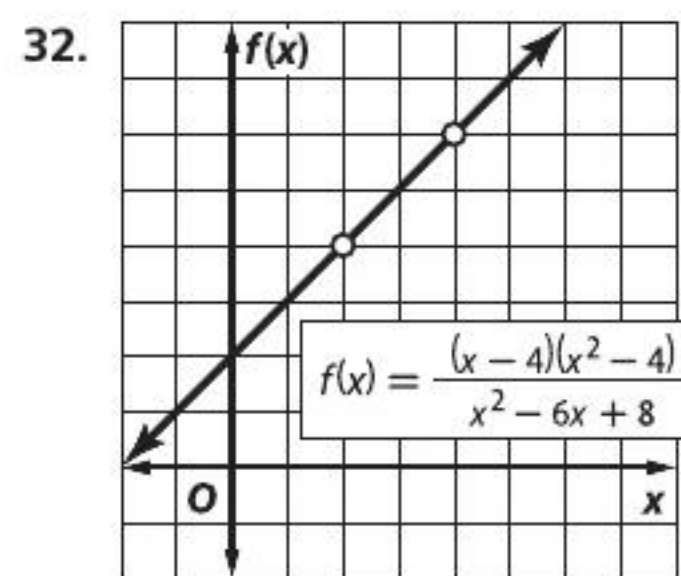
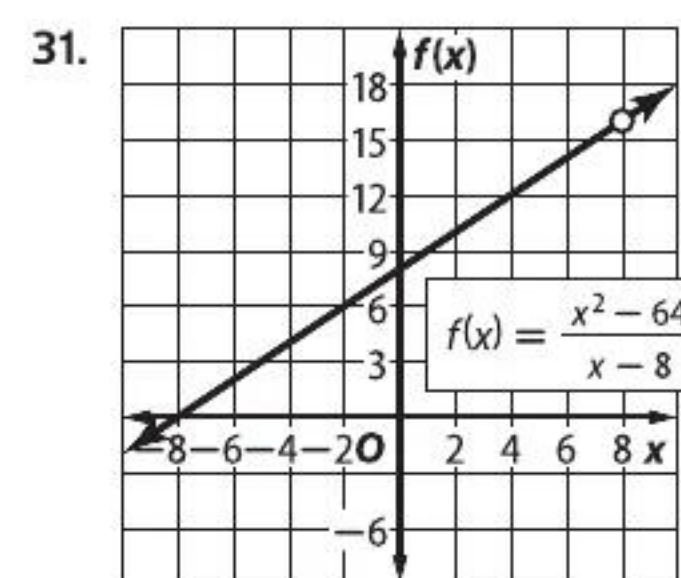
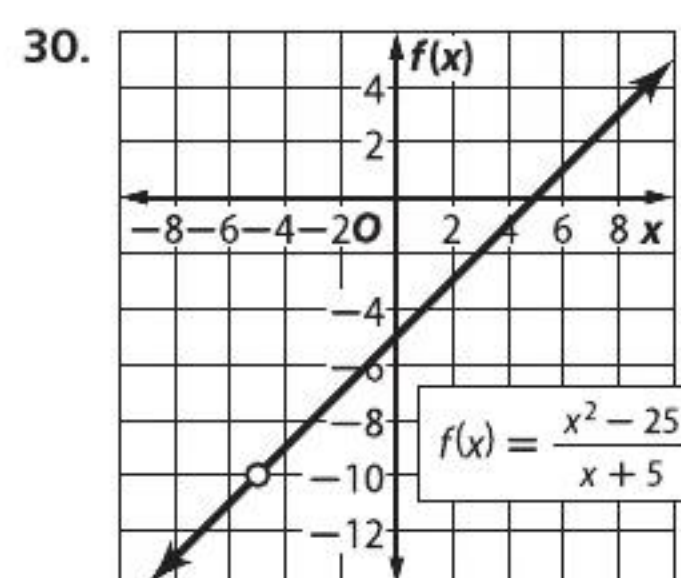
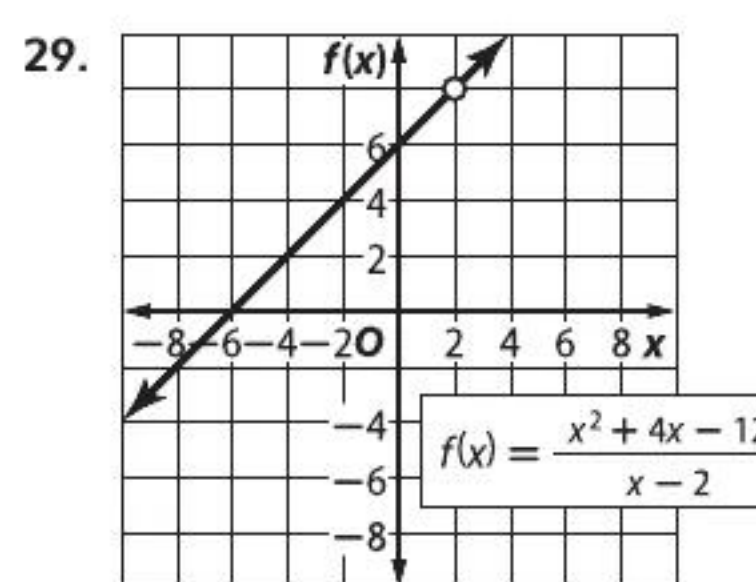
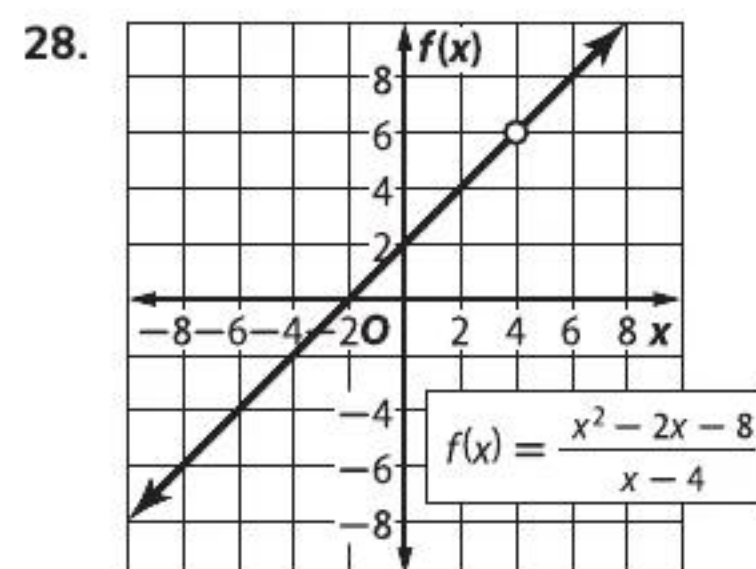
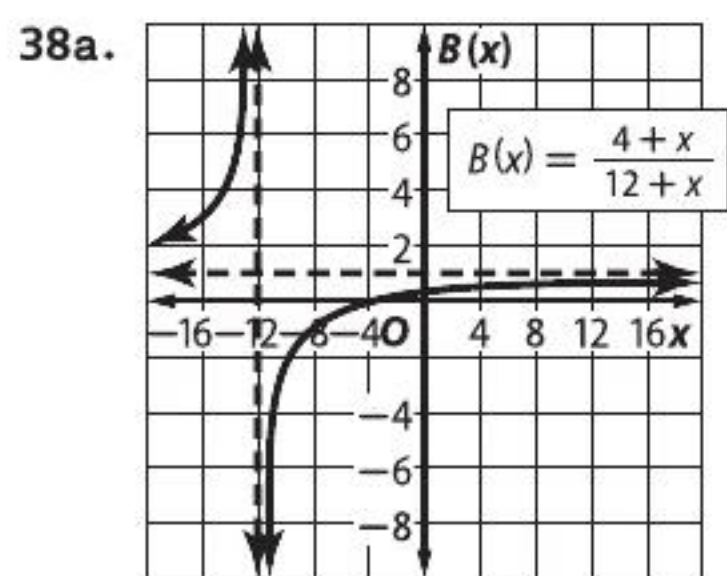
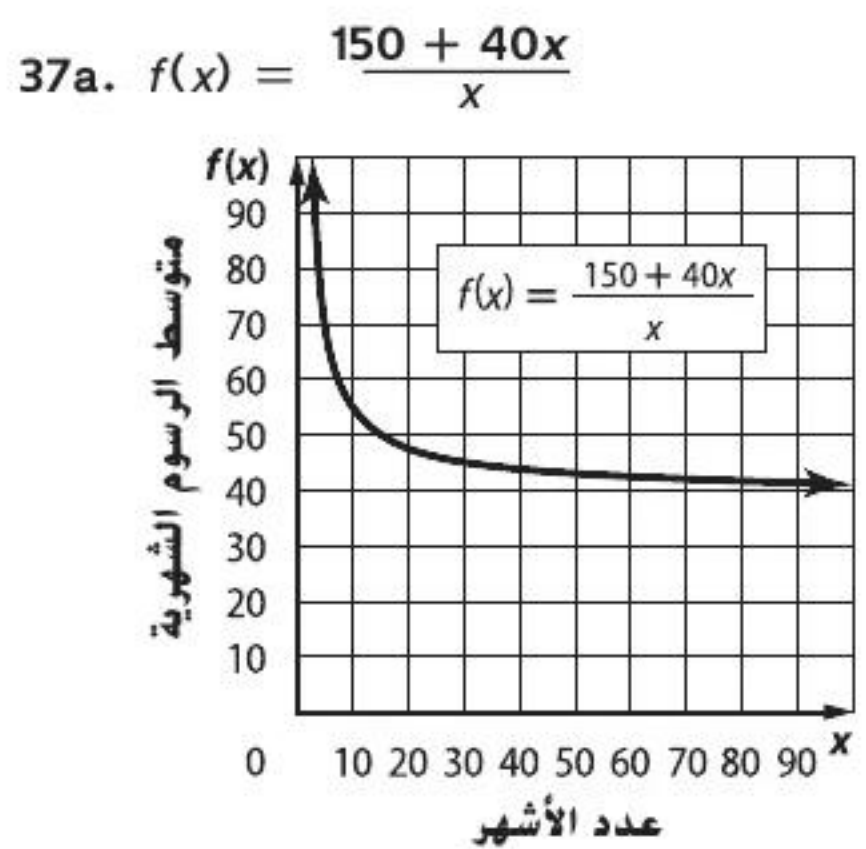
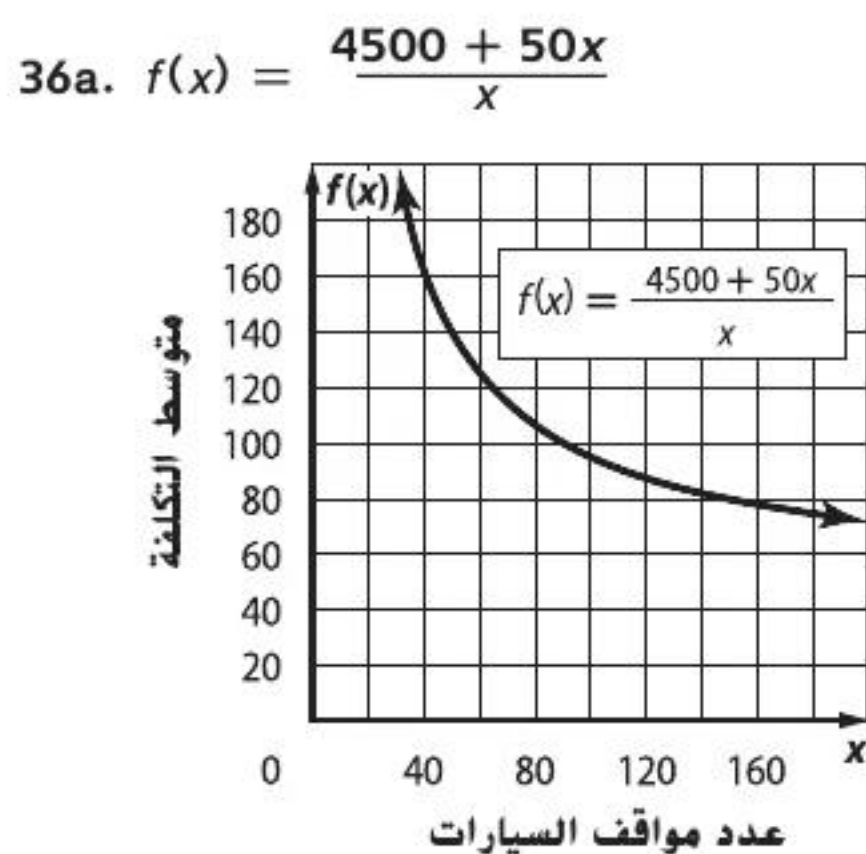
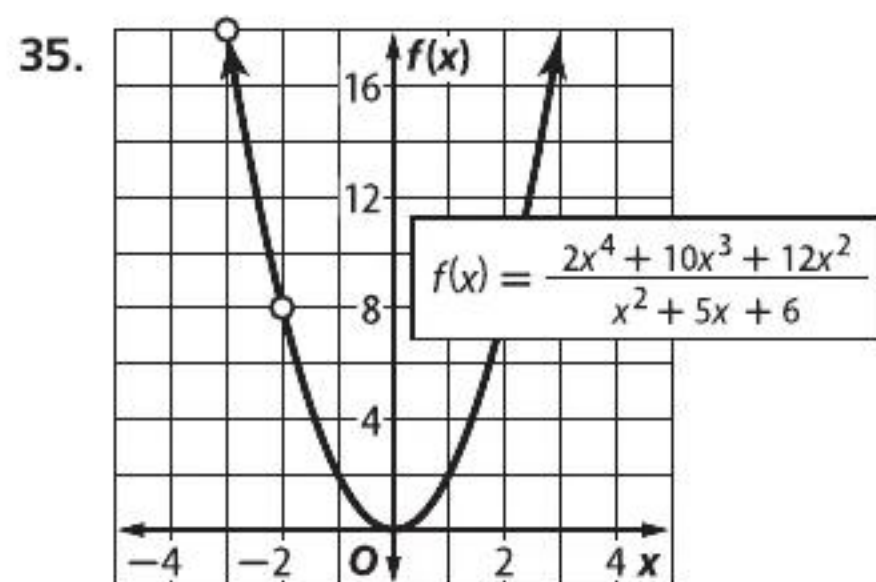
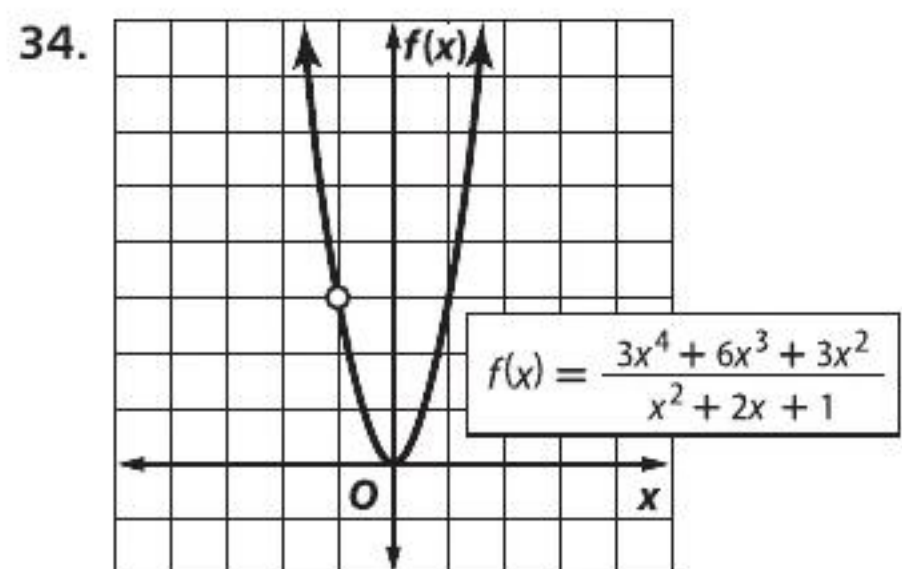


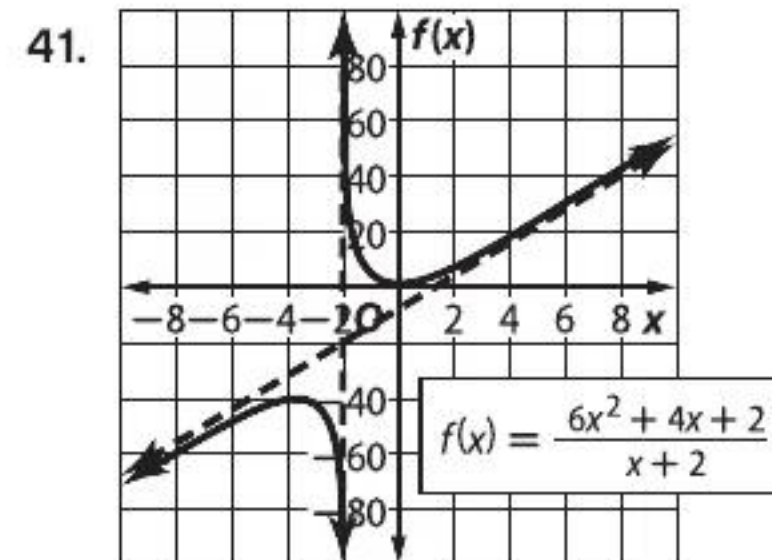
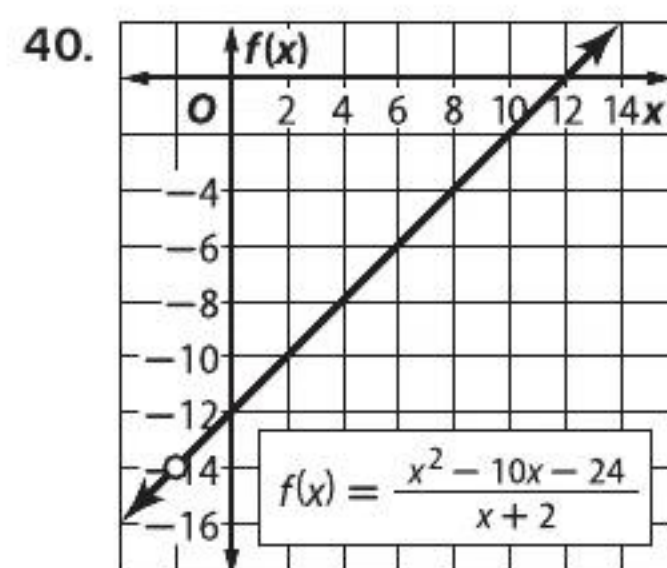
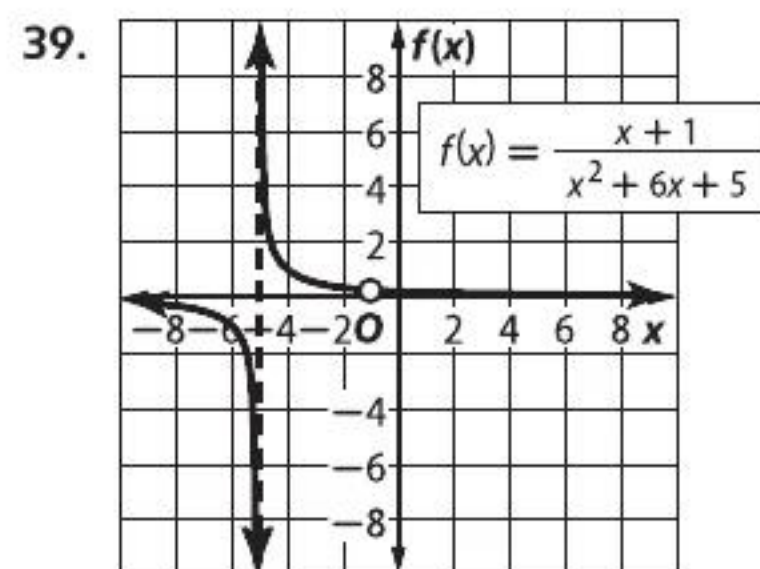
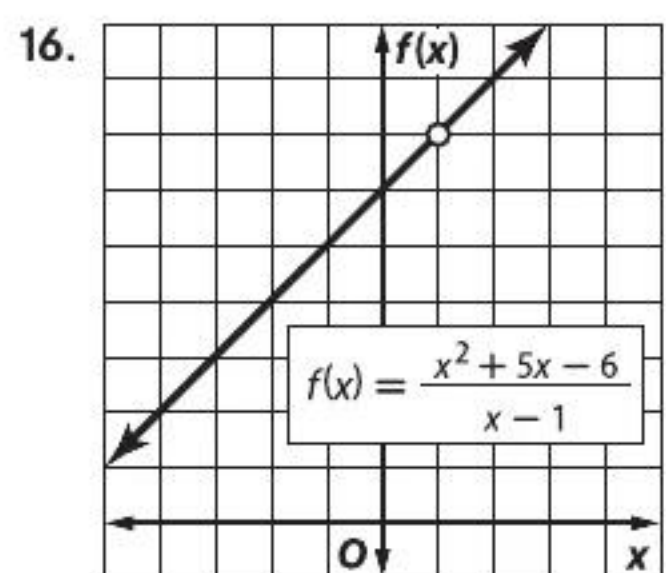
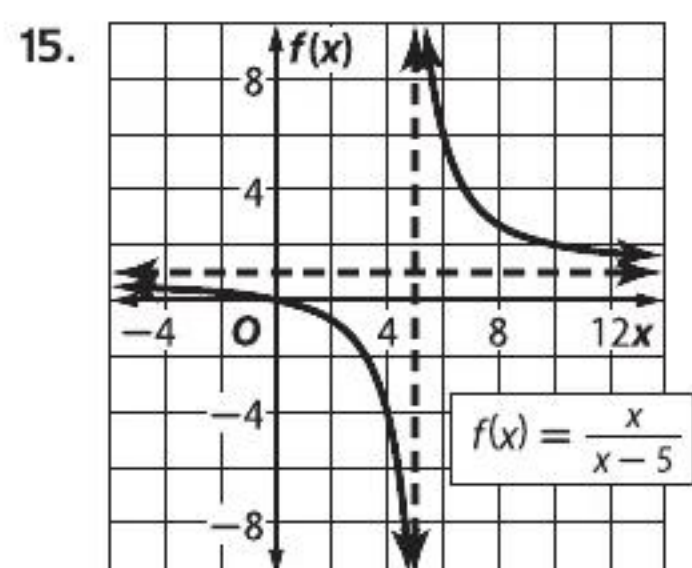
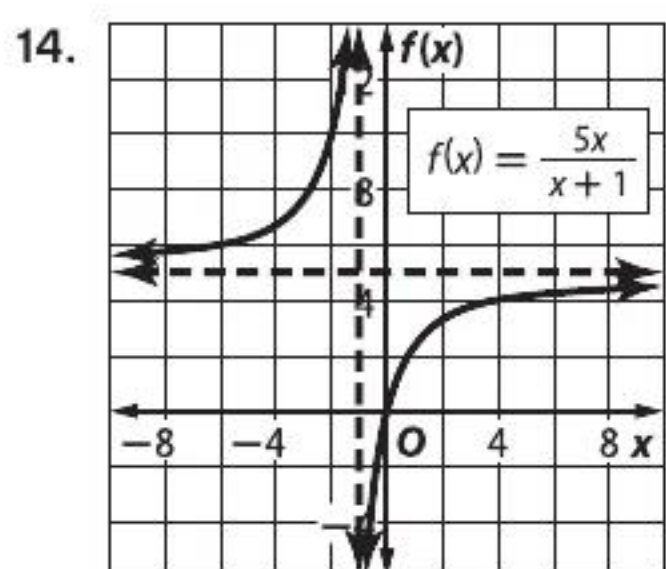
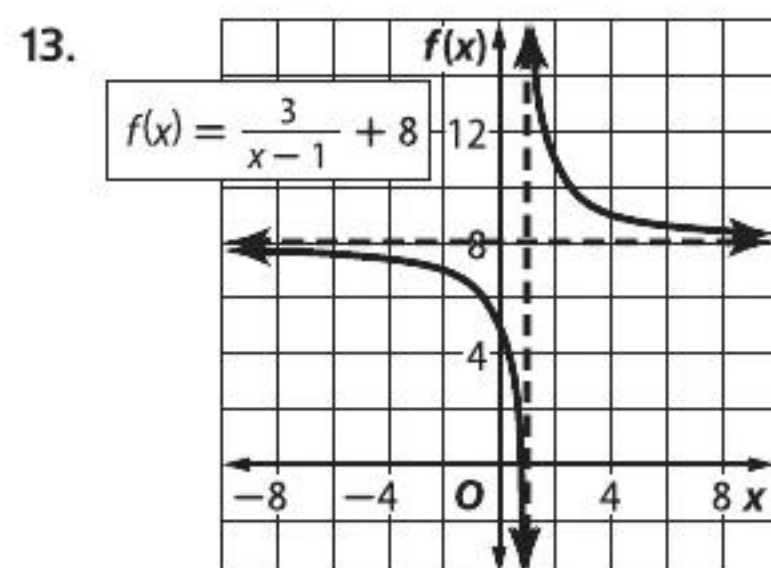
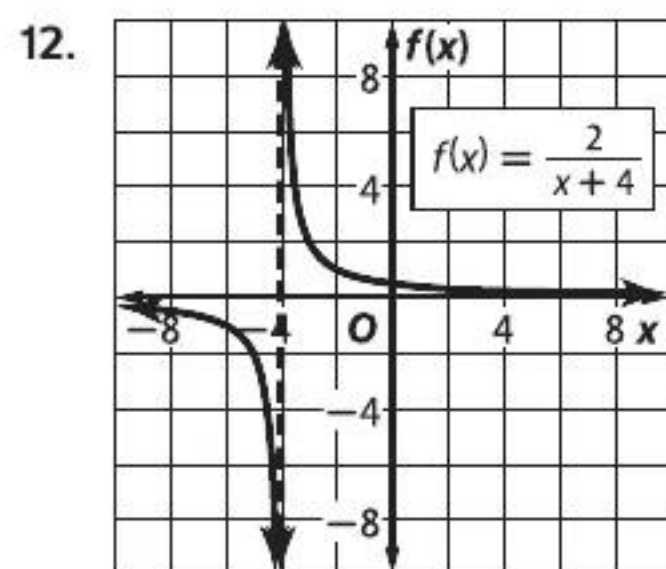
$$D = \{x \mid x \neq 3\}, R = \{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$$

الدرس 2-4

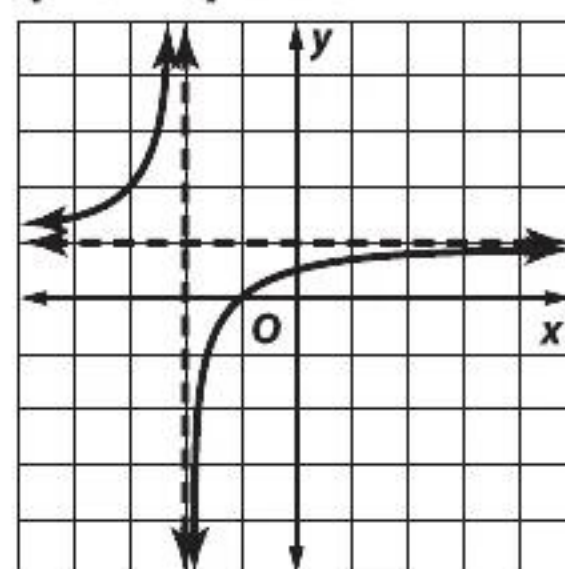




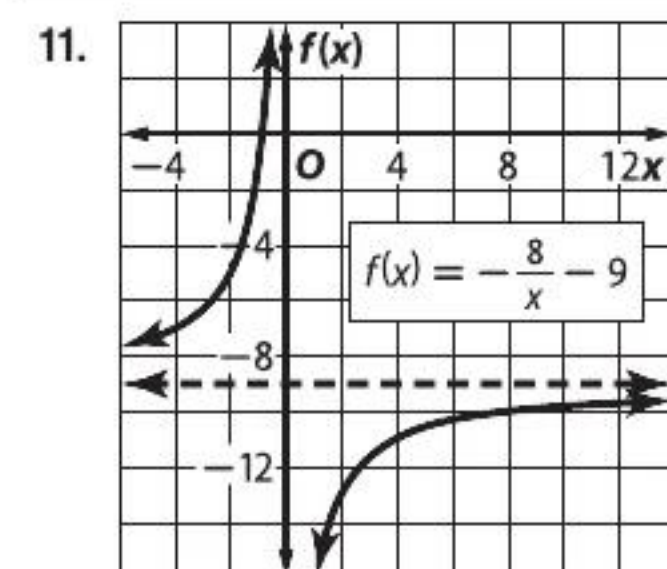




42. التمثيل البياني النموذجي:



تدريب على الاختبار



المتتاليات والمتسلسلات

مخطط الوحدة

3

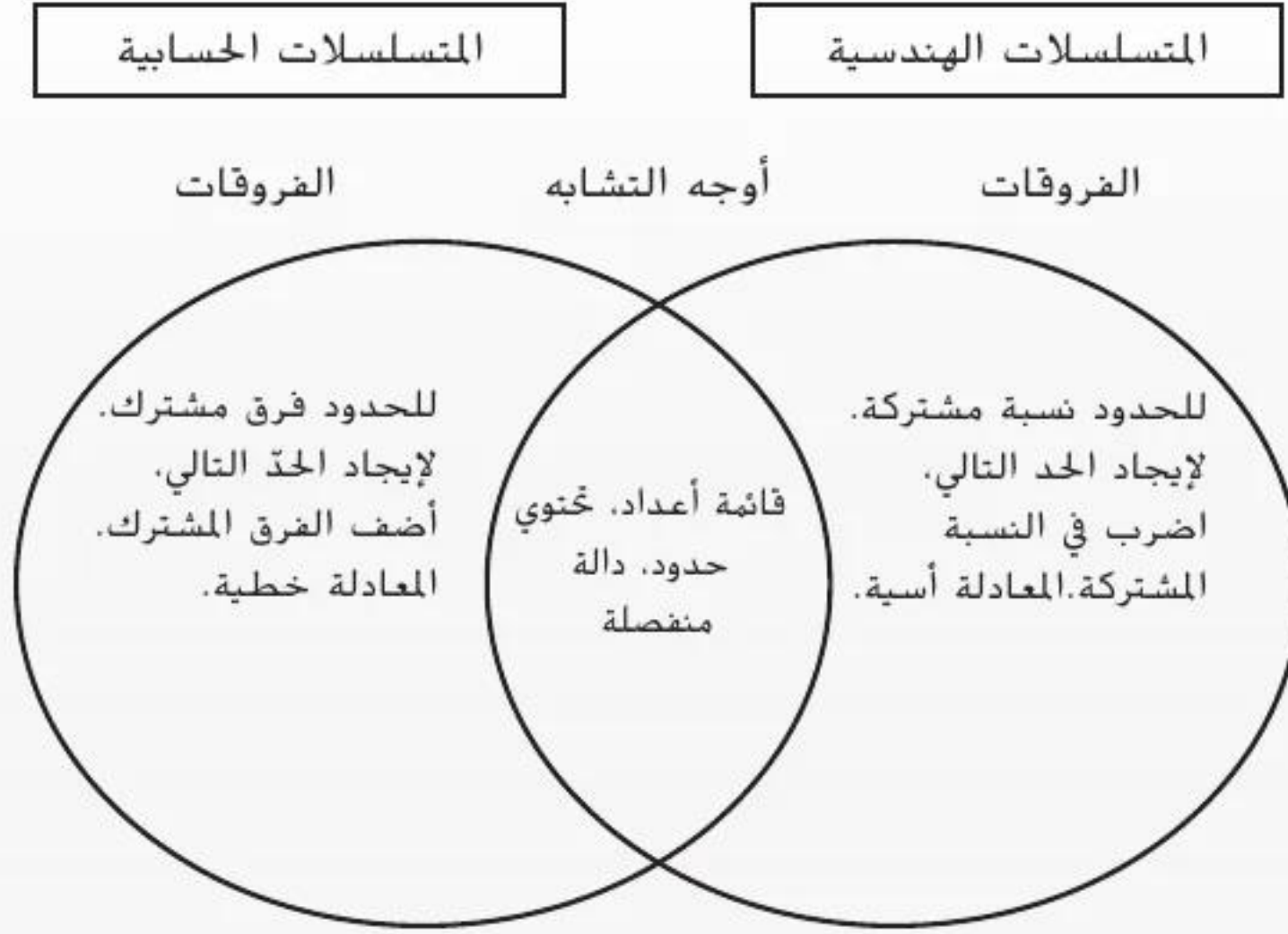
التقويم التشخيصي تدريب سريع		الدرس 3-1 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم		الدرس 3-2 45 دقيقة: 1.5 في اليوم 90 دقيقة: 0.75 يوم		الدرس 3-3 45 دقيقة: 1.5 في اليوم 90 دقيقة: 0.75 يوم	
العنوان	المتتاليات كدوال	المتتاليات والمتسلسلات الحسابية	المتتاليات والمتسلسلات الهندسية	الأهداف	ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية. ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.	إيجاد الحد النوني والأوساط الحسابية للمتتاليات الحسابية. إيجاد مجاميع المتسلسلات الحسابية.	إيجاد الحد النوني والأوساط الهندسية للمتتاليات الهندسية. إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية.
المفردات الأساسية	متتالية sequence حد term متتالية منتهية finite sequence متتالية لا نهائية infinite sequence متتالية حسابية arithmetic sequence فرق مشترك common difference متتالية هندسية geometric sequence نسبة مشتركة common ratio	أوساط حسابية arithmetic means متسلسلة series متسلسلة حسابية arithmetic series المجموع الجزئي partial sum رمز سيجمما sigma notation	أوساط هندسية geometric means متسلسلة هندسية geometric series	التقويم التكويني اختبار منتصف الوحدة			

الجدول الزمني المقترح			
الفترة الزمنية	إعطاء الدرس	المراجعة والتقييم	الإجمالي
45 دقيقة	7 أيام	يومان	9 أيام
90 دقيقة	4 أيام	يوم واحد	5 أيام

الدرس 3-4		الدرس 3-5	
45 دقيقة: 1.5 في اليوم 90 دقيقة: 1 يوم		45 دقيقة: 1 يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم	
	نظرية ذات الحدين	الاستقراء الرياضي	
	■ استخدام مثلث باسكال لتفكيك أسس ذوات الحدين. ■ استخدام نظرية ذات الحدين لكتابة وإيجاد معاملات حدود معينة في التعابير ذات الحدين.	■ استخدام الاستقراء في الرياضيات في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة وتشتمل على عدد صحيح موجب.	
	مثلث باسكال common ratio	الاستقراء الرياضي فرضية الاستقراء	
التقويم الختامي دليل الدراسة والمراجعة تدريب على الاختبار			

ملاحظات

مهارات دراسية



استخدم الطلاب رسومات فن البانية. وقد يكون استخدام هذه الرسومات مفيداً للمقارنة بين المفاهيم ومضادها حيث إنها تستوعب المعارف الجديدة. وتحت الطلاب على إيجاد علاقات بين مفاهيم الرياضيات التي يدرسونها سوياً. ويمكن تمثيل هذه العلاقات باستخدام رسومات فن البانية. ويمكن للطلاب طرح الأفكار عن رسومات فن البانية بشكل فردي أو كنشاط تعلم جماعي. وتمثل رسومات فن البانية المذكورة مفاهيم المتواليات الحسابية والهندسية التي يدرسها الطلاب في الدرسين 3-2 و 3-3.

إنشاء الاستقلال من خلال إستراتيجيات الطلاب

ملاحظات

التشخيص	سبل الحل
بداية الوحدة 3	
الاستعداد للوحدة 3 كتاب الطالب	الاستجابة للتدخل التقويمي كتاب المعلم
بداية كل درس	
السابق، الحالي، لماذا كتاب الطالب	كتاب الطالب

التقويم التشخيصي

أثناء / بعد كل درس	
تدريب موجه كتاب الطالب، كل مثال التحقق من فهمك كتاب الطالب مسائل مهارات التفكير العليا كتاب الطالب مراجعة شاملة كتاب الطالب أمثلة إضافية كتاب المعلم انتبه! كتاب المعلم الخطوة 4، التقويم كتاب المعلم	التدريس المتميز كتاب المعلم
منتصف الوحدة	
اختبار منتصف الوحدة كتاب الطالب	
اختبار ما قبل الوحدة	
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة كتاب الطالب تدريب على الاختبار كتاب الطالب تدريب على الاختبار المعياري كتاب الطالب	

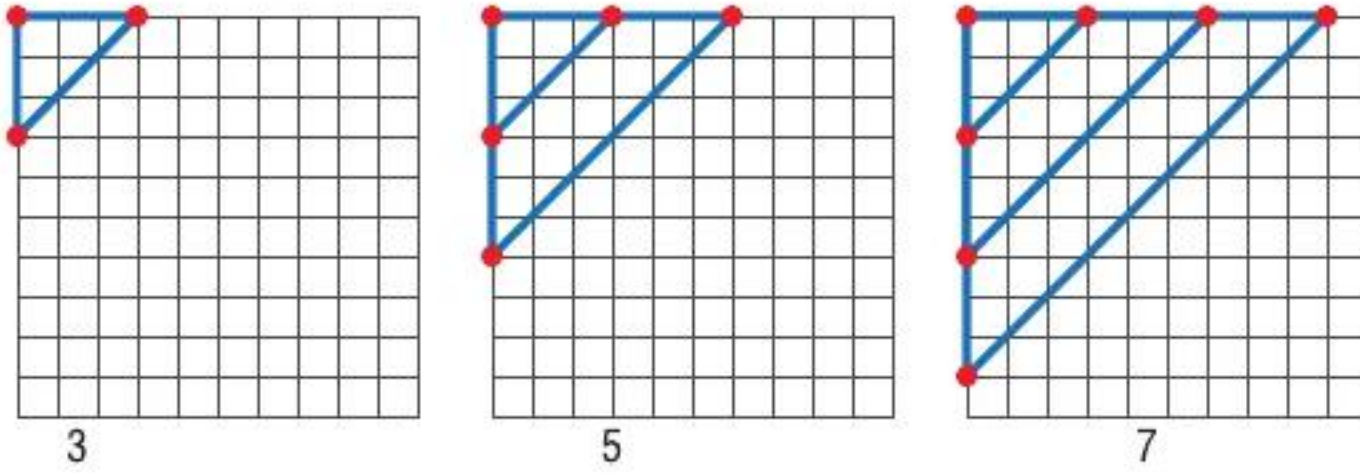
التقويم التكويني

التقويم الختامي

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

باستخدام الوسائل التعليمية اليدوية أو الرسومات، اطلب من الطلاب استخدام عناصر هندسية مختلفة لتمثيل مسائل تشتمل على متتاليات هندسية أو حسابية. ثم اطلب منهم كتابة قاعدة عامة للحد النوني n للمتسلسلة.

على سبيل المثال، فإن الأرقام الواردة أدناه تبين متسلسلة حسابية في $a_n = 3 + 2(n - 1)$ عدد من النقاط الحمراء. وقاعدة المتسلسلة هي



الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة AL OL BL

النمط المنطقي اطلب من الطلاب إجراء الرسم البياني الذي يقارن ويقابل بين المتتاليات والمتسلسلات الهندسية والحسابية، مع شرح ما تمثله المتغيرات في كل صيغة.

التواصل أنشئ منافسة ودية بين مجموعتين من الطلاب، المفكوكات ذات الحدين والمضاعفات متعددة الحدود. اكتب تعبيراً مثل $(2x + y)^5$ على اللوحة. اطلب من كل مجموعة تفكيك التعبير باستخدام الطريقة التي حددتها لذلك. قارن بين التعابير المفكوكة والوقت الذي استغرقه الطلاب لإيجادها.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

لشرح كيفية عمل الاستقراء الرياضي من حيث المفهوم، أنشئ متسلسلات من 5 قطع دومينو واحدة تلو الأخرى ومتباعدة بشكل متساو على خط معين. أسقط قطعة الدومينو الأولى. اطلب من الطلاب وصف ما يلاحظونه. أخبر الطلاب بأنك تعتقد، استناداً إلى ما لاحظته فقط، أن قطعة الدومينو رقم 29 ستسقط إذا سقطت القطعة الأولى. أنشئ 30 قطعة من الدومينو لإجراء اختبار وإثبات أن افتراضك صحيحاً. ثم اطلب من الفصل وصف ما يتوقعون حدوثه للقطعة رقم 500. أخبر الطلاب أنهم استخدموا الاستدلال الاستقرائي.

اشرح للطلاب أنه عندما يقولوا أن العبارة الرياضية صحيحة عند $n = 1$ فهذا هو نفسه إثبات أنه يمكن إسقاط قطعة الدومينو الأولى. وإثبات أن العبارة صحيحة عند $k + 1$ إذا كانت صحيحة عند k ، يعني أنك قد أثبت أنه إذا سقطت أي قطعة دومينو، فسوف تسقط القطعة التالية على نفس الخط. إذا، إذا سقطت القطعة الأولى، فسوف تسقط القطعة الثانية وإذا سقطت القطعة الثانية، فسوف تسقط القطعة الثالثة وهكذا.

التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

معاينة درس قلو الآخر

قبل الوحدة 3

- جد قيمة تعبير جبري لتحديد أي حد للمتتالية الحسابية
- جد الأنماط ومثل التعميمات جبريًا
- حوّل المعادلات وحلها
- حوّل التعابير كثيرة الحدود لأبسط صورة
- استخدم الاستنتاج الاستقرائي لصياغة تخمين

الوحدة 3

الموضوعات ذات الصلة

- اربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية واربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية
- جد حدود ومجاميع محددة للمتسلسلات الهندسية والحسابية
- جد مجموع المتسلسلة اللانهائية الهندسية واكتب الكسور العشرية المتكررة في صورة دوال
- تعرّف على المتتاليات الخاصة ودوال التكرار واستخدمهما
- استخدم مثلث باسكال ونظرية ذات الحدين لتفكيك أسس ذوات الحدين
- استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات العبارات

بعد الوحدة 3

الإعداد

- مثل الأنماط باستخدام المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية
- استخدم المتسلسلات والمتتاليات الحسابية والهندسية والأشكال الأخرى من المتسلسلات والمتتاليات لحل مسائل من الحياة اليومية
- صف حدود المتتاليات واستخدم خواصها لاستشكاف المتسلسلات المتقاربة والمتباعدة
- استخدم المتتاليات والمتسلسلات لحل المسائل التي تتضمن المجاميع وتفكيك ذوات الحدين

3-1 المتتاليات كدوال

- المتتالية هي مجموعة الأرقام المرتبة بترتيب معين. ويمثل كل رقم حدًا في المتتالية. وتكون المتتالية:
- نهائية عندما يكون لها رقم محدد للحدود أو
- لانهائية عندما تستمر الحدود بدون نهاية.
- تكون المتتالية
- حسابية عندما تحدد الحدود بإضافة قيمة ثابتة (فرق مشترك) للحد السابق.
- هندسية عندما يحدد كل حد بضرب ثابت غير صفري (نسبة مشتركة) في الحد السابق، أو
- غير حسابية وغير هندسية عندما لا يكون فيها نسبة مشتركة أو فرق مشترك.
- المتتاليات هي الدوال التي تتألف مجالاتها من الأعداد الطبيعية ويتألف مداها من الأعداد الحقيقية. المتتاليات الحسابية هي دوال خطية. وتُعد المتتاليات الهندسية دوالاً أسية.

