الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام المجتمع
54
YEAR OF COMMUNITY
UAE

نحن الإمارات
WE THE UAE
2031

مفتاح الإجابات

2025-2026

# الرياضيات

## نسخة الإمارات العربية المتحدة

## دليل الطالب التفاعلي

الصف
12
تطبيقي

Mc Graw Hill

مفتاح الإجابات

McGraw-Hill Education

# الرياضيات

## نسخة الإمارات العربية المتحدة

## دليل الطالب التفاعلي

### المسار التطبيقي

Mc Graw Hill

صورة الغلاف: Shanvood/Shutterstock

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2020 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-44-709217-9 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-709217-1 (نسخة الطالب)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-44-7092162 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-709216-3 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

# محتويات موجزة


الوحدة 1 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الوحدة 2 الدوال والعلاقات النسبية

الوحدة 3 المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة 4 التحويلات الهندسية والتناظر

الوحدة 5 الدوال المثلثية

الوحدة 6 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 7 الدوال من منظور التفاضل والتكامل



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

# المحتويات


**الوحدة 1** **الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية**

الهدف الأساسي من الوحدة . . . . . 2
**1.1** اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية . . . . . 4
**1.2** حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية . . . . . 10
**1.3** خواص اللوغاريتمات . . . . . 14
**1.4** اللوغاريتمات العادية . . . . . 18
**1.5** الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية . . . . . 22
**1.6** استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية . . . . . 26
مهمة تقويم الأداء . . . . . 32
تدريب على الاختبار المعياري . . . . . 36

**الوحدة 2** **الدوال والعلاقات النسبية**

الهدف الأساسي من الوحدة . . . . . 38
**2.1** ضرب التعابير النسبية وقسمتها . . . . . 40
**2.2** جمع التعابير النسبية وطرحها . . . . . 46
**2.3** تمثيل دوال المقلوب بيانيًا . . . . . 52
**2.4** التمثيل البياني للدوال النسبية . . . . . 56
**2.5** حل المعادلات والمتباينات النسبية . . . . . 62
مهمة تقويم الأداء . . . . . 68
تدريب على الاختبار المعياري . . . . . 72

**الوحدة 3** **المتتاليات والمتسلسلات**

الهدف الأساسي من الوحدة . . . . . 75
**3.2** المتتاليات والمتسلسلات الحسابية . . . . . 77
**3.3** المتتاليات والمتسلسلات الهندسية . . . . . 79
اربطها معًا . . . . . 81
قبل الاختبار . . . . . 82



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

**الوحدة 4** **التحويلات الهندسية والتناظر**

الهدف الأساسي من الوحدة

**4.1** الانعكاس

**4.2** الإزاحة

**4.3** الدوران

**4.4** تركيب التحويلات

**4.5** التناظر

**4.6** عمليات تغير الأبعاد (التمدد)

مهمة تقويم الأداء

تدريب على الاختبارات المعيارية

**الوحدة 5** **الدوال المثلثية**

الهدف الأساسي من الوحدة

**5.2** الزوايا وقياس الزوايا

**5.6** الدوال المثلثية الدائرية والدورية

**5.7** التمثيل البياني للدوال المثلثية

**5.8** إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

**5.9** الدوال المثلثية العكسية

مهمة تقويم الأداء

تدريب على الاختبارات المعيارية

**الوحدة 6** **المتطابقات والمعادلات المثلثية**

الهدف الأساسي من الوحدة

**6.2** إثبات صحة المتطابقات المثلثية

**6.3** متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

**الوحدة 7** **الدوال من منظور التفاضل والتكامل**

قبل القراءة

النقاط الأساسية

**7.1** الدوال

**7.2** تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

**7.3** الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

**7.4** القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

**7.5** الدوال الأصلية والتحويلات

**7.6** العمليات على الدوال وتركيب الدوال

**7.7** العلاقات والدوال العكسية

الربط معًا

قبل الاختبار


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

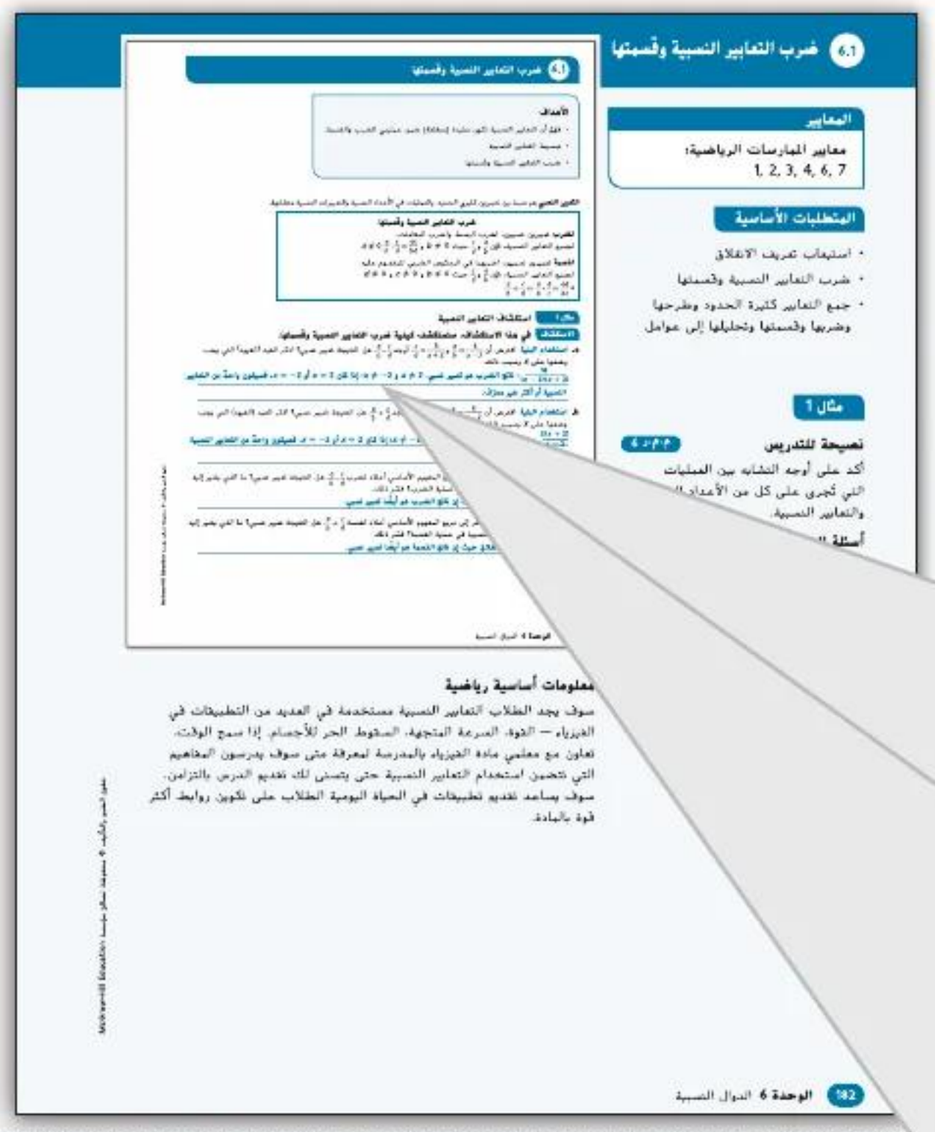
# كيفية استخدام هذا البرنامج الدراسي

دليل الطالب التفاعلي هو مورد يدعم مشاركة الطلاب ويساعدهم على أن يكونوا ناجحين.

## الأهداف

صُمّمت الدروس خصيصًا لتركّز تركيزًا واضحًا على الفهم التصوري والدقة. وتضمن الأمثلة التطبيقية وأقسام التمارين إضفاء الطلاب طابعًا رسميًا على المفاهيم الرئيسية الأساسية المشتركة.

ويستهدف التركيز القوي على استخدام النماذج مساعدة الطلاب على ربط الرياضيات بالحياة اليومية. حيث سيتولى الطلاب صناعة النماذج التي تمثل مواقف من الحياة اليومية، واختبارها، وتحسينها.




**a. استخدام البنية** افترض أن $\frac{a}{b}=\frac{6}{x-2}$ و $\frac{c}{d}=\frac{3}{x+2}$.
أوجد $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. هل النتيجة تعبير نسبي؟ اذكر القيد (القيود) التي يجب وضعها على $x$ وسبب ذلك.

## المعايير

تكون معايير الممارسة في الرياضيات (SMP) مدمجة بشكل وثيق وملموس في ثنايا كل درس. ويُقدم للمعلم دعمًا إضافيًا ضمنيًا في صورة نصائح وإستراتيجيات وأفكار حول الطريقة التي يمكنك بها تطبيق معايير الممارسة في الرياضيات في صفك الدراسي.

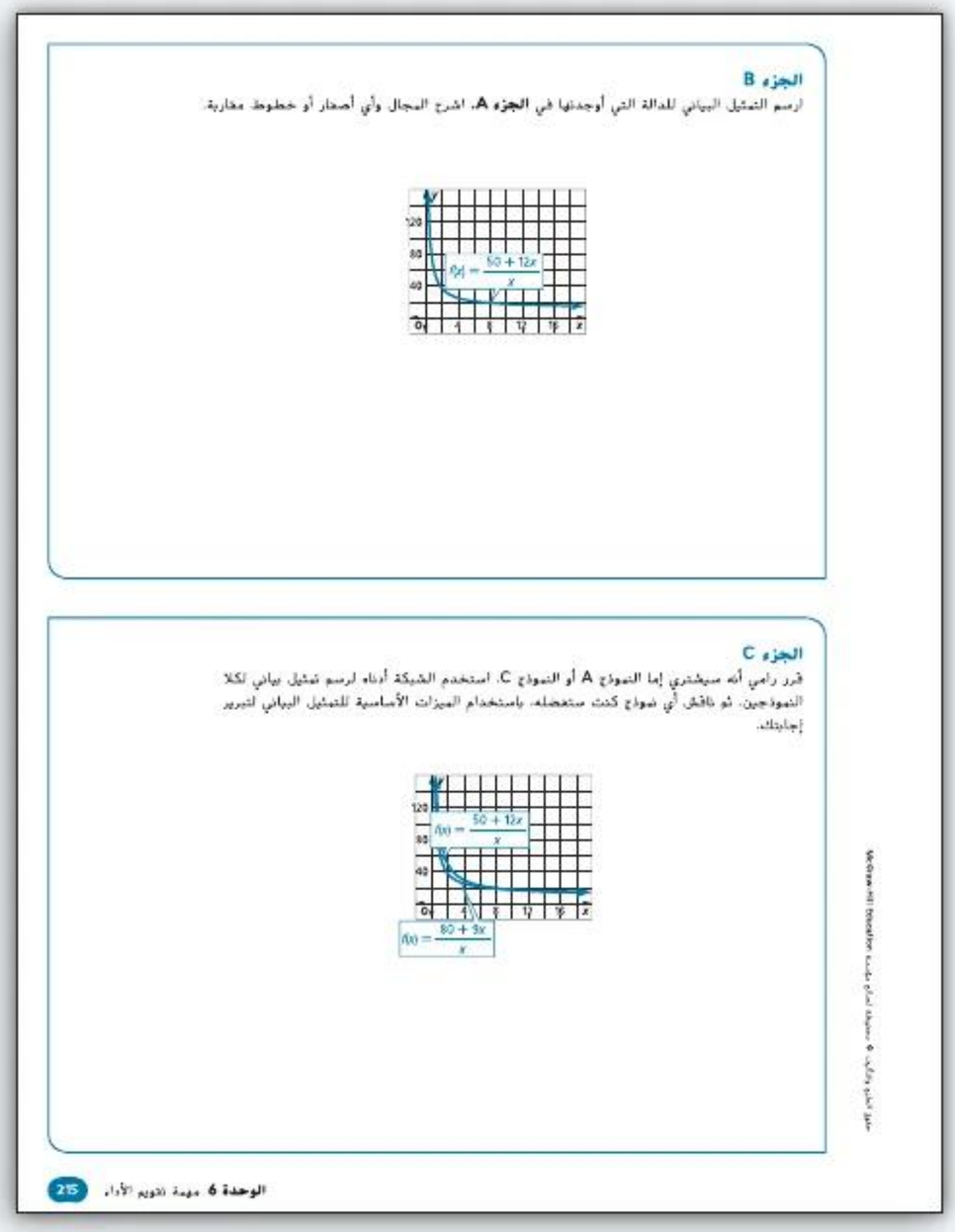
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## تمرين التقويم

توجد مهمتان لتقويم الأداء في نهاية كل وحدة هدفهما تحدّي الطلاب؛ للتمرن على الاستنتاج المجرد والمثابرة وحل المسائل الواردة في المهام.

معايير رصد الدرجات مضمنة بالإضافة إلى نصائح للتدريس.

يوجد في نهاية كل وحدة قسم تدريب على الاختبار. أعن طلابك على الاستعداد من خلال أسئلة التمارين التي تتجاوز الاختيار من متعدد والإجابات القصيرة.



**الجزء B**

ارسم التمثيل البياني للدالة التي أوجدتها في **الجزء A**. اشرح المجال وأي أصفار أو خطوط مقاربة.




**الجزء C**

قرر رامي أنه سيشتري إما النموذج A أو النموذج C. استخدم الشبكة أدناه لرسم تمثيل بياني لكلا النموذجين. ثم ناقش أي نموذج كنت ستفضله، باستخدام الميزات الأساسية للتمثيل البياني لتبرير إجابتك.




حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



**تمرين على الاختبار المعياري**

1. اضرب. حدد أي قيم لـ x يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

$$\frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 2x - 15} \cdot \frac{x^2 - 12x + 32}{2x^2 - 7x - 4}$$

$= \frac{x - 8}{x - 5}; x \neq -3, x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 4, x \neq 5$

2. يتم تقسيم ملعب مستطيل الشكل إلى قسم للأطفال الصغار، وقسم للأطفال الأكبر سنًا، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

| الأطفال الصغار | الأطفال الأكبر سنًا |
|---|---|
| المساحة $yd^2$ 104 = | المساحة $yd^2$ 196 = |

ما التعبير الذي يمثل محيط الملعب بالكامل؟

$2x + \frac{598}{x}$

إذا كان محيط الملعب هو 72 ياردة، فما القيم المحتملة لـ x؟

13 أو 23 ياردة

3. اطرح. حدد أي قيم لـ x يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

$$\frac{2x - 5}{x + 3} - \frac{x + 1}{x + 5}$$

$= \frac{x^2 + x - 28}{(x + 3)(x + 5)}, x \neq -3, x \neq -5$

4. ما قيم x التي تحقق المتباينة التالية؟

$$\frac{8}{2x + 1} \leq 3$$

$x \geq \frac{5}{4}$ أو $x < -\frac{1}{2}$

5. اقسم. حدد أي قيم لـ x و y يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

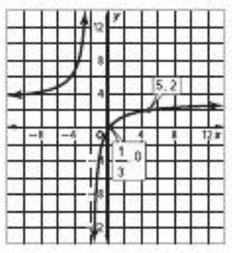
$$\frac{x - 2}{x^2y} \div \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$$

$= \frac{1}{xy}, x \neq 0, x \neq -2, x \neq 2, y \neq 0$

6. مجموع ضعف عدد وثلاثة أضعاف معكوسه الضربي يساوي 8.3. ما هو العدد؟

$\frac{15}{4}$ أو $\frac{2}{5}$

7. الدالة الموضحة في التمثيل البياني أدناه هي في صيغة $y = \frac{ax + b}{x + c}$ ولها خط مقارب رأسي عند $x = -2$.

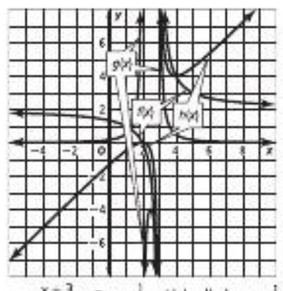



ما هي قيم a و b و c؟

a = 2 b = −1 c = 3

8. التمثيل البياني لثلاث دوال موضح أدناه. أيّ من هذه يمثل التمثيل البياني لـ $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$؟

f(x)
g(x)
h(x)




9. أوجد حل المعادلة $\frac{x - 3}{x - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1}$ وحدد ما إن كان الحل دخيلاً أم لا.

x = 4 الحل هو ليس دخيلاً.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

صُمّم كل درس وتقويم لبناء فهم الرياضيات لدى طلابك، وربط التعلم بمعايير الممارسة في الرياضيات.

## التركيز

إن دليل الطالب التفاعلي يسمح لك بأن تكرّس وقت صفك الدراسي لاستكشاف المفاهيم استكشافًا عميقًا؛ بحيث يتأسّس الطلاب تأسيسًا قويًا في معرفة وتفكير الرياضيات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

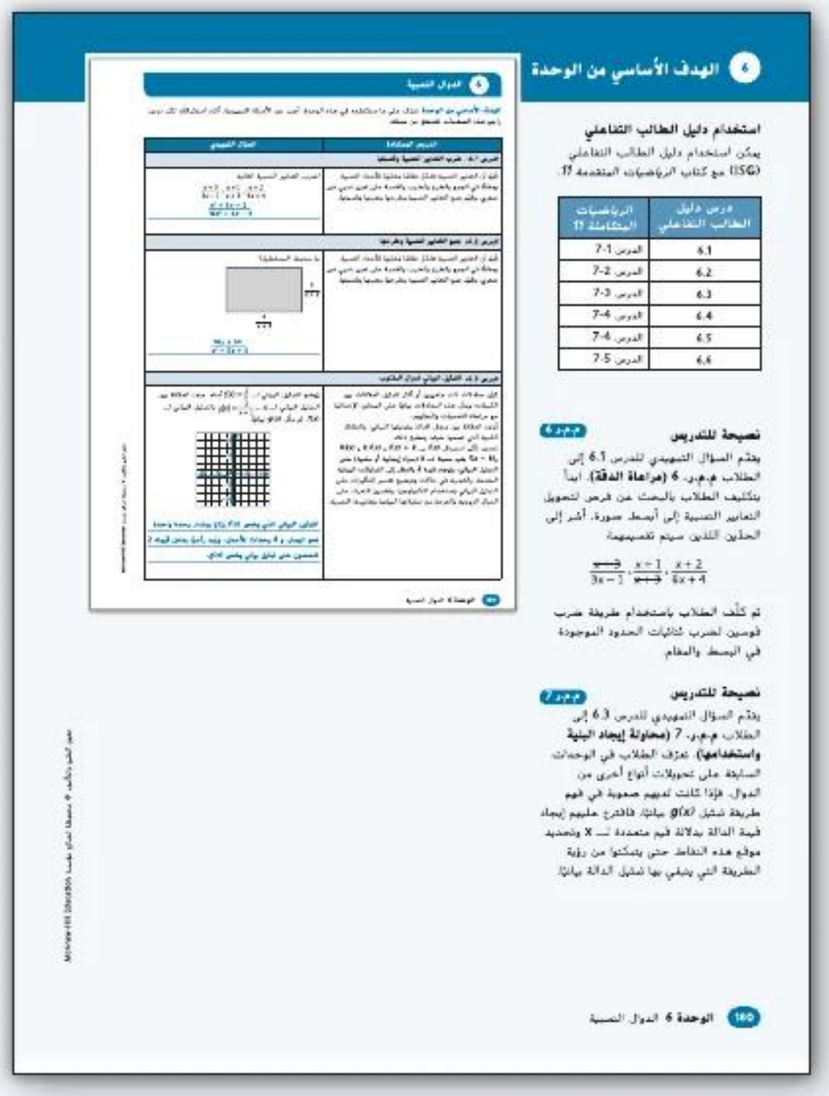
## الترابط المنطقي

إن دليل الطالب التفاعلي يبني على المعرفة المكتسبة في الدروس والدورات الدراسية السابقة، ويوجّه الطلاب في كل مفهوم بخطوات تدرجية مدروسة في الوقت الذي يكوّن فيه بعض الروابط؛ بحيث يكون كل معيار امتدادًا طبيعيًا لما تعلّمه الطلاب قبل ذلك.

## الدقة

إن المركّبات الثلاثة للدقة: الفهم التصوري، والتطبيق، والمهارة والطلاقة الإجرائيان تتخلّل جميع وحدات دليل الطالب التفاعلي، مما يتيح لطلابك فرصة التقدم للوصول إلى مستوى أعلى من الإنجاز.

ولا تتعلق الدقة بالمسائل الأصعب فحسب، بل إنها تتعلق بضمان توصّل الطلاب إلى فهم عميق لمفاهيم الرياضيات والقدرة على تطبيقها في مواقف من الحياة اليومية.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تخضع جميع الممارسات في الرياضيات لنهج متخذ قائم على تحليل المعايير كل على حدة، بما في ذلك معنى الممارسة في الرياضيات وكيف تبدو في الصف الدراسي وأنواع الأسئلة التي يمكن للمعلمين استخدامها لتعزيز تنمية الرياضيات لدى طلابهم.

والهدف من معايير الممارسة غرس قدرات المعرفة بالرياضيات وخلق نزعة إيجابية نحو أهمية استخدام الرياضيات بكفاءة لدى جميع الطلاب.

## ما معايير الممارسات في الرياضيات؟

1. فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
2. التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
3. بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
4. استخدام نماذج الرياضيات.
5. استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
6. مراعاة الدقة.
7. محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
8. البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

## لماذا تعدّ معايير الممارسات في الرياضيات أمرًا مهمًا بالنسبة لطلاب المدارس الثانوية؟

تحدد معايير الممارسة في الرياضيات التوقعات لاستخدام اللغة والتمثيلات الرياضية لفهم المسائل وحلها، واستخدام النماذج في الإعداد للوظائف والمجموعة الواسعة من التخصصات الجامعية. وتؤسس رياضيات المرحلة الثانوية طلاقة جديدة وأكثر تطورًا فوق الطلاقة السابقة المكتسبة من رياض الأطفال حتى الصف الثامن والتي تركزت على الحساب العددي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## 1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم، والبحث عن نقاط بدء الحل، فيحلّلون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف، ويضعون فرضيات حول صيغة الحل ومعناه، ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل. كما يضعون في اعتبارهم التفكير في المسائل المماثلة، ويحاولون تجربة حالات خاصة وصيغًا أبسط من المسألة الأصلية حتى يكتسبوا رؤية لحلها، وهم أيضًا يراقبون تقدمهم ويقيمونه ويغيرون مسارهم إذا لزم الأمر. وقد يحوّل الطلاب الأكبر سنًا، بناءً على سياق المسألة، التعابير الجبرية أو يغيرون نافذة العرض في حاسبة التمثيل البياني خاصتهم للحصول على المعلومات التي يحتاجون إليها. ويستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات شرح حالات التشابه بين المعادلات والأوصاف اللفظية والجداول والتمثيلات البيانية، أو يرسمون رسومًا تخطيطية بالسمات والعلاقات المهمة، ويمثّلون البيانات بيانيًا ويبحثون عن التوافق أو الاتجاهات. وقد يعتمد الطلاب الأصغر سنًا على استخدام أشياء ملموسة أو صور لمساعدتهم على تصور المفاهيم وحل المسألة. ويتحقق الطلاب المتفوقون في الرياضيات من صحة إجابات المسائل باستخدام طريقة مختلفة، ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل الجواب منطقي؟" ويمكنهم فهم منهجيات الآخرين في حل المسائل المعقدة، وتحديد حالات التطابق بين المنهجيات المختلفة.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| يستغرق حل مسألة الرياضيات بعض الوقت. يستخدم الطلاب المتفوقون في الرياضيات عملية منطقية لفهم المسائل، وفهم احتمالية وجود أكثر من طريقة لحل مسألة ما، وتغيير العملية عند الضرورة. | • مثّل العملية باستمرار أثناء حل المسائل للصف الدراسي.<br>• اسمح للطلاب ببذل محاولات جاهدة، وقدم المساعدة عن طريق طرح الأسئلة.<br>• اطلب من الطلاب التحقق من حلهم باستخدام طريقة أخرى. | يتعزز اجتهاد الطلاب في حل المسائل التي يصعب عليهم حلها مع تقدمهم. ويستخدمون عملية ستوجههم خلال كل مسألة لتقودهم نحو الحل. | • ما خطتك لحل المسألة؟<br>• ماذا ينبغي عليك فعله إذا "تعذر" عليك الحل؟<br>• هل الإجابة منطقية؟<br>• هل توجد طريقة أخرى لحل المسألة بها؟<br>• الآن بعد أن حللت المسألة، ما الذي أبليته حسنًا؟ كيف ستتعامل مع مسألة مشابهة المرة المقبلة؟ |

## 2 التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات والعلاقة بينها في مواقف المسألة، ويأتون بقدرتين متممتين لاستخدامهما في حل المسائل التي تضم علاقات كميّة: القدرة على الفصل عن السياق – لتلخيص موقفٍ معين وتمثيله رمزيًا واستخدام الرموز الممثلة كما لو كانت لها حياتها الخاصة، دون الانشغال بمراجعها بالضرورة – والقدرة على الربط بالسياق، والتوقف المؤقت بحسب الحاجة أثناء عملية المعالجة بغية التدقيق في المراجع الخاصة بالرموز المعنية. يستلزم التفكير الكمي عادات ابتكار تمثيل متسق للمسألة المطروحة، ووضع الوحدات المشتركة في الاعتبار؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط كيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| يمكن للطلاب المتفوقين في الرياضيات البدء بسياق ملموس أو من الحياة اليومية ثم تمثيله بأرقام مجردة أو بالرموز (الفصل عن السياق)، ثم إيجاد حل، والرجوع إلى السياق للتحقق من أن الحل منطقي (الربط بالسياق). | • مثّل استخلاص المعلومات من المسألة وتحديد المتغيرات. وأظهر كيف تربط بين المتغيرات حسب المعلومات المعطاة.<br>• كوّن روابط بين الإجراءات ومدلولها. | يربط الطلاب المواقف الواقعية بالتمثيلات الرياضية المجردة سواء كانت نماذج جبرية أم أشكالًا هندسية. ويفكرون أيضًا بشأن ما تمثله المتغيرات والأشكال وما يعنيه هذا ضمن السياق. | • ما الذي تمثله الأعداد؟ ما المقصود بالمتغيرات وما علاقتها ببعضها البعض وبالأعداد؟<br>• كيف يمكن تمثيل العلاقات رياضيًا؟ هل توجد أكثر من طريقة؟ |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## 3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في بناء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها. ويبررون استنتاجاتهم، وينقلونها للآخرين، ويردون على فرضيات الآخرين. ويستخدمون الاستدلال الاستقرائي بخصوص البيانات، مستنتجين فرضيات وجيهة تأخذ في الاعتبار السياق من البيانات الناشئة. يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين وتمييز المنطق أو الاستنتاج الصحيح من الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، فهم يستطيعون توضيح ماهيته.