3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

- يمكن تحديد أي حد a_n في أي متتالية حسابية بمعرفة الحد الأول a_1 والفرق المشترك d . تستخدم الصيغة $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ، إذا كان n هو أي عدد طبيعي.
- تتكون المتسلسلات الحسابية عند إضافة حدود المتتالية الحسابية.
- ويمكن استخدام الصيغة $S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ أو الصيغة $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$ لإيجاد مجموع الحدود الأولى n لأي متسلسلة حسابية. كما يمكن استخدام رمز سيجمما لتحديد مجموع أي متسلسلة. على سبيل المثال،
- $\sum_{n=1}^3 (n^2 + 2)$ تمثل مجموع ثلاثة حدود تم فيها استبدال n بالقيم 1 و 2 و 3 على التوالي.

3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

- يمكن استخدام الصيغة $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ لإيجاد أي حد a_n في أي متتالية هندسية بمعرفة الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r .
- تتكون المتسلسلات الهندسية عند إضافة حدود المتتالية الهندسية.
- يمكن استخدام الصيغة $S_n = \frac{a_1 + a_1 r^n}{1 - r}$ ، $r \neq 1$ أو الصيغة $S_n = \frac{a_1 + a_n r}{1 - r}$ ، $r \neq 1$ لإيجاد مجموع الحدود الأولى n للمتتالية الهندسية. كما يمكن استخدام رمز سيجمما ليمثل مجموع أي متسلسلة.

3-4 نظرية ذات الحدين

يمكن استخدام مثلث باكسال (المبين أدناه) لتحديد معاملات تفكيك ذات الحدين $(a + b)^n$.

$(a + b)^0$
 $(a + b)^1$
 $(a + b)^2$
 $(a + b)^3$
 $(a + b)^4$
 $(a + b)^5$

يتطلب تفكيك ذات الحدين $(a + b)^n$ للقيم غير السالبة n إيجاد المعامل والأس لكل من a و b في كل حد. يتضمن تفكيك ذات الحدين مثل، $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ أنماطاً متعددة.

- مجموع الأسس في كل حد هو n .
- أس a في الحد الأول و b في الحد الأخير هو n .
- تدخل المعاملات في مثلث باسكال.
- توجد حدود $n + 1$.

يمكن استخدام نظرية ذات الحدين لتفكيك ذات الحدين.

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$. كُتِبَ فِي رَمَزٍ سَيَجْمَأُ.

3-5 الاستقراء الرياضي

الاستقراء الرياضي هو طريقة فعالة لإثبات التخمين. ويتألف من جزأين.

- الجزء الأول هو إثبات خاصية معينة أنها صحيحة لعدد معين (غالبًا ما يكون العدد 1).
- يشتمل الجزء الثاني، الاستقرائي، على إثبات ما إذا كانت الخاصية صحيحة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة، ويجب أن تكون صحيحة للعدد الصحيح التالي وكنتيجة لذلك، أثبت أن الخاصية صحيحة لكافة الأعداد الصحيحة، بدءًا من قيمة معينة.

المتتاليات والمتسلسلات

3

مشروع الوحدة

المبالغ المالية الكبيرة

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن المتتاليات والمتسلسلات لإكمال مشروع.

يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة المالية، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن الواحد والعشرين.

المفردات الأساسية وضح المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

تعريف: الحد هو أي رقم في متسلسلة.

مثال: الحد الرابع في المتتالية التالية هو 29، 2، 11، 20، 29، 39،

أسأل: ما هو الحد الأول في المتتالية المذكورة أعلاه؟ **2**



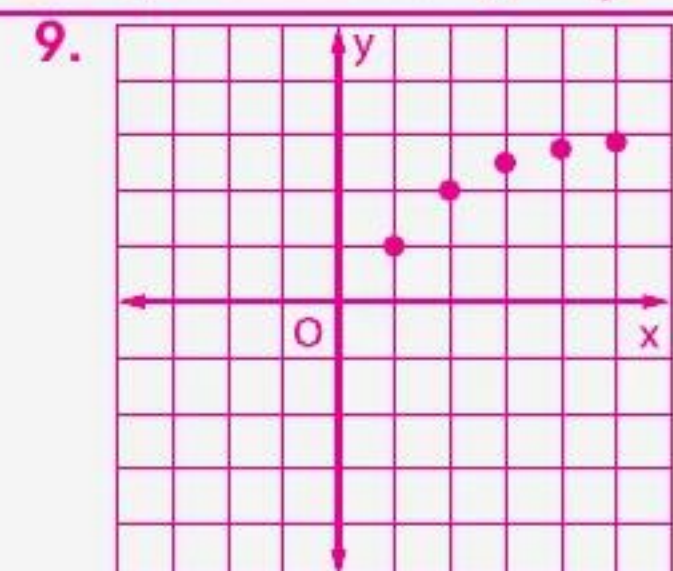
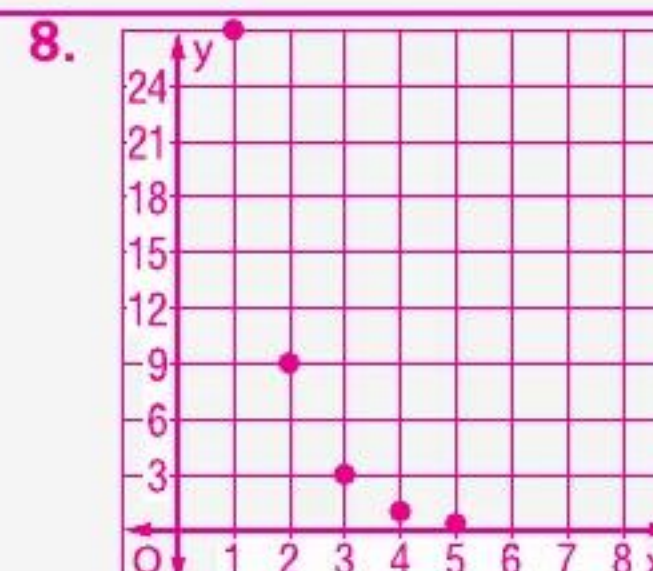
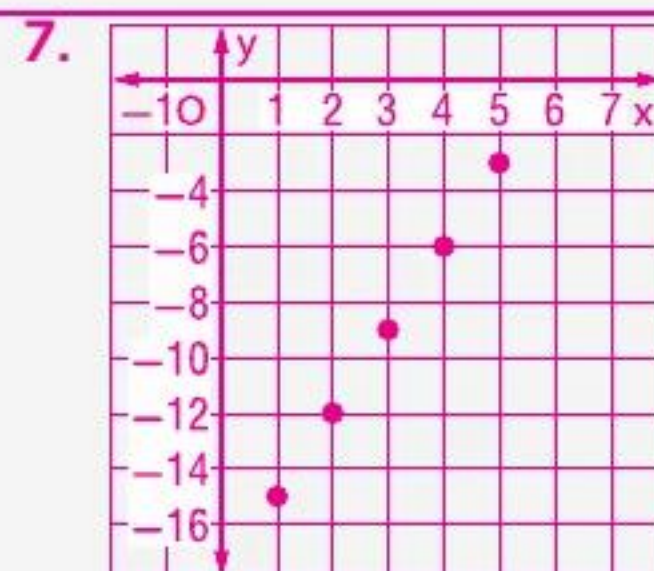
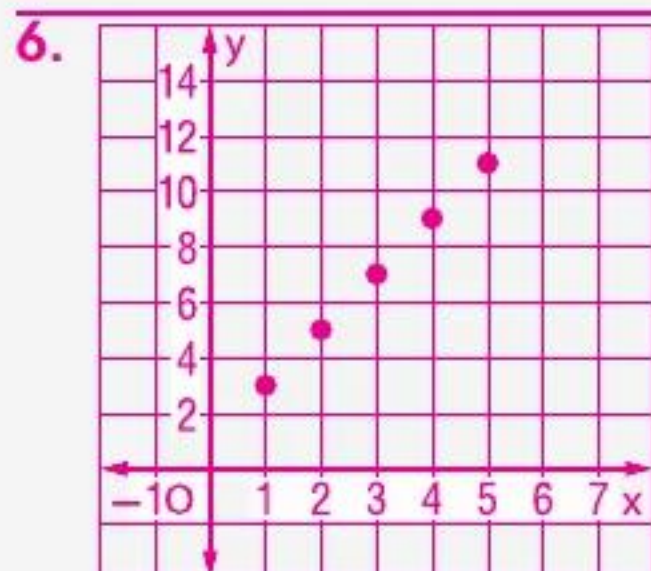
حفظ الموارد والطبيعة تظهر الرياضيات في جوانب الطبيعة بطرق مذهلة. وتتجلى متتالية فيبوناتشي في البذور والزهور ومخاريط الصنوبر والفواكه والخضراوات. كما يمكن للمتتاليات والمتسلسلات مساعدتنا في حفظ مواردنا الطبيعية من خلال رفع كفاءة أنظمة ترشيح المياه.

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- استخدام المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- استخدام المتتاليات الخاصة ودوال التكرار.
- تفكيك الأسس باستخدام نظرية ذات الحدين.
- استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة على عدد صحيح كوجب.

قمت بتحويل التعابير الجبرية لأبسط صورها وجدت قيمتها.

إجابات إضافية (الاستعداد للوحدة 3)



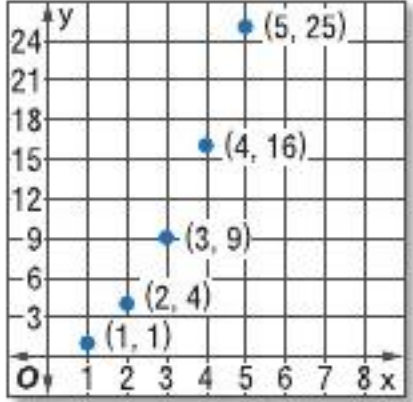
الأسئلة الأساسية

- أين توجد أنماط من الحياة اليومية؟
الإجابة النموذجية: في الطبيعة والهندسة المعمارية والموسيقى والعلوم والفن
- كيف يمكنك تمييز الأنماط التي تساعدك على حل مسائل من الحياة اليومية؟
الإجابة النموذجية: يساعدك تمييز الأنماط في التنبؤ بالسلوكيات المستقبلية.

الاستعداد للوحدة

1

خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة	تدريب سريع
مثال 1 (مستخدم في الدروس من 3-1 إلى 3-3) حلّ كل من المعادلات التالية. 1. $-6 = 7x + 78$ $x = -12$ 2. $768 = 3x^4$ $x = \pm 4$ 3. $23 - 5x = 8$ $x = 3$ 4. $2x^3 + 4 = -50$ $x = -3$ 5. نباتات تمتلك رنا 48 نبتة للحديقتين اللتين تمتلكهما. وقد زرعت 12 نبتة في الحديقة الصغيرة، وفي الحديقة الأخرى. تريد وضع 4 نباتات في كل صف. فكم ستبلغ عدد الصفوف لديها؟ 9 صفوف	مثال 2 (مستخدم في الدروس من 3-1 إلى 3-5) مثّل الدالة بيانياً $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$. واذكر المجال وال المدى. مجال الدالة هو مجموع كل قيم x الممكنة. إذاً، فمجال الدالة هو $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. ومدى الدالة عبارة عن مجموع كل قيم y الممكنة. إذاً، يكون مدى الدالة هو $\{1, 4, 9, 16, 25\}$. 

مراجعة سريعة	تدريب سريع
مثال 3 (مستخدم في الدروس من 3-1 إلى 3-5) جد قيمة كل تعبير في ضوء قيمة (قيم) المتغير (المتغيرات). 11. $\frac{a}{3}(b+c)$ إذا كان $a = 9$ و $b = -2$ و $c = -8$ -30 12. $r + (n-2)t$ إذا كان $r = 15$ و $n = 5$ و $t = -1$ 12 13. $xxy^z + 1$ إذا كان $x = -2$ و $y = \frac{1}{3}$ و $z = 5$ $-\frac{2}{729}$ 14. $\frac{a(1-bc)^2}{1-b}$ إذا كان $a = -3$ و $b = -4$ و $c = 1$ -15	مثال 3 (مستخدم في الدروس من 3-1 إلى 3-5) جد قيمة $2 \times 3^{x+y}$ إذا كان $x = -2$ و $y = -3$. $2 \times 3^{x+y} = 2 \times 3^{-2+(-3)}$ عوّض. $= 2 \times 3^{-5}$ بسّط. $= \frac{2}{3^5}$ أعد الكتابة بأس موجب. $= \frac{2}{243}$ جد قيمة الأس.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظم مواردك.

المفردات الجديدة

sequence	متتالية
finite sequence	متتالية منتهية
infinite sequence	متتالية لانهائية
arithmetic sequence	متتالية حسابية
common difference	فرق مشترك
geometric sequence	متتالية هندسية
common ratio	نسبة مشتركة
arithmetic means	أوساط حسابية
series	متسلسلة
arithmetic series	متسلسلة حسابية
partial sum	المجموع الجزئي
geometric means	أوساط هندسية
geometric series	متسلسلة هندسية
mathematical induction	الاستقراء الرياضي
induction hypothesis	فرضية الاستقراء

مراجعة المفردات

المعامل coefficient العامل العددي لذات الحد

$$15x^3$$

معامل

الصيغة هي جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات معينها
الدالة هي علاقة يقرن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد
بالتحديد في المدى

المطويات[®] منظم الدراسة

المتتاليات والمتسلسلات اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك على هذه الوحدة حول المتتاليات والمتسلسلات. ابدأ بقطعة ورق مقاس $8\frac{1}{2}$ في 11.



1 اطو الورقة إلى نصفين. مع مطابقة الأضلاع القصيرة.



2 افرد واطو الضلع الأطول لأعلى بمقدار بوصتين لعمل جيب.



3 دبّس الحواف الخارجية أو ألصقها لإكمال الجيب.



4 سمّ كل ضلع كما هو موضح. استخدم بطاقات فهرسة لتسجيل الملاحظات والأمثلة.

مطويات[®] Dinah Zike

التركيز يسجل الطلاب الملاحظات والأمثلة على المتسلسلات والمتتاليات في بطاقات فهرسة ويضعونها في حافظة مناسبة من مطوياتهم.

التدريس اطلب من الطلاب تمييز وتصنيف المطويات كما هو موضح. وينبغي للطلاب أن يستخدموا مطوياتهم لتدوين الملاحظات وتعريف المصطلحات وتسجيل المفاهيم وإعطاء الأمثلة على المتتاليات والمتسلسلات في بطاقات فهرسة. ويجب أن توضع البطاقات بعد ذلك في حافظة مناسبة.

وقت الاستخدام شجّع الطلاب على إضافة المزيد إلى المطويات أثناء دراسة الوحدة وعلى استخدام تلك المطويات عند المراجعة للاستعداد لاختبار الوحدة.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-1 لقد قمت بحل النظم الخطية وغير الخطية.

الدرس 3-1 ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية. وربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.

بعد الدرس 3-1 استخدام المتسلسلات والمتتاليات الحسابية والهندسية والأشكال الأخرى من المتسلسلات والمتتاليات لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

ما النمط الذي يؤديه عازفو الفرقة الموسيقية؟ $1, 3, 5, 7, \dots$

كيف يمكنك إيجاد الأعداد الأربعة التالية في النمط؟ أضف 2 لكل صف متتابع لإيجاد عدد عازفي الفرقة الموسيقية في الصف.

ما الأعداد الأربعة التالية؟ $9, 11, 13, 15$ هل تتوقع أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ لا. فهناك حد لعدد صفوف العازفين.

المتتاليات كدوال



لماذا؟

• أثناء العرض المعتاد للفرقة الموسيقية بمدرسة ثانوية، تمشي الفرقة في صفوف. ويكون هناك عازف واحد في الصف الأول وثلاثة في الثاني وخمسة في الثالث، ويستمر هذا النمط لبقية الصفوف.

الحالي

1 ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.

2 ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.

السابق

• قمت بتحليل الدوال الخطية والأسية.

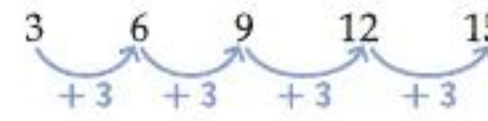
1 المتتاليات الحسابية إن **المتتالية** هي مجموعة من الأعداد بترتيب أو نمط معين. وكل عدد في المتتالية يُسمى **حدًا**. وقد تكون المتتالية **متتالية منتهية** وتحتوي على عدد محدود من الحدود. مثل $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$ أو تكون **متتالية لانهائية** والتي تستمر بلا نهاية. مثل $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. ويتم التعبير عن الحد الأول من متتالية بـ a_1 ، بينما يتم التعبير عن الحد الثاني بـ a_2 ، وهكذا.

المفهوم الأساسي المتتاليات في صورة دوال

الشرح	الرموز	أمثلة
المتتالية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها ومداهما مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.	المجال: المدى:	متتالية منتهية $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ متتالية لانهائية $\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
رتبة الحد حدود المتتالية		المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ المدى: $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ المجال: $\{y \mid y \geq 3\}$ المدى: $\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$

في **المتتالية الحسابية**، يتحدد كل حد من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. ويُطلق على هذه القيمة الثابتة اسم **الفرق المشترك**.

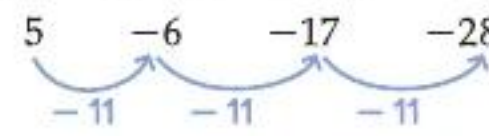
فكّر في المتتالية $3, 6, 9, 12, 15$. وهذه المتتالية حسابية لأن الحدود تشترك في فرق مشترك. ويكون كل حد أكبر من الحد السابق بقيمة 3.



مثال 1 تحديد المتتاليات الحسابية

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية.

a. $5, -6, -17, -28, \dots$



الفرق المشترك هو -11.
المتتالية حسابية.

b. $-4, 12, 28, 42, \dots$



لا يوجد فرق مشترك.
هذه ليست متتالية حسابية.

تمرين موجّه

1A. $7, 12, 16, 20, \dots$ لا

1B. $-6, 3, 12, 21, \dots$ نعم

المفردات الجديدة

متتالية sequence
حد term
متتالية منتهية finite sequence
متتالية لانهائية infinite sequence
متتالية حسابية arithmetic sequence
فرق مشترك common difference
متتالية هندسية geometric sequence
نسبة مشتركة common ratio

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 المتتاليات الحسابية

يبين المثال 1 كيفية تحديد ما إذا كان هناك فرق مشترك، وإن وجد فكيف نحدد المتتالية على أنها حسابية. ويبين المثال 2 كيفية استخدام الفرق المشترك لإيجاد حدود المتتالية الحسابية وكيف نمثل الحد بيانيًا. ويبين المثال 3 كيفية إيجاد أي حد لأي متتالية حسابية معطاة لحل مسائل من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم تدريب ات الممارسة الموجهة بعد كل مثال لترسيخ فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدد ما إذا كانت كل متتالية هي متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.

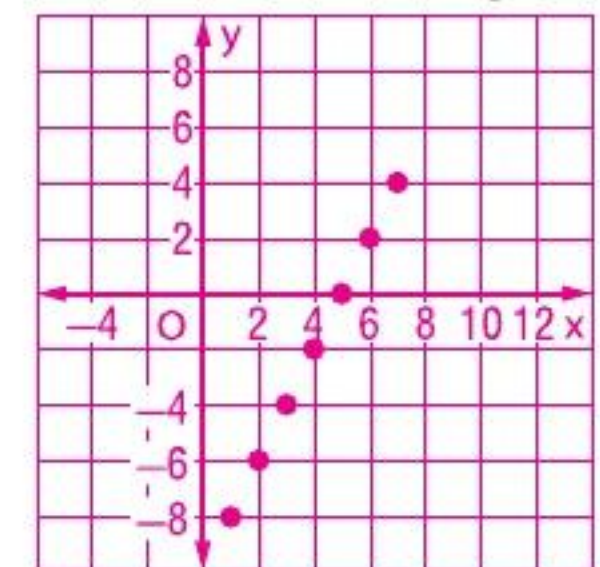
a. $-3, -8, -13, -23, \dots$ لا

b. $-8, -10, 4, 2, \dots$ نعم

2 تأمل المتتالية الحسابية $-8, -6, -4, \dots$

a. جد الحدود الأربعة التالية للمتتالية $-4, 2, 0, 2, -4$

b. مثل بيانيًا الحدود السبعة الأولى للمتتالية.



3 فرقة عزف استخدم المعلومات الواردة في المثال الثالث لتحديد عدد العازفين في الصف رقم 20 أثناء العرض. 39

يمكنك استخدام الفرق المشترك لإيجاد حدود متتالية حسابية.

مثال 2 تمثيل المتتالية الحسابية بيانيًا

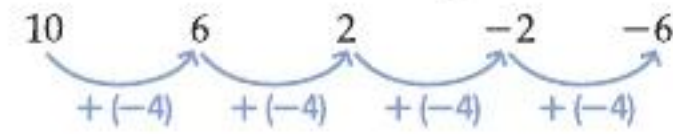
فكر في المتتالية الحسابية $18, 14, 10, \dots$

a. جد الحدود الأربعة التالية للمتتالية.

الخطوة 1 لتحديد الفرق المشترك، اطرح أي حد من الحد الذي يليه مباشرةً. والفرق المشترك هو -4 أو $10 - 14$.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، أضف -4 إلى الحد الأخير.

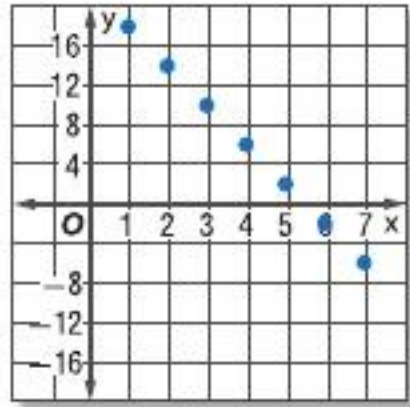
استمر في إضافة -4 لإيجاد الحدود التالية.



الحدود الأربعة التالية هي 6 و 2 و -2 و -6 .

b. مثل بيانيًا الحدود السبعة الأولى للمتتالية.

يحتوي المجال على الحدود $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ويحتوي المدى على الحدود $\{18, 14, 10, 6, 2, -2, -6\}$. إذا، مثل بيانيًا الأزواج المرتبة المتوافقة.



تمرين موجّه

2. جد الحدود الأربعة التالية للمتتالية الحسابية $18, 11, 4, \dots$. ثم مثل بيانيًا الحدود السبعة الأولى. انظر الهامش

لاحظ أن التمثيل البياني لحدود المتتالية الحسابية يستقر على خط مستقيم. وتعد المتتالية الحسابية دالة خطية يكون فيها رقم الحد n هو المتغير المستقل، والحد a_n هو المتغير التابع، والفرق المشترك هو الميل.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد حد

الفرق الموسيقية ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن مدير الفرقة يرغب في تحديد عدد العازفين الذين سيكونون في الصف الرابع عشر أثناء العرض.

الفهم لأن الفرق بين أي صفين متتابعين هو 2، فإن الفرق المشترك للمتتالية هو 2.

التخطيط استخدم صيغة النقطة والميل لكتابة معادلة للمتتالية.

افترض أن $m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$. ثم جد الحل باستخدام $x = 14$.

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$(x_1, y_1) = (3, 5)$ و $m = 2$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب.
$y = 2x - 1$	اجمع 5 إلى كل طرف.
$y = 2(14) - 1$	استبدل x بـ 14.
$y = 28 - 1$ or 27	بسّط.

الحل

التحقق يمكنك إيجاد حدود المتتالية عن طريق جمع 2، بدايةً من الصف 1، وحتى تصل إلى الصف 14.

تمرين موجّه

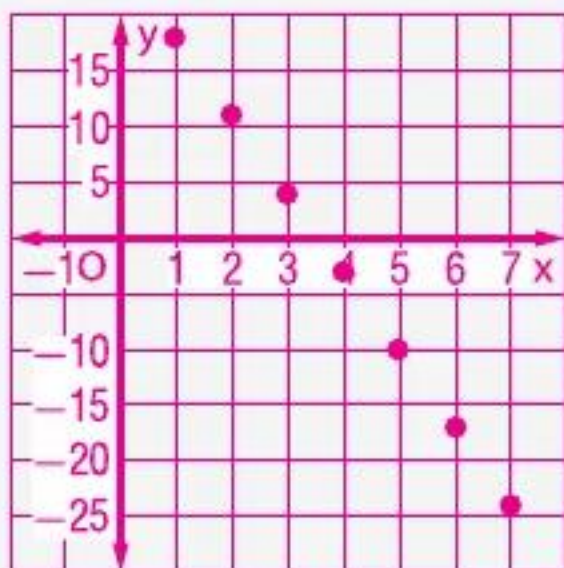
3. المال يعرض صاحب العمل الذي يعمل لديه عمر عليه معدل أجر بقيمة 9 AED بالساعة مع علاوة بقيمة 0.15 AED كل ثلاثة أشهر. فكم الأجر الذي سيحصل عليه عمر في الساعة بعد 3 أعوام؟



الربط بالحياة اليومية
كل عام، تتنافس قرابة 100 فرقة في البطولات الوطنية الكبرى التي تنظمها منظمة Bands of America (فرق أمريكا).
المصدر: منظمة Bands of America

إجابات إضافية (تدريب موجّه)

2. $-3, -10, -17, -24$



انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة تأكد من فهم كافة الطلاب أن العدد أسفل السطر في a_n يشير إلى الحد، ولا يُعد أسًا.

2 المتتاليات الهندسية

يبين **المثال 4** كيفية تحديد ما إذا كان للمتتالية نسبة مشتركة وإذا لم يكن لها. فيبين كيفية تحديد المتتالية على أنها متتالية هندسية. ويبين **المثال 5** كيفية استخدام النسبة المشتركة لتحديد حدود أخرى للمتتالية. ويبين **المثال 6** كيفية تحديد ما إذا كانت المتتالية حسابية أو هندسية أو غير ذلك.

أمثلة إضافية

4 حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم غير ذلك. اكتب نعم أو لا.

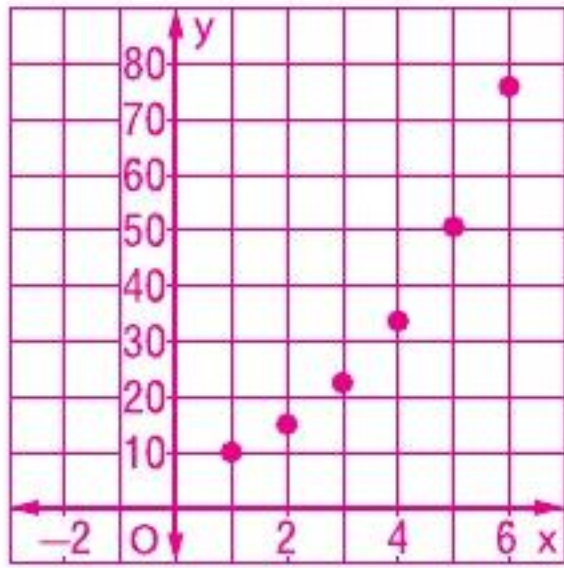
- a. 8, 20, 50, 125, ... نعم
b. 19, 30, 41, 52, ... لا

5 تأمل المتتالية الهندسية

10, 15, 22.5, ...

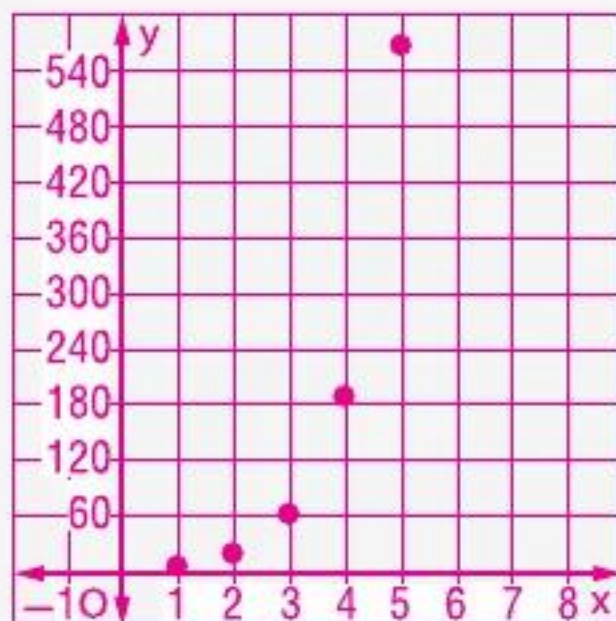
a. جد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية.
33.75, 50.625, 75.9375

b. مثل بيانيًا الحدود الستة الأولى للمتتالية.



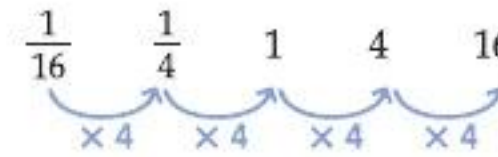
إجابات إضافية (تدريب موجّه)

5- 189, 567



2 المتتاليات الهندسية هناك نوع آخر من المتتاليات يُعرف باسم المتتالية الهندسية. وفي **المتتالية الهندسية**، يتحدد كل حد من خلال ضرب ثابت غير صفري في الحد السابق. ويُطلق على هذه القيمة الثابتة اسم **النسبة المشتركة**.

فكر في المتتالية 1, 4, 16, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$. إن هذه المتتالية هندسية لأن الحدود تشترك في نسبة مشتركة. وكل حد أكبر من الحد السابق له بمقدار 4 مرات.



مثال 4 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية هندسية.

a. -2, 6, -18, 54, ...

$$\frac{6}{-2} = -3 \quad \frac{-18}{6} = -3 \quad \frac{54}{-18} = -3$$

جد نسب الحدود المتتالية.

النسب متساوية، إذا فالمتتالية هندسية.

b. 8, 16, 24, 32, ...

$$\frac{16}{8} = 2 \quad \frac{24}{16} = 1.5 \quad \frac{32}{24} = 1.\bar{3}$$

النسب ليست متساوية، إذا فالمتتالية ليست هندسية.

تمرين موجّه

4A. -8, 2, -0.5, 0.125, ... نعم

4B. 1, 3, 7, 15, ... لا

عند منحك مجموعة من المعلومات، يمكنك إنشاء مسألة ترتبط بقصة.

مثال 5 تمثيل متتالية هندسية بيانيًا

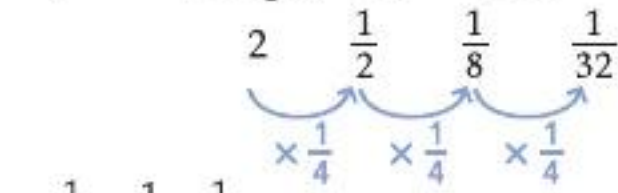
فكر في المتتالية الهندسية 32, 8, 2, ...

a. جد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية.

الخطوة 1 جد قيمة النسبة المشتركة: $\frac{2}{8}$ أو $\frac{1}{4}$.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، اضرب الحد السابق في $\frac{1}{4}$.

استمر في الضرب في $\frac{1}{4}$ لإيجاد الحدود التالية.



الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{32}$.

b. مثل بيانيًا الحدود الستة الأولى للمتتالية.

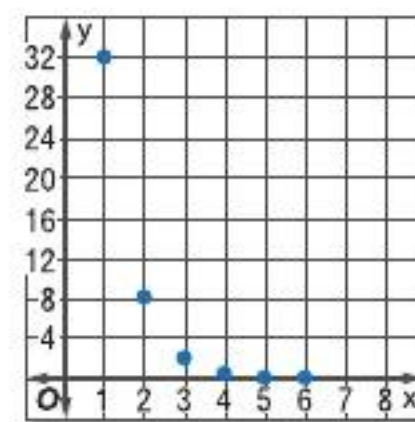
المجال: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

المدى: $\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}\}$

تمرين موجّه

5. جد الحدين التاليين لـ 7, 21, 63, ...

ثم مثل بيانيًا الحدود الخمسة الأولى. انظر الهامش



المتابعة

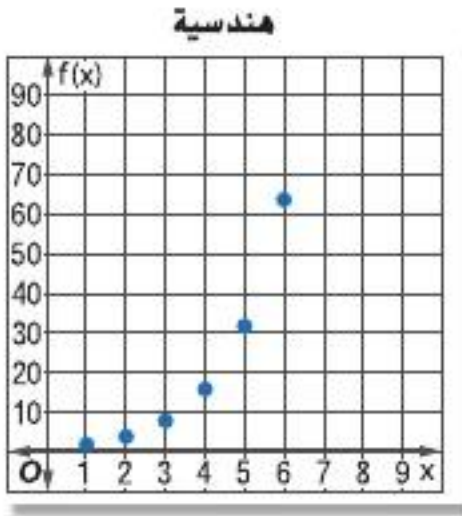
انتهى الطلاب من استكشاف المتتاليات.

اطرح السؤال التالي:

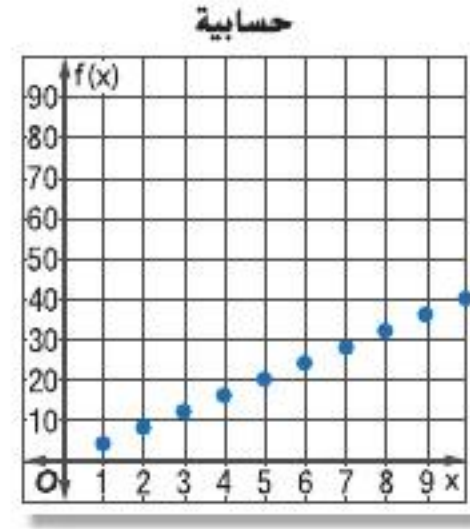
- ما أنواع الأنماط التي يمكن تمثيلها بالنماذج رياضيًا؟ الإجابة النموذجية: الأنماط العددية التي نشتمل على عمليات بأعداد حقيقية مثل الجمع والضرب

افحص التمثيل البياني في المثال 5. في حين أن التمثيل البياني للمتتالية الحسابية يكون خطيًا، فإن التمثيل البياني للمتتالية الهندسية يكون أسياً ويمكن تمثيله بواسطة $f(x) = r^x$ حيث r هي النسبة المشتركة. و $r > 0$ و $r \neq 1$.

مراجعة المفردات
الدالة الأسية (exponential function) دالة في صورة $f(x) = b^x$ حيث $b > 0$ و $b \neq 1$.



x	1	2	3	4	5	6
f(x)	2	4	8	16	32	64



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

إن المتتاليات الحسابية والهندسية هي دوال يحتوي فيها المجال، الذي يكون محدداً بواسطة رقم الحد n ، على مجموعة أو مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة الموجبة. ويمكن استخدام خصائص المتتاليات الحسابية والهندسية لتصنيف المتتاليات.

مثال 6 تصنيف المتتاليات

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك.

a. 16, 24, 36, 54, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$$54 - 36 = 18 \quad 36 - 24 = 12 \quad \times$$

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$$\frac{54}{36} = \frac{3}{2} \quad \frac{36}{24} = \frac{3}{2} \quad \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

نظرًا لوجود نسبة مشتركة، فإن المتتالية هندسية.

b. 1, 4, 9, 16, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$$16 - 9 = 7 \quad 9 - 4 = 5 \quad \times$$

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$$\frac{16}{9} = 1.\bar{7} \quad \frac{9}{4} = 2.25 \quad \times$$

نظرًا لعدم وجود فرق مشترك أو نسبة مشتركة، فإن المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.

c. 23, 17, 11, 5, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$$5 - 11 = -6 \quad 11 - 17 = -6 \quad 17 - 23 = -6 \quad \checkmark$$

نظرًا لوجود فرق مشترك، فإن المتتالية حسابية.

تمرين موجه

6A. $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \dots$

6B. $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \dots$

6C. $-4, 4, 5, -5, \dots$

6A. حسابية؛ الفرق المشترك هو $\frac{1}{3}$.

6B. هندسية؛ الفرق المشترك هو $-\frac{3}{4}$.

6C. ليست أيًا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

124 | الدرس 3-1 | المتتاليات كدوال

مثال إضافي

6 حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم هندسية أم غير ذلك. اشرح استنتاجك.

a. 13, 25, 37, 49, ...

حسابية؛ الفرق المشترك هو 12.

b. 2, 5, 9, 14, ...

غير ذلك؛ لا يوجد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

c. 6, -12, 24, -48, ...

هندسية؛ النسبة المشتركة هي -2.

التركيز على محتوى الرياضيات

المتتاليات ليست كل قوائم الأرقام التي تتبع نمطًا تكون هندسية أو حسابية. علمًا بأن هذا سيُعد الطلاب للدرس 3-5 في المتتاليات الخاصة التي تسمى المتتاليات التكرارية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الرسائل الفورية اطلب من الطلاب العمل في مجموعات. وأن يكتب كل طالب معادلة لإنشاء متسلسلة، ويرسل رسالة بالمتتالية فقط لطالب آخر. ويجب على كل طالب بعد ذلك إيجاد معادلة للمتتالية التي استلمها والإجابة عنها.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. كما أنهم يتحققون من صحة إجابات المسائل باستخدام طريقة مختلفة، ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل الجواب منطقي؟"

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية إن وجدت ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة مًا. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل.

التدريس المتميز AL

المتعلمون بطريقة التواصل قسّم الطلاب في مجموعات صغيرة وناقشهم في أي التباسات قد تكون لديهم حول المفاهيم الأساسية للمتتاليات الحسابية والهندسية. اقترح عليهم مساعدة بعضهم البعض في تنظيم ملاحظاتهم بشأن هذه الموضوعات وإتمامها.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-20 للتحقق من استيعاب الطلاب.

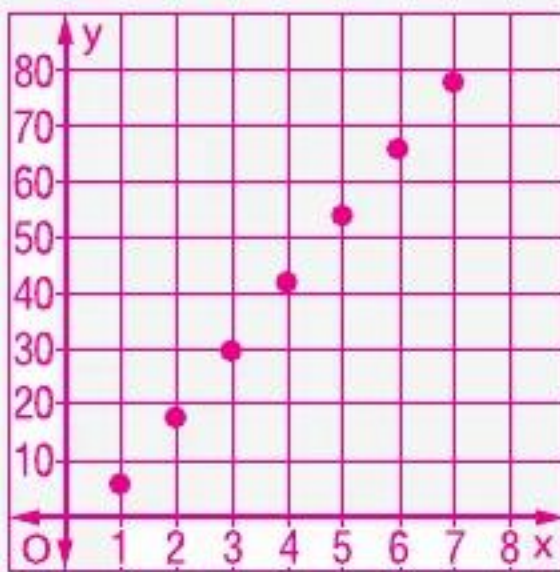
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

ملاحظات لحل التدريب

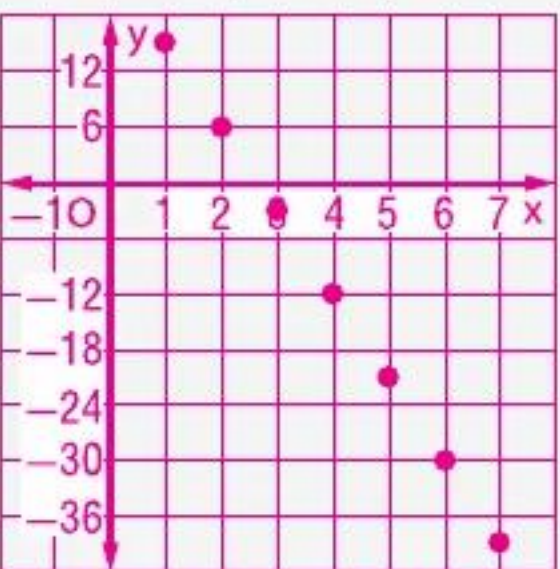
ورق التمثيل البياني للتمارين 5-8 و 14-17 و 25-30 و 39-44 و 68-73 سيحتاج الطلاب ورق تمثيل بياني.

إجابات إضافية

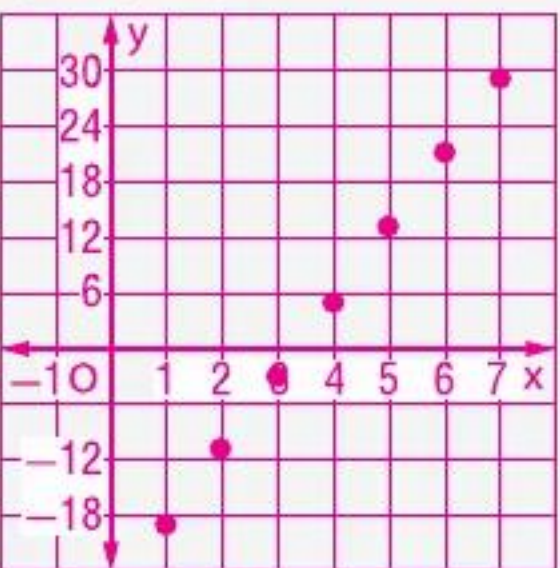
5. 42, 54, 66, 78



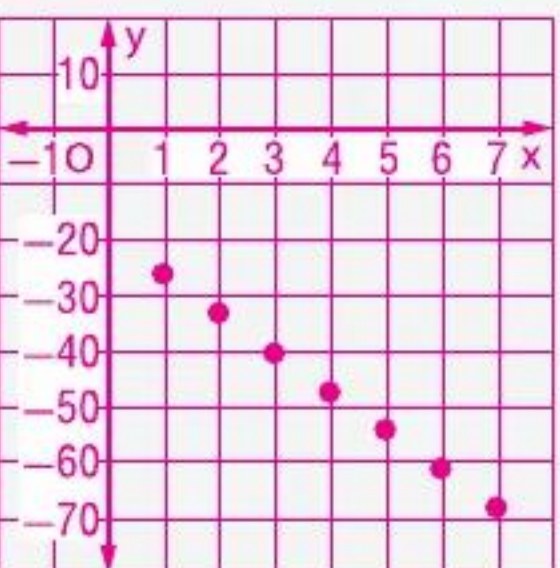
6. -12, -21, -30, -39



7. 5, 13, 21, 29



8. -47, -54, -61, -68



التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية. اكتب نعم أو لا.

1. 8, -2, -12, -22, ... **نعم**
2. -19, -12, -5, 2, 9 **نعم**
3. 1, 2, 4, 8, 16 **لا**
4. 0.6, 0.9, 1.2, 1.8, ... **لا**

مثال 2

جد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مثل المتتالية بيانيًا.

5. 6, 18, 30, ... **5-8. انظر الهامش.**
6. 15, 6, -3, ...
7. -19, -11, -3, ...
8. -26, -33, -40, ...

مثال 3

9. **المعرفة المالية** تدخر خديجة من أموالها لشراء سيارة. وهي تمتلك AED 250. وتخطط لادخار AED 75 في الأسبوع من عملها.

a. كم ستكون خديجة قد ادخرت بعد 8 أسابيع؟ **AED 850**

b. إذا كانت السيارة تكلف AED 2000. فكم من الزمن ستستغرق لادخار مالٍ كافٍ بهذا المعدل؟ **24 أسبوعًا**

مثال 4

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي هندسية. اكتب نعم أو لا.

10. -8, -5, -1, 4, ... **لا**
11. 4, 12, 36, 108, ... **نعم**
12. 27, 9, 3, 1, ... **نعم**
13. 7, 14, 21, 28, ... **لا**

مثال 5

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية. ثم مثل المتتالية بيانيًا.

14. 8, 12, 18, 27, ...
15. 8, 16, 32, 64, ... **14-17. انظر ملحق**
16. 250, 50, 10, 2, ...
17. 9, -3, 1, $\frac{1}{3}$, ... **إجابات الوحدة 3.**

مثال 6

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية، أم هندسية، أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك.

18. ليست أيًا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.
19. هندسية؛ النسبة المشتركة هي $-\frac{1}{2}$.
20. حسابية؛ الفرق المشترك هو 4.
21. 5, 1, 7, 3, 9, ...
22. 12, 16, 20, 24, ...
23. 200, -100, 50, -25, ...

التدريب وحل المسائل

مثال 1

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية. اكتب نعم أو لا.

21. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ **لا**
22. -9, -3, 0, 3, 9 **لا**
23. 14, -5, -19, ... **لا**
24. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \dots$ **نعم**

مثال 2

جد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مثل المتتالية بيانيًا.

25. -4, -1, 2, 5, ...
26. 10, 2, -6, -14, ...
27. -5, -11, -17, -23, ...
28. -19, -2, 15, ...
29. $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \dots$
30. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$

مثال 3

31. **المسرح** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأمامي من المسرح. ويحتوي كل صف متعاقب على مقعدين إضافيين مقارنة بالصف السابق. فإذا كان هناك 24 صفًا. فكم عدد المقاعد في الصف الأخير من المسرح؟ **74**

32. **التبرير المنطقي** بدأ جمال برنامج تمارين رياضية ليسترجع لياقته. وهو يخطط لممارسة التمارين لمدة 5 دقائق على جهاز التمارين الخاص به في اليوم الأول. ومن ثم يقوم بزيادة زمن التمارين دقيقة واحدة وثلاثين ثانية كل يوم.

- a. كم من الزمن سيجد في اليوم الثامن عشر؟ **30 دقيقة و 30 ثانية**
- b. في أي يوم سيجد جمال لمدة ساعة أو أكثر لأول مرة؟ **في اليوم الثامن والثلاثين**
- c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

الثقة	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	21-50, 54, 55, 57-80	الأعداد الزوجية 22-50, 54, 55, 57-60, 65-80
OL أساسي	21-49 الأعداد الفردية. 51-53, 54, 55, 57-60, 61-80	51-55, 57-60, 65-80
BL متقدم	51-74 (اختياري: 75-80)	

إجابة إضافية

59. الإجابة النموذجية: إذا كان لمتتالية هندسية نسبة r مثل $|r| < 1$. حيث إن n تزداد، وتتناقص القيمة المطلقة للحدود وتقترب من الصفر نظرًا لضربها في الكسر باستمرار. إذا كان $|r| \geq 1$. فإن القيمة المطلقة للحدود ستزداد وتقترب إلى قيمة اللانهاية نظرًا لضربها في قيمة أكبر من 1 باستمرار.

مثال 4

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي هندسية. اكتب نعم أو لا.

33. 21, 14, 7, ... لا
34. 124, 186, 248, ... لا
35. -27, 18, -12, ... نعم
36. 162, 108, 72, ... نعم
37. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \dots$ لا
38. -4, -2, 0, 2, ... لا

مثال 5

- جد الحدود الثلاثة التالية من المتتالية. ثم مثل المتتالية بيانيًا. 39-44. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.
39. 0.125, -0.5, 2, ...
40. 18, 12, 8, ...
41. 64, 48, 36, ...
42. 81, 108, 144, ...
43. $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$
44. 1, 0.1, 0.01, 0.001, ...

مثال 6

- حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك.
45. 3, 12, 27, 48, ...
46. 1, -2, -5, -8, ...
47. 12, 36, 108, 324, ...
48. هندسية؛
النسبة المشتركة
هي $\frac{1}{5}$.
49. حسابية؛ الفرق
المشترك هو $-\frac{1}{2}$.
50. ليست أيًا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

51. **القراءة** أخذت سهيلة كتابًا من 800 صفحة في عطلتها. فإذا كانت قد وصلت بالفعل إلى الصفحة 112 وستقضي في عطلتها لمدة 8 أيام. فما العدد الأدنى من الصفحات التي تحتاج إلى قراءتها كل يوم لتنتهي من قراءة الكتاب بنهاية عطلتها؟ **86 صفحة/يوم**

52. **الإيضاح** من المتوقع أن تتعرض سيارة أميرة للإهلاك بمعدل 15% كل عام. فإذا كانت سيارتها تُقدر حاليًا بقيمة AED 24000. مقربة إلى أقرب درهم. فكم ستساوي قيمتها خلال 6 أعوام؟ **AED 9052**

53. **الانتظام** عندما يتم طي قطعة ورق على نفسها، فإن سُمكها يتضاعف. فإذا كان من الممكن طي قطعة ورق سُمكها 0.1 mm بمقدار 37 مرة، فكم سيكون سُمكها؟ حوالي **13,744 m**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. **التبرير** اشرح السبب في أن المتتالية 8, 10, 13, 17, 22 ليست حسابية.
55. **مسألة غير محددة الإجابة** صِف موقفًا من الحياة اليومية يمكن تمثيله باستخدام متتالية حسابية بها فرق مشترك قيمته 8.
56. **التحدي** يبلغ مجموع ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية 6. وبلغ ناتج ضرب الحدود -42. جد الحدود. **-3, 2, 7**

57. **تحليل الخطأ** حارب وحسام يحددان ما إذا كانت المتتالية 8, 8, 8, ... حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما أم كليهما. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حسام	حارب
المتتالية بها نسبة مشتركة بقيمة 1. متتالية هندسية.	المتتالية بها فرق مشترك قيمته 0. متتالية حسابية.

58. **الإجابة النموذجية:**
هندسية: 3, 9, 27, 81, ...
243, ... حسابية:
3, 9, 15, 21, 27, ...
ليست هندسية ولا
حسابية: 3, 9, 21, 45, ...
93, ...

55. **الإجابة النموذجية:**
جليسة أطفال
تكسب AED 20
لتنظيف المنزل
و AED 8 إضافية
لكل ساعة تعتنى
فيها بالأطفال.

57. **الإجابة النموذجية:**
ليست أيًا منهما؛
المتتالية حسابية
وهندسية على
حدٍ سواء.

58. **مسألة غير محددة الإجابة** جد متتالية هندسية ومتتالية حسابية ومتتالية ليست هندسية ولا حسابية تبدأ على النحو 3, 9, ...

59. **التبرير** إذا كانت المتتالية الهندسية لها نسبة r بحيث يكون $|r| < 1$. فما الذي يحدث للحدود عند زيادة n ؟ ما الذي قد يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$ ؟ **انظر الهامش.**

60. **الكتابة في الرياضيات** صف ما يحدث لحدود متتالية هندسية عند مضاعفة النسبة المشتركة. وما الذي يحدث عند قسمتها إلى النصف؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

انتبه!

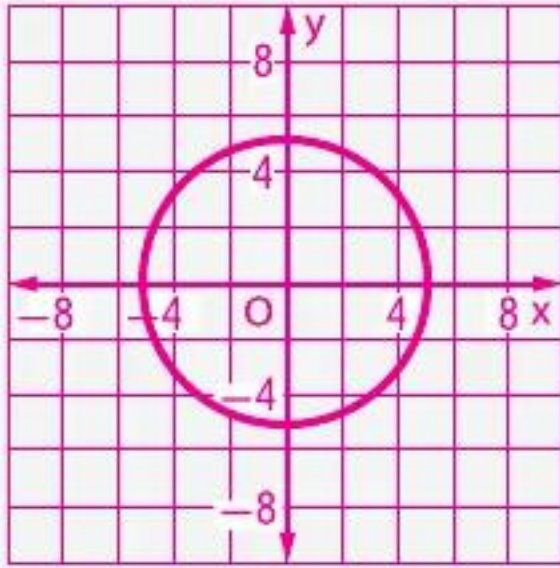
تحليل الخطأ في التدريب 57.
اطلب من الطلاب إيجاد متتالية تكون هندسية وحسابية معاً. غير $8, 8, 8, \dots$. ناقش كيف تتطابق المتتالية مع $8, 8, 8, \dots$.

4 التقويم

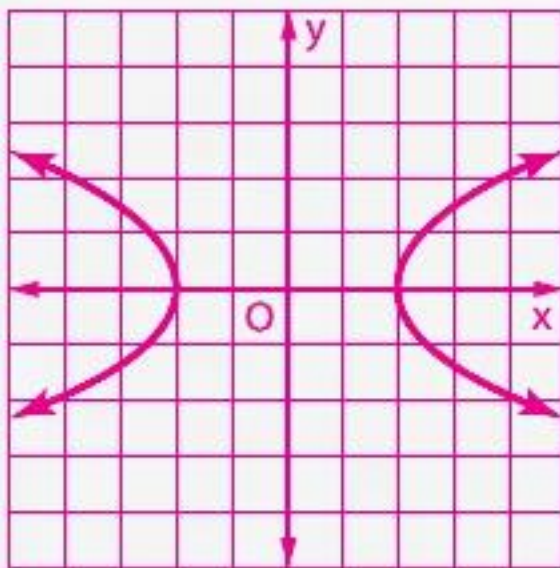
تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب أن يشرحوا كيفية إيجاد أي حد من أي متتالية حسابية أو هندسية بمعرفة الحدود القليلة الأولى.

إجابات إضافية

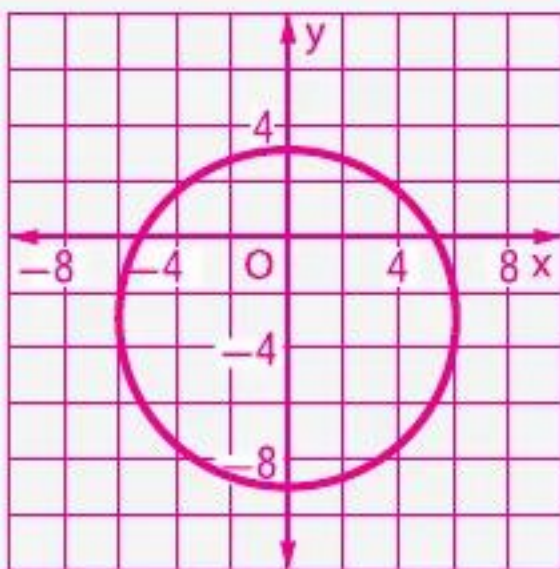
68. دائرة $x^2 + y^2 = 27$



69. قطع زائد: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$



70. دائرة $x^2 + (y + 3)^2 = 36$



63. SAT/ACT رغبت ربهام في تحديد متوسط الدرجات الست التي حصلت عليها في الاختبار. فجمعت الدرجات بطريقة صحيحة لتحصل على T . ولكنها قسيت على 7 بدلاً من 6. وكان متوسط درجاتها أقل بقيمة 12 درجة من المتوسط الفعلي. فأني معادلة يمكن استخدامها لتحديد قيمة T ؟

F $6T + 12 = 7T$ J $\frac{T}{6} = \frac{T-12}{7}$
G $\frac{T}{7} = \frac{T-12}{6}$ K $\frac{T}{6} = 12 - \frac{T}{7}$
H $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$

64. جد الحد التالي في المتتالية الهندسية

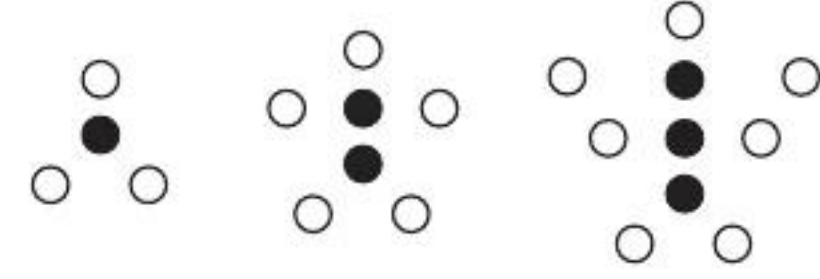
D $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$

A $\frac{11}{8}$ C $\frac{9}{4}$
B $\frac{27}{16}$ D $\frac{81}{32}$

61. إجابة قصيرة تبلغ أبعاد غرفة استوديو منى ذات الشكل المستطيل 13 m في 11 m. وهي ترغب في شراء سجادة تكلف 10.84 AED لكل متر مربع. متضمنة الضريبة. فكم ستكون تكلفة فرش غرفة نومها بالسجاد؟

AED 1550.12

62. يمكن وصف نمط الدوائر المملوءة والدوائر البيضاء أدناه من خلال علاقة بين متغيرين.



أي علاقة تربط w وهو عدد الدوائر البيضاء بـ f وهو عدد الدوائر الداكنة؟

A $w = 3f$ C $w = 2f + 1$
B $f = \frac{1}{2}w - 1$ D $f = \frac{1}{3}w$

مراجعة شاملة

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

65. $y = 5$ ($\pm 4, 5$)
 $y^2 = x^2 + 9$

66. $y - x = 1$ ($-4, -3$), ($3, 4$)
 $x^2 + y^2 = 25$

67. لا يوجد حل $3x = 8y^2$
 $8y^2 - 2x^2 = 16$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر ما إذا كان التمثيل البياني للمعادلة يمثل قطعاً مكافئاً أم دائرة أم قطعاً ناقصاً أم قطعاً زائداً. ثم مثل المعادلة بيانياً. 68-70. انظر الهامش.

68. $6x^2 + 6y^2 = 162$

69. $4y^2 - x^2 + 4 = 0$

70. $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 40$

مثل كل دالة بيانياً. 71-73. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

71. $f(x) = \frac{6}{(x-2)(x+3)}$

72. $f(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$

73. $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$

74. الصحة يختفي دواء معين من مجرى الدم بمعدل ثابت. وهو يتحلل وفقاً للمعادلة $y = ae^{-0.1625t}$. حيث تكون قيمة t بالساعات. جد العمر النصفى لهذه المادة. حوالي 4.27 ساعات

مراجعة المهارات

اكتب معادلة المستقيم في كل حالة مما يلي.

76. يمر بالنقطة $(2, \frac{1}{2})$ وميله $m = -\frac{3}{4}$ $y = -\frac{3}{4}x + 2$

75. يمر بالنقطة $(6, 4)$ وميله $m = 0.5$ $y = 0.5x + 1$

78. يمر بالنقطة $(0, 4)$ وميله $m = \frac{1}{4}$ $y = \frac{1}{4}x + 4$

77. يمر بالنقطة $(0, -6)$ وميله $m = 3$ $y = 3x - 6$

80. يمر بالنقطتين $(-5, 1)$ و $(5, 16)$ $y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

79. يمر بالنقطتين $(1, 3)$ و $(8, -\frac{1}{2})$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

التوسع اسأل الطلاب هذه الأسئلة: "هل $1, 2, 3, 4, 8, 16, \dots$ متتالية حسابية أم هندسية؟ وكيف عرفت ذلك؟" هندسية: لأن النسبة المشتركة هي 2. ثم اسأل: "إذا تم استبدال كل حد في المتتالية $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ بمعكوسه الضربي، فهل ستظل المتتالية هندسية؟ وكيف عرفت ذلك؟" نعم: لأن النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$. اطلب من الطلاب كتابة متتالية هندسية وتحديد ما إذا كان معكوسها الضربي المماثل أيضاً متتالية هندسية.

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

3-2

لماذا؟

الحالي

السابق

• في القرن الثامن عشر، طلب معلم من طلاب صفه في المرحلة الابتدائية إيجاد مجموع الأعداد الحسابية من 1 إلى 100. وأجاب تلميذ اسمه كارل جاوس إجابة صحيحة في غضون ثوانٍ. مما أذهل المعلم. وأصبح جاوس عالم رياضيات عظيمًا.

لقد حل هذه المسألة باستخدام المتسلسلات الحسابية.

1 إيجاد الحد النوني والأوساط الحسابية للمتتاليات الحسابية.

2 إيجاد مجاميع المتسلسلات الحسابية.

• حددت ما إذا كانت المتتالية حسابية.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-2 لقد حددت إذا ما كانت المتتالية حسابية أم لا.

الدرس 3-2 إيجاد الحد النوني والأوساط الحسابية للمتتاليات الحسابية. وإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية.

بعد الدرس 3-2 أثبتت العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.

المفردات الجديدة

أوساط حسابية
arithmetic means
متسلسلة
series
متسلسلة حسابية
arithmetic series
المجموع الجزئي
partial sum
الرمز سيجمما
sigma notation

مهارات في الرياضيات
البحث عن التوافق في
الاستنتاجات المتكررة والتعبير
عن ذلك.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ ما نوع متتالية أعداد الإحصاء 1-100؟ حسابية

■ ما قيمة الحد الأول؟ 1

■ كيف يمكنك تحديد مجموع العشرة أعداد الأولى من أعداد الإحصاء بسرعة؟ الإجابة النموذجية: $5 \times 11 = 55$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

(11) (11) (11) (11)

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية حسابية

يتم الحصول على الحد النوني a_n لمتتالية حسابية، والتي يكون الحد الأول فيها هو a_1 والفرق المشترك هو d ، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التمرين 80.

مثال 1 إيجاد الحد النوني

جد الحد الثاني عشر للمتتالية الحسابية 9, 16, 23, 30, ...

الخطوة 1 جد الفرق المشترك.

$$16 - 9 = 7 \quad 23 - 16 = 7 \quad 30 - 23 = 7$$

إذًا، $d = 7$.

الخطوة 2 جد الحد الثاني عشر.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$$

$$= 9 + 77 \text{ أو } 86$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = 9, d = 7, n = 12$
بسط.

تمرين موجّه

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1A. $a_1 = -4, d = 6, n = 9$ 44

1B. $a_1 = 15, d = -8$ بالنسبة إلى a_{20} -137

إذا أعطيت بعض الحدود الخاصة بمتتالية حسابية ما، فيمكنك كتابة معادلة للحد النوني للمتتالية.

1 المتتاليات الحسابية

يبين **المثال 1** كيفية إيجاد الحد النوني لأي متتالية حسابية بمعرفة الحد الأول والفرق المشترك. ويبين **المثال 2** كيفية كتابة معادلة للحد النوني لأي متتالية بمعرفة بعض حدود المتتالية. ويبين **المثال 3** كيفية إيجاد الأوساط الحسابية بين حدين غير متتابعين في متتالية حسابية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 جد الحد رقم 20 في المتتالية الحسابية 136, 10, 17, 24, ...

2 اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

a. -8, -6, -4, ...

$$a_n = 2n - 10$$

b. $a_6 = 11, d = -11$

$$a_n = -11n + 77$$

3 جد الأوساط الحسابية في المتتالية 21, 27, 33, 39, 45, ...

التركيز على محتوى الرياضيات

صيغة لمتتالية حسابية يمكن إيجاد أي حد لأي متتالية من قيمة الحد السابق إذا كان الفرق المشترك معروفاً. ولكن تتطلب صيغة الحد النوني معرفة الحد الأول في المتتالية.

مثال 2 كتابة معادلات للحد النوني

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

a. 5, -13, -31, ...

$d = -13 - 5$ أو $d = -18$ هو الحد الأول.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= 5 + (n-1)(-18) \\ a_n &= 5 + (-18n + 18) \\ a_n &= -18n + 23 \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = 5, d = -18$
خاصية التوزيع
بسط.

b. $a_5 = 19, d = 6$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 19 &= a_1 + (5-1)(6) \\ 19 &= a_1 + 24 \\ -5 &= a_1 \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_5 = 19, n = 5, d = 6$
اضرب
اطرح 24 من كل طرف.

أولاً، جد a_1 .

ثم اكتب المعادلة.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= -5 + (n-1)(6) \\ a_n &= -5 + (6n - 6) \\ a_n &= 6n - 11 \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = -5, d = 6$
خاصية التوزيع
بسط.

تمرين موجه

$$2A. 12, 3, -6, \dots a_n = -9n + 21$$

$$2B. a_6 = 12, d = 8 a_n = 8n - 36$$

في بعض الأحيان، يتم إعطاؤك حدين لمتتالية ما، ولكنهما لا يكونان حدين متتابعين للمتتالية. ويُطلق على الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية اسم **أوساط حسابية**. ويمكن استخدامها لإيجاد الحدود المفقودة لمتتالية ما.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

جد الأوساط الحسابية في المتتالية ... 22, ؟, ؟, ؟, ؟, -8.

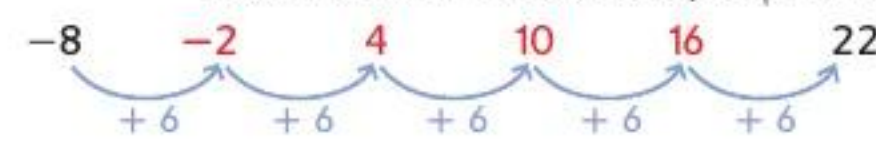
الخطوة 1 بما أن هناك أربعة حدود بين الحدين الأول والأخير المُعطيين، فهناك 4 + 2 أو 6 حدود إجمالية. إذاً $n = 6$.

الخطوة 2 جد d .

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 22 &= -8 + (6-1)d \\ 30 &= 5d \\ 6 &= d \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = -8, a_6 = 22, n = 6$
خاصية التوزيع
اقسم كل طرف على 5.

الخطوة 3 استخدم d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.



الأوساط الحسابية هي -2 و 4 و 10 و 16.

تمرين موجه

3. جد الأوساط الحسابية الخمسة بين -18 و 36. -9, 0, 9, 18, 27

نصيحة دراسية

التحقق من الحلول تحقق من إجابتك مستخدماً إياها لتحديد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية.

قراءة في الرياضيات

الوسط الحسابي متوسط عددين أو أكثر
الأوساط الحسابية الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية

2 المتسلسلات الحسابية

يبين **المثال 4** كيفية استخدام الصيغة لإيجاد مجموع متسلسلة حسابية. يبين **المثال 5** كيفية استخدام صيغة لإيجاد حدود في متسلسلة حسابية. ويبين **المثال 6** كيفية إيجاد مجموع متسلسلة مكتوبة برمز سيجما.

أمثلة إضافية

4 جد مجموع $8 + 12 + 16 + \dots + 80$. **836**

5 جد الحدود الثلاثة الأولى في المتسلسلة الحسابية $S_n = 129$ و $a_n = 29$ و $a_1 = 14$ **14, 17, 20**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية وضح مثلاً على اللوحة للمساعدة في شرح الصيغة لإيجاد مجموع متسلسلة حسابية. اكتب متسلسلة للأعداد من 1 إلى 10 واسحب الأعداد لتشكّل مجاميع $1 + 10$ و $2 + 9$ و $3 + 8$ وما إلى ذلك، وجد مجموع المتتالية. ثمّ وضح كيفية تحويل الصيغة لأبسط صورة.

2 المتسلسلات الحسابية **المتسلسلة** تتكون عند جمع حدود متتالية ما. **والمتسلسلة الحسابية** هي مجموع حدود متتالية حسابية. ويطلق على مجموع الحدود النونية الأولى اسم **المجموع الجزئي**. ويُعبّر عنه بـ S_n .

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة حسابية

الصيغة	المعطيات	مجموع S_n للحدود النونية الأولى هو:
عامة	a_n و a_1	$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$
بديلة	d و a_1	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$

في بعض الأحيان، يتعين تحديد a_1 أو a_n أو n قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وعندما يحدث ذلك، استخدم صيغة الحد النوني.

مثال 4 استخدام صيغ المجموع

جد مجموع $12 + 19 + 26 + \dots + 180$.

الخطوة 1 $a_1 = 12$ و $a_n = 180$ و $d = 19 - 12 = 7$.

يتعين إيجاد n قبل أن تتمكن من استخدام إحدى الصيغ.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d && \text{الحد النوني لمتتالية حسابية} \\ 180 &= 12 + (n - 1)(7) && a_n = 180, a_1 = 12, d = 7 \\ 168 &= 7n - 7 && \text{بسط.} \\ 25 &= n && \text{جد قيمة } n. \end{aligned}$$

الخطوة 2 استخدم أيًا من الصيغتين لإيجاد S_n .

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d] && \text{صيغة المجموع} \\ S_{25} &= \frac{25}{2} [2(12) + (25 - 1)(7)] && n = 25, a_1 = 12, d = 7 \\ S_{25} &= 12.5(192) \text{ أو } 2400 && \text{بسط.} \end{aligned}$$

تمرين موجّه

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

4A. $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ **2550** 4B. $n = 16, a_n = 240, d = 8$. **2880**

يمكنك استخدام صيغة المجموع لإيجاد حدود المتسلسلات.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

جد الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 7, a_n = 79, S_n = 430$.

الخطوة 1 جد n .

$$\begin{aligned} S_n &= n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) && \text{صيغة المجموع} \\ 430 &= n \left(\frac{7 + 79}{2} \right) && S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79 \\ 430 &= n(43) && \text{بسط.} \\ 10 &= n && \text{اقسم كل طرف على 43.} \end{aligned}$$

انتبه!

الفرق المشترك لا تخلط علامة الفرق المشترك في المتتالية الحسابية. تحقق من أن القاعدة تنتج فعلاً حدود المتتالية.

التدريس المتميّز OL

المتعلمون بطريقة التواصل ناقش الفرق بين المتتالية والمتسلسلة واطلب من الطلاب اقتراح طرق لتذكرها.

التركيز على محتوى الرياضيات

متسلسلة منتهية رغم أن معظم المتتاليات التي تمت دراستها خلال هذا الدرس هي متتاليات لا نهائية، فإن المتسلسلات في هذا الدرس خلاف ذلك. وتعد الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ لمجموع متسلسلة حسابية صالحة لرقم نهائي محدد لحدود n .

مثال إضافي

6 تدريب على الاختبار المعياري

جد $\sum_{k=3}^{10} (2k + 1)$

- A 23
B 70
C 98
D 112

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يراقب الطلاب المتفوقون في الرياضيات تقدمهم وقيمهم ويغيروا مساهمهم إذا لزم الأمر. شجّع الطلاب على فحص التعابير وسرد كافة القيم المهمة قبل بدء عملياتهم الحسابية.

الخطوة 2 جد d .

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 79 &= 7 + (10 - 1)d \\ 72 &= 9d \\ 8 &= d \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_n = 79, a_1 = 7, n = 10$
اطرح 7 من كل طرف.
اقسم كل طرف على 9.

الخطوة 3 استخدم d لتحديد a_2 و a_3 .

$$\begin{aligned} a_2 &= 7 + 8 = 15 \\ a_3 &= 15 + 8 = 23 \end{aligned}$$

الحدود الثلاثة الأولى هي 7 و 15 و 23.

تمرين موجّه

جد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية مما يلي. 5B. -24, -16, -8

5A. $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$ 6, 0, -6 5B. $a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$

يمكن كتابة مجموع المتسلسلة باختصار عن طريق استخدام الرمز سيجمما.

المفهوم الأساسي الرمز سيجمما

$$\sum_{k=1}^n f(k)$$

الرموز

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{12} (4k + 2) &= [4(1) + 2] + [4(2) + 2] + [4(3) + 2] + \dots + [4(12) + 2] \\ &= 6 + 10 + 14 + \dots + 50 \end{aligned}$$

مثال

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجمما يأتي الاسم من الحرف اليوناني سيجمما، والذي يُستخدم في الرمز.

مثال 6 على الاختبار المعياري استخدام الرمز سيجمما

جد $\sum_{k=4}^{18} (6k - 1)$

- A 846 B 910 C 975 D 1008

قراءة فترة الاختبار

يتعين عليك إيجاد مجموع المتسلسلة. جد a_1 و a_n و n .

حل فترة الاختبار

هناك $1 + 4 + 18$ أو 15 حدًا. لذلك $n = 15$.

$$a_1 = 6(4) - 1 = 23 \quad a_n = 6(18) - 1 = 107$$

جد المجموع.

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

صيغة المجموع

$$S_{15} = 15 \left(\frac{23 + 107}{2} \right)$$

$$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$$

$$S_{15} = 15(65) \text{ أو } 975$$

الإجابة الصحيحة هي C.

تمرين موجّه

6. جد $\sum_{m=9}^{21} (5m + 6)$

- F 972 G 1053 H 1281 J 1701

نصيحة عند حل

الاختبار

المثابرة

أحيانًا يلزم تقسيم مسألة ما إلى أجزاء. وحل كل جزء منفردًا، ثم دمج حلول الأجزاء.

التحقق من فهمك

مثال 1

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1. $a_1 = 14, d = 9, n = 11$ **104**

2. a_{18} من أجل 12, 25, 38, ... **233**

مثال 2

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

3. 13, 19, 25, ... $a_n = 6n + 7$

4. $a_5 = -12, d = -4$ $a_n = -4n + 8$

مثال 3

جد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

5. 6, ?, ?, ?, 42 **15, 24, 33**

6. -4, ?, ?, ?, 8 **-1, 2, 5**

مثال 4

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

7. أول 50 عددًا طبيعيًا **1275**

8. $4 + 8 + 12 + \dots + 200$ **5100**

9. $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$ **4500**

جد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.

10. $a_n = 145, d = 5, n = 21$ **1995**

11. $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$ **8, 12, 16**

12. $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$ **10, 16, 22**

مثال 5

13. اختيار من متعدد جد $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$ **C**

A 45

C 342

B 78

D 410

التدريب وحل المسائل

مثال 1

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

14. $a_1 = -18, d = 12, n = 16$ **162**

15. $a_1 = -12, n = 66, d = 4$ **248**

20. $a_n = 11n + 13$

21. $a_n = -14n + 45$

16. $a_1 = 9, n = 24, d = -6$ **-129**

17. a_{15} من أجل -5, -12, -19, ... **-103**

22. $a_n = -3n + 72$

23. $a_n = 5n - 14$

18. a_{10} من أجل -1, 1, 3, ... **17**

19. a_{24} من أجل 8.25, 8.5, 8.75, ... **14**

24. $a_n = 0.25n + 11$

25. $a_n = 4.5n - 21$

26. $a_n = -7n + 16$

مثال 2

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

20. 24, 35, 46, ...

21. 31, 17, 3, ...

22. $a_9 = 45, d = -3$

27. $a_n = 9n - 32$

28. $a_n = -2n + 8$

23. $a_7 = 21, d = 5$

24. $a_4 = 12, d = 0.25$

25. $a_5 = 1.5, d = 4.5$

29. $a_n = \frac{2}{3}n - 3$

26. 9, 2, -5, ...

27. $a_6 = 22, d = 9$

28. $a_8 = -8, d = -2$

30. $a_n = -5n - 7$

31. $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{23}{10}$

29. $a_{15} = 7, d = \frac{2}{3}$

30. -12, -17, -22, ...

31. $a_3 = -\frac{4}{5}, d = \frac{1}{2}$

32. البنية بلغ متوسط إجمالي قوارير البولنج التي أحرزها مازن في كل مباراة في دوري البولنج لهذا الموسم 123 قارورة. ويأخذ مازن دروسًا بالبولنج ويأمل أن يزيد هذا المتوسط بمقدار 8 قوارير في كل موسم جديد. **b. الموسم التاسع**

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية. $a_n = 115 + 8n$

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي موسم سيحضر مازن متوسط 187 قارورة في المباراة؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى أجل غير مسمى؟ اشرح. **انظر الهامش.**

مثال 3

جد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

33. 24, ?, ?, ?, -1 **19, 14, 9, 4**

34. -6, ?, ?, ?, 49 **5, 16, 27, 38**

35. -28, ?, ?, ?, 7 **-21, -14, -7, 0**

36. 84, ?, ?, ?, 39 **75, 66, 57, 48**

37. -12, ?, ?, ?, -66 **-21, -30, -39, -48, -57**

38. 182, ?, ?, ?, 104 **169, 156, 143, 130, 117**

132 | الدرس 3-2 | المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

انتبه!

تفادي الخطأ ساعد الطلاب على التجاوب مع رمز سيجما بجعلهم يقرؤون عدة تعابير مكتوبة في هذا الرمز بصوت عالٍ. اشرح أن رمز سيجما هو الحرف الكبير S في الأبجدية اليونانية. اطلب منهم طرح أمثلة أخرى من ترميز رياضي يستخدم الحروف اليونانية. **الإجابة النموذجية: π**

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-13 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

البنية يدقق الطلاب المتفوقون رياضياً للتفريق بين النمط أو البنية. ويمكنهم رؤية الأشياء المعقدة، مثل بعض التعابير الجبرية، كالأشياء المفردة أو التي تتألف من عدة أشياء.

إجابة إضافية

32c. الإجابة النموذجية: لا؛ هناك حد أقصى قدره 300 نقطة في لعبة البولنج، لذلك سيكون من المستحيل للمتوسط مواصلة الصعود إلى ما لا نهاية.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	14-60, 74, 75, 78-82, 83-100	14-60 الأعداد الزوجية، 74, 75, 78-82, 87-100
OL أساسي	15-59 الأعداد الفردية، 61-71, 73-75, 78-100	14-60, 83-86
BL متقدم	61-96 (اختياري: 97-100)	61-73, 74, 75, 78-82, 87-100

39. أول 100 عدد طبيعي زوجي 40. أول 200 عدد طبيعي فردي

41. أول 100 عدد طبيعي فردي 42. أول 300 عدد طبيعي زوجي 90,300

43. $-18 + (-15) + (-12) + \dots + 66$ 696 44. $-24 + (-18) + (-12) + \dots + 72$ 408

45. $a_1 = -16, d = 6, n = 24$ 1272 46. $n = 19, a_n = 154, d = 8$ 1558

47. مسابقات بدأت الجوائز في إحدى المسابقات الإذاعية الأسبوعية بمبلغ AED 150 وازدادت بمقدار AED 50 لكل أسبوع استمرت فيه هذه المسابقة. وإذا كانت المسابقة قد استمرت أحد عشر أسبوعاً، فكم إجمالي المبلغ الممنوح؟ AED 4400

جد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية. 52. -72, -57, -42

48. $n = 32, a_n = -86, S_n = 224$ 100, 94, 88 49. $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$ 48, 60, 72

50. $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$ 3, 6, 9 51. $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$ -15, -6, 3

52. $a_1 = -72, a_n = 453, S_n = 6858$ 53. $n = 30, a_n = 362, S_n = 4770$ -44, -30, -16

54. $a_1 = 19, n = 44, S_n = 9350$ 19, 28, 37 55. $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$ -33, -21, -9

56. جوائز تقدم محطة إذاعية إجمالي جوائز بمبلغ AED 8500 على مدار عشر ساعات. وستزيد الجائزة كل ساعة بمقدار AED 100. أوجد مقدار أول وآخر جائزة. AED 400 و AED 1300

57. $\sum_{k=1}^{16} (4k - 2)$ 512 58. $\sum_{k=4}^{13} (4k + 1)$ 350 59. $\sum_{k=5}^{16} (2k + 6)$ 324 60. $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$ 208-

61. المعرفة المالية اقترضت سهيلة بعض النقود من والديها. ووافقت على دفع AED 50 في نهاية الشهر الأول وبزيادة تبلغ AED 25 لكل شهر بعد ذلك ولمدة 12 شهراً. فكم ستدفع إجمالاً بعد 12 شهراً؟ AED 2250

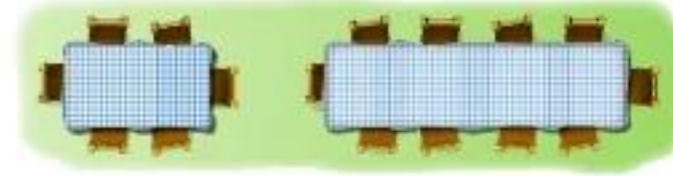
62. الجاذبية عندما يسقط جسم بشكل حر مع تجاهل مقاومة الهواء، فإنه يسقط بمعدل 4.9 m في الثانية الأولى، و 14.6 m إضافية خلال الثانية التالية، و 24.4 m خلال الثانية الثالثة. فكم عدد إجمالي الأقدام التي سيسقطها الجسم في غضون 10 ثوانٍ؟ 1600 m

استخدم المعلومات المعطاة لكتابة معادلة تمثل الحد النوني في كل متتالية حسابية 64. $a_n = -9n + 177$ 63. الحد رقم 100 في المتتالية هو 245. والفرق المشترك هو 13. $a_n = 13n - 1055$

64. الحد الحادي عشر في المتتالية هو 78. والفرق المشترك هو -9.

65. الحد السادس في المتتالية هو -34. والحد الثالث والعشرون هو 119. $a_n = 9n - 88$ 66. الحد الخامس والعشرون في المتتالية هو 121. والحد الثمانون هو 506. $a_n = 7n - 54$

67. التمثيل بالنماذج غالباً ما توضع الطاولات المستطيلة في ردهة الاستقبال إلى جانب بعضها البعض لتشكل طاولة واحدة طويلة. وتوضح الرسوم التخطيطية التالية عدد الأشخاص الذين يمكنهم الجلوس على كل من مجموعات الطاولات.



a. قم بإعداد رسومات لإيجاد الأعداد الثلاثة التالية عند إضافة الطاولات بمعدل واحدة في المرة إلى المجموعة. انظر الهامش.

b. اكتب معادلة تمثل العدد النوني في هذا النمط. $p_n = 4n + 2$ c. هل من الممكن الحصول على مقاعد تكفي بالضبط 100 شخص في هذه المجموعة؟ اشرح. لا؛ لا يوجد عدد نوني كلي يستوفي المعادلة $4n + 2 = 100$.

التوسع اكتب متسلسلة حسابية مثل $5 + 9 + 13 + 17 + 21$ على اللوحة واطلب من الطلاب كتابة مجموع الحدود n باستخدام رمز سيكما n بدءاً بالعدد 1. $\sum_{n=1}^5 (4n + 1)$

تدريس الممارسات في الرياضيات

التمثيل يستطيع الطلاب البارعون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية. وتحليل العلاقات رياضياً لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

ملاحظات لحل التدريب

ورق الرسم البياني في التمارين 94-96 و 90-92 و 71 سيحتاج الطلاب إلى ورق رسم بياني.

إجابة إضافية

67a. 14, 18, 22



تدريس الممارسات في الرياضيات

نقد يُمكن للطلاب البارعين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم أو القويم وبين المنطق الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، يستطيعون توضيح ماهية هذا الخطأ.

68. الأداء هناك شركة ما تدفع لموظفيها وفقًا لمعدلات أدائهم. وتحصل إيمان على أجر ثابت يبلغ AED 200 في الأسبوع بالإضافة إلى AED 24 لكل وحدة تقوم بإنائها. وإذا كانت قد جنت AED 512 في أسبوع واحد، فكم وحدة قد انتهت منها؟ 13

69. الراتب يكسب يوسف حاليًا AED 28,000 سنويًا. وإذا كان يوسف يتوقع زيادة بالراتب كل عام بمقدار AED 4,000، فبعد كم عامًا سيحصل على راتب يبلغ AED 100,000 في العام؟ العام التاسع عشر

70. الألعاب الرياضية أثناء التدريب لخوض سباق الضاحية، تخطط وفاء للجري 3 km يوميًا في الأسبوع الأول، ثم زيادة المسافة بمقدار 0.5 km في كل من الأسابيع التالية.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية. $a_n = 2.5 + 0.5n$

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي أسبوع ستجري 10 km في اليوم؟ الأسبوع الخامس عشر

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى أجل غير مسمى؟ اشرح.

71. التمثيلات المتعددة فكر في $\sum_{k=1}^x (2k + 2)$.

a. جدوليًا اصنع جدولًا للجاميع الجزئية للمتسلسلة المتعلقة بـ $1 \leq k \leq 10$.

b. بيانيًا مثل بيانيًا (k ، مجموع جزئي).

c. بيانيًا مثل بيانيًا $f(x) = x^2 + 3x$ على نفس الشبكة.

d. لفظيًا ماذا تلاحظ بشأن التمثيلين البيانيين؟

e. تحليليًا ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الدوال التربيعية ومجموع المتسلسلة الحسابية؟

f. جبريًا جد المتسلسلة الحسابية المرتبطة بـ $g(x) = x^2 + 8x + 7$. $\sum_{k=1}^x 2k + 7$

جد قيمة x .

$$72. \sum_{k=3}^x (6k - 5) = 928 \quad 18$$

$$73. \sum_{k=5}^x (8k + 2) = 1032 \quad 16$$

71e. الإجابة النموذجية: لكل مجموع جزئي لمتسلسلة حسابية، تكون هناك دالة تربيعية مقابلة تتشارك نفس المدى.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

74. التفكير النقدي يحدد كل من حارب وحسن صيغة الحد النوني للمتتالية ... 16, 7, -2, -11. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حسن

$$9, a_1 = -11 \text{ أو } d = 16 - 7$$

$$a_n = 9n - 11$$

حارب

$$9, a_1 = -11 \text{ أو } d = 16 - 7$$

$$a_n = -11 + (n - 1)9$$

$$= 9n - 20$$

74. الإجابة النموذجية: حارب؛ قوّت حسن خطوة ضرب d في $n - 1$.

75. التبرير إذا كان a هو الحد الثالث في متتالية حسابية، و b هو الحد الخامس، و c هو الحد الحادي عشر، فعبر عن c بدلالة a و b . $4b - 3a$

76. التحدي هناك ثلاثة أوساط حسابية بين a و b في متتالية حسابية ما، ومتوسط الأوساط الحسابية هو 16. فما متوسط a و b ؟ 16

77. التحدي جد S_n من أجل $(x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + \dots$. $77. S_n = nx + y\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)$

78. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة حسابية بها 8 حدود ومجموع يبلغ 324. $9 + 18 + 27 + \dots + 72$

79. الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين المتتاليات والمتسلسلات الحسابية. انظر الهامش.

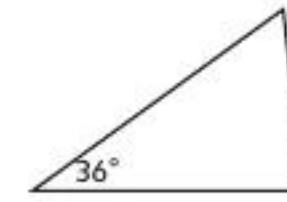
80. البرهان يَرهن على الصيغة المتعلقة بالحد النوني لمتتالية حسابية. 80-81. انظر ملحق

81. البرهان اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1 . إجابات الوحدة 3.

82. البرهان اشتق صيغة المجموع البديلة باستخدام صيغة المجموع العامة. انظر الهامش.