يمكن لطلاب المرحلة الابتدائية تكوين فرضيات باستخدام مجسمات، مثل الأجسام والرسومات والرسوم التخطيطية والأفعال. ويمكن لمثل هذه الفرضيات أن تكون منطقية وصحيحة، بالرغم من أنها غير معممة أو رسمية حتى صفوف دراسية متقدمة. ولاحقًا، يتعلم الطلاب تحديد المجالات التي تنطبق عليها إحدى الفرضيات. ويمكن للطلاب في كل الصفوف الدراسية أن يستمعوا إلى فرضيات الآخرين ويقرؤوها، ويقررون إذا ما كانت منطقية أم لا. ويطرحون أسئلة مفيدة لتوضيح الفرضيات أو تحسينها.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| تتطلب فرضيات الرياضيات السليمة تقدمًا منطقيًا للعبارات والأسباب. ويكون بإمكان الطلاب توصيل أفكارهم بوضوح والدفاع عنها. | • ساعد الطلاب على التمييز بين الافتراضات والفرضيات المنطقية.<br>• مثّل تقييمات للفرضيات الصحيحة والخاطئة. | يتحدث الطلاب ويكتبون عن الرياضيات ويشاركون أفكارهم مع الآخرين. ويتوصلون إلى استنتاجات، ويضعون تقديرات، ويفسرون تفكيرهم المنطقي، ويبررون استنتاجاهم، ويعترضون على استنتاجات الطلاب الآخرين. | • كيف حصلت على هذه الإجابة؟ هل تكون صحيحة دائمًا؟<br>• لماذا نجح هذا؟ ما الدليل في الرياضيات الذي يمكنك تقديمه؟<br>• هل يمكنك إعطائي "مثال خارج عن التعريف"؟ أو مثال مضاد؟ |

## 4 استخدام نماذج الرياضيات.

يمكن للطلاب المتفوقين في الرياضيات تطبيق مفاهيم الرياضيات التي يعرفونها لحل المسائل التي يواجهونها في الحياة اليومية والمجتمع والعمل. في الصفوف الدراسية الأولى، قد يتمثل هذا في كتابة معادلة جمع بسيطة لوصف موقفٍ ما. وفي الصفوف الدراسية المتوسطة، يمكن أن يطبق الطالب إستراتيجية الاستنتاج التناسبي للتخطيط لحدث مدرسي أو لتحليل مشكلة يواجهها المجتمع. وفي المدرسة الثانوية، قد يستخدم الطالب الهندسة لحل مسألة ترتبط بالتصميم، أو يستخدم دالة لوصف كيف تعتمد كمية ما على كمية أخرى. يرتاح الطلاب المتفوقون في الرياضيات القادرون على تطبيق ما يعرفونه عند وضع افتراضات وتقريبات لتبسيط موقف معقد، مدركين أن هذه الأمور قد تحتاج مراجعة لاحقًا. وهم قادرون على تحديد الكميات المهمة في موقف عملي ورسم مخطط للعلاقات باستخدام أدوات مثل الرسوم التخطيطية، والجداول بمدخلين، والتمثيلات البيانية والمخططات الانسيابية والمعادلات، كما يمكنهم تحليل هذه العلاقات من منظور الرياضيات للتوصل إلى استنتاجات، ويفسرون نتائجهم الرياضية بصورة روتينية في سياق الموقف، ويفكرون ما إذا كانت النتائج منطقية أم لا، وربما يحسنون النموذج إذا لم يؤدي الغرض منه.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| يصنع استخدام النماذج ترابطًا بين الرياضيات والإحصائيات بالصف الدراسي والحياة العامة والعمل وصناعة القرار. ويُتوقع من طلاب المدارس الثانوية في هذا المستوى أن يطبقوا النقاط الأساسية المكتسبة من صفوف مبكرة على المسائل من مستوى المرحلة الثانوية. | • أعد ربط النماذج المحددة، بالموقف.<br>• ناقش مدى ملاءمة نماذج متعددة.<br>• حل مسائل من الحياة اليومية بطرق متعددة. | يختار الطلاب ويستخدمون الملائم من الرياضيات والإحصائيات بغية تحليل المواقف وفهمها بشكل أفضل وتحسين القرارات. يرى الطلاب أن الرياضيات ليست مجرد مجموعة من المهارات ليس لها استخدام في الحياة اليومية. | • كيف يمكنك تمثيل الموقف رياضيًا؟<br>• كيف يتمثل الموقف في المعادلة أو الرسم التخطيطي لديك؟<br>• ما الافتراضات التي يمكنك وضعها؟ هل يجب عليك وضعها؟<br>• هل يمكنك وضع تقدير جيد للإجابة؟ |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## 5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

يراعي الطلاب المتفوقون في الرياضيات الأدوات المتاحة أثناء حل مسألة رياضيات. وقد تتضمن هذه الأدوات ورقة، أو قلم رصاص، أو نماذج ملموسة، أو مسطرة، أو منقلة، أو حاسبة، أو جدول بيانات، أو نظامًا جبريًا حاسوبيًا، أو حزمة إحصائية، أو برنامج هندسة ديناميكية. ويُلمّ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بما يكفي من الأدوات المناسبة لصفهم الدراسي أو مقررهم الدراسي لاتخاذ قرارات صائبة حول أي من هذه الأدوات قد يكون مفيدًا، مع إدراكهم للرؤية التي سيكتسبونها والحدود التي تقيدهم. فعلى سبيل المثال، يحلل الطلاب المتفوقون في الرياضيات في المرحلة الثانوية التمثيلات البيانية للدوال والحلول التي تم إنشاؤها باستخدام حاسبة تمثيل بياني. ويكتشفون الأخطاء المحتملة من خلال استخدام التقدير بشكل إستراتيجي وغيره من المعرفة بالرياضيات. عند عمل نماذج رياضيات، يعرف الطلاب أن التكنولوجيا قد تتيح لهم تصور نتائج الافتراضات المختلفة، واستكشاف عواقبها، ومقارنة توقعات البيانات. يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات في مستويات الصفوف الدراسية المتعددة أن يحددوا موارد الرياضيات الخارجية ذات الصلة، مثل المحتوى الرقمي الموجود على موقع ويب، واستخدامها في وضع مسألة أو حلها. ويمكنهم استعمال الأدوات التكنولوجية لاستكشاف المفاهيم وتعميق فهمهم لها.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| تكون بعض الأدوات، بما في ذلك التقدير والأدوات الافتراضية، مناسبة أكثر من غيرها. وينبغي أن يفهم الطلاب منافع استخدام كل أداة وحدود استخدامها. | • قم بتوفير مختلف الأدوات في صفك الدراسي. وشجع الطلاب على أن يكون لديهم الأدوات المتاحة عند العمل خارج الصف.<br>• ناقش منافع استخدام مختلف الأدوات وحدود استخدامها. | يجري الطلاب الاختيارات بفعالية في تحديد الأداة/ الإستراتيجية لحل المسألة. وينبغي أن تتضمن مختلف الأدوات عناصر مثل الورق والقلم الرصاص، والأجسام المادية، والوسائل التعليمية اليدوية، وحاسبات التمثيل البياني، وبرنامجًا هندسيًا ديناميكيًا. وينبغي أن تتضمن كذلك إستراتيجيات مثل التقدير أو الرياضيات الذهنية أو إنشاء ورقة بيانات أو استخدام برنامج تمثيل بياني أو استخدام الإنترنت لحل المسائل. | • ما الأدوات التي سوف تساعدك على تصور الموقف؟ ما حدود استخدام هذه الأداة؟<br>• هل تحتاج إلى إجابة دقيقة؟<br>• كيف يمكنك استخدام التقدير باعتباره أداة؟<br>• هل يمكنك حل هذه المسألة باستخدام أداة أخرى؟ |

## 6 مراعاة الدقة.

يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات التواصل بدقة مع الآخرين. سوف يستخدمون تعريفات واضحة خلال نقاشهم مع الآخرين إلى جانب استنتاجهم الخاص. ويبينون معنى الرموز التي يختارونها، بما في ذلك استخدام علامة التساوي باستمرار وبشكل صحيح. وهم حريصون بشأن تحديد وحدات القياس وتسمية الإحداثيات لتوضيح ارتباطها بالكميات في المسألة. ويحسبون بدقة وكفاءة ويعبرون عن الإجابات العددية بدرجة من الدقة تناسب سياق المسألة. في الصفوف الدراسية الابتدائية، يقدم الطلاب تفسيرات صيغت بعناية لبعضهم. وبحلول الوقت الذي يدخلون فيه المدرسة الثانوية سيكونون قد تعلموا التحقق من الادعاءات واستخدام التعريفات استخدامًا صريحًا.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| إن مراعاة الدقة في الرياضيات تتعدى كونها مجرد حسابات دقيقة. فهي تعني كذلك القدرة على التواصل بلغة الرياضيات. وفي رياضيات المرحلة الثانوية، تؤدي اللغة الدقيقة إلى التواصل الفعال وتعمل بمثابة أداة لفهم المسائل وحلها. | • استخدم لغة رياضيات دقيقة.<br>• وضح كيفية استخدام أدوات مثل مسرد المصطلحات.<br>• ناقش ما يعنيه أن يكون التعريف دقيقًا. اطلب من الطلاب التعاون معًا لكتابة تعريفاتهم الخاصة وتحسينها. | يستخدم الطلاب مفردات واضحة ودقيقة وهم يشرحون استنتاجهم ويطرحون الأسئلة. ويميزون كذلك –بشكل صحيح– سمات القياس، ويميزون الإجابات، ويحددون وحدات القياس، ويسمون التمثيلات البيانية. ويعرّفون المتغيرات، ويستخدمون رموز الرياضيات لتجنب سوء الفهم. | • كيف يمكن لاستخدام المعنى العام لمصطلح رياضي ما أن يساعدك على تذكر المعنى الرياضي؟<br>• هل يمكنك إعطاء أمثلة قياسية وأمثلة خارجة عن التعريف لهذا المصطلح؟<br>• هل هذا المصطلح مشابه لشيء ما تعرفه بالفعل؟<br>• ماذا يعني الرمز الرياضي؟ |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## 7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

يمعن الطلاب المتفوقون في الرياضيات النظر لتمييز النمط أو البنية. قد يلاحظ الطلاب صغار السن، على سبيل المثال، أن إضافة ثلاثة إلى سبعة يؤدي إلى نفس مجموع إضافة سبعة إلى ثلاثة، أو يمكنهم تصنيف مجموعة من الأشكال بناءً على عدد الجوانب التي تمتلكها الأشكال. ولاحقًا، سيرى الطلاب أن $8 \times 7$ تساوي $3 \times 7 + 5 \times 7$، المحفوظة جيدًا، وذلك أثناء الإعداد لتعلّم ما يتعلّق بخاصية التوزيع. في التعبير $x^2 + 9x + 14$، يمكن أن يرى الطلاب الأكبر سنًا العدد 14 على أنه $7 \times 2$ والعدد 9 على أنه $7 + 2$، وهم يدركون أهمية أي خطٍ موجود في شكلٍ هندسي ويمكنهم استخدام إستراتيجية رسم خط مساعد لحل المسائل. كما يمكنهم الرجوع خطوة لإلقاء نظرة عامة وتغيير منظورهم. ويمكنهم رؤية الأشياء المعقدة، مثل بعض التعابير الجبرية، على أنها أشياء مفردة أو أنها تتألف من عدة أشياء. فعلى سبيل المثال، يمكنهم رؤية $5 - 3(x - y)^2$ على أنها 5 ناقص عدد موجب مضروبًا في تربيع، واستخدام ذلك لإدراك أن قيمته لا يمكن أن تزيد عن 5 لأي من الأعداد الحقيقية x و y.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| تعتمد الرياضيات على البنية المحددة بدقة. يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات إيجاد البنية لإيجاد طرق أسهل لحل المسائل. | • اطلب من الطلاب التحدث بشأن ما يلاحظونه في بنية التعابير والمعادلات.<br>• شجع الطلاب على التفكير بشأن خواص الأشكال التي يعرفونها وكيف يمكن تطبيق هذه الخواص على الشكل المحدد في مسألة ما. | يستخدم الطلاب الخواص لتساعدهم على التوصل إلى طرق بديلة للحل. ويستفيد الطلاب من مصطلحات المقارنة، ويبحثون عن طرق مختصرة لإيجاد الحل، كما يستخدمون خرائط المفاهيم والمطويات TM لتوضيح الأمثلة/الأمثلة الخارجة عن التعريف، وتصنيف الأشكال/الأعداد، وشرح بنية التعابير الجبرية. | • كيف يمكنك استخدام ما تعرفه بالفعل لمساعدتك على حل هذه المسألة؟<br>• كيف يمكن أن يساعدك ما تعرفة عن الأعداد الصحيحة وأنت تتعامل مع كثيرات الحدود؟<br>• ما الأشكال التي تراها في الرسم؟ هل يمكنك إضافة خط أو قطعة مستقيمة أخرى تعطينا مزيدًا من المعلومات؟ |

## 8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات ما إذا كانت العمليات الحسابية متكررة أم لا، ويبحثون عن الأساليب العامة والطرق المختصرة. وقد يلاحظ طلاب المدرسة الابتدائية العليا أثناء قسمة 25 على 11 أنهم يكررون نفس الحسابات مرارًا وتكرارًا، ويستنتجون أن لديهم كسرًا عشريًا متكررًا. وبالانتباه إلى حساب الميل وهم يتحقّقون عدّة مرات من أن النقاط موجودة على الخط عبر (1, 2) بميل 3، قد يستخلص طلاب المدرسة الإعدادية المعادلة $\frac{y-2}{x-1} = 3$. وقد تقودهم ملاحظة التوافق في طريقة حذف الحدود أثناء تفكيك $(x + 1)(x - 1)$ و $(x^2 + x + 1)(x - 1)$ و $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$ إلى القانون العام لمجموع متسلسلة هندسية. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل، كما يقيّمون باستمرار مدى صحة نتائجهم الوسيطة.

| ماذا يعني؟ | ماذا يمكنني أن أفعل؟ | كيف يبدو ذلك؟ | ما الأسئلة التي أطرحها؟ |
|---|---|---|---|
| تُوصف الرياضيات بأنها دراسة الأنماط. ويمكن أن يؤدي التعرف على النمط للوصول إلى نتائج بشكل أسرع وأكثر فعالية. | • قدّم للطلاب عددًا من الأمثلة المحددة، ثم وجّههم للتوصل إلى استنتاج.<br>• أشر إلى الأنماط وأنت تحل المسائل وتناقش المفاهيم. | يبحث الطلاب عن طرق مختصرة أو تعميمات. ويحاولون تجربة بضعة أمثلة محددة ثم يبتكرون حالة عامة. وتعمل هذه التجارب المتكررة التي يصف الطلاب من خلالها أفكارهم، على مساعدتهم في تكوين روابط بين ما يعرفونه والمواقف الجديدة التي تتطلب تفكيرًا مماثلاً. | • هل تلاحظ نمطًا؟<br>• هل هذا النمط يشبه النمط الذي رأيته من قبل؟<br>• هل هذه المسألة مشابهة لشيء ما تعلمه بالفعل؟<br>• كيف يمكن أن ينجح ذلك مع الأعداد الأخرى؟ هل ينجح ذلك في جميع الأوقات؟ كيف عرفت؟ |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* (ISG) مع الرياضيات *للصف 12 المسار التطبيقي*.

| درس دليل الطالب التفاعلي | *رياضيات الصف 12 المسار التطبيقي* |
|---|---|
| 1.1 | الدرس 1-1 |
| 1.2 | الدرس 1-2 |
| 1.3 | الدرس 1-3 |
| 1.4 | الدرس 1-4 |
| 1.5 | الدرس 1-5 |
| 1.6 | الدرس 1-6 |

## نصيحة للتدريس

معايير الممارسات في الرياضيات 5

يقدم السؤال التمهيدي في الدرس 1.1 إلى الطلاب إمكانية التعرف على **معايير الممارسات في الرياضيات 5 (استخدام الأدوات الملائمة بطريقة استراتيجية).** يمكن أن يستخدم الطلاب حاسبة التمثيل البياني أو ورقة بيانات لإنشاء جدول قيم.

لأن نقطة التقاطع مع المحور *y* للدالة الأسيَّة أكبر من نقطة تقاطع الدالة التربيعية، تصبح الدالة الأسيَّة للقيم الصغيرة أكبر. ولكن يتغير الوضع بعد تقاطع التمثيلَين البيانيَّيْن عند $x = 2$. حتى $x = 4$، حيث يتقاطعان مرة أخرى، وتتجاوز الدالة التربيعية الدالة الأسيَّة. بعد ذلك، تتجاوز الدالة الأسيَّة الدالة التربيعية. تأكد من إدراج هذه النقاط الأساسية في جداول القيم لدى الطلاب:

$$x = 0, 2, 4$$



### 1 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

**محور تركيز الوحدة** تعرّف على بعض المعايير التي ستكتشفها في هذه الوحدة. وأجب عن الأسئلة التمهيدية. عندما تنتهي من أي درس. ارجع إلى هذه الصفحات لتتحقق من عملك.

| ما ستتعلمه | السؤال التمهيدي |
|---|---|
| **الدرس 1.1: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية** | |
| حدد تأثير التحويل في التمثيل البياني لاستبدال $f(x)$ بـ $f(x) + k$ و$kf(x)$ و$f(kx)$ و$f(x + k)$ للقيم المحددة لـ $k$ (الموجبة والسالبة)؛ جد قيمة $k$ بالنظر إلى التمثيلات البيانية. جرب مع بعض الحالات ووضح شرح التأثيرات الناتجة في التمثيل البياني باستخدام تقنية التمثيل البياني. وأدرج الدوال الزوجية والفردية المميزة من تمثيلاتها البيانية وتعبيراتها الجبرية.<br>عند تمثيل الدوال الأسيّة واللوغاريتمية بيانيًا، تظهر نقاط التقاطع والسلوك الطرفي للتمثيل البياني والدوال المثلثية وتظهر الدورة والخط المتوسط والسعة. | افترض أن $f(x)$ هي دالة لوغارتيمية. ما الدالة التي تنتج عن أي إزاحة رأسيّة لـ $f(x)$؟ اشرح.<br>$g(x) = f(x) + 1, \quad h(x) = f(x + 1)$<br>**$g(x)$؛ يغير هذا التحويل المُخرج $f(x)$، بينما يغير $h(x)$ قيمة المُدخل.**<br>إذا كانت (1, 0) نقطة على التمثيل البياني لـ $f(x)$. فجد نقطة ما على التمثيل البياني لـ $d(x) = -2f(x + 2) + 1$. اشرح.<br>**(1 ,1−)؛ $d(x)$ هي إزاحة لوحدتي $f(x)$ إلى اليسار، وانعكاس في المحور $x$ وإزاحة وحدة واحدة إلى أعلى بحيث تتوافق النقطة (1, 0) مع النقطة (1 ,1−) على التمثيل البياني $d(x)$.** |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

| ما ستتعلمه | السؤال التمهيدي |
|---|---|
| **الدرس 1.2: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية** | |
| اشرح السبب في كون إحداثيات $x$ للنقاط التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية للمعادلتين $y = f(x)$ و$y = g(x)$ حلولًا للمعادلة $f(x) = g(x)$؛ جد الحلول التقريبية، على سبيل المثال، باستخدام تقنية التمثيل البياني لتمثيل الدوال بيانيًا أو إعداد جداول للقيم أو إيجاد التقديرات التقريبية بالتتابع. | صف طريقة لإيجاد قيمة $x$ في هذه المعادلة. جد قيمة $x$.<br>$\log_{10}[\log_{10}(x+1)] = 1$<br>ارفع الحدود إلى الأس 10 مرتين.<br>$x = 10^{10} - 1$ |
| **الدرس 1.3: خواص اللوغاريتمات** | |
| أنشئ معادلات ومتباينات ذات متغير واحد واستخدمها لحل المسائل. وأدخل فيها المعادلات الناتجة عن الدوال الخطية والتربيعية والدوال النسبية والأسيّة البسيطة. | ما خاصية الأسس التي تسمح لك بتبسيط هذا التعبير؟ ما الصورة المبسطة؟<br>$2^3 \cdot 2^x \cdot 2^{-4}$<br>عندما يكون الأساس نفسه، اجمع الأسس. $2^{x-1}$<br>استخدم خصائص اللوغارتيمات لإعادة كتابة التعبير $\log_2(3) + 3\log_2(x) - \log_2(x+1)$ على هيئة لوغاريتم واحد.<br>$\log_2\left(\frac{3x^3}{x+1}\right)$ |
| **الدرس 1.4: اللوغاريتمات العادية** | |
| استخدم بنية تعبير ما لتحديد طرق لإعادة كتابته، على سبيل المثال، انظر $x^4 - y^4$ حيث $(x^2)^2 - (y^2)^2$. ومن ثَمّ ميزه باعتباره أحد الفروق بين المربعات التي يمكن تحليلها إلى $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$. | كيف يمكنك استخدام خصائص اللوغاريتمات لحل هذه المعادلة؟ ما $x$؟<br>$10^{x+1} = 25$<br>احسب اللوغاريتم لكل طرف لإيجاد قيمة $x$.<br>$x = 2\log(5) - 1$ |
| **الدرس 1.5: الأساس $e$ واللوغاريتمات الطبيعية** | |
| استخدم بنية تعبير ما لتحديد طرق لإعادة كتابته، على سبيل المثال، انظر $x^4 - y^4$ حيث $(x^2)^2 - (y^2)^2$. ومن ثَمّ ميزه باعتباره أحد الفروق بين المربعات التي يمكن تحليلها إلى $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$. | عند أي قيمة لـ $n$ يكون $x$ مساويًا 1؟<br>$\log_n(5^{7x+1}) = 8$<br>5<br>اكتب معادلة لوغاريتمية مكافئة للمعادلة الأسيّة $e^{3-x} = 17$.<br>$x = 3 - \ln 17$ |
| **الدرس 1.6: استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية** | |
| استخدم خصائص الأسس لتفسير تعابير الدوال الأسيّة. بالنسبة إلى النماذج الأسيّة، عند التعبير على هيئة لوغاريتم، يصبح الحل $ab^{ct} = d$ حيث $a$ و$c$ و$d$ أعداد والأساس $b$ يساوي 2 أو 10 أو $e$؛ قيم اللوغاريتم باستخدام تقنية التمثيل البياني. | يحصل حساب مصرفي معين على مرابحة سنوية مركبة قدرها 50%. كم ستستحق وديعة مقدارها AED 1500 بعد مرور $n$ أعوام؟<br>$1500 \times 1.05^n$ |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## نصيحة للتدريس

معايير الممارسات في الرياضيات 8

يمكن أن يكون السؤال التمهيدي في الدرس 1.2 فرصة لاستكشاف **معايير الممارسات في الرياضيات 8 (البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)**. ابدأ بأن تطلب من الطلاب حل مسألة بسيطة:

$$\log_{10} x = 1$$

في هذه الحالة، اكتب المعادلة اللوغاريتمية بصيغة أسيَّة

$$x = 10^1$$

بعد ذلك، اطلب من الطلاب التفكير في هذه المعادلة:

$$\log_{10} f(x) = 1$$

أعد كتابة المعادلة مرة أخرى بصيغة أسيَّة.

$$f(x) = 10^1$$

عوّض الآن عن $f(x)$ بالدالة المتداخلة $\log(x + 1)$.

$$\log_{10}(x + 1) = 10$$

أعد كتابة المعادلة مرة أخرى بصيغة أسيَّة.

$$x + 1 = 10^{10}$$

$$x = 10^{10} - 1$$

## نصيحة للتدريس

معايير الممارسات في الرياضيات 6

يمكن أن يكون السؤال التمهيدي في الدرس 1.4 فرصة لاستكشاف **معايير الممارسات في الرياضيات 6 (مراعاة الدقة)**. ابدأ بسؤال الطلاب عن العملية التي ستحذف الحد $x + 1$ من الأس. لاحظ أيضًا أنه يمكن إعادة كتابة $\log 25$ في صورة $\log 5^2$ التي يمكن إعادة كتابتها بعد ذلك في صورة $2 \log 5$. في النهاية، اطلب من الطلاب تحديد الخطأ في هذا الحل:

$$10^{x+1} = 25$$

$$\log 10^{x+1} = \log_{25} 25$$

# 1.1 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

## المعايير

**معايير الممارسات في الرياضيات:**
**1، 2، 5، 6، 7، 8**

## المهارات المطلوبة

- التمثيل البياني للدوال الأسيَّة
- إيجاد معكوسات الدوال وتمثيلها بيانيًا
- إيجاد قيمة التعابير الأسيَّة.

**مثال 1**

**معايير الممارسات في الرياضيات 7**

### نصيحة للتدريس

في **المثال 1**، يُنشئ الطلاب جداول القيم في إطار استخدام تعريف اللوغاريتم والعلاقة بين التعابير الأسيَّة واللوغاريتمية.

ناقش لماذا لم تُستخدم قيم $x$ لـ 3, 5, 6, 7 وما إلى ذلك في جدول القيم. يمكن استخدام هذه القيم لكن لن تكون النواتج أعدادًا كلية. يتمثل الهدف من هذا المثال في استكشاف التمثيلات البيانية للوغاريتمات؛ يُعد استخدام الكسور العادية عند هذه النقطة غير ضروري.


1.1 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية


**الأهداف**

- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.
- تفسير المميزات الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.
- تحديد تأثيرات التحويلات في تمثيل بياني لدالة لوغاريتمية.

يمكن استخدام تعريف اللوغاريتمات للتعبير عن اللوغاريتمات بالصيغة الأسيّة.

**اللوغاريتمات ذات الأساس $b$**

افترض أن $b$ و$x$ عددان موجبان و$b \neq 1$. يُشار *إلى اللوغاريتم ذي الأساس* $b$ لـ $x$ بالدالة $\log_b x$ ويعرف على أنه الأس $y$ الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

افترض أن $b > 0$ و$b \neq 1$ حيث $x > 0$. إذًا يوجد عدد $y$ بحيث تكون $\log_b x = y$، **إذا وفقط إذا كان** $b^y = x$.