تدريب على الاختبار المعياري

83. SAT/ACT تُكوّن قياسات الزوايا الخاصة بأحد المثلثات متتالية حسابية. فإذا كان قياس الزاوية الأصغر هو 36° . فما قياس الزاوية الأكبر؟ **C**



- A 54°
B 75°
C 84°
D 90°
E 97°

84. تبلغ مساحة مثلث ما $q^2 - 8$ ويبلغ الارتفاع $q + 4$. فأني تعبير يصف قاعدة المثلث على نحو أدق؟ **J**

- F $(q + 1)$
G $(q + 2)$
H $(q - 3)$
J $(q - 4)$
85. التعبير $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ يساوي **A**
C $\sum_{k=1}^3 k^{-k}$
A $\sum_{k=1}^3 k^{\frac{1}{k}}$
B $\sum_{k=1}^3 k^k$
D $\sum_{k=1}^3 \sqrt{k}$

86. إجابة مختصرة يمكن لهما كتابته مقال من 200 كلمة في 6 ساعات. ويمكن لهما كتابة نفس المقال في $4\frac{1}{2}$ ساعات. فإذا عملا معاً، فكم سيلزمهما من الساعات لكتابة المقال؟ **$2\frac{4}{7}$**

انتبه!

تحليل الخطأ في التدريب 74.

أخبر الطلاب أنه لتفادي الخطأ مثلما فعله حسن، فمن المفيد كتابة الصيغة ثم، في السطر التالي، توضيح التعويض عن القيم المعروفة.

تفادي الخطأ تأكد أنه يمكن لكافة الطلاب إثبات فهمهم لرمز سيحما وذلك بأن تطلب منهم كتابة حدود المتسلسلة الواردة في رمز سيحما.

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية. اكتب نعم أو لا. (الدرس 3-1)

87. $-6, 4, 14, 24, \dots$ نعم
88. $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \dots$ نعم
89. $10, 8, 5, 1, \dots$ لا

حل كل من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني. 90-92. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

90. $x + 2y > 1$
 $x^2 + y^2 \leq 25$

91. $x + y \leq 2$
 $4x^2 - y^2 \geq 4$

92. $x^2 + y^2 \geq 4$
 $4y^2 + 9x^2 \leq 36$

93. الفيزياء ترتبط المسافة التي يتمدها الزنبرك بالكتلة المعلقة به. ويمكن تمثيل هذا من خلال $d = km$. حيث d يمثل المسافة، و m يمثل الكتلة. و k هو ثابت الزنبرك. وعند ربط زنبركين مع ثابتي زنبرك k_1 و k_2 في متسلسلة، يتم إيجاد ثابت الزنبرك الناتج k باستخدام المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.
a. إذا كان هناك زنبرك بثابت يبلغ 12 cm/g معلق في سلسلة مع زنبرك آخر بثابت 8 cm/g . فجد ثابت الزنبرك الناتج.

b. إذا كان هناك جسم وزن 5 g معلق بسلسلة الزنبركين، فلأي مدى سيتمدد الزنبركان؟ هل هذه الإجابة معقولة في هذا السياق؟
انظر الهامش.

بسط.

94. $\frac{1}{y^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{y^{\frac{3}{5}}}{y}$

95. $\frac{xy}{\sqrt{z}} \cdot \frac{xyz^{\frac{2}{3}}}{z}$

96. $\frac{3x + 4x^2}{x^{-\frac{2}{3}}} \cdot 3x^{\frac{5}{3}} + 4x^{\frac{8}{3}}$

مراجعة المهارات

حل كل من المعادلات التالية. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

97. $5^x = 52$ 2.4550

98. $4^{3p} = 10$ 0.5537

99. $3^{n+2} = 14.5$ 0.4341 100. $16^{d-4} = 3^{3-d}$ 3.7162

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب وصف كيف ساعدهم عملهم في المتسلسلات في الدرس السابق في هذا الدرس.

إجابات إضافية

79 الإجابة النموذجية: المتسلسلة الحسابية هي قائمة من الحدود بحيث يكون لأي زوج من الحدود المتعاقبة فرقاً مشتركاً. المتسلسلة الحسابية هي عبارة عن مجموع حدود المتتالية الحسابية.

93b. 24 cm ؛ الإجابة منطقية. يمدد الجسم الزنبرك الأول بمقدار 60 cm ويمدد الزنبرك الثاني بمقدار 40 cm . وسيمدد الجسم الزنبركين معاً بمقدار أقل من تمديده لكل زنبرك على حدة.

82 صيغة المجموع العامة $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$
صيغة الحد النوني $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 $S_n = [a_1 + a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$
التعويض
حوّل لأبسط صورة $S_n = [2a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

3-3



لماذا؟

الحالي

السابق

• رأى محمد فرقة موسيقية جديدة بإحدى الحفلات الموسيقية. وأرسل بالبريد الإلكتروني رابطاً يتضمن عنوان موقع الويب الخاص بالفرقة إلى خمسة من أصدقائه. وقام كل من هؤلاء الأصدقاء بإعادة إرسال هذا الرابط إلى خمسة آخرين من أصدقائهم. ثم أعيد إرسال الرابط مرة أخرى باتباع نفس النمط. فكم عدد الأشخاص الذين سيستلمون الرابط في الجولة الثامنة من إرسال الرسائل الإلكترونية؟

1 إيجاد الحد النوني والأوساط الهندسية للمتتاليات الهندسية.

2 إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية.

• حددت ما إذا كانت المتتالية هندسية.

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-3 تحديد إذا ما كانت المتتالية هندسية أم لا.

الدرس 3-3 إيجاد الحد النوني والأوساط الهندسية للمتتاليات الهندسية. إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية.

بعد الدرس 3-3 استخدام النظرية ذات الحدين لتفكيك أسس ذوات الحدين.

المفردات الجديدة

أوساط هندسية
geometric means
متسلسلة هندسية
geometric series

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 المتتاليات الهندسية كما هو الحال مع المتتاليات الحسابية، هناك صيغة للحد النوني للمتتالية الهندسية. ويمكن استخدام هذه الصيغة لتحديد أي حد للمتتالية.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية هندسية

يتم الحصول على الحد النوني a_n لمتتالية هندسية، والتي يكون الحد الأول فيها هو a_1 والنسبة المشتركة هي r ، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

سترهن على هذه الصيغة في التمرين 68.

مثال 1 من الحياة اليومية إيجاد الحد النوني

الموسيقى إذا استمر النمط، فكم عدد رسائل البريد الإلكتروني التي سترسل في الجولة الثامنة؟

الفهم نحتاج إلى تحديد عدد رسائل البريد الإلكتروني المعاد إرسالها في الجولة الثامنة. وتم إرسال خمسة رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى. وكل مستلم من المستلمين الخمسة أرسل خمس رسائل في الجولة الثانية، وهكذا.

التخطيط هذه متتالية هندسية، والنسبة المشتركة هي 5. استخدم الصيغة المتعلقة بالحد النوني للمتتالية الهندسية.

الحل	الحد النوني للمتتالية الهندسية
$a_n = a_1 r^{n-1}$	
$a_8 = 5(5)^{8-1}$	$a_1 = 5, r = 5, n = 8$
$a_8 = 5(78,125)$ أو 390,625	$5^7 = 78,125$

التحقق اكتب أول ثمانية حدود من خلال الضرب في النسبة المشتركة.

5, 25, 125, 625, 3125, 15,625, 78,125, 390,625

سيكون هناك 390,625 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها في الجولة الثامنة.

تمرين موجّه

1. الرسائل الإلكترونية استلمت هدى دعابة في رسالة بريد إلكتروني تطلب منها أن تعيد إرسالها إلى أربعة من أصدقائها. وبالفعل أعادت إرسالها، ثم أرسلتها كل صديقة من صديقاتها إلى أربعة آخرين من الأصدقاء، وهكذا. وإذا استمر هذا النمط، فكم عدد الأشخاص الذين سيستلمون هذه الرسالة الإلكترونية في الجولة التاسعة من إعادة الإرسال؟ 262,144

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ ما الحدود الثلاثة الأولى للنمط؟
5, 25, 125

■ لماذا لا تُعتبر هذه المتتالية حسابية؟
لا يوجد فرق مشترك بين الحدود.

■ ما النسبة المشتركة في المتتالية؟
 $r = 5$

■ قارن بين الفرق المشترك والنسبة المشتركة. الأول يتضمن إضافة؛ والثاني يتضمن ضرب.

إذا أعطيت بعض الحدود الخاصة بمتتالية هندسية ما، فيمكنك تحديد معادلة لإيجاد الحد النوني للمتتالية.

1 المتتاليات الهندسية

مثال 1 بين كيفية إيجاد حد في متتالية هندسية بمعرفة الحد الأول والنسبة المشتركة. يوضح **مثال 2** كتابة معادلة الحد النوني في المتتالية الهندسية. يبين **مثال 3** كيفية إيجاد المتوسطات الهندسية بين عددين معطيين.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 جد الحد السادس لمتتالية هندسية، يكون فيها $a_1 = -3$ و $r = -2$. **$a_6 = 96$**

2 اكتب معادلة الحد النوني لكل متتالية هندسية.

a. 40, 20, 10, 5, ...
 $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

b. $a_5 = 4$ and $r = 3$
 $a_n = \frac{4}{81}(3^{n-1})$

3 جد الأوساط الهندسية الثلاثة بين 3.12 و 49.92.
6.24, 12.48, 24.96.
-6.24, 12.48, -24.96

انتبه!

تجنب الأخطاء شجع الطلاب على البدء في مسألة المتتالية الهندسية بكتابة القيم المعروفة لكل متغير من المتغيرات n, a, r .

مثال 2 كتابة معادلة للحد النوني

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

a. 0.5, 2, 8, 32, ...

هو الحد الأول. $r = 8 \div 2$ أو 4 ; 0.5
الحد النوني لمتتالية هندسية
 $a_n = a_1 r^{n-1}$
 $a_n = 0.5(4)^{n-1}$ $r = 4, a_1 = 0.5$

b. $a_4 = 5$ و $r = 6$

الحد النوني لمتتالية هندسية
 $a_n = a_1 r^{n-1}$
 $5 = a_1(6^{4-1})$ $n = 4, r = 6, a_n = 5$
 $5 = a_1(216)$ جد قيمة الأس.
 $\frac{5}{216} = a_1$ اقسّم كل طرف على 216.

الخطوة 1 جد a_1 .

الخطوة 2 اكتب المعادلة.

الحد النوني لمتتالية هندسية
 $a_n = a_1 r^{n-1}$
 $a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$ $r = 6, a_1 = \frac{5}{216}$

تمرين موجه 2A. $a_n = -0.25(-8)^{n-1}$

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

2A. -0.25, 2, -16, 128, ...

2B. $a_3 = 16, r = 4$ **$a_n = 1(4)^{n-1}$**

ومثل الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الموجودة بين حدين غير متعاقبين لمتتالية هندسية، ويمكن استخدام النسبة المشتركة r لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

جد ثلاثة أوساط هندسية بين 2 و 1250.

الخطوة 1 بما أن هناك ثلاثة حدود بين الحد الأول والحد الأخير، فهناك 2 + 3 أو 5 حدود إجمالية. إذا $n = 5$

الخطوة 2 جد r .

الحد النوني لمتتالية هندسية
 $a_n = a_1 r^{n-1}$
 $1250 = 2r^{5-1}$ $n = 5, a_1 = 2, a_n = 1250$
 $625 = r^4$ اقسّم كل طرف على 2.
 $\pm 5 = r$ استخرج الجذر الرابع لكل طرف.

الخطوة 3 استخدم r لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.

أو 2 10 50 250 1250
 $\times 5 \quad \times 5 \quad \times 5 \quad \times 5$
أو 2 10 50 250 1250
 $\times -5 \quad \times -5 \quad \times -5 \quad \times -5$

الأوساط الهندسية هي 10 و 50 و 250 أو -10 و 50 و -250.

تمرين موجه

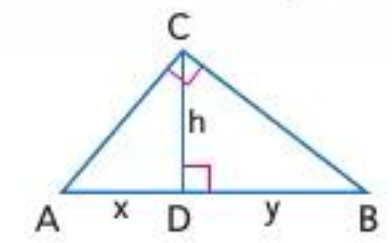
3. جد أربعة أوساط هندسية بين 0.5 و 512. **2, 8, 32, 128**

الربط بتاريخ الرياضيات

أرخيتاس (347-428 ق.م.)
تمت دراسة المتتاليات الهندسية أو المتعاقبات الهندسية لأول مرة بواسطة عالم الرياضيات اليوناني أرخيتاس. وجاءت دراساته لهذه المتتاليات بسبب شغفه بالموسيقى والجوابات الموسيقية.

قراءة في الرياضيات

الأوساط الهندسية يمكن تمثيل الوسط الهندسي بطريقة هندسية أيضاً. في الشكل أدناه، يعد h الوسط الهندسي بين x و y .



التركيز على محتوى الرياضيات

زيادة أو نقص المتتاليات الهندسية العديد من المتتاليات في هذا الدرس إما تزداد أو تقل، والنسبة المشتركة لهذه المتتاليات موجبة. إلا أنه إذا كانت النسبة المشتركة في متتالية هندسية سالبة، فلن تزداد أو تقل.

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي قد ترغب في أن تجعل الطلاب يقومون بحساب مجموع واحد أو أكثر بدون استخدام الصيغة للتحقق منها. وهذا من شأنه أيضًا أن يوضح فعالية الصيغة.

انتبه!

تجنب الأخطاء أكد على أهمية كتابة كل خطوة من حسابات المعادلة، حتى تُحدد كل قيمة عددية يتم إيجادها أثناء العملية بوضوح.

2 المتسلسلات الهندسية

يوضح **المثال 4** إيجاد مجموع الحدود n الأولى من المتسلسلة الهندسية. يبين **المثال 5** كيفية تقييم مجموع مكتوب برمز سيجما. يبين **المثال 6** كيفية إيجاد الحد الأول في متسلسلة هندسية بمعرفة مجموع عدد محدد من حدودها والنسبة المشتركة لها.

أمثلة إضافية

4 الموسيقى استخدم المعلومات المتوفرة في المثال 4. كم عدد رسائل البريد الإلكتروني التي ستُرسل بعد الجولة السادسة؟ **19,530**

5 جد **12,285**. $\sum_{n=1}^{12} 3 \cdot 2^{n-1}$

انتبه!

الرمز سيجما لاحظ أنه يُطلب منك في المثال 5 تقييم المجموع من الحد الثالث إلى الحد العاشر.

مثال 5 المجموع في الرمز سيجما

$$\text{جد } \sum_{k=3}^{10} 4(2)^k - 1$$

جد a_1 و r و n . في الحد الأول، $k = 3$ و $a_1 = 4 \cdot 2^3 - 1$ أو 16. وقاعدة الدالة الأسية هي r . إذا $r = 2$. هناك $10 - 3 + 1$ أو 8 حدود. إذا $n = 8$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \\ &= \frac{16 - 16(2)^8}{1 - 2} \\ &= 4080 \end{aligned}$$

صيغة المجموع
استخدم الحاسبة.

تمرين موجّه

جد مجموع كل مما يلي.

$$\begin{aligned} \text{5A. } \sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1} & \quad \text{66,426.75} \\ \text{5B. } \sum_{k=2}^9 \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1} & \quad \text{58,253.333} \end{aligned}$$

138 | الدرس 3-3 | المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

التدريس المتميز

BL OL

إذا كان تعتقد أن الطلاب قد يهتمون بتعلم كيفية تطبيق هذا الدرس على حالات في الحياة اليومية.

عندما اطلب من الطلاب البحث عن كيفية استخدام علماء البيئة والبيولوجيا المتسلسلة الهندسية في عملهم لإحصاء تغيرات التعداد والتنبؤ بها في مختلف الكائنات الحية.

2 المتسلسلات الهندسية إن **المتسلسلة الهندسية** هي مجموع حدود المتتالية الهندسية. ويتم التعبير عن مجموع الحدود النونية الأولى لمتسلسلة من خلال S_n . ويمكنك استخدام أي من الصيغ التالية لإيجاد المجموع الجزئي S_n للحدود النونية لمتسلسلة هندسية.

المعطيات	مجموع S_n للحدود النونية الأولى هو:
n و a_1	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$
a_n و a_1	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

الموسيقى راجع بداية الدرس. إذا استمر النمط، فما إجمالي عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في الجولات الثمانية؟

يتم إرسال خمس رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى وهناك ثماني جولات من عملية إرسال رسائل البريد الإلكتروني. إذا، $a_1 = 5$ و $r = 5$ و $n = 8$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \\ S_8 &= \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1 - 5} \\ S_8 &= \frac{-1,953,120}{-4} \\ S_8 &= 488,280 \end{aligned}$$

صيغة المجموع
 $n = 8, r = 5, a_1 = 5$
حوّل البسط والمقام لأبسط صورهما.
اقسم.

سيكون هناك 488,280 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها بعد الجولات الثمانية.

تمرين موجّه

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

$$\begin{aligned} \text{4A. } a_1 = 2, n = 10, r = 3 & \quad \text{59,048} \\ \text{4B. } a_1 = 2000, a_n = 125, r = \frac{1}{2} & \quad \text{3875} \end{aligned}$$

وكما هو الحال مع المتسلسلات الحسابية، يمكن أيضًا استخدام الرمز سيجما لتمثيل المتسلسلات الهندسية.

مثال إضافي

6 جد a_1 في متسلسلة هندسية حيث $n = 8$ و $S_8 = 765$ و $r = 2$.

التركيز على محتوى الرياضيات

صيغتان تُستخدم صيغة المجموع للمتسلسلة الهندسية $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$ عندما يكون عدد الحدود غير معطى. وإذا كانت n معروفة، فيمكن استخدام

الصيغة $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ لأنه في هذه الحالة ليس من الضروري حساب a_n .

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات خصص العديد من التدريب ات للفصل، وأعط الطلاب الوقت للعمل عليها باستقلالية. بعد ذلك، اختر طلاباً لمشاركة وشرح عملهم للفصل.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-16 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية إن وجدت ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معاً. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل.

مثال 6 إيجاد الحد الأول للمتسلسلة

جد a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = 13,116$ و $n = 7$ و $r = 3$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} && \text{صيغة المجموع} \\ 13,116 &= \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3} && n = 7, r = 3, S_n = 13,116 \\ 13,116 &= \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3} && \text{خاصية التوزيع} \\ 13,116 &= \frac{-2186a_1}{-2} && \text{اطرح.} \\ 13,116 &= 1093a_1 && \text{بسط.} \\ 12 &= a_1 && \text{اقسم كل طرف على 1093.} \end{aligned}$$

تمرين موجّه

6. جد a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = -26,240$ و $n = 8$ و $r = -3$. 16

التحقق من فهمك

1. **الانتظام** يصنع أحمد شجرة عائلة لجدّه. وقد تمكن من تتبع العديد من الأجيال. وإذا استطاع أحمد تتبع 10 أجيال سابقة من عائلته، بدءاً من والديه، فكم عدد الأسلاف الذين سيتمكن من تتبعهم؟

مثال 1

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية. 3. $a_n = 18\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

مثال 2

$$\begin{aligned} 2. & 2, 4, 8, \dots \quad a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \quad 3. 18, 6, 2, \dots \quad 4. -4, 16, -64, \dots \quad a_n = -4(-4)^{n-1} \\ 5. & a_2 = 4, r = 3 \quad a_n = \frac{4}{3}(3)^{n-1} \quad 6. a_6 = \frac{1}{8}, r = \frac{3}{4} \quad a_n = \frac{128}{243}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad 7. a_2 = -96, r = -8 \quad a_n = 12(-8)^{n-1} \end{aligned}$$

جد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

مثال 3

$$8. 0.25, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 64 \quad 1, 4, 16 \text{ أو } -1, 4, -16 \quad 9. 0.20, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 125 \quad 1, 5, 25 \text{ أو } -1, 5, -25$$

10. **الألعاب** ترتب شيماء بعض صفوف قطع الدومينو بحيث عندما تضرب أول قطعة منها، تنساقط كل قطعة على قطعتين أخريين عندما تسقط. وإذا كان هناك عشرة صفوف، فكم عدد قطع الدومينو التي ستستخدمها شيماء؟ 1023

مثال 4

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

مثال 5

$$11. \sum_{k=1}^6 3(4)^k - 1 \quad 4095 \quad 12. \sum_{k=1}^8 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad 7.96875$$

جد a_1 لكل متسلسلة هندسية موصوفة.

مثال 6

$$\begin{aligned} 13. & S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6 \quad \frac{1}{16} \\ 14. & S_n = 91\frac{1}{12}, r = 3, n = 7 \quad \frac{1}{12} \\ 15. & S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2} \quad 512 \\ 16. & S_n = 121\frac{1}{3}, a_n = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3} \quad 81 \end{aligned}$$

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف، ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

مثال 1

17. **الطقس** تسببت الأمطار الغزيرة في مدينة حليلة في ارتفاع منسوب النهر. وقد ارتفع النهر 7.6 in في اليوم الأول. وكل يوم بعد ذلك كان يرتفع مثلي مقدار اليوم السابق. فكم ارتفع منسوب النهر خلال خمسة أيام؟ **93 in**

جد a_n لكل متتالية هندسية.

23. $a_n = (-3)(-2)^{n-1}$ 18. $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$ **0.5859375** 19. $a_1 = 800, r = \frac{1}{2}, n = 6$ **25**

24. $a_n = 288\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 20. $a_1 = \frac{2}{9}, r = 3, n = 7$ **162** 21. $a_1 = -4, r = -2, n = 8$ **512**

22. **علم الأحياء** تنمو بكتيريا محددة بمعدل 3 خلايا كل دقيقتين. وإذا كان هناك 260 خلية في بادئ الأمر، فكم سيكون عددها بعد 21 دقيقة؟ **864,567**

26. $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

27. $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

28. $a_n = 12\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

29. $a_n = 2(7)^{n-1}$

30. $a_n = -0.5(64)^{n-1}$

31. $a_n = \frac{1}{15,552}(6)^{n-1}$

32. $a_n = 32\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

33. $a_n = 648\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

35. 30, 90, 270 or
-90, 270, -30

36. 10, 40, 160 or
-40, 160, -10

37. $\frac{7}{3}, \frac{14}{9}, \frac{28}{27}$ or
 $-\frac{7}{3}, \frac{14}{9}, -\frac{28}{27}$

38. $\frac{243}{16}, \frac{81}{4}, 27$ or
 $-\frac{243}{16}, \frac{81}{4}, -27$

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

23. $-3, 6, -12, \dots$ 24. $288, -32, 96, \dots$ 25. $-1, 1, -1, \dots$

26. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \dots$ 27. $8, 2, \frac{1}{2}, \dots$ 28. $12, -16, \frac{64}{3}, \dots$

29. $a_3 = 28, r = 2$ 30. $a_4 = -8, r = 0.5$ 31. $a_6 = 0.5, r = 6$

32. $a_3 = 8, r = \frac{1}{2}$ 33. $a_4 = 24, r = \frac{1}{3}$ 34. $a_4 = 80, r = 4$

$a_n = \frac{5}{4}(4)^{n-1}$

جد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

35. 810, $\frac{?}{?}, \frac{?}{?}, 10$ 36. 640, $\frac{?}{?}, \frac{?}{?}, 2.5$

37. $\frac{7}{2}, \frac{?}{?}, \frac{?}{?}, \frac{56}{81}$ 38. $\frac{729}{64}, \frac{?}{?}, \frac{?}{?}, \frac{324}{9}$

39. جد وسطين هندسيين بين 3 و 375. **15, 75**

40. جد وسطين هندسيين بين 16 و -2. **-8, 4**

مثال 2

مثال 3

مثال 4

مثال 5

مثال 6

41. **المثابرة** يمكن لنظام ترشيح مياه أن يزيل 70% من الملوثات في كل مرة يتم تمرير عينة من المياه من خلاله. وإذا تم تمرير نفس كمية المياه عبر النظام أربع مرات، فكم النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستزال من عينة المياه؟ **99.99%**

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

42. $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$ **53.9918** 43. $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$ **31.9375**

44. $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$ **831.855** 45. $a_1 = 360, r = \frac{4}{3}, n = 8$ **9707.82**

46. **المكانس الكهربائية** يُقال إن مكينة كهربائية تلتقط 80% من الأتربة والأوساخ في كل مرة يتم تمريرها فوق السجاد. ومع افتراض صحة ذلك، فما النسبة المئوية للكمية الأصلية من الأوساخ التي سيتم التقاطها وإزالتها بعد تمرير المكينة فوق السجاد سبع مرات؟ **99.19%**

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

47. $\sum_{k=1}^7 4(-3)^{k-1}$ **2188** 48. $\sum_{k=1}^8 (-3)(-2)^{k-1}$ **255** 49. $\sum_{k=1}^9 (-4)(1)^{k-1}$ **-381, 87** 50. $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$ **0**

جد a_1 لكل متسلسلة هندسية موصوفة.

51. $S_n = -2912, r = 3, n = 6$ **-8**

53. $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$ **64**

55. $a_n = 1024, r = 8, n = 5$ **0.25**

52. $S_n = -10,922, r = 4, n = 7$ **-2**

54. $S_n = 4118, a_n = 128, r = \frac{2}{3}$ **1458**

56. $a_n = 1875, r = 5, n = 7$ **$\frac{3}{25}$**

140 | الدرس 3-3 | المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	17-57, 64-68, 71-89	الأعداد الزوجية. 18-56, 64-68, 71, 72, 77-89
OL أساسي	17-57, 58-68, 71-89	17-57, 73-76
BL متقدم	58-85, (86-89 اختياري)	17-57, 73-76

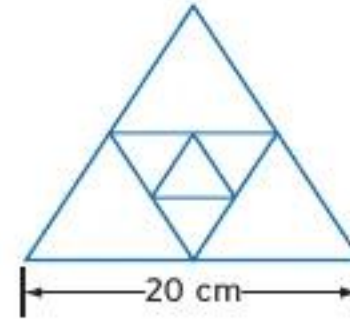
إجابة إضافية

72. إجابة نموذجية: تكون المتسلسلة حسابية إذا كان كل زوج من الحدود المتتالية يشترك في فرق مشترك. وتكون المتسلسلة هندسية إذا كان كل زوج من الحدود المتتالية يشترك في نسبة مشتركة. إذا أظهرت المتسلسلة كلا الخاصيتين، فإنها تكون حسابية وهندسية. وإذا لم تظهر المتسلسلة أي منهما، فهي ليست حسابية ولا هندسية.

57. العلوم ارتفع بالون ممتلئ بالغاز لمسافة 100 ft بعد دقيقة من إطلاقه. وفي كل دقيقة بعد ذلك، يرتفع البالون 50% فقط من المسافة التي ارتفعها في الدقيقة السابقة. فكم سيرتفع بعد 5 دقائق؟ **193.75 ft**

58. الكيمياء يبلغ نصف عمر عنصر الرادون حوالي 4 أيام. وهذا يعني أنه كل 4 أيام تقريبًا، تتحلل نصف كتلة عنصر الرادون إلى عنصر آخر. فكم جرامًا من الرادون سيتبقى من 60 g موجودين من البداية بعد 4 أسابيع؟ **حوالي 0.46875 g**

59. الاستنتاج ينتشر فيروس في جهاز كمبيوتر مصيبًا الملفات. وإذا أصيب ملف في بادئ الأمر مع تضاعف عدد الملفات المصابة كل دقيقة، فكم عدد الملفات التي ستصاب بعد 20 دقيقة؟ **524,288**



60. الهندسة في الشكل، تبلغ أضلاع كل مثلث متساوي الأضلاع مثلي قياس أضلاع المثلث المحيط الخاص به. وإذا استمر النمط، فجد مجموع محيطات أول ثمانية مثلثات. **حوالي 119.5 cm**

61. البندول تبلغ المسافة المقطوعة لحركة الأرجحة الأولى للبندول 30 cm. وإذا بلغت مسافة كل حركة أرجحة تالية 95% من حركة الأرجحة السابقة، فجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول بعد الأرجحة الثلاثين. **حوالي 471 cm**

62. سلاسل اتصالات أنشأت إحدى المدارس سلسلة اتصالات بحيث يمكن لكل موظف الاتصال باثنين آخرين من الموظفين لإخبارهم بمواعيد إغلاق المدرسة بسبب أحوال الطقس. وبدأت الجولة الأولى من الاتصالات عندما اتصل المشرف بكلا مديري المدرسة. فإذا كان عدد الموظفين إجمالاً يبلغ 94 موظفًا بالمدرسة، فكم جولة من الاتصالات ستتم في هذا الخصوص؟ **7**

63. أجهزة التلفاز تعلن إحدى شركات الإلكترونيات الكبرى عن طرحها خطة تقسيط أسبوعية يمكن بموجبها شراء ماركة شهيرة من أجهزة التلفاز عالية الدقة. ويدفع المشتري 5 AED في نهاية الأسبوع الأول، و 5.50 AED في نهاية الأسبوع الثاني، و 6.05 AED في نهاية الأسبوع الثالث. وهكذا لمدة عام. (نفترض أن عامًا واحدًا = 52 أسبوعًا).

63a. 11.79 AED
63b. 30.58 AED
63c. 205.72 AED

a. كم ستبلغ المدفوعات في نهاية الأسبوع العاشر والعشرين والأربعين؟
b. جد التكلفة الإجمالية لجهاز التلفاز. **AED 7052.15**
c. لماذا تعتبر التكلفة الموجودة في الجزء b غير دقيقة كليًا؟

63c. تم تقريب كل عملية دفع إلى أقرب فلس، لذا سيصبح مجموع المدفوعات في الواقع أكثر من المجموع الوارد في الجزء b.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

64. البرهان اشتق صيغة المجموع العامة باستخدام صيغة المجموع البديلة. **انظر الهامش.**

65. البرهان اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1 . **انظر الهامش.**

66. الإجابة النموذجية:
 $256 + 192 + 144 + 108 + 81 + \frac{243}{4}$

66. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة هندسية بحيث $r = \frac{3}{4}$ و $n = 6$.

67. التبرير اشرح كيف أن $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^k - 1$ تحتاج إلى التغير للإشارة إلى نفس المتسلسلة إذا تم تغيير $k = 1$ إلى $k = 0$. اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

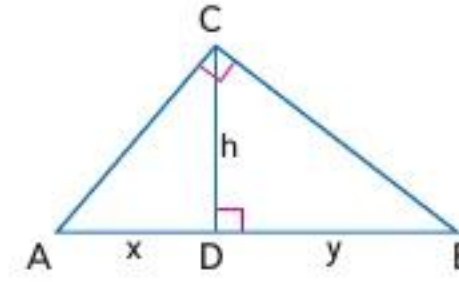
68. البرهان برهن الصيغة المتعلقة بالحد النوني لمتتالية هندسية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

69. التحدي الحد الخامس لمتتالية هندسية هو الحد رقم $\frac{1}{27}$ للحد الثامن. فإذا كان الحد التاسع هو 702، فما الحد الثامن؟ **234**

70. التحدي افترض أن h هو الوسط الهندسي بين x و y في الشكل الموجود على اليسار لإيجاد h^4 بدلالة كل من x و y . **x^2y^2**

71. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة هندسية بها 6 حدود ومجموع يبلغ 252. **الإجابة النموذجية:**

$128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4$



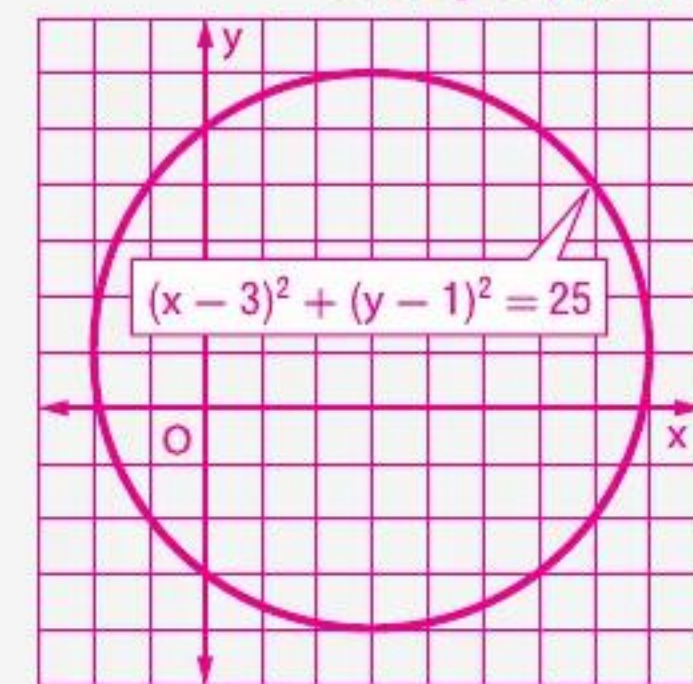
72. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك تصنيف متتالية؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

4 التقويم

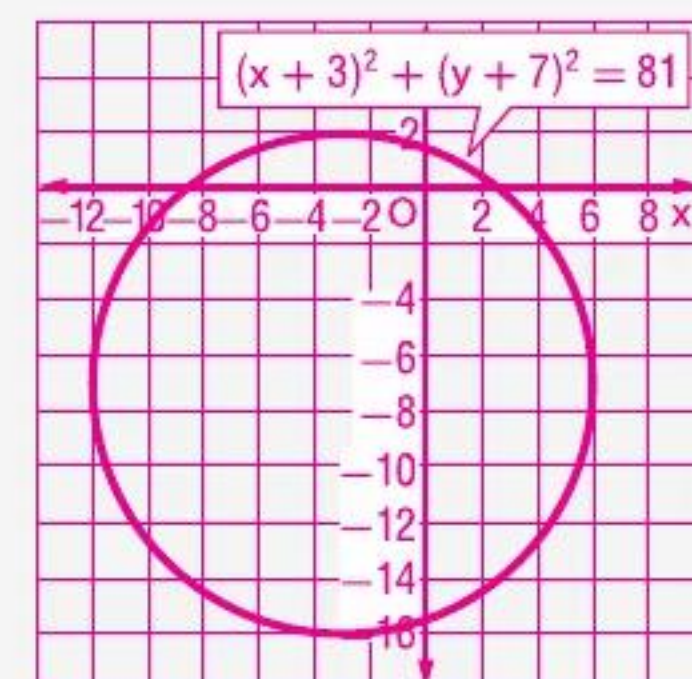
الكرة البلورية اطلب من الطلاب وصف ما يعتقدونه حول كيف لمعرفة مجاميع المتسلسلات الهندسية أن تساعد في تعلم مجاميع متسلسلات هندسية لانتهائية في الدرس التالي.

إجابات إضافية

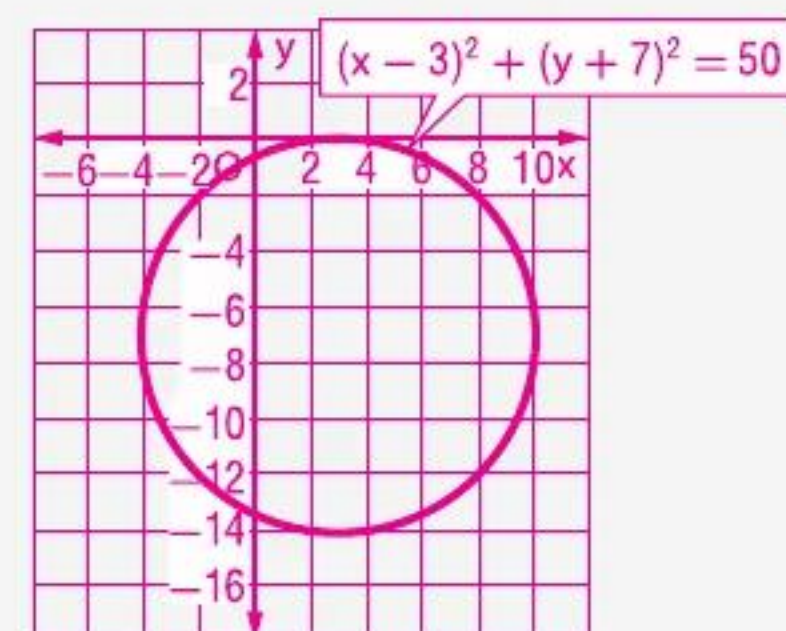
81. (3, 1), 5 وحدات



82. (-3, -7), 9 وحدات

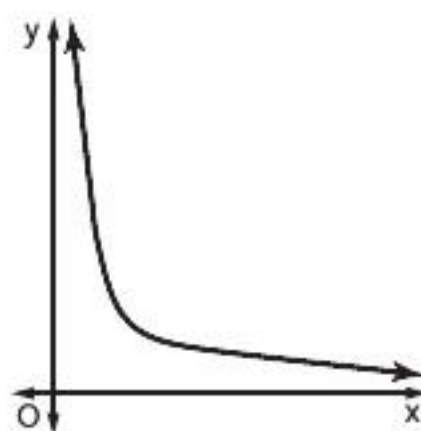


83. (3, -7), $\sqrt{2}$ وحدات



تدريب على الاختبار المعياري

76. SAT/ACT ما الدالة التي قد يكون المنحنى أدناه جزءًا من التمثيل البياني لها؟ E



- A $y = \sqrt{x}$
B $y = x^2 - 5x + 4$
C $y = -x + 20$
D $y = \log x$
E $xy = 4$

73. أي من التالي الأقرب إلى $\sqrt[3]{7.32}$ ؟ B

- A 1.8
B 1.9
C 2.0
D 2.1

74. الحد الأول لمتسلسلة هندسية هو 5، والنسبة المشتركة هي -2. فكم عدد الحدود في المتسلسلة إذا كان مجموعها -6825؟ J

- F 5
G 9
H 10
J 12

75. إجابة مختصرة لدى هداية حساب ادخار. وهي تسحب نصف محتويات الحساب كل عام. وبعد 4 أعوام، تبقى لديها AED 2000. فكم كان لديها في حساب الادخار في الأصل؟ AED 32,000

مراجعة شاملة

77. المال اشترت باسمين تلفاز LCD عالي الدقة من متجر الإلكترونيات. ودفعت AED 200 على الفور AED 1550 و AED 75 شهريًا لمدة عام ونصف. فكم دفعت باسمين إجماليًا مقابل التلفزيون؟ (الدرس 3-2)

79. حسابية: الفرق المشترك هو $\frac{1}{50}$. 80. ليست أيًا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك.

(الدرس 3-1) 78. ليست أيًا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

78. $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \dots$ 79. $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \dots$ 80. $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \dots$

جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثل الدائرة بيانيًا. 81-83. انظر الهامش.

81. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ 82. $(x+3)^2 + (y+7)^2 = 81$ 83. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 50$

84. التسوق اكتشف متجر ما أن عدد العملاء الذين سيحضرون أوكازيونًا للبيع بأسعار مخفضة يمكن تمثيلهم باستخدام $N = 125\sqrt[3]{100Pt}$. حيث N هو العدد المتوقع للعملاء. و P هو النسبة المئوية للخصم. و t هو عدد ساعات سريان الخصم. جد عدد العملاء الذي يتوقع المتجر حضورهم لهذا الأوكازيون الذي ستصل نسبة الخصم فيه 50%. والذي سيستمر لأربع ساعات. 731 عميلًا

مراجعة المهارات

- جد قيمة كل تعبير إذا كان $a = -2$ ، و $b = \frac{1}{3}$ ، و $c = -12$.
85. $\frac{3ab}{c} \frac{1}{6}$ 86. $\frac{a-c}{a+c} -\frac{5}{7}$ 87. $\frac{a^3-c}{b^2} 36$ 88. $\frac{c+3}{ab} \frac{27}{2}$

142 | الدرس 3-3 | المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

التدريس المتميز

التوسع اكتب تعبيرًا للحد النوني من المتتالية الهندسية، $a_1 r^{n-1}$ على اللوحة. واطلب من الطلاب كتابة تعبير للحد التالي، باستخدام الحد رقم $(n+1)$. باستبدال n بـ $(n+1)$ في التعبير $a_1 r^{n-1}$ ثم اطلب منهم إيضاح أن $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ يساوي النسبة المشتركة

$$\frac{a_1 r^{(n+1)-1}}{a_1 r^{n-1}} = \frac{r^n}{r^{n-1}} = r^{n-(n-1)} = r^1 = r$$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 3-1 إلى 3-3



التقويم التكويني

استخدام اختبار منتصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في الجزء الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

المطويات منظم الدراسة

مطويات Dinah Zike®

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 3-1 إلى 3-3 المكتوبة في مطوياتهم.

إجابات إضافية

- 3a. لا، سيتبقى لديه 11 منزلاً لبيعها خلال 4 أشهر. وإذا باع منزلين في الشهر طوال الأشهر الأربعة المتبقية، فسيبيع 8 منازل أخرى فقط.
- 4b. نعم، إذا كان $2n + 2 = 84$ ، فإن $n = 41$ في الشكل 41، سيكون هناك 84 مربّعاً أبيضاً.

10. الاختيار من متعدد ما مجموع أول 50 عدداً فردياً؟
(الدرس 3-2) B

- A 2550
B 2500
C 2499
D 2401

جدد الحد المشار إليه لكل متتالية هندسية. (الدرس 3-3)

11. $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$ 512
12. $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$ 1,048,576

13. الاختيار من متعدد ما الأوساط الهندسية للمتتالية التالية؟ (الدرس 3-3) J

0.5, _____, _____, 2048

- F 512.375, 1024.25, 1536.125
G 683, 1365.5, 2048
H 2, 8, 32
J 4, 32, 256

14. الدخل يعمل بلال لدى شركة لبنشيد المنازل لمدة 4 أشهر في العام. وبدأ هذا العمل بجني AED 3000 في الشهر. وفي نهاية كل شهر، يزيد راتبه 5%. فكم سيجمي من أموال في هذه الأشهر الأربعة؟ (الدرس 3-3)
AED 12,930.38

جدد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية. (الدرس 3-3)

15. $\sum_{k=1}^8 3 \times 2^{k-1}$ 765
16. $\sum_{k=1}^9 4 \times (-1)^{k-1}$ 4
17. $\sum_{k=1}^{20} -2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ -5.998

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية، أم هندسية، أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك. (الدرس 3-1)

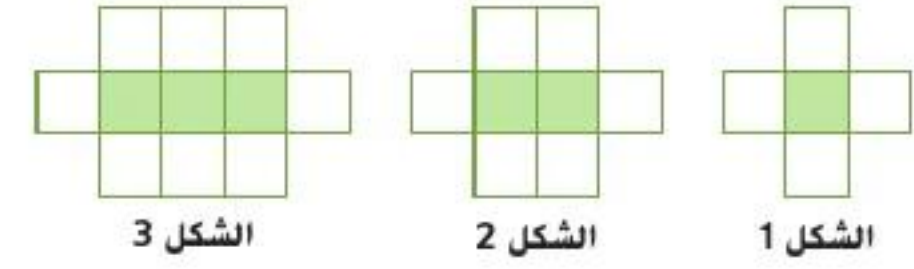
1. 5, -3, -12, -22, -33... لا توجد نسبة مشتركة أو فرق مشترك
2. $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5}, \dots$ حسابية؛ الفرق المشترك يبلغ $\frac{1}{2}$

3. الإسكان يعمل محمود وكيل عقارات. ويتعين عليه بيع 15 منزلاً خلال 6 أشهر. (الدرس 3-1)

a. بنهاية أول شهرين، باع 4 منازل. فإذا باع منزلين كل شهر خلال المدة المتبقية من الأشهر الستة، فهل سيحقق هدفه؟ اشرح. انظر الهامش.

b. إذا باع 5 منازل بنهاية الشهر الأول، فكم عليه أن يبيع في المتوسط كل شهر لتحقيق هدفه؟ منزلان

4. الهندسة توضح الأشكال التالية نمطاً من المربعات المظللة والمربعات البيضاء. (الدرس 3-1)



- a. اكتب معادلة تمثل العدد النوني (n) في هذا النمط، حيث n هو عدد المربعات البيضاء.
 $a_n = 2n + 2$
- b. هل من الممكن الحصول على 84 مربّعاً أبيض تماماً في ترتيب ما؟ اشرح. انظر الهامش.

جدد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية. (الدرس 3-2)

5. $a_1 = 10, d = -5, n = 9$ -30
6. $a_1 = -8, d = 4, n = 99$ 384

جدد مجموع كل متسلسلة حسابية. (الدرس 3-2)

7. $-15 + (-11) + (-7) + \dots + 53$ 342
8. $a_1 = -12, d = 8, n = 22$ 1584
9. $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ -3620

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-4 تمثيل متسلسلة لا نهائية باستخدام الرمز سيجما.

الدرس 3-4 استخدام مثلث باسكال لكتابة التعبيرات ذات الحدين. استخدام نظرية ذات الحدين لكتابة وإيجاد معاملات الحدود المحددة في التعبيرات ذات الحدين.

بعد الدرس 3-4 تمثيل الدوال في صورة متسلسلة لا نهائية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- كيف ستبدو ذات الحدين إذا كان عدد النسل 10؟ $(0.8 + 0.2)^{10}$
- لعدد 10 من النسل، كم يبلغ العدد المحتمل للذكور والعدد المحتمل للإناث؟ ذكران و 8 إناث
- كيف يتم تفكيك ذات حدين؟ عن طريق ضرب ذات الحدين في نفسها بعدد المرات المحدد.

لماذا؟

الحالي

السابق

- افتراض أن عالم أحياء بدرس أحد الأنواع المهددة بالانقراض من فصيلة الجيبون وقد اكتشف أن 80% من نسل الجيبون من الإناث و 20% من الذكور. ويتوقع العاملون في حديقة الحيوان أن قرود الجيبون في الحديقة سوف تنتج العدد n من النسل ويريدون معرفة احتمال عدم وجود ذكور ضمن النسل. ويستطيع عالم الأحياء استخدام حد من التعبير ذي الحدين $(0.8 + 0.2)^n$ لحل هذه المسألة.

- استخدام مثلث باسكال لكتابة التعبيرات ذات الحدين.
- استخدام نظرية ذات الحدين لكتابة وإيجاد معاملات حدود معينة في التعبيرات ذات الحدين.

- تمثيل المتسلسلات اللا نهائية باستخدام ترميز سيجما.

1 مثلث باسكال تذكر أن ذا الحدين هو تعبير جبري يتضمن مجموع حدين غير متشابهين. يتم إنتاج متسلسلة هامة من خلال تفكيك ذي حدين ثم رفعه لقوة أسية من عدد صحيح. افحص هذه السلسلة الناتجة عن تفكيك $(a + b)^n$ للعديد من القيم الصحيحة غير السالبة لـ n .

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= 1a^0b^0 \\(a + b)^1 &= 1a^1b^0 + 1a^0b^1 \\(a + b)^2 &= 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 \\(a + b)^3 &= 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 \\(a + b)^4 &= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\(a + b)^5 &= 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5\end{aligned}$$

لاحظ الأنماط التالية في تفكيكات $(a + b)^n$ أعلاه.

- في كل تفكيك $n + 1$ حد.
- الحد الأول هو a^n ، والحد الأخير هو b^n .
- في الحدود المتتالية، يتناقص أس a بمقدار 1، ويزداد أس b بمقدار 1.
- مجموع الأسين في كل حد هو n .
- المعاملات - الموضحة أعلاه باللون الأحمر - تتزايد ثم تتناقص وفق نمط متماثل.

إذا استخرجت معاملات عمليات التفكيك هذه - والتي تعرف باسم **معاملات ذات الحدين**، وتم ترتيبها وفق مصفوفة مثلثة الشكل، فسيتشكل نموذجاً يدعى **مثلث باسكال**، والذي سمي هكذا على اسم عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال. يطلق على الصف العلوي في هذا المثلث اسم الصف الصفري لأنه يتوافق مع تفكيك تعبير ذات الحدين $(a + b)^0$.

							1						الصف الصفري						
							1		1				الصف الأول						
							1		2		1		الصف الثاني						
							1		3		3		1	الصف الثالث					
							1		4		6		4		1				
							1		5		10		10		5		1		
							1		6		15		20		15		6		1

لاحظ أن الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف هي 1، ويتشكل كل عدد آخر عن طريق إضافة العددين الموجودين مباشرة فوق هذا العدد في الصف السابق. يمكن تحديد مثلث باسكال إلى ما لا نهاية باستخدام العلاقة التكرارية لدرجة أنه يمكن استخدام المعامل في الصف ذو الترتيب $(n - 1)$ لتحديد المعامل في الصف ذي الترتيب n .

1 مثلث باسكال

المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية استخدام الأنماط الموجودة في مثلث باسكال لتفكيك ذات حدّين مرفوعة إلى أية قوة قوامها عدد كلي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

a. $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

b. $(3x + 2)^5 = 243x^5 + 810x^4 + 1080x^3 + 720x^2 + 240x + 32$

2 استخدم مثلث باسكال لتفكيك

$(x - 2y)^6 = x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6$

نصيحة دراسية

إيجاد الصف الصحيح دائماً ما يكون العدد الثاني في أي صف من مثلث باسكال هو ذاته القوة لذات الحدّين. على سبيل المثال، العدد الثاني في الصف السابع من مثلث باسكال هو 7.

مثال 1 قوة مجموع ذات الحدّين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

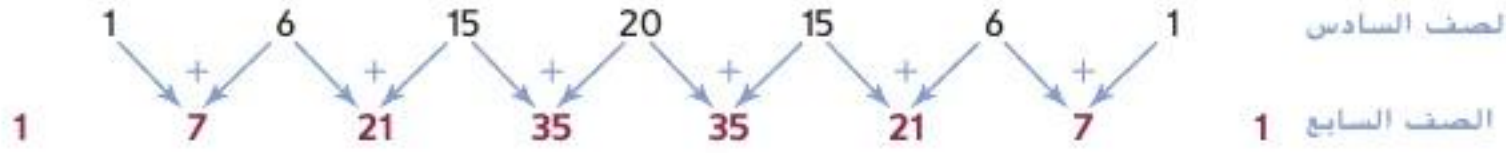
a. $(a + b)^7$

الخطوة 1 اكتب متسلسلة $(a + b)^7$. واحذف المعاملات. لأن القوة تساوي 7، يجب أن تحتوي هذه المتسلسلة على 1 أو 7 أو 8 حدود. استخدم نمط تزايد الأسس أو تناقصها لاستكمال المتسلسلة.

أسس a تتناقص من 7 إلى 0.
أسس b تتزايد من 0 إلى 7.

$a^7b^0 + a^6b^1 + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + a^1b^6 + a^0b^7$

الخطوة 2 استخدم الأعداد في الصف السابع من مثلث باسكال كمعاملات للحدود. لإيجاد هذه الأعداد، وسّع مثلث باسكال إلى الصف السابع.



$(a + b)^7 = 1a^7b^0 + 7a^6b^1 + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7a^1b^6 + 1a^0b^7$
بسط

b. $(3x + 2)^4$

الخطوة 1 اكتب متسلسلة $(a + b)^4$. واحذف المعاملات وعوّض a بـ $3x$ و b بـ 2. تحتوي هذه المتسلسلة على 1 أو 4 أو 5 حدود.

أسس $3x$ تتناقص من 4 إلى 0.
أسس 2 تتزايد من 0 إلى 4.

$(3x)^4(2)^0 + (3x)^3(2)^1 + (3x)^2(2)^2 + (3x)^1(2)^3 + (3x)^0(2)^4$

الخطوة 2 الأعداد في الصف الرابع من مثلث باسكال هي 1 و 4 و 6 و 4 و 1. استخدم هذه الأعداد كمعاملات لحدود المتسلسلة، ثم بسط.

$(3x + 2)^4 = 1(3x)^4(2)^0 + 4(3x)^3(2)^1 + 6(3x)^2(2)^2 + 4(3x)^1(2)^3 + 1(3x)^0(2)^4$
 $= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

تمرين موجّه

1A. $(a + b)^8$

1B. $(2x + 3y)^5 = 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$

1A. $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

لتفكيك طرح ذات حدّين، أعد كتابة التعبير في صورة مجموع ذات حدّين.

مثال 2 قوة طرح ذي الحدّين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك $(x - 4y)^5$.

لأن $(x - 4y)^5 = [x + (-4y)]^5$ ، اكتب متسلسلة $(a + b)^5$ مع التعويض عن a باستخدام x وعن b باستخدام $-4y$. استخدم أعداد الصف الخامس من مثلث باسكال، 1 و 5 و 10 و 10 و 5 و 1 كمعاملات ذات الحدّين. ثم بسط.

$(x - 4y)^5 = 1x^5(-4y)^0 + 5x^4(-4y)^1 + 10x^3(-4y)^2 + 10x^2(-4y)^3 + 5x^1(-4y)^4 + 1x^0(-4y)^5$
 $= x^5 - 20x^4y + 160x^3y^2 - 640x^2y^3 + 1280xy^4 - 1024y^5$

تمرين موجّه

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

2A. $(2x - 7)^3 = 8x^3 - 84x^2 + 294x - 343$ 2B. $(2x - 3y)^4 = 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$

نصيحة دراسية

تبدل العلامات لاحظ أنه عند تفكيك قوة أسية لطرح ذات حدّين، تتبدل علامات حدود المتسلسلة.

التركيز على محتوى الرياضيات

مثلث باسكال يوجد العديد من الأنماط الإضافية في مثلث باسكال. لاحظ أن الخطوط القطرية على الحافتين اليمنى واليسرى تتكون من العدد 1. والخطوط القطرية المجاورة لها هي أعداد طبيعية. والخطوط القطرية الداخلية التالية هي أعداد مثلثية.

2 نظرية ذات الحدين بيننا من الممكن تفكيك أي ذات حدين باستخدام مثلث باسكال. تؤدي الطريقة التكرارية لحساب معاملات ذات الحدين إلى جعل تفكيكات $(a + b)^n$ للقيم الكبيرة n مستهلكة للوقت. وقد تم وضع صيغة واضحة لحساب كل معامل من معاملات ذات الحدين من خلال النظر إلى $(a + b)^n$ باعتباره ناتج ضرب عوامل n التي يساهم فيها كل عامل بالرمز a أو b في كل ناتج ضرب في عملية التفكيك.

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ عوامل}} = \dots + \underbrace{a^n - r b^r}_{\text{إذا كان هناك عدد } r \text{ من الحرف } b, \text{ فإن هناك العدد } (n - r) \text{ من الحرف } a.}$$

فكر في $(a + b)^3$. هناك ثلاث طرق لاختيار a و 2 من كل عامل من العوامل الثلاثة لتكوين ناتج الضرب ab^2 . و 3 هو معامل ذات الحدين للحد ab^2 في التعبير.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\left. \begin{aligned} (a + b)(a + b)(a + b) &= \dots + ab^2 + \dots \\ (a + b)(a + b)(a + b) &= \dots + ab^2 + \dots \\ (a + b)(a + b)(a + b) &= \dots + ab^2 + \dots \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{3 طرق}}$$

لأن العوامل التي لا تساهم بحرف b سوف تساهم افتراضياً بحرف a . فيمكن ببساطة النظر إلى عدد طرق تكوين ناتج الضرب $a^n - r b^r$ باعتباره عدد طرق اختيار عوامل r التي تساهم بحرف b في ناتج الضرب من بين عوامل n المتوفرة. هذا هو التوفيق المحدد بالعلاقة $n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$. ويكتب كذلك بالصورة $\binom{n}{r}$.

قراءة في الرياضيات

التوافيق الرمز $n C_r$ و $\binom{n}{r}$ يمكن قراءتهما على أنها توفيق أشياء عددها n يؤخذ منها r في كل مرة. لمراجعة توافيق الحسابات.

المفهوم الأساسي صيغة معاملات ذات الحدين $(a + b)^n$

الشرح معامل ذات الحدين للحد $a^n - r b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ محدد بالعلاقة $n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$.

مثال

$$(a + b)^3 = {}_3C_0 a^3 b^0 + {}_3C_1 a^2 b^1 + {}_3C_2 a^1 b^2 + {}_3C_3 a^0 b^3$$

$$= \frac{3!}{(3-0)! 0!} a^3 + \frac{3!}{(3-1)! 1!} a^2 b + \frac{3!}{(3-2)! 2!} a b^2 + \frac{3!}{(3-3)! 3!} b^3$$

$$= 1a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + 1b^3$$

في المثال أعلاه، لاحظ أنه بالنسبة إلى الحد الأول $r = 0$. وبالنسبة إلى الحد الثاني $r = 1$. وبالنسبة إلى الحد الثالث $r = 2$. وهكذا. بشكل عام، لإيجاد معامل ذات الحدين للحد رقم k في تعبير بالصورة $(a + b)^n$. استخدم الصيغة $n C_r$ وافترض أن $r = k - 1$.

مثال 3 إيجاد معاملات ذات الحدين

جد معامل الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$.

لإيجاد معامل الحد الخامس، جد قيمة $n C_r$ حيث $n = 7$ و $r = 5 - 1 = 4$.

$${}_7C_4 = \frac{7!}{(7-4)! 4!} \quad {}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

أطرح.

$$= \frac{7!}{3! 4!}$$

أعد كتابة $7!$ بالصورة $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!$ واختصر المضروببات المشتركة.

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3! 4!}$$

بسط.

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

معامل الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$ هو 53.

التحقق من المثال 1a. تعلم أن الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$ هو $4b^3 a^3$. ✓

تمرين موجّه

جد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك.

3A. $(x + y)^9$. الحد السادس 126

3B. $(a - b)^{13}$. الحد الثالث 78

2 نظرية ذات الحدين

المثالان 4 و 3 يوضحان كيفية إيجاد معاملات ذات الحدين باستخدام صيغة معاملات ذات الحدين. ويوضح **المثال 5** كيفية استخدام معاملات ذات الحدين لإيجاد الاحتمال. ويوضح **المثال 6** كيفية استخدام نظرية ذات الحدين لتفكيك ذات حدين. ويوضح **المثال 7** كيفية كتابة تفكيك ذات حدين باستخدام الرمز سيجم.

مثال إضافي

3 جد معامل الحد الرابع في تفكيك $(a - b)^{10}$. 120

إرشاد للمعلمين الجدد

معاملات ذات الحدين بالنسبة لـ $n C_r$. فإن n هي أس ذات الحدين و r أقل بمقدار 1 عن العدد الذي يمثل الحد.

التركيز على محتوى الرياضيات

التوافيق ينطوي استخدام نظرية ذات الحدين لإيجاد معاملات تفكيك ذات حدين على توافيق. وتتضمن التوافيق إيجاد عدد الطرق k التي يمكن من خلالها اختيار العناصر من بين مجموعة تتألف من n من العناصر. وبالتالي، $n C_k = \binom{n}{k}$ تُقرأ في بعض الأحيان " n فوق k " ويطلق عليها توافيق n و k .

أمثلة إضافية

4 جد معامل الحد x^7y في تفكيك $(3x - 4y)^8$. **-69,984**

5 الألعاب أثناء دور اللاعب في إحدى الألعاب اللوحية، يجب أن يدير اللاعب قرصًا دوارًا. وتمثل الألوان الأربعة المحتملة التي يمكن للقرص الدوار الوقوف عليها في الأخضر أو الأزرق أو الأحمر أو الأصفر. فإذا كان احتمال جميع الألوان الأربعة متساوية، فما احتمال أن يتوقف القرص على الأخضر 5 مرات من أصل 10 مرات دوران؟ **حوالي 5.84%**

مثال 4 معاملات ذات الحدين بخلاف 1

جد معامل الحد x^7y^2 في تفكيك $(4x - 3y)^9$.

من أجل أن تكون $(4x - 3y)^9$ بالصورة $(a + b)^n$ ، افترض أن $b = -3y$ و $a = 4x$. معامل الحد الذي يحتوي على $a^n - b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ محدد بالعلاقة nCr . إذا، لإيجاد معامل ذات الحدين للحد الذي يحتوي على a^7b^2 في تفكيك $(a + b)^9$ ، جد قيمة nCr حيث $n = 9$ و $r = 2$.

$$\begin{aligned} {}_nC_2 &= \frac{9!}{(9-2)!2!} & {}_nC_r &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{9!}{7!2!} & \text{اشرح.} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{7! \cdot 2!} & \text{أعد كتابة 9! بالصورة 9 \cdot 8 \cdot 7! واختصر المضروبوات المشتركة.} \\ &= \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 & \text{بسط.} \end{aligned}$$

إذا، معامل ذات الحدين للحد a^7b^2 في $(a + b)^9$ هو 36. ضع $4x$ مكان a وضع $-3y$ مكان b لإيجاد معامل الحد x^7y^2 في تفكيك ذات الحدين الأصلية.

$$\begin{aligned} 36a^7b^2 &= 36(4x)^7(-3y)^2 & b &= -3y \text{ و } a = 4x \\ &= 5,308,416x^7y^2 & \text{بسط.} \end{aligned}$$

إذا، معامل الحد x^7y^2 في تفكيك $(4x - 3y)^9$ هو 5,308,416.

تمرين موجّه

جد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك ذات حدين.

4A. $(2x - 3y)^8$ الحد x^3y^5 **-108,864** 4B. $(2p + 1)^{15}$ الحد الحادي عشر **96,096**

يمكنك استخدام معاملات تعابير ذات الحدين لحل مسائل من الحياة اليومية التي يكون فيها فقط مخرجات من حدث. والمسائل التي يمكن حلها باستخدام تفكيك ذات الحدين يُطلق عليها تجارب ذات حدين. وتوجد هذه التجارب فقط إذا كانت: (1) التجربة تتكون من عدد n من المحاولات المتطابقة و (2) كل محاولة ينتج عنها واحد من مخرجين و (3) المحاولات مستقلة.

بالنسبة إلى العدد n من المحاولات المستقلة لتجربة ما، إذا كانت احتمال النجاح p واحتمال الإخفاق $q = 1 - p$ ، فإن الحد ${}_nC_x p^x q^{n-x}$ في التفكيك $(p + q)^n$ يعطي احتمال x من النجاحات في عدد n من المحاولات.

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام معاملات ذات الحدين

المسؤول احتمال تصدي ماجد لضربة في حالة استقبال الضربات هو $\frac{1}{5}$. فما احتمال تصدي ماجد لأربع ضربات خلال استقبال 10 ضربات تالية؟

النجاح في هذا الموقف هو تصدي ماجد لضربة، إذا $p = \frac{1}{5}$ و $q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. كل استقبال يمثل محاولة. إذا $n = 10$ ، تريد إيجاد احتمال نجاح ماجد 4 مرات في 10 محاولات، إذا افترض أن $x = 4$. لإيجاد هذه الاحتمال، جد قيمة الحد ${}_nC_x p^x q^{n-x}$ في تفكيك $(p + q)^n$.

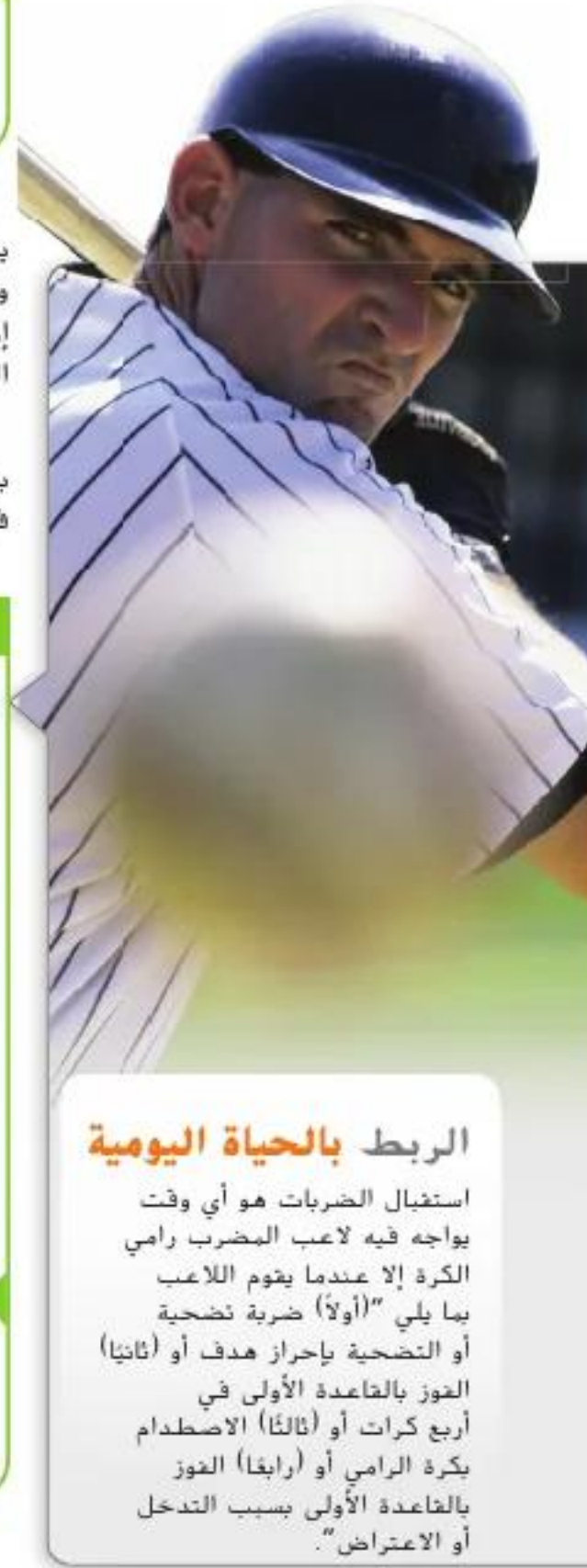
$$\begin{aligned} {}_nC_x p^x q^{n-x} &= {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^{10-4} & p &= \frac{1}{5} \text{ و } q = \frac{4}{5} \text{ و } n = 10 \text{ و } x = 4 \\ &= \frac{10!}{(10-4)!4!} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6 & {}_nC_r &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &\approx 0.088 & \text{استخدم الحاسبة.} \end{aligned}$$

إذا، احتمال تصدي ماجد لأربع ضربات خلال استقبال 10 ضربات تالية هي تقريبًا 0.088 أو 8.8%.

تمرين موجّه

5. **إلقاء قطع النقد المعدنية** تم إلقاء قطعة معدنية سليمة ومتوازنة 8 مرات. جد احتمال كل ناتج.

A. 3 صور بالضبط **$\frac{7}{32}$ أو نحو 21.88%** B. 6 أوجه كتابة بالضبط **$\frac{7}{64}$ أو نحو 10.94%**



الربط بالحياة اليومية

استقبال الضربات هو أي وقت يواجه فيه لاعب المضرب رامي الكرة إلا عندما يقوم اللاعب بـ "بلي" (أو "أولاً") ضربة تضحية أو التضحية بإحراز هدف أو (ثانيًا) الفوز بالقاعدة الأولى في أربع كرات أو (ثالثًا) الاصطدام بكرة الرامي أو (رابعًا) الفوز بالقاعدة الأولى بسبب التدخل أو الاعتراض.

المصدر: Major League Baseball

التدريس المتمايز

BL OL AL

المتعلمون أصحاب النمط السمعي/الموسيقى اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لكتابة قصيدة أو كلمات نشيد إيقاعي يصف نظرية ذات الحدين. ويتبغي أن يتضمن النشيد عدة أنماط تحدث في النظرية.

أمثلة إضافية

6 استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

a. $(2t + 3u)^3$ $8t^3 + 36t^2u + 54tu^2 + 27u^3$

b. $(a - 2b^2)^4$ $a^4 - 8a^3b^2 + 24a^2b^4 - 32ab^6 + 16b^8$

7 مثل تفكيك $(3x - 5y)^{17}$ مستخدماً الرمز سيجما.

$$\sum_{r=0}^{17} \binom{17}{r} (3x)^{17-r} (-5y)^r$$

إجابات إضافية

- $16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$
- $n^5 + 5n^4m + 10n^3m^2 + 10n^2m^3 + 5nm^4 + m^5$
- $64a^3 - 48a^2b + 12ab^2 - b^3$
- $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
- $2187x^7 + 10,206x^6y + 20,412x^5y^2 + 22,680x^4y^3 + 15,120x^3y^4 + 6048x^2y^5 + 1344xy^6 + 128y^7$
- $n^6 - 24n^5 + 240n^4 - 1280n^3 + 3840n^2 - 6144n + 4096$
- $81c^4 - 108c^3d + 54c^2d^2 - 12cd^3 + d^4$
- $m^5 - 5m^4a + 10m^3a^2 - 10m^2a^3 + 5ma^4 - a^5$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $81p^4 - 216p^3q + 216p^2q^2 - 96pq^3 + 16q^4$
- 3360
- 114,688
- 262,440
- 101,376
- 56
- 1,088,640
- 126
- 924
- 280
- 5670
- 1,088,640
- 145,152
- $\frac{35}{27}$
- $-\frac{63}{8}$
- 21,504
- 95,681,250

صيغة إيجاد معاملات تفكيك ذات حدين نقودنا إلى نظرية عن تفكيك القوى أو الأسس لذات الحدين تُسمى **نظرية ذات الحدين**.

المفهوم الأساسي نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n ، تفكيك $(b + a)^n$ يغطي بالعلاقة

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_nC_n a^0 b^n,$$

حيث $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

ستثبت نظرية ذات الحدين في التمرين 75.

مثال 6 تفكيك ذات حدين باستخدام نظرية ذات الحدين

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

a. $(3x - y)^4$

طبق نظرية ذات الحدين لتفكيك $(a + b)^4$ حيث $a = 3x$ و $b = -y$.

$$\begin{aligned} (3x - y)^4 &= {}_4C_0 (3x)^4 (-y)^0 + {}_4C_1 (3x)^3 (-y)^1 + {}_4C_2 (3x)^2 (-y)^2 \\ &\quad + {}_4C_3 (3x)^1 (-y)^3 + {}_4C_4 (3x)^0 (-y)^4 \\ &= 1(81x^4)(1) + 4(27x^3)(-y) + 6(9x^2)(y^2) + 4(3x)(-y^3) + 1(1)(y^4) \\ &= 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

b. $(2p + q^2)^5$

طبق نظرية ذات الحدين لتفكيك $(a + b)^5$ حيث $a = 2p$ و $b = q^2$.

$$\begin{aligned} (2p + q^2)^5 &= {}_5C_0 (2p)^5 (q^2)^0 + {}_5C_1 (2p)^4 (q^2)^1 + {}_5C_2 (2p)^3 (q^2)^2 + {}_5C_3 (2p)^2 (q^2)^3 + {}_5C_4 (2p)^1 (q^2)^4 \\ &\quad + {}_5C_5 (2p)^0 (q^2)^5 \\ &= 1(32p^5)(1) + 5(16p^4)(q^2) + 10(8p^3)(q^4) + 10(4p^2)(q^6) + 5(2p)(q^8) + 1(1)(q^{10}) \\ &= 32p^5 + 80p^4q^2 + 80p^3q^4 + 40p^2q^6 + 10pq^8 + q^{10} \end{aligned}$$

$262,144x^{12} - 393,216x^{10}y + 245,760x^8y^2 -$

$81,920x^6y^3 + 15,360x^4y^4 - 1536x^2y^5 + 64y^6$

6A. $(5m + 4)^3$ $125m^3 + 300m^2 + 240m + 64$ 6B. $(8x^2 - 2y)^6$

تمرين موجّه

لأن تفكيك ذات الحدين هو مجموع، كثيراً ما تتم كتابة نظرية ذات الحدين باستخدام الرمز سيجما. بالإضافة إلى ذلك، الرمز ${}_nC_r$ يتم عادة استبداله بـ $\binom{n}{r}$.

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مثال 7 كتابة تفكيك ذات حدين باستخدام الرمز سيجما

مثل تفكيك $(5x - 7y)^{20}$ باستخدام الرمز سيجما.

طبق نظرية ذات الحدين لتمثيل تفكيك $(a + b)^{20}$ باستخدام الرمز سيجما، حيث $a = 5x$ و $b = -7y$.

$$(5x - 7y)^{20} = \sum_{r=0}^{20} \binom{20}{r} (5x)^{20-r} (-7y)^r$$

تمرين موجّه

7. مثل تفكيك $(3a + 12b)^{30}$ باستخدام الرمز سيجما. $\sum_{r=0}^{30} \binom{30}{r} (3a)^{30-r} (12b)^r$

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-44 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع بالنسبة للتمارين 31-38. قد يرتكب الطلاب بعض الأخطاء في حالة عدم كتابة جميع العوامل قبل القيام بالحسابات. شجع الطلاب على كتابة جميع العوامل.

إجابات إضافية

39. $\sum_{r=0}^{15} \binom{15}{r} (2q)^{15-r} (3)^r$
40. $\sum_{r=0}^{25} \binom{25}{r} (m)^{25-r} (-8n)^r$
41. $\sum_{r=0}^{31} \binom{31}{r} (11x)^{31-r} (y)^r$
42. $\sum_{r=0}^{19} \binom{19}{r} (4a)^{19-r} (7b)^r$
43. $\sum_{r=0}^{22} \binom{22}{r} (3f)^{22-r} \left(-\frac{3}{4}g\right)^r$
44. $\sum_{r=0}^{36} \binom{36}{r} \left(\frac{1}{2}s\right)^{36-r} (-5t)^r$
47. $16d^4 + 32\sqrt{5}d^3 + 120d^2 + 40\sqrt{5}d + 25$
48. $a^2\sqrt{a} - 5a^2\sqrt{b} + 10a\sqrt{ab} - 10ab\sqrt{b} + 5\sqrt{ab}^2 - b^2\sqrt{b}$
49. $1024s^5 + 640s^4t + 160s^3t^2 + 20s^2t^3 + \frac{5}{4}st^4 + \frac{1}{32}t^5$
50. $\frac{1}{y^6} - \frac{18z}{y^5} + \frac{135z^2}{y^4} - \frac{540z^3}{y^3} + \frac{1215z^4}{y^2} - \frac{1458z^5}{y} + 729z^6$

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين. (البثالان 1 و 2) 1-10. انظر الهامش.

- $(2 + x)^4$
- $(n + m)^5$
- $(4a - b)^3$
- $(x + y)^6$
- $(3x + 2y)^7$
- $(n - 4)^6$
- $(3c - d)^4$
- $(m - a)^5$
- $(a - b)^3$
- $(3p - 2q)^4$

جد معامل الحد المشار إليه في كل مقدار. (البثالان 3 و 4) 11-26. انظر الهامش.

11. $(x - 2)^{10}$. الحد الخامس
12. $(4m + 1)^8$. الحد الثالث
13. $(x + 3y)^{10}$. الحد الثامن
14. $(2c - d)^{12}$. الحد السادس
15. $(a + b)^8$. الحد الرابع
16. $(2a + 3b)^{10}$. الحد الخامس
17. $(x - y)^9$. الحد السادس
18. $(x + y)^{12}$. الحد السابع
19. $(x + 2)^7$. الحد الرابع
20. $(a - 3)^8$. الحد الخامس
21. $(2a + 3b)^{10}$. الحد a^6b^4
22. $(2x + 3y)^9$. الحد x^6y^3
23. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^7$. الحد الرابع
24. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^{10}$. الحد السادس
25. $(x + 4y)^7$. الحد x^2y^5
26. $(3x + 5y)^{10}$. الحد x^6y^4

27. الاختبار يخضع علي لاختبار به قسم يحتوي على 16 من أسئلة صواب أم خطأ. (امثال 3)

- كم عدد مجموعات الإجابات المحتملة التي تحتوي بالضبط على 12 إجابة "خطأ" صحيحة؟ 1820
- كم عدد مجموعات الإجابات المحتملة التي تحتوي بالضبط على 8 إجابة "صواب" صحيحة؟ 12,870

28. الأعمال احتمال تحقيق مندوب مبيعات لصفحة بيع هي $\frac{1}{5}$ مندوب المبيعات لديه 12 موعداً هذا الأسبوع. (امثال 5)

- جد احتمال عدم تحقيق مندوب المبيعات لأي صفحات هذا الأسبوع. 6.87%
- ما احتمال تحقيق مندوب المبيعات 3 صفحات بالضبط هذا الأسبوع؟ 23.62%
- جد احتمال تحقيق مندوب المبيعات 10 صفحات هذا الأسبوع. 0.0004%

29. الأحياء ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن العاملين بحديقة الحيوان يتوقعون ولادة 30 من نسل الجييون هذا العام. (امثال 5)

- ما احتمال عدم وجود ذكور ضمن نسل الجييون هذا العام؟ 0.12%
- جد احتمال وجود ذكرين بالضبط ضمن نسل الجييون هذا العام. 3.37%
- ما احتمال عدم وجود 23 من الإناث ضمن نسل الجييون هذا العام؟ 15.38%

30. البولينيغ تحرز سالي متوسط ضربتين في كل 10 إطارات. فما احتمال إحراز سالي 4 ضربات بالضبط في الإطارات العشرة التالية؟ (امثال 5) 8.81%

لوحة نقاط صالة البولينيغ

الإجمالي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
سالي	7/	x/	5/4	9/	8/	x/	x/	7/0	x/	8/1
	20	39	48	66	86	113	130	137	156	165
الإجمالي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين. (امثال 6) 31-38. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

31. $(4t + 3)^5$
32. $(8 - 5y)^3$
33. $(2m - n)^6$
34. $(9h + 2j)^4$
35. $(3p + q)^7$
36. $(a^2 - 2b)^8$
37. $(7c^2 + 3d)^5$
38. $(2w - 4x^3)^7$

مثّل تفكيك كل تعبير باستخدام الرمز سيجمّا. (امثال 7) 39-44. انظر الهامش.

39. $(2q + 3)^{15}$
40. $(m - 8n)^{25}$
41. $(11x + y)^{31}$
42. $(4a + 7b)^{19}$
43. $\left(3f - \frac{3}{4}g\right)^{22}$
44. $\left(\frac{1}{2}s - 5t\right)^{36}$

45. ألعاب الكمبيوتر في لعبة كمبيوتر، عند فتح صندوق كنز، يتم العثور على قطع ذهبية أو أحجار. واحتمال وجود قطع ذهبية هي $\frac{5}{6}$.

- يتم فتح صندوق الكنز 15 مرة في كل لعبة. في لعبة، بكم طريقة يمكن فتح الصندوق والعثور على قطع ذهبية 9 مرات بالضبط؟ 5005
- ما احتمال العثور لاعب على قطع ذهبية أكثر من 12 مرة؟ 53.22%

46. التواصل المجتمعي في مأوى تقديم أغذية، يتم استقبال الأغذية المعبية وتوزيعها على المحتاجين في المجتمع. يتحقق متطوعون من جودة الطعام قبل توزيعه. واحتمال توزيع غذاء معلب على المحتاجين بعد استلامه في بنك الطعام هي $\frac{4}{5}$.

- يتحقق كل متطوع من جودة 30 علب أغذية كل ساعة. في ساعة واحدة، بكم طريقة يمكن التحقق من جودة غذاء معلب والتبرع به 23 مرة بالضبط؟ 2,035,800
- ما احتمال أن يقوم متطوع يتحقق من جودة المبيعات بالتخلص منها أقل من 4 مرات؟ 12.27%

47-50. انظر الهامش. استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك وتبسيط كل تعبير مما يلي.

47. $(2d + \sqrt{5})^4$
48. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^5$
49. $\left(4s + \frac{1}{2}t\right)^5$
50. $\left(\frac{1}{y} - 3z\right)^6$

إجابات إضافية

61. $g(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 113x + 96$
62. $g(x) = x^5 - 20x^4 + 160x^3 - 640x^2 + 1280x - 1023$
63. $g(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 1$
64. $g(x) = x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 277x^4 + 536x^3 + 600x^2 + 354x + 84$

66. في تفكيك $(ax + b)^5$ العامل العددي للحد الثاني هو 400 والعامل العددي للحد الثالث هو 2000. جـد قيمتي a و b .

$$b = 5 \text{ و } a = 2$$

67. **البحث** بالرغم من أن مثلث باسكال يُنسب إلى بلير باسكال، لكن قام غيره من علماء الرياضيات بتطبيق معرفتهم بالمثلثات قبل باسكال ببنات الأعوام. استخدم الإنترنت أو غيره من المصادر للبحث على الأقل عن شخص واحد استخدم خواص المثلثات قبل مولد باسكال. ثم صف الأنماط الأخرى الموجودة في مثلث باسكال وليست مذكورة في هذا الدرس.

انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. **تحليل الخطأ** تحاول هناء وليلى إيجاد الحد السادس من تفكيك $(x + y)^{14}$. تقول هناء إن معامل الحد هو 3003. وتعتقد ليلي أنه 2002. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **قامت هناء بإيجاد قيمة nC_r حيث $r = 6$ وليس $r = 6 - 1$ أو 5.**

69. **التحدي** صف إستراتيجية تُستخدم فيها نظرية ذات الحدين لتفكيك $(x + y + z)^n$. ثم اكتب وبسط تفكيك التعبير. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

70. **البرهان** مجاميع المعاملات في الصفوف الخمسة الأولى من مثلث باسكال موضحة أدناه.

0	2 =	1	0	الصف
1	2 =	1 + 1	1	الصف
2	2 =	1 + 2 + 1	2	الصف
3	2 =	1 + 3 + 3 + 1	3	الصف
4	2 =	1 + 4 + 6 + 4 + 1	4	الصف
5	2 =	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	5	الصف

أثبت أن مجموع المعاملات في الصف رقم n من مثلث باسكال هو 2^n . (تلميح: اكتب 2^n بالصورة $(1 + 1)^n$). ثم استخدم نظرية ذات الحدين للتفكيك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

71. **الكتابة في الرياضيات** صف كيفية إيجاد الأعداد في كل صف من مثلث باسكال. ثم اكتب بعض الجمل لوصف وجه الاختلاف بين تفكيك $(a + b)^{n-1}$ و $(a + b)^n$ وبين تفكيك $(a + b)^n$. **انظر الهامش.**

72. **التبرير** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحياناً أم دائماً أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

في حالة رفع ذات حدين إلى القوة 5، يكون للحدين الأوسطين من التفكيك المعاملات ذاتها. **أحياناً؛ الحدان الأوسطان لهما المعامل ذاته فقط إذا كانت معاملات كل حد في ذات الحدين متساوية.**

73. **التحدي** اشرح كيفية إيجاد حد في تفكيك $(\frac{1}{2v} + 6v^7)^8$ بحيث لا يحتوي على المتغير v . ثم جـد الحد. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

74. **البرهان** استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات نظرية ذات الحدين. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

جـد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك.

51. $(k - \sqrt{5})^9$. الحد الخامس 3150

52. $(\sqrt{2} + 2c)^{10}$. الحد الأوسط $32,256\sqrt{2}$

53. $(\frac{1}{4}p + q)^{11}$. الحد السابع $\frac{231}{512}$

54. $(\sqrt{h} - 3\sqrt{j})^{11}$. الحد السادس -112,266

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك وتبسيط كل قوة لعدد مركب.

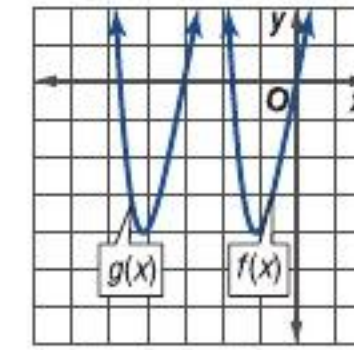
55. $(i + 2)^4$ -7 + 24i 56. $(i - 3)^3$ -18 + 26i

57. $(1 - 4i)^5$ 1121 - 404i 58. $(2 + \sqrt{7}i)^4$ -103 - 24\sqrt{7} i

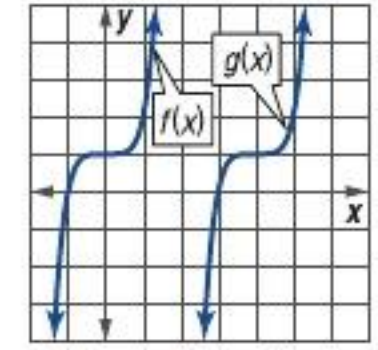
59. $(\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{1}{2})^3$ $\frac{5 + \sqrt{2}i}{8}$ 60. $(\sqrt{-16}i + 3)^5$ 2537.7051 -1

التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x)$. استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد الدالة كثيرة الحدود لـ $g(x)$ بالصورة القياسية. 61-64. **انظر الهامش.**

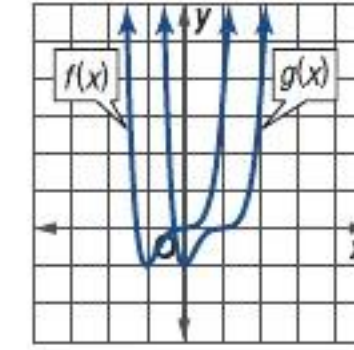
61. $f(x) = x^4 + 5x$
 $g(x) = f(x + 3)$



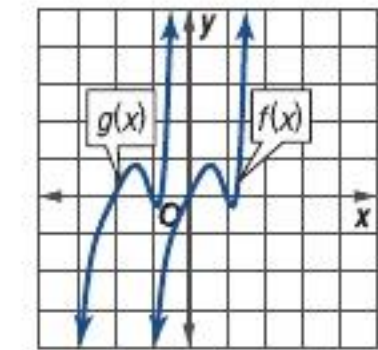
62. $f(x) = x^5 + 1$
 $g(x) = f(x - 4)$



63. $f(x) = x^6 + 2x^3$
 $g(x) = f(x - 1)$



64. $f(x) = x^7 - 3x^4 + 2x$
 $g(x) = f(x + 2)$



65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم نظرية ذات الحدين لاستكشاف ناتج قسمة فرق $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ لدوال القوة.

a. **تحليلياً** استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك وتبسيط ناتج قسمة فرق $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^5$, $f(x) = x^6$, $f(x) = x^7$. استخدم النمط لتبسيط ناتج قسمة فرق $f(x) = x^n$.

b. **جدولياً** جـد قيمة كل تعبير في الجزء a حيث $h = 0.1, 0.01$. $0.0001, 0.001$ وسجل النتائج في جدول. ماذا تلاحظ؟

c. **بيانياً** مثل بيانياً مجموعة الدوال الناتجة من الجزء b حيث $f(x) = x^3$ على المستوى الإحداثي ذاته. ماذا تلاحظ؟

d. **تحليلياً** بيننا تقرب h من 0. اكتب تعبير ناتج قسمة فرق $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب. nx^{n-1}

a-c. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 68.