**مثال 1** **تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا**

**الاستكشاف** **استخدم تمثيلًا بيانيًا لاستكشاف الدالة $y = \log_2 x$.**

**a. استخدام البنية** أعد كتابة $y = \log_2 x$ كمعادلة أسيّة. أنشئ جدولًا للقيم وعوّض عن $x$ بقيم واحسب قيمة $y$ المقابلة. ما قيود المجال؟

**ينص التعريف على أن $x > 0$. ومن ثَمَّ لا يمكن أن تكون قيمة $x$ سالبة أو 0.**

| $x$ | الصيغة الأسيّة: $2^y = x$ | الصيغة اللوغاريتمية: $y = \log_2 x$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | إذا كان $2^y = 1$، فإن $y = 0$ | $0 = \log_2 1$ | (1, 0) |
| 2 | إذا كان $2^y = 2$، فإن $y = 1$ | $1 = \log_2 2$ | (2, 1) |
| 4 | إذا كان $2^y = 4$، فإن $y = 2$ | $2 = \log_2 4$ | (4, 2) |
| 8 | إذا كان $2^y = 8$، فإن $y = 3$ | $3 = \log_2 8$ | (8, 3) |
| 16 | إذا كان $2^y = 16$، فإن $y = 4$ | $4 = \log_2 16$ | (16, 4) |

**b. التفكير بطريقة كميّة** لا توضح قيم $x$ في **الجزء a** ما يحدث عندما يكون $0 < x < 1$. أكمل الجدول.

| $x$ | الصيغة الأسيّة: $2^y = x$ | الصيغة اللوغاريتمية: $y = \log_2 x$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | إذا كان $2^y = \frac{1}{2}$، فإن $y = -1$ | $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$ | $(\frac{1}{2}, -1)$ |
| $\frac{1}{4}$ | إذا كان $2^y = \frac{1}{4}$، فإن $y = -2$ | $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$ | $(\frac{1}{4}, -2)$ |
| $\frac{1}{8}$ | إذا كان $2^y = \frac{1}{8}$، فإن $y = -3$ | $-3 = \log_2 \frac{1}{8}$ | $(\frac{1}{8}, -3)$ |


محقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

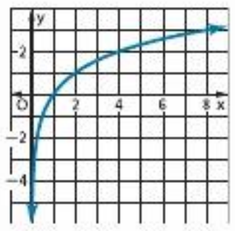



## خلفية عن الرياضيات

يُغير تحويل الدالة التمثيل البياني من الدالة الرئيسة بطريقة ما. ويحدث هذا لتحويلات أي نوع من الدوال - خطية، تربيعية، وهكذا - وكذلك لتحويلات الدالة اللوغاريتمية الرئيسة.

يمكن إزاحة دالة أفقيًا أو رأسيًا إلى اليسار أو اليمين ويمكن تمديدها أو انضغاطها أفقيًا أو رأسيًا. لقد رأى الطلاب تحويلات أنواع أخرى من الدوال وتُعد مراجعة تحويلات الدوال الخطية والتربيعية نقطة انطلاق جيدة لهذا الدرس.

c. **استخدام الأدوات** استخدم البيانات من الجداول لتمثيل الدالة $y = \log_2 x$ بيانيًا.



d. **المشاركة بدقة** صف مجال الدالة $y = \log_2 x$ ومداها. كيف يمكن مقارنة مجال هذه الدالة ومداها بمجال الدالة $y = 2^x$ ومداها؟

**مجال الدالة $\log_2 x$ هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة.**

**المدى هو كل الأعداد الحقيقية. مجال الدالة $y = 2^x$**

**هو كل الأعداد الحقيقية. المدى هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة.**

e. **المشاركة بدقة** صف السلوك الطرفي للدالة $y = \log_2 x$ وعلاقته بخط التقارب.

**عندما تقترب قيمة $x$ من اللانهاية الموجبة، تقترب قيمة $y$ من اللانهاية الموجبة. وعندما تقترب قيمة $x$ من الصفر، تقترب قيمة $y$ من اللانهاية السالبة. ولا تعبر خط التقارب أبدًا.**

f. **المشاركة بدقة** في أي فترة في المجال تزيد الدالة وأين تقل؟ اشرح كيف عرفت.

**الدالة دائمًا في ازدياد. بالنسبة إلى كل قيمة من قيم $x$. عندما تزيد قيمة $x$، تزيد قيمة $f(x)$.**

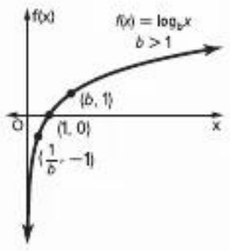
الدالة $f(x) = \log_b x$ هي الدالة اللوغاريتمية الرئيسة.

**الدالة اللوغاريتمية الرئيسة**

الدالة الرئيسة: $f(x) = \log_b x$

المجال: كل الأعداد الحقيقية الموجبة

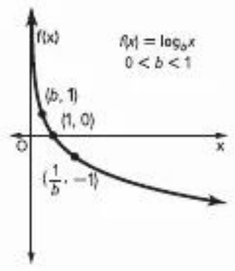
خط التقارب: $x = 0$




نوع التمثيل البياني: متصل. واحد إلى واحد

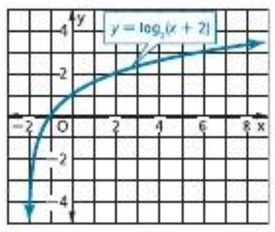
المدى: كل الأعداد الحقيقية

نقطة *التقاطع مع المحور* $x$: (1, 0)




**مثال 2** **تحويلات الدوال اللوغاريتمية**

a. **الحساب بدقة** مثّل $y = \log_2(x + 2)$ بيانيًا. قارن هذا التمثيل البياني بالتمثيل البياني للدالة $y = \log_2 x$ في **المثال 1c**. صف التحويل. ما خط التقارب للدالة $y = \log_2(x + 2)$؟ لماذا يختلف عن خط التقارب للدالة $y = \log_2 x$؟




**تمت إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار بمقدار وحدتين. هذه هي الإزاحة الأفقية.**

**يوجد خط التقارب عند $x = -2$.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



**مثال 1** *(تابع)*

**معايير الممارسات في الرياضيات 6**

**نصيحة للتدريس**

بعد أن مثَّل الطلاب الدالة اللوغاريتمية بيانيًا، ناقش الشكل العام للتمثيل البياني والخصائص التي يمكن تمييزها بسهولة على التمثيل البياني. على سبيل المثال، لا يعبر التمثيل البياني المحور y. ناقش ماذا يعني هذا بدلالة قيم الدالة.

**الأسئلة الداعمة**

- لماذا يَنتِج عن الأس السالب كسر لا عدد سالب؟ $a^{-b} = \frac{1}{a^b} > 0$.
- هل الدالة اللوغاريتمية متصلة؟ كيف عرفت؟

**نعم، لا توجد فواصل أو فجوات في الدالة. المجال غير مقيد.**

- هل الدالة اللوغاريتمية واحد إلى واحد؟ كيف عرفت؟ **نعم، فكل قيمة من قيم $x$، توجد قيمة واحدة فقط لقيمة $y$.**

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

لمعالجة **معايير الممارسات في الرياضيات 5**، يفكر الطلاب البارعون في مادة الرياضيات في الأدوات المتاحة عند حل مسألة رياضية. في **المثال 1**، يمثل الطلاب الدالة اللوغاريتمية بيانيًا باليد باستخدام جدول القيم لفهم شكل الدالة وخواصها الأخرى بشكل أفضل. تبسط أي حاسبة للتمثيل البياني أو برنامج للتمثيل البياني عملية التمثيل البياني بوجه عام، وخصوصًا التمثيل البياني بأعداد أو كسور عشرية كبيرة. تساعد أداة التمثيل البياني الطلاب في تحليل التمثيل البياني مما يسمح لهم باستكشاف خصائص الدالة بشكل تفاعلي.

## مثال 2

### نصيحة للتدريس

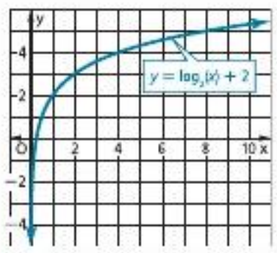
معايير الممارسات في الرياضيات 6

في **المثال 2**، يستكشف الطلاب تحويلات الدالة اللوغاريتمية الرئيسة. ناقش أوجه الشبه والاختلاف بين التحويلات $f(x) \rightarrow -f(x)$ و$f(x) \rightarrow f(-x)$ والتحويلات $f(x) \rightarrow f(x - h)$ و$f(x) \rightarrow f(x) + k$.

### الأسئلة الداعمة

- هل سيعبر التمثيل البياني للدالة $y = \log_2(x - 4)$ المحور y؟ **لا، لأن هذا التمثيل البياني هو تمثيل بياني للدالة $y = \log_2 x$ مُزاح 4 وحدات إلى اليمين.**
- كيف يمكن إيجاد خط التقارب للدالة $y = \log_2(x - h)$ بدون تمثيلها بيانيًا؟ **خط التقارب للدالة الرئيسة هو $x = 0$. الدالة المعطاة هي إزاحة أفقية للدالة الرئيسة، إذًا خط التقارب هو أيضًا مُزاح بالمقدار نفسه. خط التقارب هو $x = h$.**

**b. الحساب بدقة** مثّل $y = \log_2 x + 2$ بيانيًا. صف التحويل من الدالة الرئيسة. كيف يختلف هذا التحويل عن تحويل $y = \log_2(x + 2)$؟




تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى أعلى. هذه هي الإزاحة الرأسيّة.

خط التقارب هو المحور y.

**c. وصف الطريقة** صف تحويل $y = a\log_2 x$، حيث $a \neq 1$. فكّر في القيم السالبة لـ $a$ والقيم الموجبة لـ $a$ والقيم الكسرية لـ $a$.

إذا كان $0 < a < 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $a > 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $a < 0$، فسينعكس التمثيل البياني في المحور x.

**d. وصف الطريقة** صف العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{2}\log_2 x$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -\frac{1}{2}\log_2 x$. قارن بينهما من حيث المجال والمدى وخطوط التقارب والسلوك الطرفي للتمثيل البياني.

تُعد التمثيلات البيانية انعكاسات بعضها لبعض في المحور x، بالنسبة إلى $f(x)$، $D = \{x \mid x > 0\}$، $R =$ {كل الأعداد الحقيقية}؛ خط التقارب عند $y = 0$؛ عندما تزيد قيمة x، تزيد قيمة y، بالنسبة إلى $g(x)$، $D = \{x \mid x > 0\}$، $R =$ {كل الأعداد الحقيقية}؛ خط التقارب عند $y = 0$؛ عندما تزيد قيمة x، تقل قيمة y.

**مثال 3** **تحليل الدوال اللوغاريتمية**

تُقاس جهارة الصوت بمقياس لوغاريتمي باستخدام وحدة تسمى الديسيبل (dB) $d = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$. حيث $d$ هو مستوى الديسيبل و$I$ هو قوة أو شدة الصوت و$I_0$ هو أقل مستوى صوت (عتبة الصوت) يمكن للأذن البشرية سماعه. من الممكن أن يحدث فقدان السمع الناجم عن الضوضاء بسبب التعرض لفترة طويلة لأي ضوضاء تزيد شدتها على 85 (dB).

**a. التخطيط للحل** حدد مستوى الديسيبل لصوت شدته $10{,}000\ I_0$. هل يؤدي التعرض لفترة طويلة لهذه الشدة إلى فقدان السمع الناجم عن الضوضاء؟ اشرح.

لا، حيث تبلغ جهارة الصوت 40 ديسيبل وهو أقل من 85 ديسيبل.

$d = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$، $d = 10 \log_{10}\left(\frac{10{,}000 I_0}{I_0}\right)$، $d = 10 \log_{10}(10{,}000)$، $d = 40$.

**b. الحساب بدقة** إذا كانت شدة أحد الأصوات هي 85 ديسيبل، فكم تزيد شدته عن عتبة الصوت؟

تزيد تقريبًا $3.16 \times 10^8$ عن شدة عتبة الصوت.

$85 = 10 \log_{10} \frac{kI_0}{I_0}$، حيث الصوت يساوي $k$ أمثال شدة عتبة الصوت.

$85 = 10 \log_{10}(k) \Rightarrow 8.5 = \log_{10}(k)$ أو $3.16 \times 10^8 \approx 10^{8.5} = k$.

**c. التفكير بطريقة كميّة** إذا تضاعفت شدة الصوت، فكيف سيتغير مستوى الديسيبل؟ برر إجابتك.

يزيد بحوالي 3 ديسيبل. إذا تضاعفت شدة الصوت، فإن

$d = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow 10 \log_{10}\left(\frac{2I_0}{I_0}\right) \rightarrow 10 \log_{10} 2 \approx 3$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### التدريس المتمايز

بالنسبة إلى **المثال 2**. يمكن أن يكون مفيدًا للمتعلمين بالوسائل المرئية أن تطلب منهم أولًا تمثيل الدالة الرئيسة بيانيًا بلون واحد وتحويلها بلون آخر باستخدام برنامج التمثيل البياني. ويمكن للطلاب بعد ذلك أن يروا التحويل الذي حدث بسهولة أكبر.

بالنسبة إلى **الجزء c**. اقترح أن يختار الطلاب قيمًا مختلفة لـ $a$ ثم يمثلون الدالة المتحولة بيانيًا لمساعدتهم في فهم كيف تتم إزاحة التمثيل البياني عندما تكون قيمة $a$ موجبة أو سالبة أو بين 0 و1.

d. **التفكير بطريقة كميّة** هل من الممكن أن تكون مستويات الديسيبل سالبة؟ اشرح.