ينبغي أن يدرك الطلاب أن

المعامل هو ${}_{14}C_5 = 2002$.

وينبغي أن يتذكر الطلاب أن

 $r = n - 1$ حيث n رتبة الحد.وقد حسبت هنا ${}_{14}C_6$.

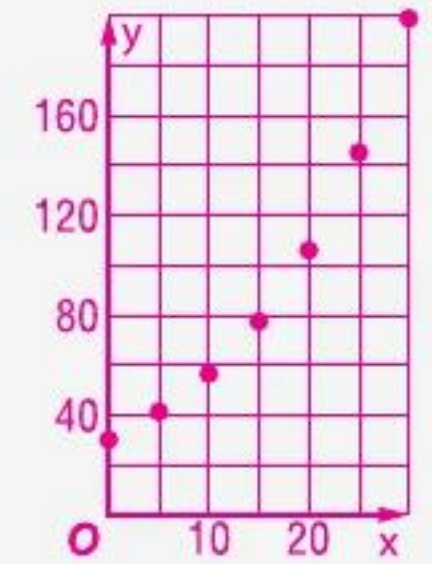
4 التقويم

عين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة الصفوف الأربعة الأولى لمثلث باسكال لتفكيك ذات الحدين $(x + y)^n$.

إجابات إضافية

71. الإجابة النموذجية: العددان الأول والأخير من كل صف يساويان 1. ويتكون كل عدد آخر من خلال إضافة العددين الموجودين مباشرة أعلى هذا العدد في الصف السابق. ويشتمل تفكيك $(a + b)^{n-1}$ على n من الحدود، بينما يشتمل تفكيك $(a + b)^n$ على $n + 1$ من الحدود. وتكون معاملات حدود تفكيك $(a + b)^n$ جميعها موجبة، بينما يكون كل معامل آخر في تفكيك $(a - b)^n$ سالبًا.

91a.



برهن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n أو جـد مثلاً مضاداً. (الدرس 3-4)
75. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ **الإجابة النموذجية: $n = 3$**
76. $10^{2n-1} + 1$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

77. **علم الأنساب** في كتاب الجذور، تتبع المؤلف تاريخ عائلة لعدة أجيال. إذا كان بإمكانك تتبع تاريخ عائلتك ببغداد 15 جيلاً، ابتداءً من والدك، فكم عدد من سنجد من أسلافك؟ (الدرس 3-3) **65,534**

اكتب كل معادلة بالصورة القياسية، وحدد القطع المخروطي المرتبط.

78. $x^2 + y^2 - 16x + 10y + 64 = 0$ 79. $y^2 + 16x - 10y + 57 = 0$ 80. $x^2 + y^2 + 2x + 24y + 141 = 0$

$(x+1)^2 + (y+12)^2 = 4$ ، دائرة $(y-5)^2 = -16(x+2)$ ، قطع مكافئ $(x-8)^2 + (y+5)^2 = 25$ ، دائرة

الرصيد (AED)	الزمن المتبقي (أعوام)
30.00	0
41.10	5
56.31	10
77.16	15
105.71	20
144.83	25
198.43	30

81. **المدخلات** أودع والد أمانى 30 AED في حساب بنكي لها. ثم نسباً أمر المال ولم يقوم بعمليات إيداع أو سحب. ويوضح الجدول رصيد الحساب لعدة أعوام.

- a. ارسم مخطط انتشار للبيانات.
b. جد دالة أسية لتمثيل للبيانات.
c. استخدم الدالة لتوقع رصيد الحساب خلال 41 عامًا.

انظر الهامش.

$$y = 30(1.065)^x$$

$$\approx 396.70 \text{ AED}$$

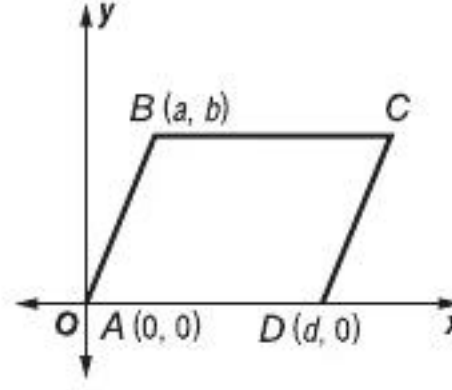
مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. تقدم المعلمة ميسون اختباراً قصيراً من أربعة أسئلة للاختيار من متعدد. ويمكن الإجابة عن كل سؤال باختيار A أو B أو C أو D. بكم طريقة يمكن لطالب الإجابة عن الأسئلة باستخدام كل إجابة A أو B أو C أو D مرة واحدة؟ **C**

- A 20 C 24
B 22 D 26

85. **مراجعة** أي تعبير يكافئ $(2x-2)^4$ ؟ **H**

- F $16x^4 + 64x^3 - 96x^2 - 64x + 16$
G $16x^4 - 32x^3 - 192x^2 - 64x + 16$
H $16x^4 - 64x^3 + 96x^2 - 64x + 16$
J $16x^4 + 32x^3 - 192x^2 - 64x + 16$

82. SAT/ACT في الشكل أدناه، $ABCD$ هو متوازي أضلاع.ما إحداثيات النقطة C؟ **D**

- A $(d + a, y)$
B $(d - a, b)$
C $(d + x, b)$
D $(d + a, b)$
E $(d + b, a)$

83. **مراجعة** ما قيمة $\frac{12}{18!} \cdot 4$ ؟ **F**

- H 660
J 710

- F 495
G 500

التدريس المتميز BL

التوسع استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد قيمة $(0.98)^8$. قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة. **0.85**

الاستقراء الرياضي

3-5

الدرس

لماذا؟

الحالي

السابق

نقاط 2 مناطق 2 = 2 ¹	نقاط 3 مناطق 4 = 2 ²	نقاط 4 مناطق 8 = 2 ³

بالنسبة لـ n نقاط، هل توجد 2^{n-1} مناطق؟

• برسم عمر نقاطاً على دائرة ويربط كل زوج من النقاط بوتر، فيقسم الدائرة إلى مناطق. بعد رسم دوائر فيها 2 و 3 و 4 نقاط، يخمن عمر أنه عندما يكون هناك n على محيط دائرة، فإن توصيل كل زوج من النقاط سيقسم الدائرة إلى مناطق عددها 2^{n-1} . في حين قد يبدو تخمينه صحيحاً عندما $n = 2$ و 3 و 4، ولكن هل هذه الأمثلة الثلاثة كافية لإثبات صحة تخمينه؟

1 استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة وتشتل على عدد صحيح موجب n .

• لقد وجدت الحد التالي في متتالية أو متسلسلة.

1 **الاستقراء الرياضي** عند البحث عن الأنماط وإيجاد التخمينات، يغلب علينا افتراض أنه إذا كان التخمين صحيحاً في عدة حالات، فإنه سيكون صحيحاً لجميع الحالات. في الحالة المذكورة أعلاه، قد يقتنع عمر أن افتراضه صحيح عندما يرى أنه ينطبق على $n = 5$ لأن 5 نقاط مترابطة تكوّن 16 أو 2^4 منطقة. لكن "البرهان بالمثال" ليس طريقة صحيحة منطقياً، لأنه لم يبين أن الافتراض صحيح بالنسبة لجميع الحالات، ويمكنك في الحقيقة أن ترى أن تخمين عمر فشل عندما كانت $n = 6$.

في حين أن المثال المضاد هو كل ما يلزمك لبرهنة خطأ التخمينات الرياضية، فإن برهنة صحة التخمين تتطلب طريقة ممنهجة أكثر. وتستخدم مثل تلك الطريقة **مبدأ الاستقراء الرياضي**، فالفكرة الأساسية من مبدأ الاستقراء الرياضي أنه يمكنك برهنة صحة التخمين إذا كان يمكنك فعل ما يلي:

1. توضح أن هناك شيئاً ينطبق على الحالة الأولى (الأساس أو **خطوة المرتكز**)، و
2. افترض أن الطريقة تنطبق على أي حالة معينة (**فرضية الاستقراء**)، و
3. توضح أن الطريقة تنطبق على الحالة التالية (**خطوة استقرائية**).

هذا المبدأ، الموضح بطريقة أكثر منهجية أدناه، أداة قوية في برهنة العديد من التخمينات عن الأعداد الصحيحة الموجبة.

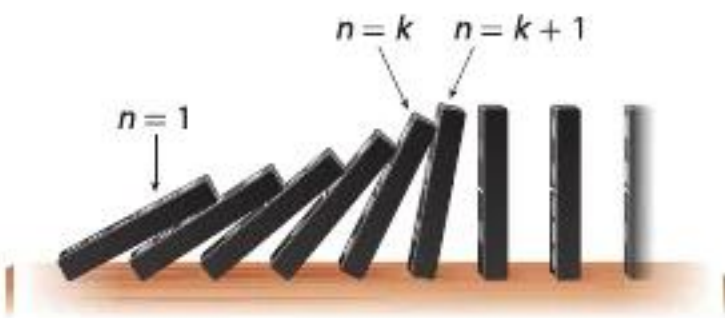
المفهوم الأساسي مبدأ الاستقراء الرياضي

إذا كانت P_n تمثل عبارة عن عدد صحيح n ، فإن P_n صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n إذا كان، فقط إذا كان،

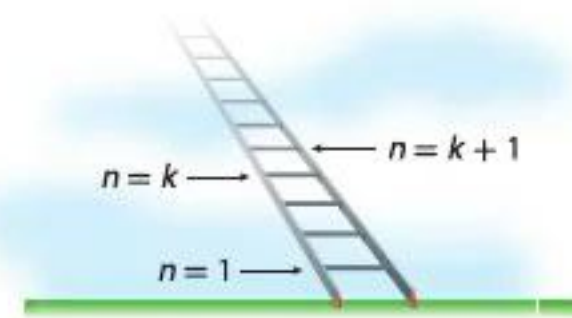
- P_1 صحيح، و
- لكل عدد صحيح موجب k ، إذا كان P_k صحيحاً، فإن P_{k+1} صحيح.

لتفهم السبب وراء تطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي، تخيل أن هناك سلماً من عدد لا نهائي من الدرجات (الشكل 10.1.1). إذا صعدت السلم (خطوة المرتكز) ثم انتقلت من درجة إلى التالية (فرضية الاستقراء والخطوة)، فسيتمكنك أن تصعد السلم بأكمله. وبالمثل، تخيل أن هناك خطاً لا نهائياً من قطع الدومينو (الشكل 10.1.2) المرتبة بحيث إذا سقطت أي قطعة k :

تسقط قطعة $(k+1)$ أيضاً (فرضية الاستقراء والخطوة)، وعندما تدفع أول قطعة دومينو (خطوة المرتكز)، فسندأ سلسلة تفاعلات تُسقط خط قطع الدومينو كله.



الشكل 10.1.2



الشكل 10.1.1

المفردات الجديدة

مبدأ الاستقراء الرياضي

principle of mathematical induction

خطوة المرتكز
anchor stepفرضية الاستقراء
inductive hypothesisخطوة الاستقرائية
inductive stepالمبدأ الممتد للاستقراء الرياضي
extended principle of mathematical induction

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-5 إيجاد الحد التالي في متتالية أو متسلسلة.

الدرس 3-5 استخدام الاستقراء

الرياضي في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة التي تشتل على عدد صحيح موجب n .

بعد الدرس 3-5 استخدام المتسلسلة الهندسية لتفكيك ذوات الحدين.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

■ ما النمط الذي يعتقد فارس وجوده بين أزواج النقاط والمناطق التي تم إنشاؤها داخل الدائرة؟ **عندما يكون هناك عدد n من النقاط على دائرة مرتبطة بمستقيمتين، سيكون هناك عدد $2^n - 1$ من المناطق.**

■ هل التخمين صحيح لـ $n = 1$ ؟ فسّر ذلك. **نعم، عندما توضع نقطة واحدة على الدائرة، لن يكون هناك سوى منطقة واحدة في الدائرة و $2^1 - 1 = 2^0 = 1$.**

■ هل يثبت ذلك أن تخمين فارس صحيح؟ **لا، لا بد من إثبات صحة التخمين لجميع قيم n المحتملة ليُعتبر صحيحاً.**

اتبع الخطوات التالية لتطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي.

الخطوة 1 تحقق من أن التخمين P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 1$. (خطوة المرتكز)

الخطوة 2 افترض أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k$. (فرضية الاستقراء)

الخطوة 3 استخدم هذا الافتراض في برهنة أن P_{n+1} صحيح أيضًا بالنسبة لـ $n = k + 1$. (خطوة استقرائية)

مثال 1 برهنة صيغة الجمع

استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي $n^2 + n$. وبهذا، فإن برهنة أن $n^2 + n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

الافتراض على فرض أن P_n هي عبارة أن $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$.

خطوة المرتكز تحقق من أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$.

العبارة الأصلية P_n : $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$

P_1 : $2 = 1^2 + 1$ **المجموع الجزئي الأول** $n = 1$ لـ P_n .

بما أن $2 = 1^2 + 1$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيح لـ $n = 1$.

فرضية الاستقراء افترض أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = k$.

لكتابة فرضية الاستقراء، عوض عن n بـ k في P_n . وإذا كانت كذلك، فإن افتراض P_k : $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k^2 + k$ صحيح.

الخطوة الاستقرائية استخدم فرضية الاستقراء في برهنة أن P_{n+1} صحيحة بالنسبة لـ $n = k + 1$.

لبرهنة أن P_{n+1} صحيحة بالنسبة لـ $n = k + 1$ ، ينبغي أن نبين أن P_{k+1} يجب أن يكون صحيحًا. ابدأ بفرضية الاستقراء ثم أضف الحد $(k + 1)$ لكل طرف.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k^2 + k$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2(k + 1)$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2k + 2$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k^2 + 2k + 1) + (k + 1)$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1)$$

العبارة الأخيرة هي نفسها العبارة P_{k+1} . إذا P_k صحيحة، ويتبع ذلك أنه إذا كانت P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = k$ ، فإن P_{n+1} صحيحة أيضًا بالنسبة لـ $n = k + 1$.

الاستقراء بما أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 1$ و P_k ينطوي على أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = 2, 3, \dots$. وهكذا، إذا كانت كذلك، فيحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، P_n : $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

تمرين موجّه

1. استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي n^2 . وإذا كان كذلك، فبرهن أن $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

لاحظ في مثال 1 أنك لا تحاول برهنة أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k$. بل افترض أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k$ واستخدم هذا الافتراض في توضيح أن P_{n+1} صحيح بالنسبة للعدد التالي. $n = k + 1$. وإذا وصلت إلى حالة تعارض أثناء محاولتك إكمال خطوة المرتكز أو الخطوة الاستقرائية، فإن افتراضك في فرضية الاستقراء ربما يكون خطأً. على سبيل المثال، إذا كان هناك تعارض في خطوة المرتكز، فستعلم أنها لا تنطبق على هذه القيمة فقط. وربما تظل فرضية الاستقراء صحيحة.

نصيحة دراسية

تمثيل الحد التالي لتحديد الحد $(k + 1)$. عوض بالقيمة $k + 1$ عن k في التعبير الخاص بالصيغة العامة للحد التالي في المتسلسلة. في المثال 1، بما أن $2k$ يمثل الحد k ، فإن $2(k + 1)$ يمثل الحد $(k + 1)$.

انتبه!

استخدام فرضية الاستقراء لبيان أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k + 1$ ، فإنك لن تعوض بـ $k + 1$ عن n في كلا طرفي المعادلة P_n ، حيث لن يعطيك ذلك شيئاً لتبرهن عليه. لإكمال الخطوة الاستقرائية، يجب أن تستخدم فرضية الاستقراء.

1 الاستقراء الرياضي

الأمثلة 1-3 توضح كيفية استخدام الاستقراء الرياضي في إثبات صيغة جمع وقاعدة لقابلية القسمة وعبرة خاصة بمتباينة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم الاستقراء الرياضي

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n . افترض أن P_n

$$P_n: \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

صحيحة لـ $n = 1$ نظرًا لأن

$$\frac{1}{(1)(3)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

صحيحة للأعداد الصحيحة الموجبة k . أثبت أن P_{k+1} يجب

أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

(تابع في اليسار)

إجابة إضافية (مثال إضافي)

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

هذه العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} ، إذا P_k صحيحة، ويتربط على ذلك أنه إذا كانت P_n صحيحة عند $n = k$ ، فحينها تكون P_{n+1} صحيحة أيضًا عند $n = k + 1$.

وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ و P_k تشير ضمناً إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2, 3, \dots$ وهكذا، بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن

$$P_n: \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

أمثلة إضافية

2 أثبت أن $6^n - 1$ قابلة للقسمة على 5 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n . افترض أن P_n هي عبارة تنص على أن $6^n - 1$ تقبل القسمة على 5. وعندما تكون $n = 1$ ، فإن $6^1 - 1 = 6^1 - 1 = 5$ ، وبما أن 5 يقبل القسمة على 5، إذا فالعبارة P_1 صحيحة. افترض أن $6^k - 1$ تقبل القسمة على 5 أو $6^k - 1 = 5r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k والأعداد الصحيحة r . استخدم هذا الافتراض لبيان أن $6^{k+1} - 1$ تقبل القسمة على 5.

$$\begin{aligned} 6^k - 1 &= 5r \\ 6(6^k - 1) &= 6(5r) \\ 6^{k+1} - 6 &= 30r \\ 6^{k+1} - 1 &= 30r + 5 \\ 6^{k+1} - 1 &= 5(6r + 1) \end{aligned}$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $6r + 1$ هو عدد صحيح و $5(6r + 1)$ يقبل القسمة على 5. إذا، $6^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 5. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ و $n = k + 1$ ، فهي صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. ووفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $6^n - 1$ يقبل القسمة على 5 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

3 أثبت أن $4^n < 3n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n . افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أن $4^n < 3n$. حيث إن n عدد صحيح موجب، وحيث إن $4^1 < 3(1)$ ، فإن P_1 صحيحة. افترض أن $4^k < 3k$ صحيحة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة $k > 1$. استخدم هذه الفرضية لتبين أن $4^{k+1} < 3(k+1)$ صحيحة.

$$\begin{aligned} 4^k &< 3k \\ 4 \cdot 4^k &< 4 \cdot 3k \\ 4^{k+1} &< 12k \end{aligned}$$

والآن استخدم الجزء الثاني من الفرضية.

$$\begin{aligned} k &> 1 \\ k - 1 &> 0 \\ 3k - 3 &> 0 \\ 6k - 3k - 3 &> 0 \\ 6k - 3(k + 1) &> 0 \\ 6k &> 3(k + 1) \\ 3(k + 1) &< 6k \end{aligned}$$

(تابع في اليسار)

يمكن استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة القابلية للقسمة. تذكر أن العدد الصحيح p يقبل القسمة على عدد صحيح q إذا كان $p = qr$ لبعض الأعداد الصحيحة r .

مثال 2 برهنة قابلية القسمة

برهن أن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

التخمين وخطوة المبرهن: على فرض أن P_n هي عبارة أن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2. P_1 هي عبارة أن $3^1 - 1$ يقبل القسمة على 2. P_1 صحيحة لأن $3^1 - 1$ يساوي 2، التي تقبل القسمة على 2.

فرضية الاستقراء والخطوة الاستقرائية: افترض أن $3^k - 1$ يقبل القسمة على 2. إذا كانت كذلك، فافترض أن $3^k - 1 = 2r$ لبعض الأعداد الصحيحة r . استخدم هذا الافتراض لبيان أن $3^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 2.

$$\begin{aligned} 3^k - 1 &= 2r && \text{فرضية الاستقراء} \\ 3^k &= 2r + 1 && \text{اجمع 1 إلى كل طرف.} \\ 3 \cdot 3^k &= 3(2r + 1) && \text{اضرب كل طرف في 3.} \\ 3^{k+1} &= 6r + 3 && \text{بسّط.} \\ 3^{k+1} - 1 &= 6r + 2 && \text{اطرح 1 من كل طرف.} \\ 3^{k+1} - 1 &= 2(3r + 1) && \text{العامل.} \end{aligned}$$

بما أن r عدد صحيح، فإن $3r + 1$ عدد صحيح و $2(3r + 1)$ يقبل القسمة على 2. وبهذا، فإن $3^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 2.

الاستقراء: بما أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$ و P_k تنطوي على أن P_{k+1} صحيحة بالنسبة لـ $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا، وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

تمرين موجّه

2. برهن أن $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 لجميع الأعداد الصحيحة n . **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

يمكنك أيضًا برهنة عبارات عدم التساوي مستخدمًا الاستقراء الرياضي.

نصيحة دراسية

الخطوة الاستقرائية: ليست هناك طريقة "ثابتة" لإجبال الخطوة الاستقرائية للبرهنة على الاستقراء الرياضي. فلكل مسألة خصائصها المميزة التي تتطلب أسلوبًا مختلفًا في إكمال البرهان.

إجابة إضافية (مثال إضافي)

بما أن k هو عدد صحيح موجب، فإن $6k < 12k$ ووفقًا لخاصية التعدي في المتباينة، إذا كان $6k < 12k$ و $3(k+1) < 6k$ ، فإن $3(k+1) < 12k$ ووفقًا لنفس الخاصية السابقة، إذا كان $3(k+1) < 12k$ و $4^{k+1} < 12k$ ، فإن $4^{k+1} < 3(k+1)$ وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ و $n = 2$ و P_k تشير ضمناً إلى أن P_{k+1} صحيحة عند $k > 1$ ، فإن P_n صحيحة عند $n = 3$ و $n = 4$ وهكذا. ووفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $4^n < 3n$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

التركيز على محتوى الرياضيات

الاستدلال: يجب ألا نخلط بين الاستقراء الرياضي والاستدلال الاستقرائي. فالاستقراء الرياضي يعد أحد أشكال الاستدلال الاستنتاجي الذي يتميز بالدقة الرياضية في البراهين. بينما يستخدم الاستدلال الاستقرائي الأمثلة الفردية كأسس للتعميمات.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 26 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد يتجاوز الطلاب

الخطوة الأولى التي تثبت أن الحالة الأولى صحيحة. ذكرهم بأنه إذا لم تفلح هذه الخطوة، فإن العبارة الأصلية غير صحيحة وليست النظرية. وقد يتوقف البرهان عند هذه الخطوة.

التدريس المتمايز

AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي / اللغوي اطلب من الطلاب مناقشة عملية إثبات عبارة باستخدام الاستقراء الرياضي. اطلب منهم ذكر أهمية التحقق من الحالة الممكنة الأولى. واطلب منهم وصف كيفية إثبات الحالة التالية.

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

21. $(xy)^n = x^n y^n$

22. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

23. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

24. $\cos n\pi = (-1)^n$

21-24. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n . (المثال 1)

1-10. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

1. $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$

2. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

3. $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$

4. $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

5. $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

6. $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

7. $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

8. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$

9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

10. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$

برهن أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n . (المثال 2)

11. $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

12. $6^n + 4$ يقبل القسمة على 5.

13. $2^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 7.

14. $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3.

14, 17, 18. تم تقديم إجابة نموذجية عن المثال المضاد. برهن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n أو جد مثالاً مضاداً.

15. خطأ: $n = 3$ $1 + 6 + 11 + \dots + (5n - 4) = n(2n - 1)$

16. $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n + 2)} = \frac{n}{2(2n + 2)}$

17. خطأ: $n = 5$ $n^2 - n + 5$ عدد أولي.

18. خطأ: $n = 2$ $3^n + 4n + 1$ يقبل القسمة على 4.

19. $4^n + 6n - 1$ يقبل القسمة على 9.

20. $2^{2n} + 1 + 3^{2n} + 1$ يقبل القسمة على 5.

16, 19, 20. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

التقويم التكويني

المفردات الرئيسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-6، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

المطويات منظم الدراسة

مطويات Dinah Zike®

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة إلى مطوياتهم، واقترح عليهم إبقاء مطوياتهم بجانبهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة، مشيرًا إلى أن المطويات تعدّ بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة من أجل اختبار الوحدة.

مراجعة درس بدرس

المفاهيم الأساسية

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية (الدروس 1-3 و 2-3)

- الحد النوني في a_n من المتتالية الحسابية ذات الحد الأول a_1 والفرق المشترك d يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 + (n - 1)d$ حيث يشير n إلى أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متسلسلة حسابية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$.

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية (الدروس 3-3)

- الحد النوني a_n من المتتالية الهندسية ذات الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ حيث يكون n هو أي عدد صحيح موجب.
- المجموع S_n للحدود n الأولى في متتالية هندسية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ حيث يكون $r \neq 1$.
- المجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية ذات $-1 < r < 1$ يتم الحصول عليه بواسطة $S = \frac{a_1}{1 - r}$.

نظرية ذات الحدين (الدرس 3-4)

- يمكن تفكيك التعبير $(a + b)^n$ باستخدام الصف رقم n من مثلث باسكال لتحديد معاملات كل حد.
- معامل ذات الحدين للحد $a^n - r b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ موضح بالعلاقة ${}_n C_r = \frac{n!}{(n - r)! r!}$.

الاستقراء الرياضي (الدرس 3-5)

- إذا كانت P_n عبارة بشأن عدد صحيح موجب n ، فإن P_n صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n إذا وفقط إذا كانت P_1 صحيحة، ولكل عدد صحيح موجب k ، إذا كانت P_k صحيحة، فإن P_{k+1} صحيحة.

المطويات منظم الدراسة



تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

أوساط حسابية arithmetic means	فرضية الاستقراء induction hypothesis
متتالية حسابية arithmetic sequence	متتالية لا نهائية infinite sequence
متسلسلة حسابية arithmetic series	الاستقراء الرياضي mathematical induction
فرق مشترك common difference	المجموع الجزئي partial sum
نسبة مشتركة common ratio	متتالية sequence
متتالية منتهية finite sequence	متسلسلة series
أوساط هندسية geometric means	الرمز سيجما sigma notation
متتالية هندسية geometric sequence	حد term
متسلسلة هندسية geometric series	متسلسلة أسية exponential series
خطوة المركز anchor step	فرضية الاستقراء inductive hypothesis
معاملات ذات الحدين binomial coefficients	خطوة استقرائية inductive step
نظرية ذات الحدين Binomial Theorem	متسلسلة قوة power series
صيغة أويلر Euler's Formula	

مراجعة المفردات

اذكر ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لتصحيح الجملة.

1. إن الأوساط الحسابية لمتتالية هي الحدود الموجودة بين حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية. **صحيحة**
2. الحد هو قائمة من الأعداد بترتيب معين. **4. خاطئة، متتالية**
3. مجموع الحدود n الأولى لمتسلسلة يسمى المجموع الجزئي. **صحيحة**
4. المتتالية الهندسية هي متتالية يتحدد كل حد فيها من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. **خاطئة، متتالية حسابية**
5. أحد عشر و 17 هما وسطان هندسيان للعددين 5 و 23 في المتتالية 5, 11, 17, 23. **أوساط حسابية خاطئة**
6. باستخدام نظرية ذات الحدين، $(x - 2)^4$ يمكن فكه إلى $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. **صحيحة**
7. في الاستقراء الرياضي، افترض أن أحد التخمينات صحيح لأي حالة خاصة يُسمى فرضية الاستقراء. **صواب**
8. خطوة إثبات أن أحد الأشياء يصلح للحالة الأولى تُسمى الخطوة الاستقرائية في الاستقراء الرياضي. **خطأ؛ خطوة المركز**
9. نظرية ذات الحدين هي متتالية متكررة تصف العديد من الأنماط الموجودة في الطبيعة. **خطأ؛ متتالية فيبوناتشي**

دليل الدراسة والمراجعة متابعة

3

مراجعة درس بدرس

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

3-1 المتتاليات كدوال

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

7. $a_1 = 9, d = 3, n = 14$ **48**
8. $a_1 = -3, d = 6, n = 22$ **123**
9. $a_1 = 10, d = -4, n = 9$ **-22**
10. $a_1 = -1, d = -5, n = 18$ **-86**

مثال 1

جد الحد الحادي عشر من متتالية حسابية إذا كان $a_1 = -15$ و $d = 6$.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{صيغة للحد النوني}$$

$$a_{11} = -15 + (11 - 1)6 \quad n = 11, a_1 = -15, d = 6$$

$$a_{11} = 45 \quad \text{بسط.}$$

3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

جد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

11. $-12, _, _, _, 8$ **-7, -2, 3**
12. $15, _, _, 29$ **$\frac{59}{3}, \frac{73}{3}$**
13. $12, _, _, _, -8$ **8, 4, 0, -4**
14. $72, _, _, _, 24$ **60, 48, 36**
15. **خدمات مصرفية** يدخر محمد 40 AED كل شهرين. فإذا كان يدخر بهذا المعدل لمدة عامين، فكم سيكون معه في نهاية العامين؟ **AED 480**

جد S_n لكل متسلسلة حسابية.

16. $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$ **192**
17. $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$ **1040**
18. $9 + 14 + 19 + \dots + 74$ **581**
19. $16 + 7 + -2 + \dots + -65$ **-245**
20. **دراما** ستشارك ميسون في عرض درامي خلال 12 يومًا. وهي تخطط للتدرب على سطور دورها كل ليلة. وفي الليلة الأولى تتدرب على سطور دورها مرتين. وفي الليلة التالية تتدرب على سطور دورها 4 مرات. وفي الليلة الثالثة تتدرب على سطور دورها 6 مرات. ففي الليلة الحادية عشر، كم عدد المرات التي تكون فيها قد تدربت على سطور دورها؟ **132**

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

21. $\sum_{k=5}^{21} (3k - 2)$ **629**
22. $\sum_{k=0}^{10} (6k - 1)$ **319**
23. $\sum_{k=4}^{12} (-2k + 5)$ **-99**

مثال 2

جد الوسطين الحسابيين بين 3 و 39.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{صيغة للحد النوني}$$

$$a_4 = 3 + (4 - 1)d \quad n = 4, a_1 = 3$$

$$39 = 3 + 3d \quad a_4 = 39$$

$$12 = d \quad \text{بسط.}$$

الوسطان الحسابيان هما 3 + 12 أو 15 و 15 + 12 أو 27.

مثال 3

جد S_n للمتسلسلة الحسابية ذات $a_1 = 18$ و $a_n = 56$ و $n = 8$.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{صيغة المجموع}$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56) \quad n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$$

$$= 296 \quad \text{بسط.}$$

مثال 4

جد قيمة $\sum_{k=3}^{15} 5k + 1$.

استخدم الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. هناك 13 حدًا. $a_1 = 5(3) + 1$ أو 16، و $a_{13} = 5(15) + 1$ أو 76.

$$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$$

$$= 598$$

3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

جد الحد المشار إليه لكل متتالية هندسية.

24. $a_1 = 5, r = 2, n = 7$ **320**

25. $a_1 = 11, r = 3, n = 3$ **99**

26. $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, n = 5$ **8**

27. $a_8 = \dots \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{27}{8}, \dots$ **$\frac{2187}{8}$**

جد الأوساط الهندسية في كل متتالية.

28. 6, __, 162 **18, 54**

29. 8, __, 648 **$\pm 24, 72, \pm 216$**

30. -4, __, 108 **12, -36**

31. **المدخلات** يمتلك عبد العزيز حسابًا ادخاريًا به رصيد حالي يبلغ 1500 AED. فكم سيكون رصيد حساب عبد العزيز بعد 4 أعوام إذا كان سيحصل على مرابحة سنوية بقيمة 5%؟
AED 1823.26

جد S_n لكل متسلسلة هندسية.

32. $a_1 = 15, r = 2, n = 4$ **225**

33. $a_1 = 9, r = 4, n = 6$ **12, 285**

34. 5 - 10 + 20 - ... حدود 7 إلى **215**

35. 243 + 81 + 27 + ... حدود 5 إلى **363**

جد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

36. $\sum_{k=1}^7 3 \times (-2)^{k-1}$ **129** 37. $\sum_{k=1}^8 -1 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ **$-\frac{6305}{2187}$**

38. **الدعاية** توزع مایسة نشرات دعائية للإعلان عن اجتماع مجلس الطلاب التالي. وقد وزعت نشرات على 4 أشخاص. بعد ذلك، وزع كل شخص من هؤلاء الأربعة 4 نشرات على 4 أشخاص آخرين. ثم وزع هؤلاء الأشخاص الأربعة 4 نشرات على 4 أشخاص جدد. فإذا اعتبرنا أن مایسة هي الجولة الأولى، فكم عدد الأشخاص الذين تم منحهم نشرات بعد 4 جولات؟ **85**

مثال 5

جد الحد السادس لمتتالية هندسية، والتي فيها $a_1 = 9$ و $r = 4$.

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$ **صيغة للحد النوني**

$a_6 = 9 \times 4^{6-1}$ $n = 6, a_1 = 9, r = 4$

$a_6 = 9216$

الحد السادس هو 9216.

مثال 6

جد وسطين هندسيين بين 1 و 27.

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$ **صيغة للحد النوني**

$a_4 = 1 \times r^{4-1}$ $n = 4$ و $a_1 = 1$

$27 = r^3$ $a_4 = 27$

$3 = r$ **بسط**

الوسطان الهندسيان هما 1(3) أو 3 و 3(3) أو 9.

مثال 7

جد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 3$ و $r = 5$ و $n = 11$.

$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$ **صيغة المجموع**

$S_{11} = \frac{3 - 3 \cdot 5^{11}}{1 - 5}$ $n = 11, a_1 = 3, r = 5$

$S_{11} = 36,621,093$ **استخدم حاسبة.**

مثال 8

جد قيمة $\sum_{k=1}^6 2 \times (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \times 4^6}{1 - 4}$ $n = 6, a_1 = 2, r = 4$

$= \frac{-8190}{-3}$ **بسط**

$= 2730$ **بسط**

إجابات إضافية

40. $y^7 - 21y^6 + 189y^5 - 945y^4 + 2835y^3 - 5103y^2 + 5103y - 2187$
41. $-32z^5 + 240z^4 - 720z^3 + 1080z^2 - 810z + 243$
42. $256a^4 - 768a^3b + 864a^2b^2 - 432ab^3 + 81b^4$
43. $x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{256}x - \frac{1}{1024}$

مراجعة درس بدرس

3-4 نظرية ذات الحدين

مثال 9

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك $(3x + 10)^5$.

طبق نظرية ذات الحدين لتفكيك $(a + b)^5$. حيث $b = 10$ و $a = 3x$.

$$(3x + 10)^5 = {}_5C_0(3x)^5(10)^0 + {}_5C_1(3x)^4(10)^1 + {}_5C_2(3x)^3(10)^2 + {}_5C_3(3x)^2(10)^3 + {}_5C_4(3x)^1(10)^4 + {}_5C_5(3x)^0(10)^5$$

$$= 1(243x^5)(1) + 5(81x^4)(10) + 10(27x^3)(100) + 10(9x^2)(1000) + 5(3x)(10,000) + 1(1)(100,000)$$

$$= 243x^5 + 4050x^4 + 27,000x^3 + 90,000x^2 + 150,000x + 100,000$$

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$11. (4x + 6)^5 \quad 1024x^5 + 7680x^4 + 23,040x^3 + 34,560x^2 + 25,920x + 7776$$

$$12. (m - 5n)^6 \quad m^6 - 30m^5n + 375m^4n^2 - 2500m^3n^3 + 9375m^2n^4 - 18,750mn^5 + 15,625n^6$$

جد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك. 40-43. انظر الهامش.

$$13. (6x - 3y)^{10}, x^4y^6 \quad 198,404,640 \quad 112a^6b^2$$

$$14. (2y + 3)^{13}, 8^{th} \quad 240,185,088 \quad -13,107,200x^9$$

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

$$15. (2p^2 - 7)^4 \quad 16p^8 - 224p^6 + 1176p^4 - 2744p^2 + 2401$$

$$16. (4m + 3n)^7$$

3-5 الاستقراء الرياضي

مثال 10

أثبت أن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

التخمين وخطوة المبرهن: افترض أن P_n هي عبارة تنص على أن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4. عندما $n = 1$. فإن $5^1 - 1 = 4$ ، فإن $5^n - 1 = 4$ ، حيث إن 4 تقبل القسمة على 4. فالبعبارة P_1 صحيحة. أو 4. حيث إن 4 تقبل القسمة على 4. فالبعبارة P_1 صحيحة.
فرضية الاستقراء والخطوة الاستقرائية: افترض أن $5^k - 1$ يقبل القسمة على 4. بمعنى، افترض أن $5^k - 1 = 4r$ للعدد الصحيح r . استخدم فرضية الاستقراء هذه لإثبات أن $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4.

$$5^k - 1 = 4r \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$5^k = 4r + 1 \quad \text{أجمع 1 إلى كل طرف.}$$

$$5 \cdot 5^k = 5(4r + 1) \quad \text{اضرب كل طرف في 5.}$$

$$5^{k+1} = 20r + 5 \quad \text{بسّط.}$$

$$5^{k+1} - 1 = 20r + 4 \quad \text{اطرح 1 من كل طرف.}$$

$$5^{k+1} - 1 = 4(5r + 1) \quad \text{حلل إلى العوامل.}$$

حيث إن r عدد صحيح، إذا $5r + 1$ عدد صحيح و $4(5r + 1)$ يقبل القسمة على 4. إذا، $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4.
الاستقراء: حيث إن P_n صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$ و P_k تنطوي على أن P_{k+1} . فإن P_n صحيحة بالنسبة إلى $n = 2$ و $n = 3$. وهكذا. وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .
استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

4. $6^n - 9$ يقبل القسمة على 3. انظر ملحق 4-10. إجابات الوحدة 3.
5. $7^n - 5$ يقبل القسمة على 2.
6. $5^n + 3$ يقبل القسمة على 4.

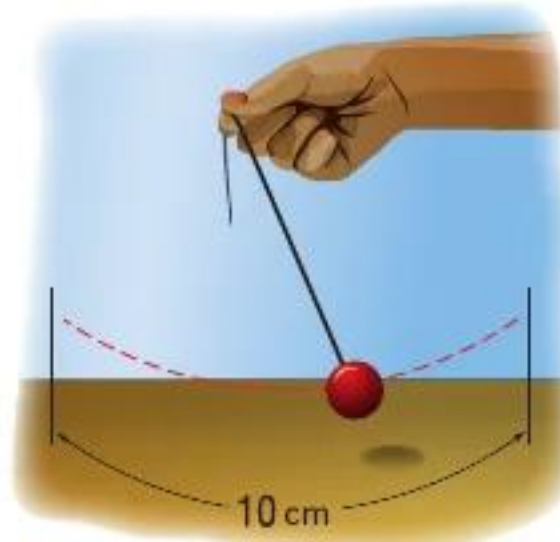
$$7. 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \dots + 2n(2n + 1) = \frac{n(n + 1)(4n + 5)}{3}$$

$$8. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \frac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$$

أثبت كل متباينة لقيم n المعطاة.
9. $4^n \geq 4n$. لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .
10. $5n < 6^n$. لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

$$16. 16,384m^7 + 86,016m^6n + 193,536m^5n^2 + 241,920m^4n^3 + 181,440m^3n^4 + 81,648m^2n^5 + 20,412mn^6 + 2187n^7$$

14. **المدرسة** هناك عدد من البنات مساوٍ لعدد الأولاد في صف الأستاذ فهد للعلوم. وهو يحتاج إلى اختيار 8 طلاب لتمثيل صفه في معرض العلوم. فما احتمال أن يكون 5 منهم أولاداً؟ **حوالي 21.9%**
15. **البندول** تخرج لمياء بندولاً. والمسافة المقطوعة في كل حركة أرجحة تقل بنسبة 15% مع كل أرجحة. فإذا قطع البندول 10 سنتيمتر مبدئياً، فجد إجمالي المسافة المقطوعة عندما يتوقف البندول عن الحركة. **حوالي 66.7cm**



$$8. 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$$

16. **نظرية الأعداد** فكر في العبارة $0.\overline{9} = 1$. (الدرس 3-5)
- a. أثبت أن $\frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$ لأي عدد صحيح موجب n .
- b. استخدم استيعابك للنهايات والعبارة التي أثبتتها في الجزء a لشرح سبب صحة $0.\overline{9} = 1$.
17. **كرة السلة** عادة ما تسجل باسمين 4 من كل 6 محاولات للرميات الحرة. ما احتمال تسجيلها 5 من 6 في محاولاتها التالية للرميات الحرة؟ (الدرس 3-4)

$$0.263 \text{ أو } 3.26\%$$

1. جد الحدود الأربعة التالية للمتتالية الحسابية 63, 72, 81,
54, 45, 36, 27
2. جد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية فيها $a_1 = 9$ و $d = 5$.
129
3. **الاختيار من متعدد** ما الحد الثامن في المتتالية الحسابية التي تبدأ بـ ... 24.6, 22.4, 20.2, 18 ؟ **D**
- A 26.8
B 29
C 31.2
D 33.4
4. جد الأوساط الحسابية الأربعة بين -9 و 11.
-5, -1, 3, 7
5. جد مجموع متسلسلة حسابية فيها $a_1 = 11$ و $n = 14$ و $a_n = 22$.
231
6. **الاختيار من متعدد** ما هو الحد التالي في المتتالية الهندسية التالية؟ **H**
- $10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32}, \dots$
- F $\frac{5}{8}$
G $\frac{5}{32}$
H $\frac{5}{128}$
J $\frac{5}{256}$
7. جد الأوساط الهندسية الثلاثة بين 6 و 1536.
24, 96, 384
8. فكك $(2a - 3b)^4$.
9. ما معامل الحد الخامس لـ $(m + 3n)^6$ ؟
1215
10. جد الحد الرابع لمفكوك $(c + d)^9$.
 $84c^6d^3$
- برهن أن كل عبارة صحيحة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة.** 11, 12. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**
11. $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$.
12. $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10.
13. جد مثلاً مضاداً للعبارة التالية.
 $2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4. **$n = 1$**

التحضير للاختبارات المعيارية

3

1 التركيز

الهدف استخدام إستراتيجية البحث عن النمط لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطرح السؤال التالي:

- ما نوع الأسئلة التي تعتقد أن إستراتيجية البحث عن النمط تناسبها بشكل أفضل؟ **الإجابة المحتملة: أسئلة مثل، "ما الحد التالي في المتتالية؟" أو "ما التعبير الذي يمثل هذا النمط؟"**
- كيف تجد النمط؟ **الإجابة المحتملة: راجع كيفية ارتباط حدود النمط وجد العمليات المشتركة التي تعبر عن النمط.**

البحث عن نمط

تتمثل إحدى أكثر إستراتيجيات حل المسائل شيوعاً في البحث عن نمط. فالقدرة على التعرف على الأنماط، وتمثيلها جبرياً، وتوسعتها تعد أداة قيّمة لحل المسائل.