لا، لأن $I_0$ هو أقل عتبة، وسيكون $\frac{I}{I_0}$ دائمًا أكبر من أو يساوي 1

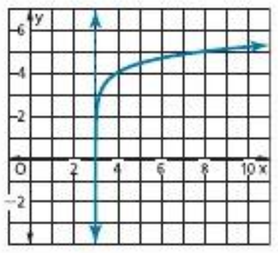
إذًا، لا يمكن أن يكون $10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ سالبًا أبدًا.

**تمرين**

1. **الحساب بدقة** نظم تسعة أرانب عملية هروب جريئة في وضح النهار من مأوى حيوانات. وفي النهاية أقاموا مستعمرة خلف المأوى. وبعد شهر واحد، زاد عدد الجماعة الأحيائية إلى 27 أرنبًا. وبعد شهرين أصبح عدد الجماعة الأحيائية 81. وبعد ثلاثة أشهر أصبح عدد الجماعة الأحيائية 243 وهكذا. اكتب دالة لوغاريتمية حيث $y$ يمثل الشهور و$x$ يمثل الأرانب في المستعمرة. كم أرنبًا سيكون في المستعمرة بعد 5 شهور؟ في أي شهر سيصل عدد الأرانب في المستعمرة إلى 729 أرنبًا؟

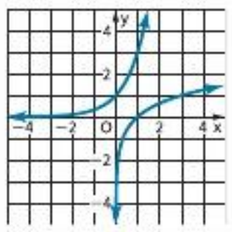
2187 أرنبًا. عدد الأرانب هو كل الأسس 3؛ $3^2 = 9$ و$3^3 = 27$ و$3^4 = 81$ و$3^5 = 243$. ستكون الدالة اللوغاريتمية $y = \log_3 x - 2$. عند 5 شهور، عوض عن $y$ بـ 5 في الدالة: $5 = \log_3 x - 2$ وجد قيمة $x$: $7 = \log_3 x$، وأعد كتابة $3^7 = x$, $x = 2187$. ستصل المستعمرة إلى 729 في 4 شهور: $y = \log_3 729 - 2$؛ $y = 4$.

2. **المشاركة بدقة** مثّل الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_5(x - 3) + 4$ بيانيًا. حدّد المجال والمدى وخطوط التقارب ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي للتمثيل البياني.




$D = \{x \mid x > 3\}$، $R = \{$كل الأعداد الحقيقية$\}$؛ خط التقارب عند $x = 3$؛ نقطة التقاطع مع المحور $x$: $\frac{1876}{625}$ عندما تزيد قيمة $x$، تزيد قيمة $y$.

3. **المشاركة بدقة** صمم التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$ و$g(x) = \log_3 x$ على المستوى الإحداثي نفسه. حدّد المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب لكل دالة. قارن بين التمثيلين البيانيين.




بالنسبة إلى $f(x)$، $D = \{$كل الأعداد الحقيقية$\}$، $R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$؛ نقطة التقاطع مع المحور $y$: 1؛ خط التقارب عند $y = 0$. بالنسبة إلى $g(x)$، $D = \{x \mid x > 0\}$، $R = \{$كل الأعداد الحقيقية$\}$؛ نقطة التقاطع مع المحور $x$: 1؛ خط التقارب عند $x = 0$. $g(x)$ هي معكوس الدالة $f(x)$. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ في المستقيم $y = x$.

4. **استخدام البنية** يبلغ مستوى ضوضاء المحادثة العادية 60 ديسيبل. ويبلغ مستوى ضوضاء مشغل صوت رقمي يعمل على أعلى درجة 100 ديسيبل. بكم ضعفًا تزيد شدة صوت مشغل الصوت الرقمي عن المحادثة العادية؟

المحادثة العادية: $h = 10^6 I_0$، $10^6 = \frac{h}{I_0}$، $6 = \log_{10}\left(\frac{h}{I_0}\right)$، $60 = 10 \log_{10}\left(\frac{h}{I_0}\right)$. مشغل الصوت الرقمي: $d = 10^{10} I_0$، $10^{10} = \frac{d}{I_0}$، $10 = \log_{10}\left(\frac{d}{I_0}\right)$، $100 = 10 \log_{10}\left(\frac{d}{I_0}\right)$. قارن: $\frac{d}{h} = \frac{10^{10} I_0}{10^6 I_0} = 10^4$. تزيد شدة صوت مشغل صوت رقمي بحوالي 10,000 مرة عن شدة صوت المحادثة العادية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## مثال 3

معايير الممارسات في الرياضيات 2

### نصيحة للتدريس

في **المثال 3**، يتم إعطاء الطلاب معادلة لوغاريتمية ويُطلب منهم إيجاد قيمتها بالنسبة إلى قيم المُدخلات والمخرجات المختلفة. ناقش كيف يجب أن يظل ترتيب العمليات مستخدمًا لإيجاد قيم المعادلات اللوغاريتمية.

يهدف هذا المثال إلى استخدام الطلاب للتعبيرات اللوغاريتمية وفهم كيف يؤثر أي تغيير في قيمة المُدخل في قيمة المُخرج.

### الأسئلة الداعمة

- ما فائدة استخدام مقياس لوغاريتمي لقياس الصوت؟ **نموذج الإجابة: يوفر استخدام مقياس لوغاريتمي مدى من القيم يمكن التحكم فيه. فبدونه، سيكون مدى مقياس الديسيبل مليارات.**
- يوضح الجدول وحدات ديسيبل ومستويات شدة الصوت. إذا تضاعفت مستويات الديسيبل، فهل ستتضاعف شدة الصوت أيضًا؟ **لا، إذا تضاعفت مستويات الديسيبل، فلن يتم تربيع قيمة شدة الصوت.**

| dB | الشدة (تزيد أضعافًا عن عتبة السمع) |
|---|---|
| 1 | 1.3 |
| 3 | 2.0 |
| 5 | 3.2 |
| 6 | 4.0 |
| 7 | 5.0 |
| 10 | 10 |
| 20 | 100 |
| 30 | 1000 |
| 40 | 10,000 |
| 50 | 100,000 |

### إرشادات تقنية

بالنسبة إلى **المثال 1**، تأكد من فهم الطلاب أن الحاسبات تعمل بالأساس 10. بالنسبة إلى **الجزء 5**، ينبغي للطلاب عدم استخدام حاسبة *لإيجاد* الحلول ولكن ينبغي لهم استخدامها *للتحقق* من صحة حلولهم. اطلب من الطلاب تمثيل الدالة بيانيًا ومقارنتها بالتمثيل البياني في **المثال 1**. ناقش أوجه الاختلاف والشبه.

## تمرين

في **الجزء 1**، يجب على الطلاب إعادة كتابة نموذج أسي كنموذج لوغاريتمي باستخدام متغيرين.

في **الجزءين 2 و9**، يُطلب من الطلاب تمثيل تحويل الدالة اللوغاريتمية الرئيسة بيانيًا.

في **الجزء 3**، يمثل الطلاب بيانيًا دالة لوغاريتمية وأسيَّة.

يتطلب **الجزءان 4 و10** من الطلاب تفسير المعلومات المعطاة بدلالة مجال الدالة.

5. **المشاركة بدقة** بدون استخدام الحاسبة، أجب عن أسئلة للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

a. صف قيم f $f(x)$ حيث $1000 \le x \le 10{,}000$.

$3 \le f(x) \le 4$

b. صف قيم $x$، إذا علمت أن $f(x)$ سالبة.

$0 < x < 1$

c. ما المقدار الذي ستزيده قيمة $x$ إذا علمت أن $f(x)$ زادت بمقدار واحد؟ اشرح كيف عرفت.

عامل مقداره 10. في كل مرة تزيد قيمة $f(x)$ بمقدار 1، تزيد قيمة $x$ بأُس مقداره 10.

6. **تفسير المسائل** بالنسبة إلى حيوان الإلكة، يتم الربط بين القرن الذي يمثد $a$ من السنتيمترات وطول الكتف الذي يبلغ $h$ من السنتيمترات للذكر البالغ من الإلكة بالدالة $h = 116 \log_{10}(a + 40) - 176$. قرّب طول كتف الذكر البالغ من الإلكة مع امتداد القرن مسافة 55 cm. اختر قيمًا أخرى لـ $a$ وناقش الحل مع زملائك في الصف الدراسي. هل توجد أي قيم لـ $a$ غير معقولة؟

الطول التقريبي لكتف الذكر البالغ من الإلكة مع امتداد القرن مسافة 55 cm هو 53.4 cm.

$h = 116 \log_{10}(a + 40) - 176$, $h = 116 \log_{10}(55 + 40) - 176$, $h = 116 \log_{10}(95) - 176$,

$h \approx 53.4$, $h \approx 116(1.98) - 176$. نموذج الإجابة: لا يمكن أن تمثل الأعداد السالبة امتداد القرن؛

حيث ستقدم القيم الأكبر أطوالًا غير معقولة للكتف.

7. **الحساب بدقة** قارن بين $\log_3 10$ و$\log_7 40$ في إطار استخدام تعريف اللوغاريتمات. أي الكميتين أكبر؟ لا تستخدم الحاسبة.

$\log_3 10$ أكبر من $\log_7 40$. أولًا، قدّر $\log_3 10$. بما أن $3^2 = 9$ (أقل من 10) لكن $3^3 = 27$ (أكبر من 10)،

إذًا $\log_3 10$ تقع بين 2 و3. ثانيًا، قدّر $\log_7 40$. بما أن $7^1 = 7$ (أقل من 40)، و$7^2 = 49$ (أكبر من 40)،

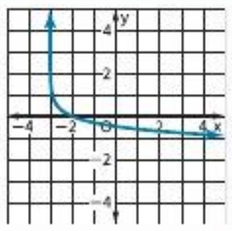
إذًا $\log_7 40$ تقع بين 1 و2.

8. **التفكير بطريقة كميّة** جِد مجال الدالة $f(x) = \log_2(12 - 4x)$.

يجب أن تكون مدخلات الدالة اللوغاريتمية موجبة. ومن ثَمَّ، يجب أن تكون الكمية $12 - 4x$ موجبة.

$x < 3$, $-4x > -12$, $12 - 4x > 0$: ومن ثَمَّ يكون مجال الدالة $f(x) = \log_2(12 - 4x)$ هو الفترة $(-\infty, 3)$.

9. **المشاركة بدقة** مثّل الدالة اللوغاريتمية $f(x) = -\log_7(x + 3)$ بيانيًا. حدّد المجال والمدى وخطوط التقارب ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي للتمثيل البياني.




$D = \{x \mid x > -3\}$, $R =$ {كل الأعداد الحقيقية}؛ خط

التقارب عند $x = -3$؛ نقطة التقاطع مع المحور $x$:

حوالي $-0.565$؛ عندما تزيد قيمة $x$، تقل قيمة $y$.

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة



## أخطاء شائعة

يفهم معظم الطلاب بسرعة أن إضافة $k$ إلى دالة لوغاريتمية سينتج عنه إزاحة رأسيَّة إلى أعلى إذا كان $k$ موجبًا وإزاحة إلى أسفل إذا كان $k$ سالبًا. ومع ذلك، غالبًا ما يحاولون إزاحة الدالة إلى اليسار عندما يكون $h$ موجبًا وإلى اليمين عندما يكون سالبًا. اطلب من الطلاب كتابة الدالة $f(x) = \log_5(x - 3) + 4$ في صورة $f(x) = \log_5[x + (-3)] + 4$ لمساعدتهم.

**10.** أجب عن الأسئلة التالية التي تتعلق بمقياس الديسيبل.

**a. التخطيط للحل** حدّد مستوى الديسيبل لصوت شدته $I_0$ 175,000. هل يؤدي التعرض لفترة طويلة لهذه الشدة إلى فقدان السمع الناجم عن الضوضاء؟ اشرح.

لا. تبلغ شدة الصوت حوالي 52 ديسيبل وهو أقل من 85 ديسيبل.

$d = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$. $d = 10 \log_{10}\left(\frac{175{,}000 I_0}{I_0}\right)$. $d = 10 \log_{10}(175{,}000)$. $d \approx 52.4$.

**b. الحساب بدقة** إذا كانت شدة أحد الأصوات 36 ديسيبل. فكم ستزيد شدته عن عتبة الصوت؟

تزيد حوالي 3981 مثلاً عن شدة عتبة الصوت.

$36 = 10 \log_{10}\frac{kI_0}{I_0}$ حيث الصوت يساوي $k$ أمثال شدة عتبة الصوت.

$3.6 = \log_{10}(k) \Rightarrow 36 = 10 \log_{10}(k)$ أو $3981 \approx 10^{3.6}$. $k =$.

**c. التفكير بطريقة كميّة** إذا زادت شدة الصوت بعامل 3.5. فكيف سيتغير مستوى الديسيبل؟ برر إجابتك.

يزيد بحوالي 5.44 ديسيبل. إذا زادت شدة الصوت بعامل 3.5. فإن

$d = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \log_{10}\left(\frac{3.5I_0}{I_0}\right) \rightarrow 10 \log_{10} 3.5 \approx 5.44$

**11. استخدام نموذج** يُمر مركب ما باضمحلال أسي بمعدل اضمحلال سنوي يبلغ 50%.

**a.** إذا كانت الكمية الابتدائية للمركب هي 50 g. فاكتب دالة لوغاريتمية $T(x)$ للوقت الذي يستغرقه المركب ليضمحل إلى $x$ من الجرامات.

معادلة الاضمحلال الأسي للكمية $x$ في الوقت $t$ هي $x = 50(0.5)^t$. أعد كتابة هذا في صورة $0.5^t = \frac{x}{50}$.

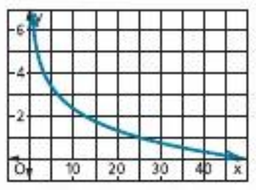
بما أن هذه المعادلة مكافئة لـ $t = \log_{0.5}\left(\frac{x}{50}\right)$. إذًا $T(x) = \log_{0.5}\left(\frac{x}{50}\right)$.

**b.** استعن بالحاسبة لإكمال جدول القيم. مع تحديد النقاط على التمثيل البياني للدالة $T(x)$. كيف تتوقع سلوك قيم $x$ حيث $t \rightarrow +\infty$؟

| $t$ | الصيغة الأسية: $x = 50(0.5)^t$ | الصيغة اللوغاريتمية: $t = \log_{0.5}\left(\frac{x}{50}\right)$ | $(x, t)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | إذا كان $t = 0$، فإن $x = 50(0.5)^0 = 50$ | $0 = 0 = \log_{0.5}\left(\frac{50}{50}\right) = \log_{0.5}(1)$ | (50, 0) |
| 1 | إذا كان $t = 1$، فإن $x = 50(0.5)^1 = 25$ | $1 = \log_{0.5}\left(\frac{25}{50}\right) = \log_{0.5}\left(\frac{1}{2}\right)$ | (25, 1) |
| 2 | إذا كان $t = 2$، فإن $x = 50(0.5)^2 = 12.5$ | $2 = \log_{0.5}\left(\frac{12.5}{50}\right) = \log_{0.5}\left(\frac{1}{4}\right)$ | (12.5, 2) |
| 3 | إذا كان $t = 3$، فإن $x = 50(0.5)^3 = 6.25$ | $3 = \log_{0.5}\left(\frac{6.25}{50}\right) = \log_{0.5}\left(\frac{1}{8}\right)$ | (6.25, 3) |
| 4 | إذا كان $t = 4$، فإن $x = 50(0.5)^4 = 3.125$ | $4 = \log_{0.5}\left(\frac{3.125}{50}\right) = \log_{0.5}\left(\frac{1}{16}\right)$ | (3.125, 4) |
| 5 | إذا كان $t = 5$، فإن $x = 50(0.5)^5 = 1.5625$ | $5 = \log_{0.5}\left(\frac{1.5625}{50}\right) = \log_{0.5}\left(\frac{1}{32}\right)$ | (1.5625, 5) |

نموذج الإجابة: أتوقع أنه عندما $t \rightarrow +\infty$، فإن $x \rightarrow 0$.

**c.** استخدم جدول القيم من **الجزء b** لتصميم تمثيل بياني للدالة $T(x)$ على الشبكة المعطاة. حدّد أي نقاط تقاطع واشرح دلالتها في سياق المسألة.




توجد نقطة تقاطع عند $x = 50$. يمثل هذا الكمية الابتدائية للمركب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## تمرين

في **الجزء 5**، يحتاج الطلاب إلى استخدام تعريف اللوغاريتم وصيغته الأسيَّة للإجابة عن الأسئلة.

في **الجزء 6**، يستخدم الطلاب دالة لوغاريتمية لنمذجة موقف من الحياة اليومية يفسر المجال في السياق.

في **الجزء 7**، يبدل الطلاب بين الصيغتين الأسيَّة واللوغاريتمية لتقدير الكميات دون استخدام حاسبة.

في **الجزء 8**، يجب على الطلاب تحديد مجال دالة لوغاريتمية تم تحويلها.

في **الجزء 11**، يجب على الطلاب كتابة معادلة لوغاريتمية وتفسير المميزات الأساسية لجدول ما وتمثيل دالة لوغاريتمية بيانيًا.

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

يتم التعامل مع **معايير الممارسات في الرياضيات 8** بينما يستمر الطلاب في مراقبة العملية الحسابية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل. ويقيّمون على نحوٍ مستمرٍ مدى صحة نتائجهم الوسيطة. في **المثال 2** و**الجزءين 2** و**3**، يقارن الطلاب بين التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية الرئيسة والتمثيل البياني لتحويل هذه الدالة، مع تحديد أوجه الاختلاف وتحديد سبب التغيير.

# 1.2 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

## المعايير

**معايير الممارسات في الرياضيات:**
**1، 2، 3، 5، 6**

## المهارات المطلوبة

- تبسيط التعابير اللوغاريتمية والأسيَّة الأساسية
- استخدام قوانين الأسس
- حل المتباينات المركبة

## مثال 1

**معايير الممارسات في الرياضيات 6**

### نصيحة للتدريس

اطلب من الطلاب التركيز على معنى كل كمية في سياق هذا النموذج لمساعدتهم في تفسير المطلوب في كل سؤال.

### السؤال الداعم

- ماذا تمثل $f(x)$ في هذه المعادلة؟ **النسبة المئوية لطول الفتاة عند البلوغ في عُمر يتراوح بين 5 سنوات و15 سنة.**
- هل يتضمن هذا النموذج أعمارًا للفتاة تكون النسبة المئوية لطول الفتاة عند البلوغ خلالها أقل من 62%؟ **لا. يبلغ عمر الفتاة في المجال 5 سنوات أو أكثر، لذا فإن الحد اللوغاريتمي سيكون أكبر من أو يساوي 0. ومن ثَمَّ فإن $f(x)$ ستكون أكبر من أو تساوي 62.**

## خلفية عن الرياضيات

يعتمد هذا الدرس على المواد التي درسها الطلاب في الدروس السابقة ويستفيد كثيرًا من القواعد اللوغاريتمية والأسيَّة الأساسية وتمثيل الدوال اللوغاريتمية الرئيسة بيانيًّا. تعلم الطلاب في الدروس السابقة كيفية تبسيط لوغاريتمات التعابير العددية والجبرية الأساسية، كما تعرفوا على العلاقة بين الصيغ الأسيَّة واللوغاريتمية.

في هذا الدرس، يستكشف الطلاب أساليب مختلفة لحل المعادلات والمتباينات التي تتضمن تعابير لوغاريتمية وأسيَّة سواء جبريًا أو بيانيًّا. حيث سيتم تضمين هذه المعادلات داخل السياقات الحالية.



1.2 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

**الأهداف**

- كتابة المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية وحلها.
- استخدام التمثيلات البيانية لحل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية.

**المفهوم الأساسي** **خاصيتا المساواة والتباين للدوال اللوغاريتمية**

**خاصية التساوي:** إذا كان $b$ عددًا موجبًا بخلاف 1، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

**خصائص التباين:** بافتراض أن $b > 1$ و$x > 0$.

إذا كان $\log_b x > y$، فإن $x > b^y$. إذا كان $\log_b x < y$، فإن $0 < x < b^y$.

$\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

عند حل المعادلات والمتباينات التي تتضمن تعبيرات لوغاريتمية، يجب استبعاد أي قيمة تجعل مُدخل التعبير اللوغاريتمي سالبًا من مجموعة الحل.

**مثال 1** **النمذجة باستخدام المعادلات اللوغاريتمية**

تعلمت وفاء أنه يمكن نمذجة النسبة المئوية لطول الفتاة عند البلوغ عندما تصل إلى $x$ من السنوات بواسطة المعادلة $f(x) = 62 + 35 \log_{10}(x - 4)$، حيث يمثل $x$ عُمر الفتاة (بين 5 و15 سنة) وتمثل $f(x)$ النسبة المئوية، لطولها عند البلوغ، التي وصلت إليها الآن.

**a. تفسير المسائل** يبلغ عمر داليا شقيقة وفاء 6 سنوات. ما النسبة المئوية، للطول عند البلوغ، التي وصلت إليها داليا الآن تقريبًا؟ اشرح كيف وجدت الإجابة.

**لأن داليا بلغت 72.5% من طولها عند البلوغ، قمت بالتعويض عن قيمة $x$ بـ 6 في الدالة.**

**b. المشاركة بدقة** بين أي عمرين يتراوح طول الفتاة عند البلوغ بين 60 و80%؟ اكتب متباينة مركبة ثم حلها لإيجاد هذين العمرين. قرّب العمر إلى أقرب جزء من العشرة من السنة. اشرح إجابتك.

**$80 < 62 + 35 \log_{10}(x - 4) < 60$ أو $7.3 > x > 4.9$؛ ستبلغ الفتاة 60% من طولها عند البلوغ عند عمر 4.9 سنوات وستبلغ 80% من طولها عند البلوغ عند عمر 7.3 سنوات.**

**c. استخدام الأدوات** اشرح كيف يمكنك إيجاد الحل في **الجزء b** بيانيًا. ثم صمم تمثيلًا بيانيًّا للحل.

**افترض أن $y_1 = 60$ و$y_2 = 80$ و$f(x) = 62 + 35 \log_{10}(x - 4)$؛ سيمثل الإحداثي $x$ عند نقطة تقاطع التمثيلَين البيانيين لكل من $y_1$ و$f(x)$ عُمر الفتاة عندما تبلغ 60% من طولها عند البلوغ وسيمثل الإحداثي $x$ عند نقطة تقاطع التمثيلَين البيانيين لكل من $y_2$ و$f(x)$ عُمر الفتاة عندما تبلغ 80% من طولها عند البلوغ.**

محتوى الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

d. **الحساب بدقة** يبلغ طول ياسمين شقيقة وفاء الأخرى 5 ft و 3 in (160 cm). يمثل هذا الطول 90% من طولها عند البلوغ. كم يبلغ عمرها الآن؟ وكم سيبلغ طولها عندما تصبح بالغة؟ اشرح كيف تجد طولها عند البلوغ.

يبلغ وفاء 10.3 سنوات أو 10 سنوات و4 شهور. ولأن 5 ft و 3 in تساوي 5.25 ft (160 cm)، و $h = 0.9$ و $5.25 = 5.8333$. فإن طول وفاء عندما تبلغ سيساوي حوالي 5.8333 ft أو 5 ft و 10 in (177.8 cm).

**مثال 2** **نمذجة الجماعة الأحيائية لأحد أنواع الطيور**

تستخدم الدالة $f(t) = 2.2 + A\log_3 t$ لنمذجة الجماعة الأحيائية لأحد أنواع الطيور، حيث يقاس $t \geq 1$ بعدد السنوات وتقاس $f(t)$ بعشرات الآلاف من الطيور. افترض أن $t = 1$ تقابل عام 2003.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا كان معلومًا أن $f(4) = 5.2$. فحدد القيمة الدقيقة لـ $A$. اكتب الحل هنا.

حل المعادلة $f(4) = 2.2 + A\log_3 4 = 5.2$ لإيجاد قيمة $A$ كما يلي:

$$2.2 + A\log_3 4 = 5.2,\ A\log_3 4 = 3, A = \frac{3}{\log_3 4}$$

b. **التفكير بطريقة تجريدية** أبدت اللجنة البيئية لإحدى البلدات اهتمامًا بمعرفة الفترة الزمنية التي تراوح فيها عدد الجماعة الأحيائية لهذا النوع من الطيور بين 80,000 و100,000. اكتب متباينة لوغاريتمية يمكن استخدامها لإيجاد هذه الفترة الزمنية.

$$8 \leq 2.2 + \frac{3}{\log_3 (4)} \log_3 (t) \leq 10$$

c. **التخطيط للحل** حل المتباينة في **الجزء b** بشكل جبري. اكتب الحل هنا. قرّب القيمتين العليا والدنيا للفترة الزمنية إلى أقرب جزء من الألف.

$$8 \leq 2.2 + \frac{3}{\log_3 (4)} \log_3 (t) \leq 10 = 5.8 \leq \frac{3}{\log_3 (4)} \log_3 (t) \leq 7.8$$

$$= \frac{5.8 \log_3(4)}{3} \leq \log_3 (t) \leq \frac{7.8 \log_3(4)}{3}$$

$$= 3^{\frac{5.8 \log_3(4)}{3}} \leq t \leq 3^{\frac{7.8 \log_3(4)}{3}}$$

$$= 14.588 \leq t \leq 36.758$$

d. **الحساب بدقة** حوّل القيمتين العليا والدنيا للفترة الزمنية في **الجزء c** إلى قيمتين مكوّنتين من سنة وشهر. قرّب كل قيمة إلى أقرب شهر. اشرح استنتاجك.

نظرًا إلى أن $t = 1$ تقابل عام 2003، فإن القيمة الدنيا للفترة الزمنية، 14.588، تقابل عام $2017 = 14 + 2003$، وعدد الشهور الذي يقابل الجزء العشري يساوي $7.056 = 12*(0.588)$. وبالمثل، تجد أن القيمة العليا للفترة الزمنية، 36.758، تقابل عام $2039 = 36 + 2003$، وعدد الشهور الذي يقابل الجزء العشري يساوي $9.096 = 12*(0.758)$. لذا تكون الفترة في الجزء b تقابل الفترة الزمنية من يوليو 2017 إلى سبتمبر 2039.

حقوق النشر وتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

**معايير الممارسات في الرياضيات 2** تتطلب هذه الممارسة أن يكون الطلاب قادرين على *إخراج أحد المواقف المعطاة من سياقه* والنظر إليه بشكل تجريدي وتمثيله بشكل رمزي ووضع *الإجابات* في سياقها والانتباه إلى معنى الكميات وعدم التوقف على حساب قيمتها فقط.