إستراتيجيات البحث عن نمط

الخطوة 1

تحديد النمط.

- قارن بين الأعداد أو الأشكال أو التمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك:** ما مدى الصلة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك:** هل هناك أي عمليات مشتركة تؤدي إلى الانتقال من أحد الحدود إلى الحد التالي؟

الخطوة 2

تعميم النمط.

- اكتب قاعدة باستخدام الكلمات لوصف كيفية إنتاج حدود النمط.
- عَيّن المتغيرات واكتب تعبيراً جبرياً لتمثيل النمط إن أمكن.

الخطوة 3

جد الحدود المفقودة، ووسّع النمط، وجد حل المسألة.

- استخدم النمط الخاص بك أو قاعدتك لإيجاد الحدود المفقودة و/أو وسّع النمط لحل المسألة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

استخدم متتالية المربعات الموضحة . لايجاد عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع في المتتالية؟



A 55

C 74

B 65

D 82

مثال إضافي

تدريب على الاختبار المعياري
لدى يوسف AED 2100 في حساب ادخاري. وفي نهاية كل شهر، يزداد الرصيد بمقدار 0.3%. ما المبلغ الذي سيكون لدى يوسف في حسابه الادخاري في نهاية سنة؟ **B**

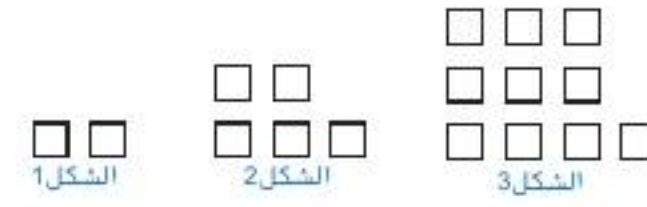
- A AED 2170.35
- B AED 2176.86
- C AED 2106.89
- D AED 2994.09

3 التقويم

استخدام التمرينين 1 و 2 لتقويم استيعاب الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية. يتم إعطاؤك ثلاثة أشكال من متتالية ويُطلب منك إيجاد عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع.

ابحث عن نمط في أشكال المربعات. احسب عدد المربعات في كل شكل.



اكتب تعبيراً لتمثيل هذا النمط.

الشرح عدد المربعات يساوي مربع رقم الشكل بالإضافة إلى واحد.

المتغير لنفترض أن n تمثل رقم الشكل.

المعادلة $a_n = n^2 + 1$

استخدم التعبير الذي كتبت لتوسعة النمط وإيجاد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذا، الشكل التاسع سيحتوي على 82 مربعاً. الإجابة الصحيحة هي D.

تباين

اقرأ كل مسألة. استخدم نمطاً لحل المسألة.

1. الأعداد أدناه تُشكّل متتالية رياضية شهيرة من الأعداد تُعرف باسم متتالية فيبوناتشي. ما عدد فيبوناتشي التالي في المتتالية؟ **B**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

- A 36
- B 34
- C 31
- D 29

2. ما العدد الناقص في الجدول؟ **H**

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

- F 17
- G 18
- H 20
- J 21

3 تدريب على الاختبار المعياري

عدد الأشخاص	طول الخيمة (بالمتر)
7	2
28	5
39	6
67	8
147	12

5. يبين الجدول أبعاد خيمة مربعة الشكل وعدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة. لنفترض أن ℓ يمثل طول الخيمة وأن n يمثل عدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة. حدد المعادلة التي تمثل بشكل أفضل العلاقة بين طول الخيمة وعدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم.

- F $\ell = n^2 + 3$ H $\ell = 3n + 1$
G $n = \ell^2 + 3$ J $n = 3\ell + 1$

6. مرشح هواء يُقال أنه يزيل 90% من الملوثات الموجودة بالهواء في كل مرة يدور فيها الهواء عبر هذا المرشح. فإذا تم تدوير نفس كمية الهواء عبر المرشح ثلاث مرات، فما النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستزال من الهواء؟

- A 0.01% B 0.1% C 9s9.0% D 99.9%

7. في دار السينما، تبلغ تكلفة علبتين من الفشار ومشروب غازي AED 11.50، وتكلفة 3 علب من الفشار و4 مشروبات غازية هي AED 27.25. فأأي زوج من المعادلات يمكن استخدامه لتحديد p ، وهو تكلفة علبة الفشار، و s ، وهو تكلفة المشروب الغازي؟

- F $2p + s = 27.25$ H $2p + s = 11.50$
 $3p + 4s = 11.50$ $3p + 4s = 27.25$
G $2p - s = 11.50$ J $p + s = 11.50$
 $3p - 4s = 27.25$ $p + 4 = 27.25$

اختبار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو في ورقة أخرى.

1. جد الحد التالي في المتتالية الحسابية. B

7, 13, 19, 25, 31, ...

- A 36 C 38
B 37 D 39

2. تحصل عبيير على تكبير لصورة بمقدار 4 cm في 6 cm. بحيث تكون الصورة الجديدة ذات أبعاد أكبر 4 مرات من أصلها. فما مساحة التكبير مقارنةً بمساحة الصورة الأصلية؟ J

- F المساحة أكبر بمرتين.
G المساحة أكبر بأربع مرات.
G المساحة أكبر بثمان مرات.
G المساحة أكبر بست عشرة مرة.

3. جد قيمة $\sum_{k=1}^{15} (8k - 1)$. C

- A 119 C 945
B 826 D 1072

4. اكتب الصيغة الخاصة بالحد النوني للمتتالية الهندسية الموضحة بالجدول. B

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

- A $a_n = (5)^n$
B $a_n = 5(2)^{n-1}$
C $a_n = 2(5)^{n-1}$
D $a_n = 5(2)^n$

12. إجابة شبكية ما قيمة $f[g(6)]$ إذا كان $f(x) = 2x + 4$ وكان $g(x) = x^2 + 5$ ؟ 86

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

13. برهن أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

انظر الهامش.

14. النقطتان الطرفيتان لقطر دائرة يكونان عند $(-1, -3)$ و $(5, -5)$.

a. $(2, -4)$ ؛ المركز هو نقطة منتصف قطر الدائرة.

a. ما إحداثيات مركز الدائرة؟ اشرح طريقته.

b. جد نصف قطر الدائرة. اشرح طريقته. انظر الهامش.

c. اكتب معادلة للدائرة.

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو في ورقة أخرى.

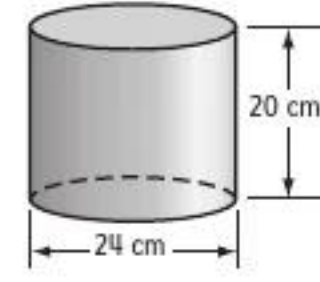
8. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$4 \times 1 \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

9. استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك التعبير $(c + d)^6$.

$$c^6 + 6c^5d + 15c^4d^2 + 20c^3d^3 + 15c^2d^4 + 6cd^5 + d^6$$

10. إجابة شبكية تمتلك إيمان وعاء أسطوانيًا تحتاج إلى ملئه بالتراب حتى تتمكن من زرع بعض الزهور.



فما حجم الأسطوانة بالبوصات المكعبة مقربًا إلى أقرب بوصة مكعبة؟ 9048

11. البكتيريا في مزرعة بكتيريا تنمو بمعدل أسي مع مرور الزمن، كما هو موضح بالجدول.

عدد البكتيريا	الساعات
1000	0
2000	1
4000	2

اكتب معادلة للتعبير عن عدد البكتيريا، y ، بالنسبة للزمن، t .
 $y = (1000) \times (2)^t$

إجابات إضافية

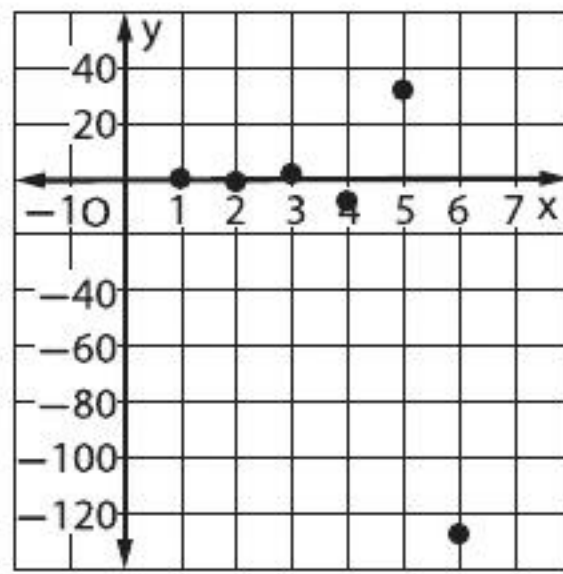
14b. 5؛ نصف القطر هو المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة عليها.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-1 - 2)^2 + (0 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

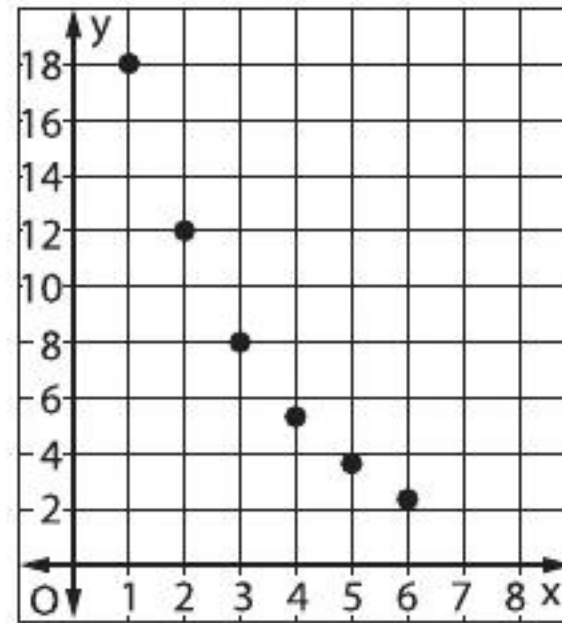
13. إجابة نموذجية: افترض أن $2n + 1$ و $2k + 1$ يمثلان أي عددين فرديين صحيحين حيث n و k عددان صحيحان. إذًا، مجموعهما يساوي $(2n + 1) + (2k + 1)$ أو $2n + 2k + 2$. يمكن كتابة ذلك في صورة $2(n + k + 1)$ وهي ناتج ضرب 2 في عدد صحيح، $n + k + 1$. إذًا، المجموع $2n + 2k + 2$ يساوي عدد زوجي.

الدرس 3-1

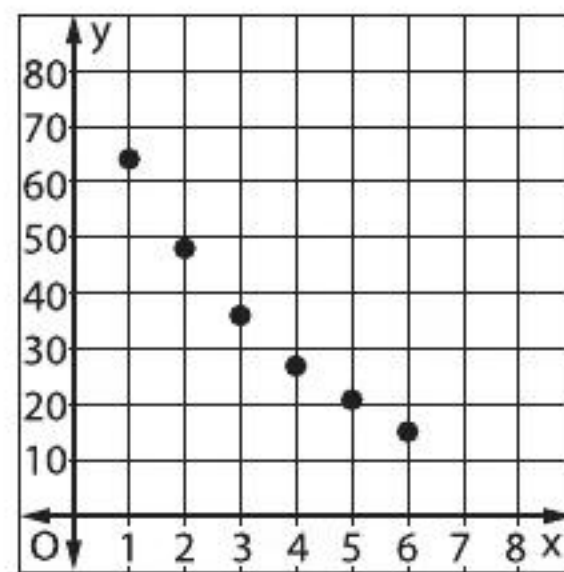
39. -8, 32, -128



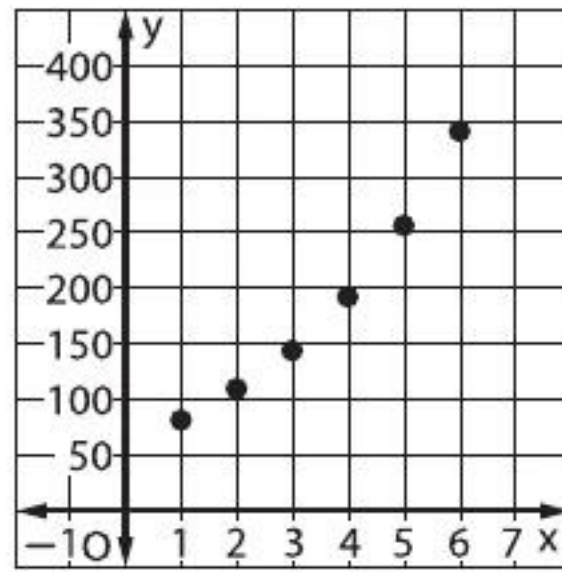
40. $\frac{16}{3}, \frac{32}{9}, \frac{64}{27}$



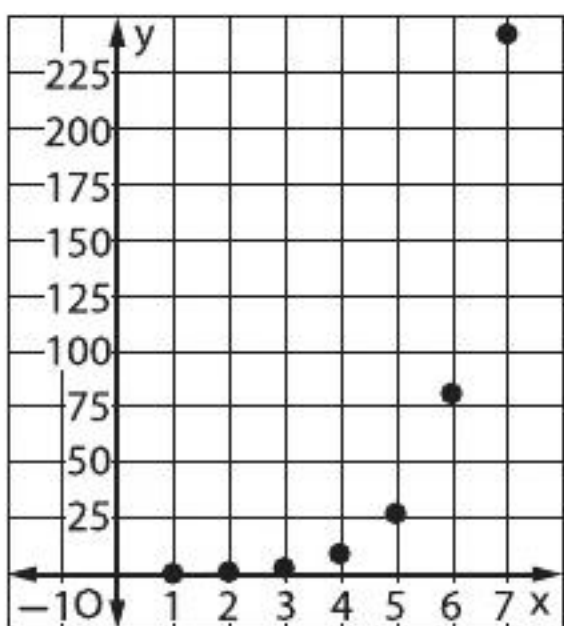
41. 27, $\frac{81}{4}, \frac{243}{16}$



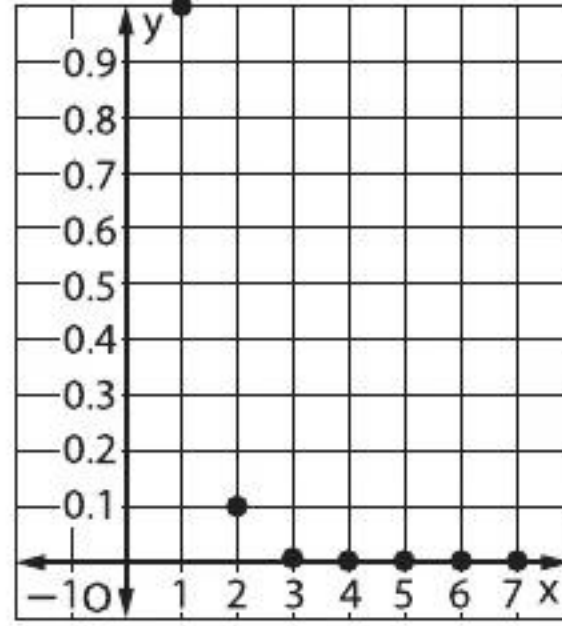
42. 192, 256, $\frac{1024}{3}$



43. 27, 81, 243

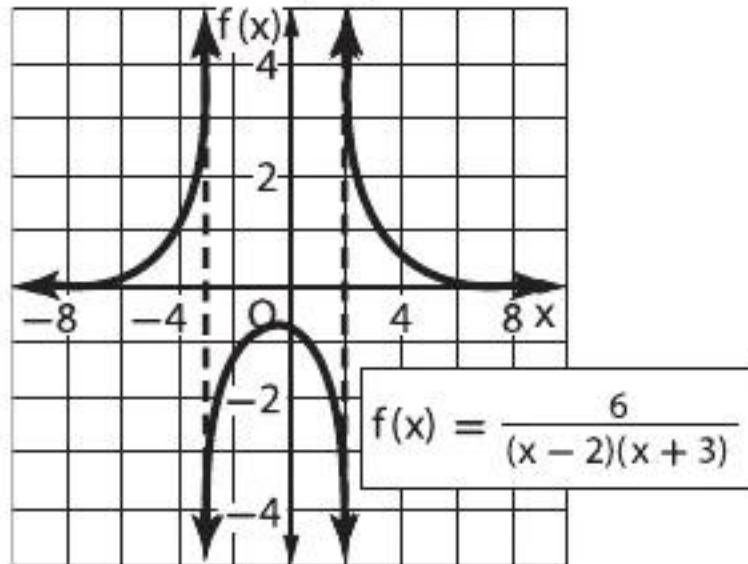


44. 0.0001, 0.00001, 0.000001

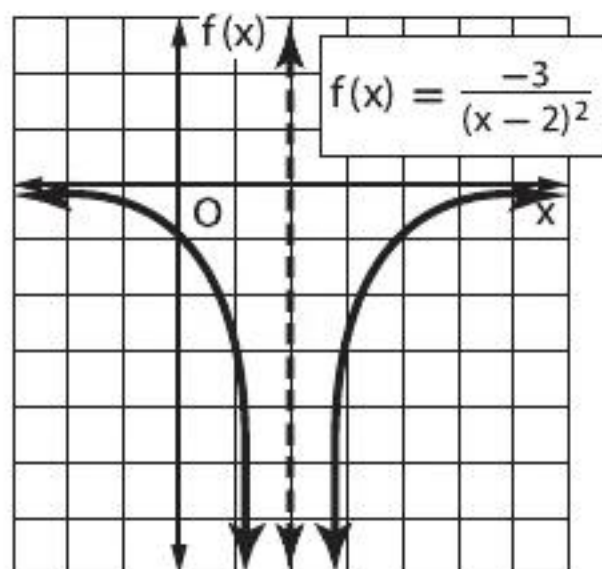


60. الإجابة النموذجية: عندما تكون قيمة r مضاعفة، فإن قيمة a_2 تكون مضاعفة، وتبلغ قيمة a_3 أربعة أمثال. ويكون a_4 مضروباً في 8. و a_5 مضروباً في 2^4 أو 16. وهكذا. إذاً، الحدود الجديدة هي $a_n = a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$. وعندما تكون قيمة r مقسومة على اثنين، تكون الحدود الجديدة $a_n = a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

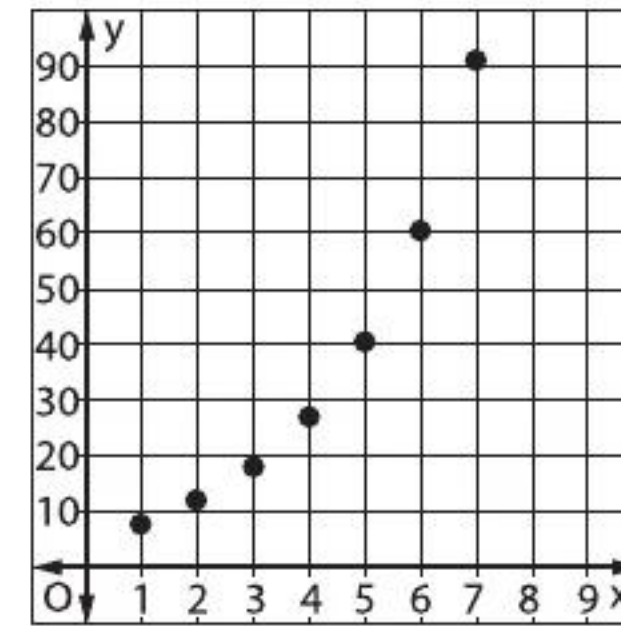
71.



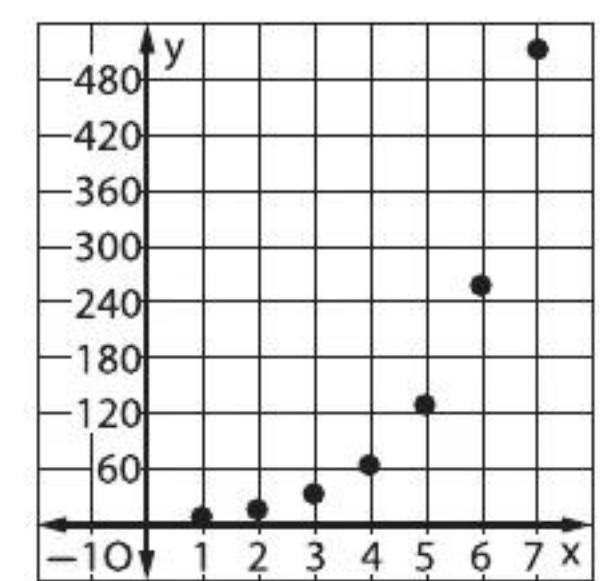
72.



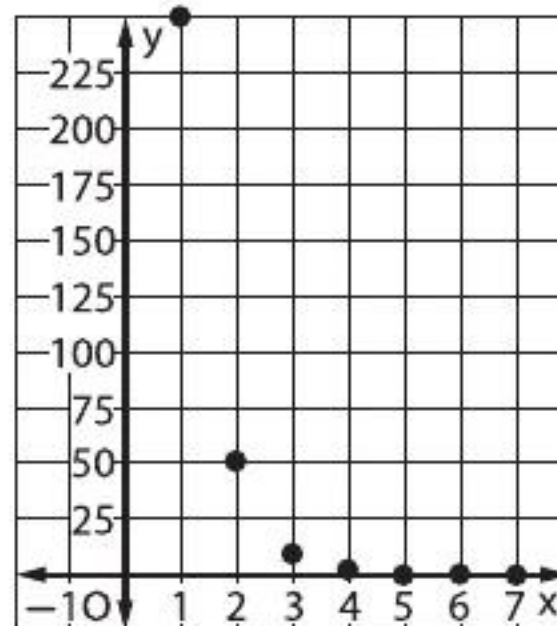
14. 40.5, 60.75, 91.125



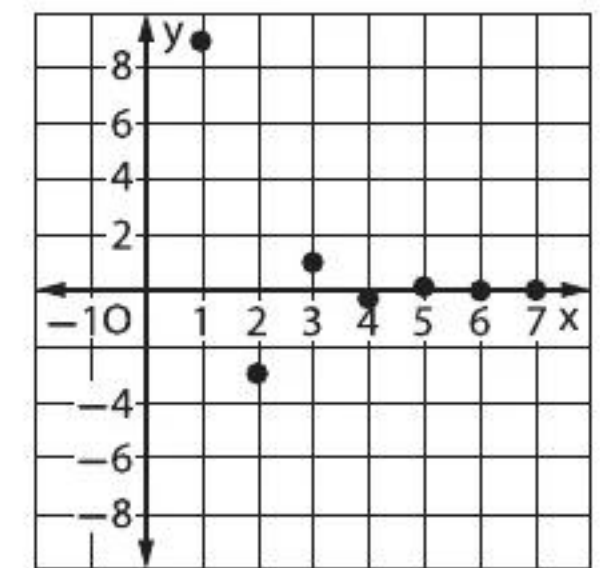
15. 128, 256, 512



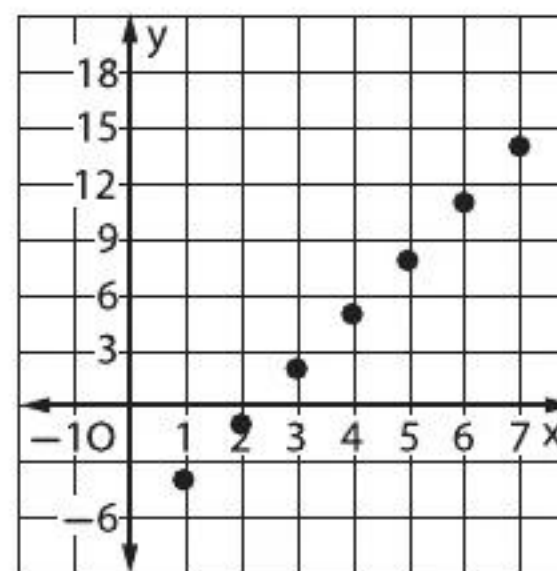
16. $\frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}$



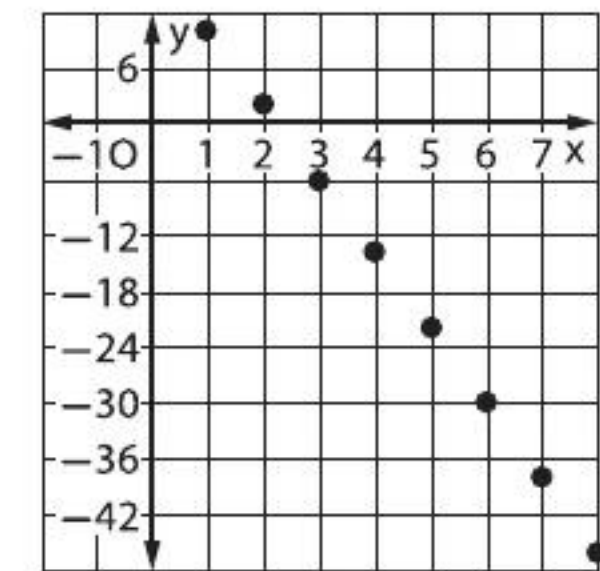
17. $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$



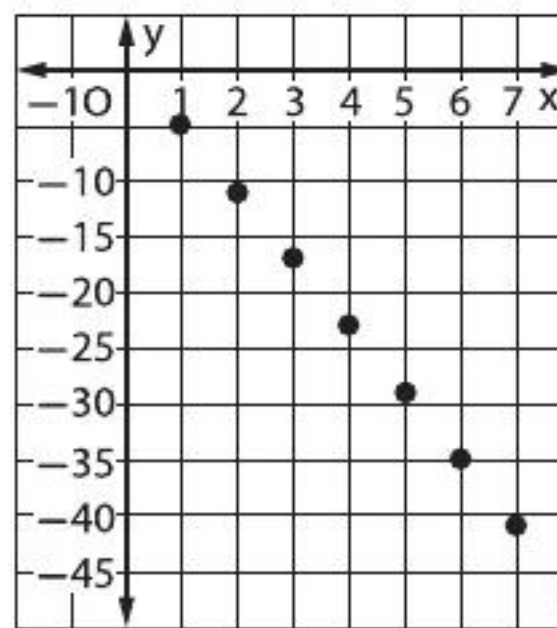
25. 8, 11, 14, 17



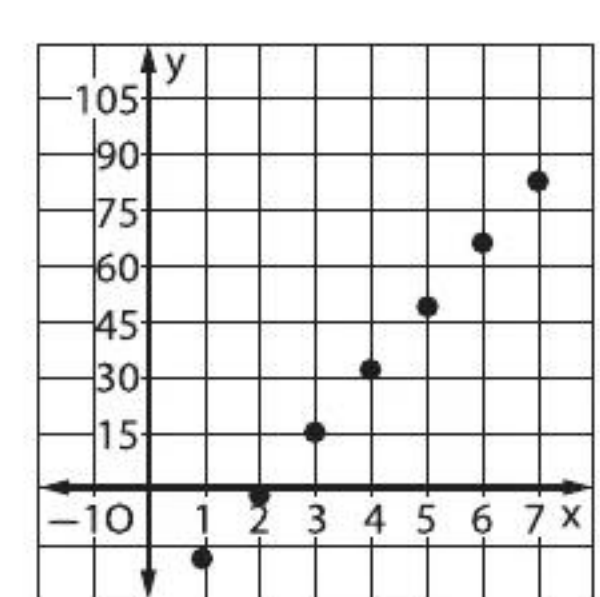
26. -22, -30, -38, -46



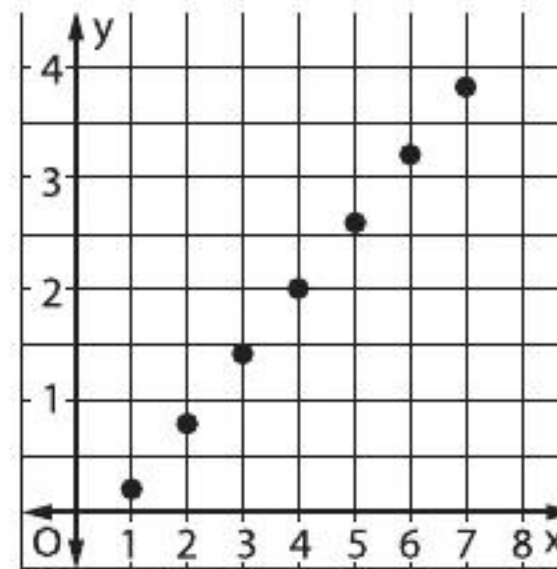
27. -29, -35, -41, -47



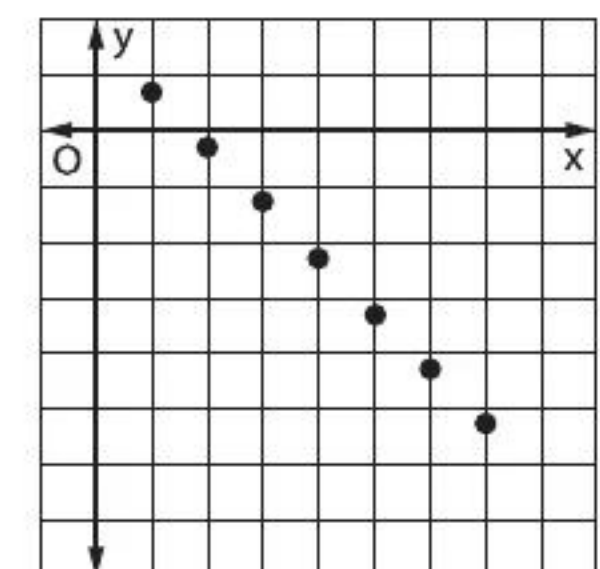
28. 32, 49, 66, 83



29. 2, $\frac{13}{5}, \frac{16}{5}, \frac{19}{5}$



30. $-\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}$



80. الإجابة النموذجية:

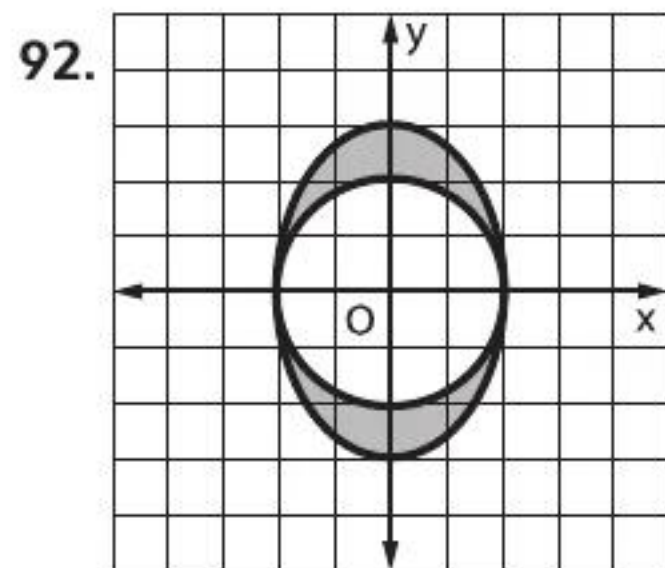
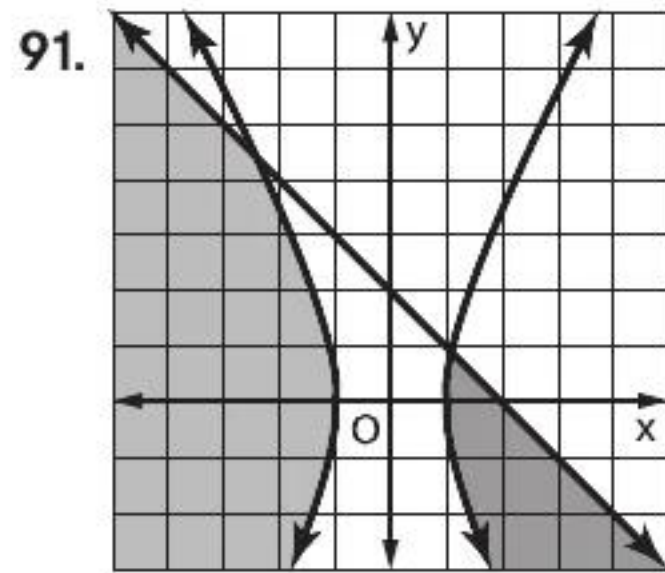
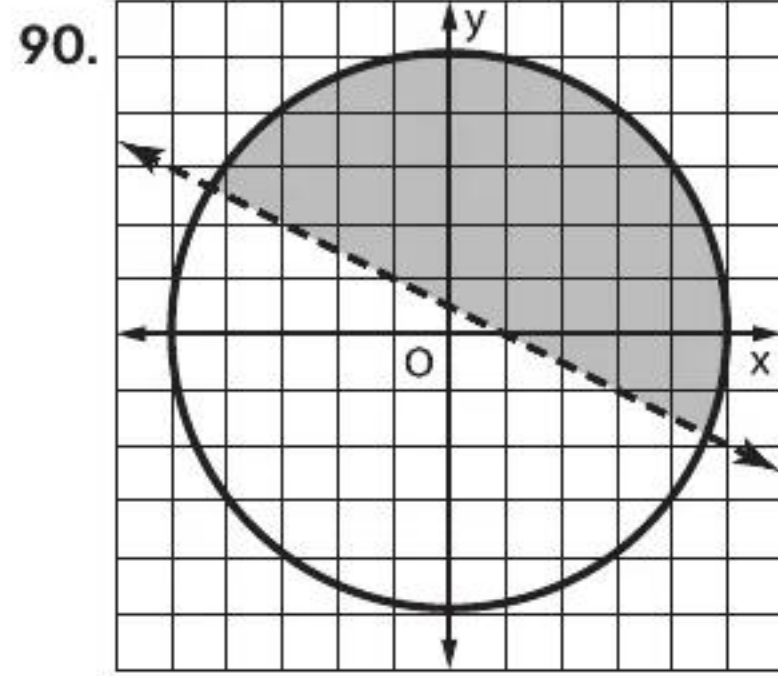
افترض أن $a_n =$ الحد النوني للمتتالية و $d =$ الفرق المشترك
 تعريف الحد الثاني لمتتالية حسابية
 $a_2 = a_1 + d$
 تعريف الحد الثالث لمتتالية حسابية
 $a_3 = a_2 + d$
 التعويض
 $a_3 = (a_1 + d) + d$
 خاصية التجميع
 $a_3 = a_1 + 2d$
 $3 - 1 = 2$
 $a_3 = a_1 + (3 - 1)d$
 $n = 3$
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$

81. $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$ صيغة المجموع العامة

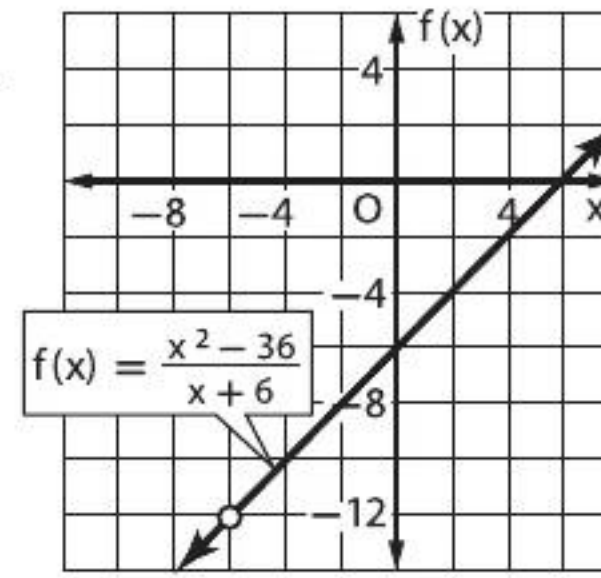
$a_n = a_1 + (n - 1)d$ صيغة الحد النوني
 اطرح $(n - 1)d$ من كلا الطرفين.

$S_n = [a_n - (n - 1)d + a_n] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$ التعويض

$S_n = [2a_n - (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$ بسط.



73.

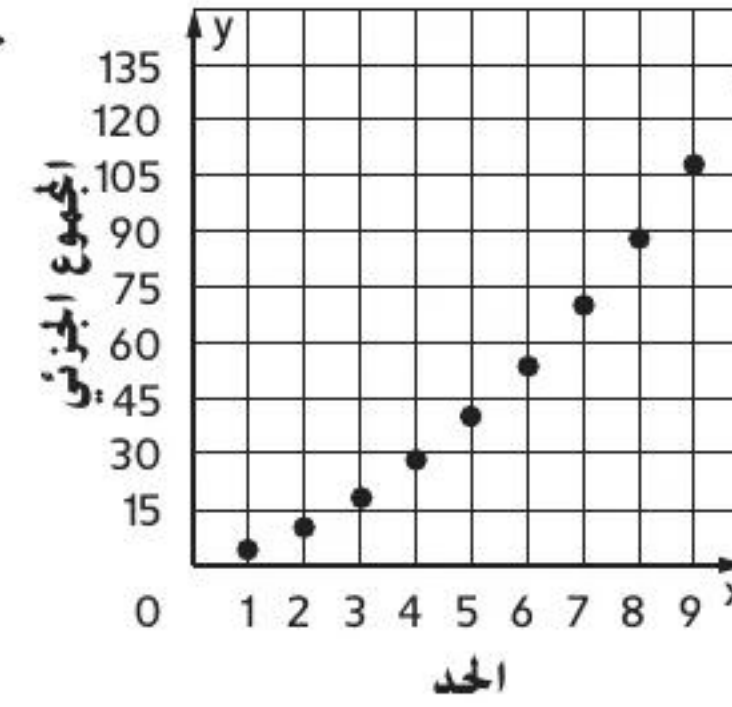


الدرس 3-2

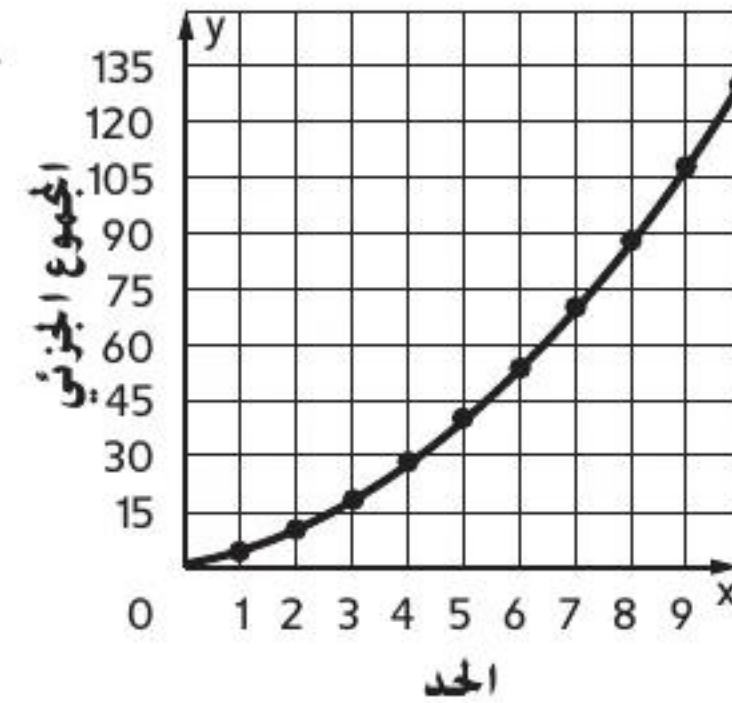
71a.

S_n	n
4	1
10	2
18	3
28	4
40	5
54	6
70	7
88	8
108	9
130	10

71b.



71c.



الدرس 3-3

67. الإجابة النموذجية: يجب تغيير $n - 1$ إلى n . ويجب تغيير 10 إلى 9. عند حدوث ذلك، ستكون حدود المتسلسلتين متطابقة. (فسيكون a_1 في المتسلسلة الأولى مساوياً لـ a_0 في المتسلسلة الثانية، وهكذا). وستكون المتسلسلتان متساويتين.

68. الإجابة النموذجية:

افتراض أن $a_n =$ الحد النوني للمتتالية و $d =$ النسبة المشتركة.	تعريف الحد الثاني لمتتالية هندسية
$a_2 = a_1 + d$	
$a_3 = a_2 \cdot r$	تعريف الحد الثالث لمتتالية هندسية
$a_3 = a_1 \cdot r \cdot r$	التعويض
$a_3 = a_1 \cdot r^2$	خاصية التجميع في الضرب
$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}$	$3 - 1 = 2$
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$n = 3$

دليل الدراسة والمراجعة

48. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$ ، فإن $1 - 7 = 1 - 7^1$ أو 6. بما أن حاصل قسمة 6 على 6 يساوي 1، فإن العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $7^k - 1$ يقبل القسمة على 6 بالنسبة إلى العدد الصحيح الموجب k . هذا يعني أن $7^k - 1 = 6r$ بالنسبة للعدد الصحيح r .
الخطوة 3:

$$\begin{aligned} 7^k - 1 &= 6r \\ 7^k &= 6r + 1 \\ 7^{k+1} &= 42r + 7 \\ 7^{k+1} - 1 &= 42r + 7 - 1 \\ 7^{k+1} - 1 &= 42r + 6 \\ 7^{k+1} - 1 &= 6(7r + 1) \end{aligned}$$

بما أن r عدد صحيح، فإن $7r + 1$ عدد صحيح. بالتالي، $7^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 6. إذا العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.
إذاً، $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 بالنسبة إلى كل الأعداد الصحيحة الموجبة n .

49. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$ ، فإن $5 - 1 = 5^1 - 1$ أو 4. بما أن حاصل قسمة 4 على 4 يساوي 1، فإن العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $5^k - 1$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة إلى العدد الصحيح الموجب k . هذا يعني أن $5^k - 1 = 4r$ بالنسبة إلى العدد الصحيح r .
الخطوة 3:

$$\begin{aligned} 5^k - 1 &= 4r \\ 5^k &= 4r + 1 \\ 5^{k+1} &= 20r + 5 \\ 5^{k+1} - 1 &= 20r + 5 - 1 \\ 5^{k+1} - 1 &= 20r + 4 \\ 5^{k+1} - 1 &= 4(5r + 1) \end{aligned}$$

بما أن r عدد صحيح، فإن $5r + 1$ عدد صحيح. بالتالي، $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4. إذا العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.
إذاً، $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة إلى كل الأعداد الصحيحة الموجبة n .

تدريب على الاختبار

11. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1. والطرف الأيمن يساوي 1 كذلك، إذاً المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{k-1} = \frac{1}{5}(6^k - 1)$ بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k .

الخطوة 3: وضح أن المعادلة المعطاة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 6 + 36 + \dots + 6^{k-1} + 6^{k+1-1} &= \frac{1}{5}(6^k - 1) + 6^{k+1-1} \\ &= \frac{1}{5}(6^k - 1) + 6^k \\ &= \frac{1}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5} + 6^k \\ &= \frac{6}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 6^{k+1} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot (6^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$ ، إذاً، $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$ بالنسبة إلى كل الأعداد الصحيحة الموجبة n .

12. الخطوة 1: $10 = 11^1 - 1$ ، ويقبل القسمة على 10. العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $11^k - 1$ يقبل القسمة على العدد الصحيح الموجب k . هذا يعني أن $11^k - 1 = 10r$ بالنسبة إلى العدد الصحيح r .

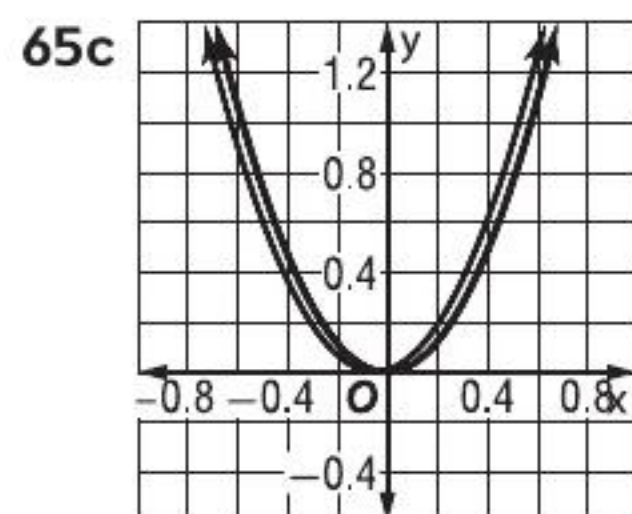
$$\begin{aligned} 11^k - 1 &= 10r \\ 11^k &= 10r + 1 \\ 11(11^k) &= 11(10r + 1) \\ 11^{k+1} &= 110r + 11 \\ 11^{k+1} - 1 &= 110r + 11 - 1 \\ 11^{k+1} - 1 &= 110r + 10 \\ 11^{k+1} - 1 &= 10(11r + 1) \end{aligned}$$

بما أن r عدد صحيح، فإن $11r + 1$ عدد صحيح. بالتالي، $11^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 10. إذاً العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذاً، $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 بالنسبة إلى كل الأعداد الصحيحة الموجبة n .

الدرس 3-4

	$f(x) = x^6$	$f(x) = x^7$
$h = 0.1$	$6x^5 + 1.5x^4 + 0.2x^3 + 0.015x^2 + 0.0006x + 0.00001$	$7x^6 + 2.1x^5 + 0.35x^4 + 0.035x^3 + 0.0021x^2 + (7 \times 10^{-5})x + (1 \times 10^{-6})$
$h = 0.01$	$6x^5 + 0.15x^4 + 0.002x^3 + 0.000015x^2 + (6 \times 10^{-8})x + (1 \times 10^{-10})$	$7x^6 + 0.21x^5 + 0.0035x^4 + (3.5 \times 10^{-5})x^3 + (2.1 \times 10^{-7})x^2 + (7 \times 10^{-10})x + (1 \times 10^{-12})$
$h = 0.001$	$6x^5 + 0.015x^4 + 0.00002x^3 + (1.5 \times 10^{-8})x^2 + (6 \times 10^{-12})x + (1 \times 10^{-15})$	$7x^6 + 0.021x^5 + 0.000035x^4 + (3.5 \times 10^{-8})x^3 + (2.1 \times 10^{-11})x^2 + (7 \times 10^{-15})x + (1 \times 10^{-18})$
$h = 0.0001$	$6x^5 + 0.0015x^4 + 0.0000002x^3 + (1.5 \times 10^{-11})x^2 + (6 \times 10^{-16})x + (1 \times 10^{-20})$	$7x^6 + 0.0021x^5 + 0.00000035x^4 + (3.5 \times 10^{-11})x^3 + (2.1 \times 10^{-15})x^2 + (7 \times 10^{-20})x + (1 \times 10^{-24})$

الإجابة النموذجية: التمثيلات البيانية للدوال متماثلة بالضبط تقريباً.



الإجابة النموذجية: عندما تتناقص h ، فإن جميع الحدود عدا الحد الأول في كل تعبير يقترب من 0.

31. $1024t^5 + 3840t^4 + 5760t^3 + 4320t^2 + 1620t + 243$
32. $512 - 960y + 600y^2 - 125y^3$
33. $64m^6 - 192m^5n + 240m^4n^2 - 160m^3n^3 + 60m^2n^4 - 12mn^5 + n^6$
34. $6561h^4 + 5832h^3j + 1944h^2j^2 + 288hj^3 + 16j^4$
35. $2187p^7 + 5103p^6q + 5103p^5q^2 + 2835p^4q^3 + 945p^3q^4 + 189p^2q^5 + 21pq^6 + q^7$
36. $a^{16} - 16a^{14}b + 112a^{12}b^2 - 448a^{10}b^3 + 1120a^8b^4 - 1792a^6b^5 + 1792a^4b^6 - 1024a^2b^7 + 256b^8$
37. $16,807c^{10} + 36,015c^8d + 30,870c^6d^2 + 13,230c^4d^3 + 2835c^2d^4 + 243d^5$
38. $128w^7 - 1792w^6x^3 + 10,752w^5x^6 - 35,840w^4x^9 + 71,680w^3x^{12} - 86,016w^2x^{15} + 57,344wx^{18} - 16,384x^{21}$
- 65a. $f(x) = x^3: 3x^2 + 3xh + h^2, h \neq 0$
 $f(x) = x^4: 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3, h \neq 0$
 $f(x) = x^5: 5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4, h \neq 0$
 $f(x) = x^6: 6x^5 + 15x^4h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5, h \neq 0$

$$f(x) = x^7: 7x^6 + 21x^5h + 35x^4h^2 + 35x^3h^3 + 21x^2h^4 + 7xh^5 + h^6, h \neq 0$$

$$f(x) = x^n: nx^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2}h + {}_nC_3x^{n-3}h^2 + \dots + {}_nC_r x^{n-r}h^{r-1} + \dots + h^{n-1}, h \neq 0$$

65b.

	$f(x) = x^3$	$f(x) = x^4$	$f(x) = x^5$
$h = 0.1$	$3x^2 + 0.3x + 0.01$	$4x^3 + 0.6x^2 + 0.04x + 0.001$	$5x^4 + 1x^3 + 0.1x^2 + 0.005x + 0.0001$
$h = 0.01$	$3x^2 + 0.03x + 0.0001$	$4x^3 + 0.06x^2 + 0.0004x + 0.000001$	$5x^4 + 0.1x^3 + 0.001x^2 + 0.000005x + (1 \times 10^{-8})$
$h = 0.001$	$3x^2 + 0.003x + 0.000001$	$4x^3 + 0.006x^2 + 0.000004x + (1 \times 10^{-9})$	$5x^4 + 0.01x^3 + 0.00001x^2 + (5 \times 10^{-9})x + (1 \times 10^{-12})$
$h = 0.0001$	$3x^2 + 0.0003x + 0.00000001$	$4x^3 + 0.0006x^2 + 0.00000004x + (1 \times 10^{-12})$	$5x^4 + 0.001x^3 + (1 \times 10^{-7})x^2 + (5 \times 10^{-12})x + (1 \times 10^{-16})$

67. الإجابة النموذجية: استخدم عالم الرياضيات الصيني تشو شي تشيه المثلثات عام 1303. إذا كان العدد الثاني لأي صف هو عدد أولي، فإن جميع الأعداد الأخرى في الصف (عدا الصف الأول) تقبل القسمة على العدد الأولي. والقطر الثاني للمثلث عبارة عن مجموعة من الأعداد الطبيعية. أما القطر الثالث، فهو عبارة عن مجموعة من الأعداد المثلثية.

69. الإجابة النموذجية: تعامل مع $x + y$ على أنه حد فردي. وفكك $(x + y)^n + n(x + y)^{n-1}z + {}_nC_2(x + y)^{n-2}z^2 + \dots + {}_nC_r(x + y)^{n-r}z^r + \dots + z^n$

70. $2^n = (1 + 1)^n$

$$= {}_nC_0 1^n 1^0 + {}_nC_1 1^{n-1} 1^1 + {}_nC_2 1^{n-2} 1^2 + \dots + {}_nC_n 1^0 1^n$$

$$= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n$$

73. الإجابة النموذجية: أوجد الحد الذي يجعل ناتج $\frac{1}{2v}$ و $6v^7$ أسين متقابلين بالنسبة لـ v : وبذلك ستتم قسمة v عند حساب المعامل. والحد الثاني لتفكيك $\left(\frac{1}{2v} + 6v^7\right)^8$ هو $\frac{3}{8}$.

74. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أن $(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n a^0 b^n$ لأي عدد صحيح موجب n . بما أن $(a + b)^1 = 1a^1 b^0 + 1a^0 b^1$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $(a + b)^k = {}_kC_0 a^k b^0 + {}_kC_1 a^{k-1} b^1 + {}_kC_2 a^{k-2} b^2 + \dots + {}_kC_k a^0 b^k$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$(a + b)^k = {}_kC_0 a^k b^0 + {}_kC_1 a^{k-1} b^1 + {}_kC_2 a^{k-2} b^2 + \dots + {}_kC_k a^0 b^k$$

$$(a + b)^k(a + b) = (a + b)({}_kC_0 a^k b^0 + {}_kC_1 a^{k-1} b^1 + {}_kC_2 a^{k-2} b^2 + \dots + {}_kC_k a^0 b^k)$$

$$(a + b)^k(a + b) = a({}_kC_0 a^k b^0 + {}_kC_1 a^{k-1} b^1 + {}_kC_2 a^{k-2} b^2 + \dots + {}_kC_k a^0 b^k) + b({}_kC_0 a^k b^0 + {}_kC_1 a^{k-1} b^1 + {}_kC_2 a^{k-2} b^2 + \dots + {}_kC_k a^0 b^k)$$

$$(a + b)^k(a + b) = {}_kC_0 a^{k+1} b^0 + {}_kC_1 a^k b^1 + {}_kC_2 a^{k-1} b^2 + \dots + {}_kC_k a^0 b^{k+1} + {}_kC_0 a^k b^1 + {}_kC_1 a^{k-1} b^2 + \dots + {}_kC_k a^0 b^{k+1}$$

$$(a + b)^{k+1} = {}_{k+1}C_0 a^{k+1} b^0 + {}_{k+1}C_1 a^k b^1 + {}_{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \dots + {}_{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1}$$

هذه العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} ، إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وهكذا. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n a^0 b^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

$$(a + b)^{k+1} = {}_{k+1}C_0 a^{k+1} b^0 + {}_{k+1}C_1 a^k b^1 + {}_{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \dots + {}_{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1}$$

هذه العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} ، إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وهكذا. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n a^0 b^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

1. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. بما أن $1 = 1^2$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.
 افترض أن $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ صحيحة بالنسبة لعدد صحيح موجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.
 فرضية الاستنتاج
 اجمع الحد $(k + 1)$ إلى الطرفين.
 بسّط الطرف الأيمن.
 حلل إلى العوامل $k^2 + 2k + 1$.

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} ، إذا P_k صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

2. افترض أن P_n هي العبارة $4^n - 1$ وتقبل القسمة على 3. P_1 هي العبارة $4^1 - 1$ وتقبل القسمة على 3. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $4^1 - 1$ تساوي 3. وهي تقبل القسمة على 3. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $4^k - 1 = 3r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $4^{k+1} - 1$ تقبل القسمة على 3.

- فرضية الاستقراء
 اجمع 1 إلى كل طرف.
 اضرب الطرفين في 4.
 بسّط.
 اطرح 1 من الطرفين.
 حلل إلى العوامل.
- بما أن r هو عدد صحيح، فإن $4r + 1$ هو عدد صحيح و $3(4r + 1)$ يقبل القسمة على 3. لذلك، $4^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 3. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$ وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $4^n - 1$ تقبل القسمة على 3 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

الدرس 3-5

1. افترض أن P_n هي العبارة $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$. بما أن $3 = 1(1 + 2)$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) = k(k + 2)$ هي العدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) &= k(k + 2) \\ 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] &= k(k + 2) + [2(k + 1) + 1] \\ 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] &= k^2 + 4k + 3 \\ 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] &= (k + 1)(k + 3) \\ 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] &= (k + 1)[(k + 1) + 2] \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} ، إذا P_k صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$ وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

2. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$. بما أن $1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n هي عبارة صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$ هي عبارة صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k &= \frac{k(k + 1)}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} s. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

3. افترض أن P_n هي العبارة $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$. بما أن $2 = 2(2^1 - 1)$ هي عبارة صحيحة. إذا P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2(2^k - 1)$ صحيحة بالنسبة لعدد صحيح موجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k &= 2(2^k - 1) \\ 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} &= 2(2^k - 1) + 2^{k+1} \\ 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^{k+1} - 2 \\ 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} &= 2(2^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} s. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وهكذا. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

4. افترض أن P_n هي العبارة $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$. بما أن $3 = 2(1)^2 + 1$ هي عبارة صحيحة. فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) = 2k^2 + k$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) &= 2k^2 + k \\ 3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] &= 2k^2 + k + [4(k + 1) - 1] \\ 3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] &= 2k^2 + 5k + 3 \\ 3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] &= (2k + 3)(k + 1) \\ 3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] &= 2(k + 1)^2 + (k + 1) \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} s. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

5. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$. بما أن $1 = \frac{1 \cdot [3(1) - 1]}{2}$ هي عبارة صحيحة. فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) &= \frac{k(3k-1)}{2} \\ 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] &= \frac{k(3k-1)}{2} + [3(k + 1) - 2] \\ 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] &= \frac{k(3k-1) + 2(3k+1)}{2} \\ 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] &= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} \\ 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] &= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} \\ 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] &= \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2} \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} s. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

6. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. بما أن $1 = \frac{(1)^2[(1)+1]^2}{4}$ عبارة صحيحة. فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 8 + 27 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} \\ 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4} \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} . فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي. نجد أن $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

7. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. بما أن $1 = 2^1 - 1$ هي عبارة صحيحة. فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} &= 2^k - 1 \\ 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} &= 2^k - 1 + 2^{(k+1)-1} \\ 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} &= 2(2^k) - 1 \\ 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} . فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي. نجد أن $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

8. افترض أن P_n هي العبارة $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$. بما أن $1^2 = \frac{(1)(2(1)-1)(2(1)+1)}{3}$ هي عبارة صحيحة. فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + [2(k+1)-1]^2 \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= \frac{[k(2k-1) + 3(2k+1)](2k+1)}{3} \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= \frac{(2k^2 + 5k + 3)(2k+1)}{3} \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= \frac{(k+1)(2k+3)(2k+1)}{3} \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3} \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1} . فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي. نجد أن $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

9. افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. بما أن $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{2}{2 \cdot 2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

10. افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. بما أن $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ عبارة صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{(k+1)}{[(k+1)+1]}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

11c. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ وبما أن $1 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{6}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{6}$$

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

12b. افترض أن P_n هي العبارة $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ بما أن $0 = \frac{(1)(1)-1}{2}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k . أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + [(k+1)-1] = \frac{k(k-1)}{2} + [(k+1)-1]$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + [(k+1)-1] = \frac{k(k-1) + 2k}{2}$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + [(k+1)-1] = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + [(k+1)-1] = \frac{(k+1)[(k+1)-1]}{2}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

13. افترض أن P_n هي العبارة $9^n - 1$ وتقبل القسمة على 8. P_1 هي العبارة $9^1 - 1$ وتقبل القسمة على 8. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $9^1 - 1$ تساوي 8 وتقبل القسمة على 8. افترض أن P_k صحيحة. حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $9^k - 1 = 8r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r تشير إلى أن $9^{k+1} - 1$ تقبل القسمة على 8.

$$\begin{aligned} 9^k - 1 &= 8r \\ 9^k &= 8r + 1 \\ 9 \cdot 9^k &= 9(8r + 1) \\ 9^{k+1} &= 72r + 9 \\ 9^{k+1} - 1 &= 72r + 8 \\ 9^{k+1} - 1 &= 8(9r + 1) \end{aligned}$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $9r + 1$ هو عدد صحيح و $8(9r + 1)$ يقبل القسمة على 8. لذلك، $9^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 8. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $9^n - 1$ تقبل القسمة على 8 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

14. افترض أن P_n هي العبارة $6^n + 4$ وتقبل القسمة على 5. P_1 هي العبارة $6^1 + 4$ وتقبل القسمة على 5. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $6^1 + 4$ تساوي 10. وهي تقبل القسمة على 5. افترض أن P_k صحيحة. حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $6^k + 4 = 5r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r تشير إلى أن $6^{k+1} + 4$ تقبل القسمة على 5.

$$\begin{aligned} 6^k + 4 &= 5r \\ 6^k &= 5r - 4 \\ 6 \cdot 6^k &= 6(5r - 4) \\ 6^{k+1} &= 30r - 24 \\ 6^{k+1} + 4 &= 30r - 20 \\ 6^{k+1} + 4 &= 5(6r - 4) \end{aligned}$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $6r - 4$ هو عدد صحيح و $5(6r - 4)$ تقبل القسمة على 5. إذاً، $6^{k+1} + 4$ تقبل القسمة على 5. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ تشير إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وهكذا. وحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $6^n + 4$ تقبل القسمة على 5 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

15. افترض أن P_n هي العبارة $2^{3n} - 1$ وتقبل القسمة على 7. P_1 صحيحة لأن $2^{3(1)} - 1$ تساوي 7. وهي تقبل القسمة على 7. وافترض أن P_k صحيحة. حيث k هو عدد صحيح موجب، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2^{3k} - 1 = 7r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r تشير إلى أن $2^{3(k+1)} - 1$ تقبل القسمة على 7.

$$\begin{aligned} 2^{3k} - 1 &= 7r \\ 2^{3k} &= 7r + 1 \\ 2^3 \cdot 2^{3k} &= 2^3(7r + 1) \\ 2^{3(k+1)} &= 56r + 8 \\ 2^{3(k+1)} - 1 &= 56r + 7 \\ 2^{3(k+1)} - 1 &= 7(8r + 1) \end{aligned}$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $8r + 1$ عدد صحيح أيضًا و $7(8r + 1)$ تقبل القسمة على 7. لذلك، $2^{3(k+1)} - 1$ تقبل القسمة على 7. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة

عند $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2^{3n} - 1$ تقبل القسمة على 7 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

16. افترض أن P_n هي العبارة $5^n - 2^n$ وتقبل القسمة على 3. P_1 صحيحة لأن $5^1 - 2^1$ تساوي 3. وهي تقبل القسمة على 3. وافترض أن P_k صحيحة. حيث k هو عدد صحيح موجب، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $5^k - 2^k = 3r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r تشير إلى أن $5^{k+1} - 2^{k+1}$ تقبل القسمة على 3.

$$\begin{aligned} 5^k - 2^k &= 3r \\ 5^k &= 2^k + 3r \\ 5 \cdot 5^k &= (2 + 3)(2^k + 3r) \\ 5^{k+1} &= 2^{k+1} + 3(2^k) + 15r \\ 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 3(2^k) + 15r \\ 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 3(2^k + 5r) \end{aligned}$$

بما أن r و k هما عددان صحيحان، فإن $2^k + 5r$ عدد صحيح. و $3(2^k + 5r)$ تقبل القسمة على 3. لذلك، $5^{k+1} - 2^{k+1}$ تقبل القسمة على 3. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $5^n - 2^n$ تقبل القسمة على 3 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

17. افترض أن P_n هي العبارة $3^n \geq 3n$. P_1 صحيحة. حيث $3^1 \geq 3(1)$ هي متباينة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة. حيث إن $3^k \geq 3k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 1$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $3^k \geq 3(k+1)$ تشير إلى أن $3^{k+1} \geq 3(k+1)$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

$3^k \geq 3k$	$k \geq 1$
$3 \cdot 3^k \geq 3 \cdot 3k$	$6k \geq 6$
$3^{k+1} \geq 9k$	إذا كان $6k \geq 6$ و $6 \geq 3$
	فإنه وفق خاصية التعدد
	للمتباينة، نجد أن $6k \geq 3$
	$6k \geq 3$
	$3k + 6k \geq 3k + 3$
	$9k \geq 3(k+1)$

وفق خاصية التعدد للمتباينة، إذا كان $3^{k+1} \geq 9k$ و $9k \geq 3(k+1)$ ، فإن $3^{k+1} \geq 3(k+1)$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3^n \geq 3n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

18. افترض أن P_n هي العبارة $n! \geq 4^n$. P_9 صحيحة. نظرًا لأن $9! > 4^9$ هي متباينة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $k! > 4^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 9$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $k! > 4^k$ تشير إلى أن $(k+1)! \geq 4^{k+1}$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

$k! > 4^k$	$k \geq 9$
$(k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 4^k$	$k+1 \geq 10$
$(k+1)! > (k+1) \cdot 4^k$	إذا كان $k+1 \geq 10$ و $10 \geq 4$
	فإنه وفق خاصية التعدد للمتباينة،
	نجد أن $k+1 \geq 4$
	$k+1 \geq 4$
	$(k+1) \cdot 4^k \geq 4 \cdot 4^k$
	$(k+1) \cdot 4^k \geq 4^{k+1}$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $3(k+1) \leq 12k$ و $4^k + 1 < 12k$ ، فإن $4^k + 1 < 3(k+1)$. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 1$ ، فإن P_n صحيحة عند $n=2$ و $n=3$ وهكذا. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3n < 4^n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 1$.

22. افترض أن P_n هي العبارة $2^n > 10n + 7$. P_{10} صحيحة، حيث $2^{10} > 10(10) + 7$ هي عبارة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث إن $2^k > 10k + 7$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 10$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن $2^{k+1} > 10(k+1) + 7$ تشير إلى أن $2^k > 10k + 7$ تشير إلى أن $2^{k+1} > 10(k+1) + 7$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

$$\begin{array}{l|l} 2^k > 10k + 7 & k \geq 10 \\ 2 \cdot 2^k > 2(10k + 7) & k - 10 \geq 0 \\ 2^{k+1} > 20k + 14 & 11k - 10k - 10 \geq 0 \\ & 11k - 10(k+1) \geq 0 \\ & 11k \geq 10(k+1) \end{array}$$

بما أن k عدد صحيح موجب، فإن $20k + 7 \geq 11k$ إذا كان $20k + 7 \geq 11k$ و $11k \geq 10(k+1)$ ، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $20k + 7 \geq 10(k+1)$.

$$\begin{array}{l} 20k + 7 \geq 10(k+1) \\ 20k + 7 + 7 \geq 10(k+1) + 7 \\ 20k + 14 \geq 10(k+1) + 7 \end{array}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $2^k + 1 > 20k + 14$ و $2^k + 1 > 10(k+1) + 7$ ، فإن $2^k + 1 > 10(k+1) + 7$. وبما أن P_n صحيحة عند $n=10$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 10$ ، فإن P_n صحيحة عند $n=11$ و $n=12$ ، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الممتد للاستقراء الرياضي، $2^n > 10n + 7$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة في $n \geq 10$.

23. افترض أن P_n هي العبارة $2n < 1.5^n$. P_7 صحيحة، حيث إن $2(7) < 1.5^7$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $2k < 1.5^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 7$. وبين أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2(k+1) < 1.5^{k+1}$ تشير إلى أن $2k < 1.5^k$ تشير إلى أن $2(k+1) < 1.5^{k+1}$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

$$\begin{array}{l|l} 2k < 1.5^k & k \geq 7 \\ 1.5 \cdot 2k < 1.5 \cdot 1.5^k & \text{إذا كان } k \geq 7 \text{ و } 7 \geq 2 \text{، فإنه وفق} \\ 3k < 1.5^{k+1} & \text{خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن } k \geq 2 \\ & k \geq 2 \\ & 2 \leq k \\ & 2k + 2 \leq 2k + k \\ & 2(k+1) \leq 3k \end{array}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $2(k+1) \leq 3k$ و $3k < 1.5^{k+1}$ ، فإن $2(k+1) < 1.5^{k+1}$. وبما أن P_n صحيحة عند $n=7$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 7$ ، فإن P_n صحيحة عند $n=8$ و $n=9$ ، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الممتد للاستقراء الرياضي، نجد أن $2n < 1.5^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة $n \geq 7$.

24. افترض أن P_n هي العبارة $1.5^n > 10 + 0.5n$. P_7 صحيحة، حيث $1.5^7 > 10 + 0.5(7)$ هي عبارة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث إن $1.5^k > 10 + 0.5k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 7$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $1.5^{k+1} > 10 + 0.5(k+1)$ تشير إلى أن $1.5^k > 10 + 0.5k$ تشير إلى أن $1.5^{k+1} > 10 + 0.5(k+1)$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $(k+1) \cdot 4^k > (k+1)!$ و $(k+1) > 4^k + 1$ ، فإن $4^k \geq 4^k + 1$. وبما أن P_n صحيحة عند $n=9$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 9$ ، فإن P_n صحيحة عند $n=10$ و $n=11$ ، وما إلى ذلك. بمعنى أنه وفق مبدأ الممتد للاستقراء الرياضي، نجد أن $n! > 4^n$ بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة في $n \geq 9$.

19. افترض أن P_n هي العبارة $2^n > 2n$. P_3 صحيحة، حيث $2^3 \geq 2(3)$ هي عبارة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث إن $2^k > 2k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 3$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2^{k+1} > 2(k+1)$ تشير إلى أن $2^k > 2k$ تشير إلى أن $2^{k+1} > 2(k+1)$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

$$\begin{array}{l|l} 2^k > 2k & k \geq 3 \\ 2 \cdot 2^k > 2 \cdot 2k & 2k \geq 6 \\ 2^{k+1} > 4k & \text{إذا كان } 6 \geq 3 \text{ و } 6k \geq 2 \text{، فإنه وفق خاصية} \\ & \text{التعدي للمتباينة، نجد أن } 2k \geq 2 \\ & 2k \geq 2 \\ & 2k + 2k \geq 2k + 2 \\ & 4k \geq 2(k+1) \end{array}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $2^k + 1 > 4k$ و $4k \geq 2(k+1)$ ، فإن $2^k + 1 > 2(k+1)$. وبما أن P_n صحيحة عند $n=3$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 3$ ، فإن P_n صحيحة عند $n=4$ و $n=5$ ، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الممتد للاستقراء الرياضي، نجد أن $2^n > 2n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة في $n \geq 3$.

20. افترض أن P_n هي العبارة $9n < 3^n$. P_4 صحيحة، نظرًا لأن $9(4) < 3^4$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $9k < 3^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 4$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $9(k+1) < 3^{k+1}$ تشير إلى أن $9k < 3^k$ تشير إلى أن $9(k+1) < 3^{k+1}$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

$$\begin{array}{l|l} 9k < 3^k & k \geq 4 \\ 3 \cdot 9k < 3 \cdot 3^k & 4 \leq k \\ 27k < 3^{k+1} & 18 \cdot 4 \leq 18 \cdot k \\ & 72 \leq 18k \\ & \text{إذا كان } 9 \leq 72 \text{ و } 72 \leq 18k \text{، فإنه وفق} \\ & \text{خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن } 18k \geq 9 \\ & 9 \leq 18k \\ & 9k + 9 \leq 9k + 18k \\ & 9(k+1) \leq 27k \end{array}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $9(k+1) \leq 27k$ و $9(k+1) < 3^{k+1}$ ، فإن $9(k+1) < 3^{k+1}$. وبما أن P_n صحيحة عند $n=4$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 4$ ، فإن P_n صحيحة عند $n=5$ و $n=6$ ، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الممتد للاستقراء الرياضي، نجد أن $9n < 3^n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 4$.

21. افترض أن P_n هي العبارة $3n < 4^n$. P_1 صحيحة، نظرًا لأن $3(1) < 4^1$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $3k < 4^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 1$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $3(k+1) < 4^{k+1}$ تشير إلى أن $3k < 4^k$ تشير إلى أن $3(k+1) < 4^{k+1}$. استخدم كلا الجزأين الخاصين بفرضية الاستقراء.

$$\begin{array}{l|l} 3k < 4^k & k \geq 1 \\ 4 \cdot 3k < 4 \cdot 4^k & 3k \geq 3 \\ 12k < 4^{k+1} & 3k - 3 \geq 0 \\ & 6k - 3k - 3 \geq 0 \\ & 6k - 3(k+1) \geq 0 \\ & 6k \geq 3(k+1) \\ & 3(k+1) \leq 6k \\ & \text{بما أن } k \text{ عدد صحيح موجب، فإن } 6k \leq 12k \\ & \text{إذا كان } 3(k+1) \leq 6k \text{ و } 6k \leq 12k \\ & \text{فإن } 3(k+1) \leq 12k \end{array}$$

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز	EM-1
القياسات	EM-2
العمليات والعلاقات الحسابية	EM-3
الصيغ والمفاهيم الجبرية	EM-3
الصيغ والمفاهيم الهندسية	EM-5
الدوال والمتطابقات المثلثية	EM-6
الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال	EM-7
النهايات والتفاضل والتكامل	EM-7
الصيغ والمفاهيم الاحصائية	EM-8

الجبر	
$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$ a $	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتَّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[]$	تتضمن الأطراف
$()$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميغا، السرعة الزاوية
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$ \mathbf{a} $	طول المتجه a
المجموعات والمنطق	
$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
المجموعات الخالية	
$\emptyset$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p ، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \leftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q
الهندسة	
$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي π
$\angle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطاته الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A إلى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$ ، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
$n\text{-gon}$	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$ \overrightarrow{AB} $	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\widehat{AB}$	قوس أصغر نقطاته الطرفيتان A و B
$\widehat{ABC}$	قوس أكبر نقطاته الطرفيتان A و C
$m\widehat{AB}$	قياس درجة القوس AB
حساب المثلثات	
$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	$\text{Arcsin } x$
$\cos^{-1} x$	$\text{Arccos } x$
$\tan^{-1} x$	$\text{Arctan } x$

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a . يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$. يمكن التعويض عن a باستخدام b .
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$. فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$. فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b . $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c . $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c . $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a . يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$. حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$. يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$.
الضرب (0)	لأي عدد a . يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a = b$. فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a = b$. فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c . حيث $c \neq 0$. إذا كان $a = b$. فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a > b$. فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a > b$. فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c . 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$. فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$. فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b . إذا كان $ab = 0$. فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو كلاهما 0 .
* تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و $\geq$ و $\leq$.	

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات	
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$
الضرب في كمية عددية	$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$
كثيرات الحدود	
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
مربع فرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
اللوغاريتمات	
خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$
خاصية الأس الثابت	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$
تغيير الأساس	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الدوال الأسية واللوغاريتمية			
المربحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسّي	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسّي المستمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الأساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
المتتاليات والمتسلسلات			
الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهاية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, r < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$	المتسلسلة الأسية	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
نظرية ذات الحدين	$(a + b)^n = {}_nC_0 a^nb^0 + {}_nC_1 a^{n-1}b^1 + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \dots + {}_nC_n a^0b^n$		
متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$		
المتجهات			
الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ $= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$	مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{ \mathbf{v} ^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$ \mathbf{v} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي			
صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$		
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطع المخروطية	
قطع مكافئ	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ أو $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
قطع ناقص	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y - k)^2}{b^2} + \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$
قطع زائد	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$
الدوران المحوري للقطع المخروطية	
$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ و $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$	
المعادلات الوسيطة	
الموقع العمودي	$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$
المسافة الأفقية	$x = tv_0 \cos \theta$
الاعداد المركبة	
صيغة الضرب	$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$
صيغة القسمة	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}} \left(\cos \frac{\theta + 2n\pi}{p} + i \sin \frac{\theta + 2n\pi}{p} \right)$
نظرية دي موافر	$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$ أو $r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

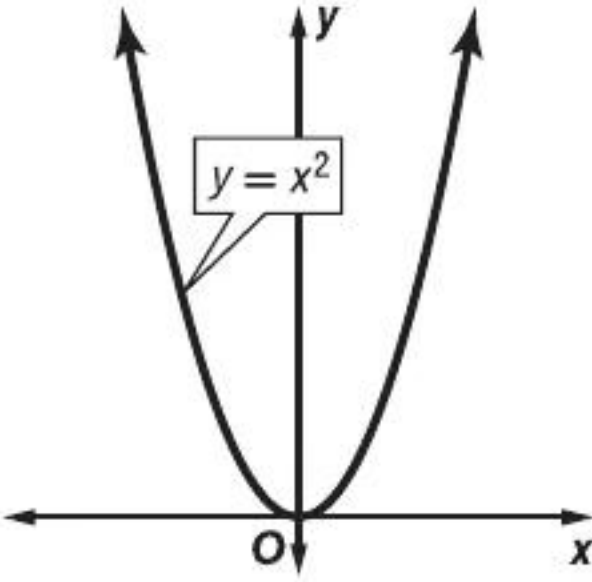
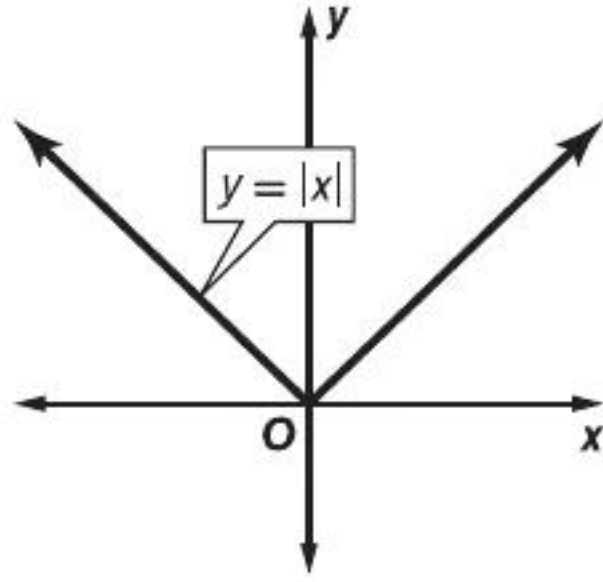
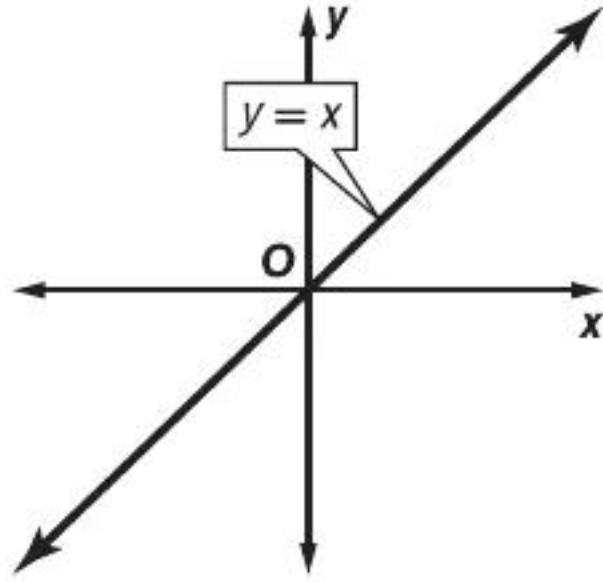
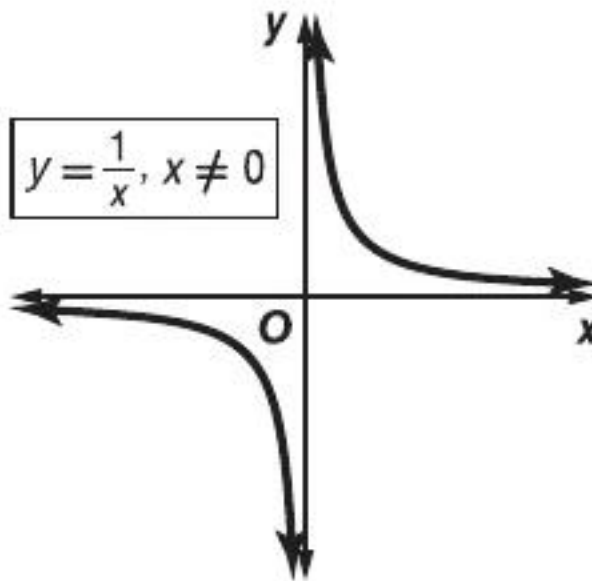
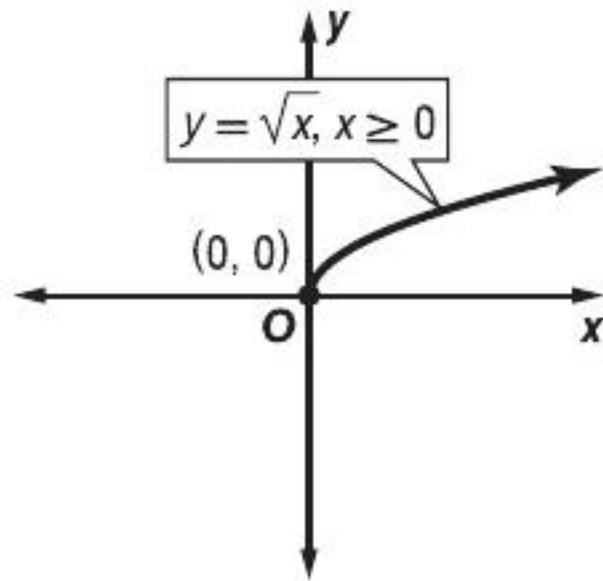
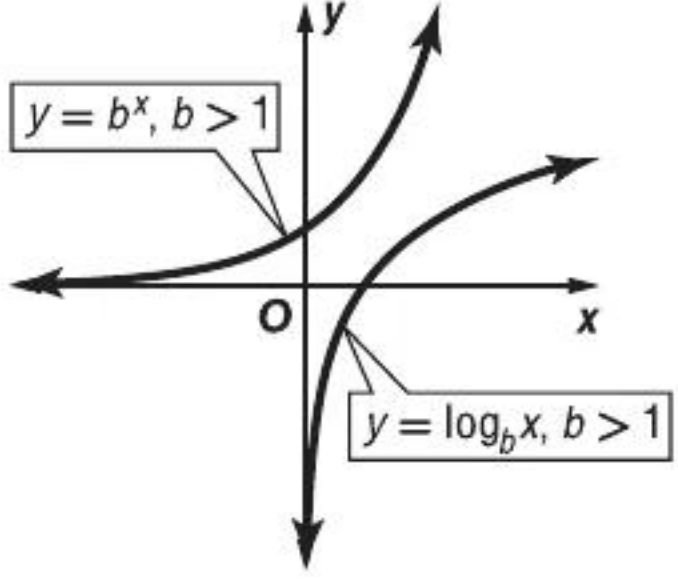
الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية	
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$
المسافة على خط الأعداد	$d = a - b $
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
طول القوس	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف على خط الأعداد	$M = \frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في المستوى	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
المحيط	
مربع	$P = 4s$
مستطيل	$P = 2\ell + 2w$
دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$
مساحة السطح الجانبية	
منشور	$L = Ph$
هرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$
مخروط	$L = \pi r\ell$
مساحة السطح الكلية	
منشور	$S = Ph + 2B$
مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
كرة	$S = 4\pi r^2$
مكعب	$S = 6s^2$
الحجم	
منشور	$V = Bh$
مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2$
إسطوانة	$V = \pi r^2 h$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
كرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
مكعب	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$

الدوال المثلثية		
$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$
النسب المثلثية		
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
قانون جيبس التمام		
Area = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	صيغة هيرون	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
قانون الجيوب		
$\omega = \frac{\theta}{t}$	السرعة الزاوية	$v = \frac{s}{t}$
السرعة الخطية		
المتطابقات المثلثية		
$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات المقلوب		
$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
متطابقات فيثاغورس		
$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$	$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$	$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$
متطابقات المتهيمات		
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc \theta$
متطابقات الفردي والزوجي		
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	متطابقات المجموع والفرق
$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$	$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
متطابقات ضعف الزاوية		
$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$	
$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$	$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$
متطابقات تخفيض الأس		
$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$	$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ $\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$	متطابقات نصف الزاوية
$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$	$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$	متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

الدوال التربيعية 	دوال القيمة المطلقة 	الدوال الخطية 
الدوال العكسية والنسبية 	دوال الجذر التربيعي 	الدوال الأسية واللوغاريتمية 

العمليات الحسابية على الدوال

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	الضرب	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	الجمع
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	القسمة	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	الطرح

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$	نهاية طرح دالتين	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$	نهاية مجموع دالتين
$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)^n] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$	نهاية دالة مرفوعة لأس	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$	نهاية قسمة دالتين
$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ و n عدد زوجي	نهاية الجذر النوني لدالة	المتوسطة $v_{\text{avg}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	اللحظية $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

التفاضل

إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	المجموع أو الفرق	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	قاعدة القوة
$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	قاعدة القسمة	$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	قاعدة الضرب

التكامل

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل	$\int f(x) dx = F(x) + C$	التكامل غير المحدود
----------------------------------	--------------------------------------	---------------------------	---------------------

الصيغ والمفاهيم الاحصائية	
قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}} \text{ or } z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E \text{ or } \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right)$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ ، درجات الحرية: $n - 2$

شكر وتقدير

نسخة الطلاب

viii ©Purestock/SuperStock;
 ix Ingram Publishing; x
 I. Rozenbaum & F. Cirou/
 PhotoAlto; xi J. Castro/Flickr/
 Getty Images; xii Dennis Welsh/
 UpperCut Images/Getty Images;
 xiii ZouZou/Shutterstock.com;
 xviii ra2studio/Shutterstock; 001
 ©Purestock/SuperStock; 004
 Petr Bonek/Shutterstock.com;
 007 Photo by U.S. Army, 1964.
 Figure 45, U.S. Geological Survey;
 014 ©COMSTOCK Images/
 Age Fotostock; 021 Ingram
 Publishing/SuperStock; 022
 Laurence Gough/Shutterstock.
 com; 029 UpperCut Images/
 Getty Images; 030 Photo
 Researchers, Inc./Alamy; 037
 Charles Knowles/Alamy Stock
 Photo; 040 ©Shutterstock/
 clicksahed; 045 sevenMaps7/
 Shutterstock.com; 046
 Pongsathorn Vipusmith/
 Shutterstock.com; 048
 McGraw-Hill Education; 058
 StockPhotosArt-Education/
 Alamy Stock Photo; 062 Ingram
 Publishing; 065 Darryl Leniuk/
 Pictal/SuperStock; 074 Kris
 Legg/Alamy; 084 Zubin Shroff/
 Image Source; 089 Khomulo
 Anna/Shutterstock.com; 091
 ©Dennis MacDonald/Alamy;

098 JGI/Blend Images LLC; 102
 John Lund/Marc Romanelli/
 Blend Images LLC; 114 Patricia
 Dulasi/Shutterstock.com; 118
 I. Rozenbaum & F. Cirou/
 PhotoAlto; 121 ThinkStock/
 SuperStock; 122 Pictal/
 SuperStock; 136 ZouZou/
 Shutterstock.com; 145
 MediImages/SuperStock;
 148 Purestock/SuperStock; 164
 Digital Vision/Getty Images.

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم
اقتراح - استفسار - شكوى



80051115



04-2176855



ccc.moe@moe.gov.ae



www.moe.gov.ae

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم. لايسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو جزء منه أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات، أو نقله بأي شكل من الأشكال، من دون إذن مسبق من الناشر.