في **المثال 2**، يجب أن يستخلص الطلاب متباينة لوغاريتمية يجب حلها من موقف قائم ثم استخدام الناتج للإجابة عن سؤال يتضمنه هذا الموقف. يجب على الطلاب شرح العملية جبريًا وبيانيًا.

## مثال 2

**معايير الممارسات في الرياضيات 6**

### نصيحة للتدريس

ركّز على كيفية تحديد قيم المعلمات في معادلة ما.

قبل إكمال **الجزء b**، تحدث عن الوحدات المعنية، مشيرًا على وجه التحديد إلى أن المُخرج يقاس بعشرات *الآلاف*. اسأل الطلاب كيف ينبغي لهم تسمية المحورين $x$ و$y$ في حال قاموا بتمثيل الدالة $f(t)$ بيانيًا. ثم اطلب منهم كتابة المتباينة، وتصميم التمثيل البياني للدالة $f(t)$ مع وضع التسميات المناسبة.

راجع مع الطلاب كيفية حل المتباينات المركبة واطلب منهم توضيح السبب وراء إمكانية تطبيق الخاصية اللوغاريتمية للمتباينات في هذه الحالة. قد ترغب في أن يكمل الطلاب **الجزأين c** و**e** معًا كوسيلة لإثبات صحة إجاباتهم باستخدام نهجين مختلفين.

وأخيرًا، يكملون **الجزء d**. ذكّر الطلاب بأن $t$ تقاس بالسنوات، لذا سيساعدهم الجزء العشري من الإجابة في تحديد الشهور.

### الأسئلة الداعمة

- إذا كانت الدالة $f(t)$ تقاس بعشرات الآلاف من الطيور، فما قيمة الدالة $f(t)$ لـ 80,000 من الطيور؟ 8
- ما أقل قيمة ممكنة لمدى الدالة $f(t)$؟ 2.2 لأن $\log_3 1 = 0$

## التدريس المتمايز

قبل البدء في هذا الدرس، قد يكون من المفيد مراجعة خواص الدوال الرئيسة $b^x$ و $\log_b x$ وتمثيلاتها البيانية والعلاقات بين هذه التمثيلات. وإيلاء انتباه خاص للمجال والمدى لكلتا الدالتين لحقيقة كونهما دالتَين عكسيتَين بعضهما لبعض.

## أخطاء شائعة

قد يواجه الطلاب صعوبة في استخدام اللغة وترجمة العبارات الشائعة إلى تعابير رياضية.

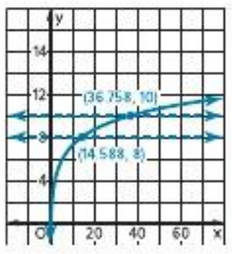
عند حل المتباينات المركبة، غالبًا ما يتجاهل الطلاب القيام بعملية حسابية معينة على الأجزاء الثلاثة للمتباينة.

## تمرين

في **الجزء 1**، يقوم الطلاب بتكوين معادلة وحلّها، ثم استخدام التمثيل البياني لمعادلتين لإيجاد مجموعة حل متباينة ما.

e. **المشاركة بدقة** اشرح كيف يمكنك إيجاد حل المتباينة في **الجزء a** بيانيًا. صمم التمثيل البياني.

افترض أن $y_1 = 8$ و$y_2 = 10$، و$f(t) = 2.2 + \frac{3}{\log_2(4)}\log_2(t)$؛ سيمثل الإحداثي $x$ عند نقطة تقاطع التمثيلَين البيانيين $y_1$ و$f(t)$ أصغر وقت في الجزء b. وسيمثل الإحداثي $x$ عند نقطة تقاطع التمثيلَين البيانيين $y_2$ و$f(t)$ أكبر وقت في الجزء b.




### تمرين

1. يمكن نمذجة النسبة المئوية لطول الصبي عند البلوغ عندما يصل عمره $x$ من السنوات بواسطة الدالة $f(x) = 29 + 48.8 \log_{10}(x + 1)$. حيث يمثل $x$ عُمر الصبي وتمثل $f(x)$ النسبة المئوية لطوله عند البلوغ.

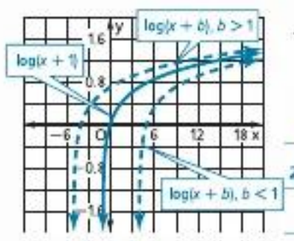
a. **تفسير المسائل** عند أي عمر سيبلغ الصبي 65% من طوله عند البلوغ؟ قرّب العمر إلى أقرب جزء من عشرة من السنة. اشرح إجابتك.

4.5 سنوات؛ قمت بحل المعادلة $65 = 29 + 48.8 \log_{10}(x + 1)$ لإيجاد قيمة $x$ الذي يمثل عُمر الصبي عند بلوغه 65% من طوله عند البلوغ.

b. **استخدام الأدوات** اشرح كيف يمكنك إيجاد عمر صبي عند بلوغه 75% أو أكثر من طوله عند البلوغ باستخدام تمثيل بياني. اكتب المتباينة التي تمثل الفئة العمرية. قرّب العمر إلى أقرب جزء من العشرة من السنة.

مثّل المعادلة $f(x) = 29 + 48.8 \log_{10}(x + 1)$ والمعادلة $y = 75$ بيانيًا. ثم جد نقطة تقاطع الخطين التي ستكون (7.762, 75). تمثل قيمة الإحداثي $x$ عند نقطة التقاطع عُمر الصبي عند بلوغه 75% من طوله عند البلوغ أو 7.8 سنوات. ونظرًا إلى أننا نريد عُمر الصبي عند بلوغه 75% أو أكثر من طوله عند البلوغ، فإن هذا العمر يمثل الحد الأدنى للمدى العمري. المتباينة التي تمثل المدى العمري هي $x \geq 7.8$ سنوات.

2. **بناء فرضيات** افترض أن المتباينة $\log_4(x + 1) \geq \log_4(x + b)$، حيث $b$ عدد حقيقي. حدد مجموعة الحل لهذه المتباينة بدلالة $b$. توصل إلى استنتاج عن طريق التمثيل البياني موضحًا جميع الخطوات.




التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_4(x + 1)$ هو إزاحة الدالة الرئيسة $\log_4 x$ بوحدة واحدة إلى اليسار. التمثيل البياني للدالة $g(x) = \log_4(x + b)$ هو أيضًا إزاحة أفقية للدالة الرئيسة بمقدار $b$ من الوحدات. إذا كان $b > 1$، فإن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ يقع على يسار التمثيل البياني للدالة $f(x)$ وهكذا. وبالنسبة إلى جميع قيم $x > -1$، يقع التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أعلى التمثيل البياني للدالة $f(x)$. إذًا، مجموعة الحل هي $(-1, \infty)$. المجال المشترك لكلتا الدالتين. إذا كان $b = 1$، يتطابق التمثيلان البيانيان وتكون مجموعة الحل هي $(-1, \infty)$. إذا كان $b < 1$، فسيقع التمثيل البياني للدالة $g(x)$ على يمين التمثيل البياني للدالة $f(x)$ وستكون مجموعة الحل فارغة.

محقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

**معايير الممارسات في الرياضيات 1** تتطلب هذه الممارسة من الطلاب فهم طبيعة إحدى المسائل، وتحديد طريقة لحلها بها ثم تطبيق هذه الطريقة.

يجب أن يمعن الطلاب النظر إلى كل مثال ويحددوا كيفية حل الدوال المعطاة. ويجب عليهم تحديد خواص التساوي والتباين التي سيستخدمونها طوال الدرس.

في **المثال 1b**، يحدد الطلاب كيفية كتابة متباينة مركبة تمثل الفئة العمرية للنسبة المئوية المحددة لطول فتاة عند البلوغ وحلها.

3. **التعليق على طريقة الاستنتاج** قام كل من أشرف وسيف بحل المتباينة $25 \log_{10} (x - 9) \leq 38$.
هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

| أشرف | سيف |
|---|---|
| $25 \log_{10} (x - 9) \leq 38$ | $25 \log_{10} (x - 9) \leq 38$ |
| $\frac{25 \log_{10} (x - 9)}{25} \leq \frac{38}{25}$ | $\frac{25 \log_{10} (x - 9)}{25} \leq \frac{38}{25}$ |
| $\log_{10} (x - 9) \leq 1.52$ | $\log_{10} (x - 9) \leq 1.52$ |
| $x - 9 \leq 10^{1.52}$ | $x - 9 \leq 10^{1.52}$ |
| $x - 9 \leq 33.11$ | $x - 9 \leq 33.11$ |
| $x \leq 42.11$ | $x \geq 24.11$ |

أشرف على صواب. الخطأ الذي وقع به سيف هو عكس إشارة المتباينة وطرح 9 من كلا الطرفين في الخطوة الأخيرة. في حين كان يتعين عليه جمع 9 إلى كلا الطرفين. كما أنه لا يتم عكس المتباينة مع عمليتي الجمع والطرح، لكن مع عمليتي الضرب والقسمة فقط.

4. **التخطيط للحل** اشرح الفرق بين حل المعادلتين $\log_2 (x + 3) = 5$ و $\log_2 (x + 3) = \log_2 5$
ثم حل كل منهما لإيجاد قيمة $x$.

لإيجاد قيمة $\log_2(x + 3) = 5$، استخدم تعريف اللوغاريتم واضبط $x + 3 = 2^5$ وهو ما يعادل $x + 3 = 32$.
ومن ثم ستجد أن $x = 29$. لإيجاد قيمة $\log_2(x + 3) = \log_2 5$، تحتاج إلى استخدام خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية وإيجاد قيمة $x + 3 = 5$ التي ستوصل إلى الحل $x = 2$.

5. **تفسير المسائل** كما ذكرنا في الدرس السابق، تُقاس جهارة الصوت بواسطة مقياس لوغاريتمي يستخدم وحدة تُسمى الديسيبل (dB) $d = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$، ويمثل $d$ مستوى الديسيبل، ويمثل $I$ قوة أو شدة الصوت، و$I_0$ هو أقل مستوى صوت (عتبة الصوت) يمكن للأذن البشرية سماعه.

a. تبلغ شدة الصوت $A$ 25 ديسيبل، وتبلغ شدة الصوت $B$ 68 ديسيبل. كم تبلغ شدة الصوت $B$ مقارنة بشدة الصوت $A$؟

تبلغ شدة الصوت $B$ حوالي 19,953 ضعف شدة الصوت $A$. يمكن إيجاد شدة الصوت $B$ من خلال حل المعادلة $10 \log_{10} \left(\frac{I_B}{I_0}\right) = 68$ لإيجاد قيمة $I_B$. ومن ثم يكون $I_B = I_0(10^{6.8})$. يمكن إيجاد شدة الصوت $A$ من خلال حل المعادلة $10 \log_{10} \left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 25$ لإيجاد قيمة $I_A$. ومن ثم يكون $I_A = I_0(10^{2.5})$. إذًا، $\frac{I_B}{I_A} = \frac{I_0(10^{6.8})}{I_0(10^{2.5})} = 10^{4.3} \approx 19953$.

b. إذا كانت شدة الصوت $A$ تساوي 5,000 ضعف شدة الصوت $B$. فكم سيبلغ الفرق بين شدة الصوتين بالديسيبل؟

ويكون الفرق في شدة الصوت بينهما 37 ديسيبل تقريبًا. $I_A = 5000I_B$ أيضًا

$d_A = 10 \log\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 10 \log \frac{5000I_B}{I_0} = 10 \log \left(5000 \frac{I_B}{I_0}\right) = 10\left[\log(5000) + \log\left(\frac{I_B}{I_0}\right)\right] =$

$10 \log(5000) + 10 \log\left(\frac{I_B}{I_0}\right) = 10 \log(5000) + d_B \approx 37 + d_B$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## تمرين

**الجزء 2** يتطلب هذا الجزء من الطلاب استخدام خواص إزاحة الدوال لتصميم تمثيلات بيانية للدوال اللوغاريتمية بيانيًا، والمقارنة بين أزواج هذه الدوال لإيجاد مجموعة حل متباينة ما.

في **الجزءين 3** و**4**، يجب على الطلاب تحليل عملية حل متباينة ما.

**جزء 5** يتطلب هذا الجزء من الطلاب تكوين معادلات من المعلومات المعطاة واستخدامها للإجابة عن الأسئلة.

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

**معايير الممارسات في الرياضيات 6** يتطلب ذلك من الطلاب شرح جميع خطوات أي عملية رياضية بوضوح وتضمين الوحدات والتسميات المناسبة.

في **المثال 2** يجب على الطلاب شرح عملية تحويل عدد عشري يمثل الوقت بالسنوات إلى قيمة مكونة من سنة وشهر.

ثم يجب على الطلاب شرح كيفية استخدام تمثيل بياني لتوضيح حلولهم. ويجب عليهم فهم أن الإحداثيَّين $x$ يمثلان القيمتين العليا والدنيا اللتين أوجداهما للفترة الزمنية التي يتراوح فيها عدد الطيور بين القيمتين المطلوبتين.

## المعايير

**معايير الممارسات في الرياضيات:**
**1، 3، 4، 5، 7**

## المهارات المطلوبة

- تمثيل الدوال بيانيًا
- تحليل كثيرات الحدود

## مثال 1

**معايير الممارسات في الرياضيات 1**

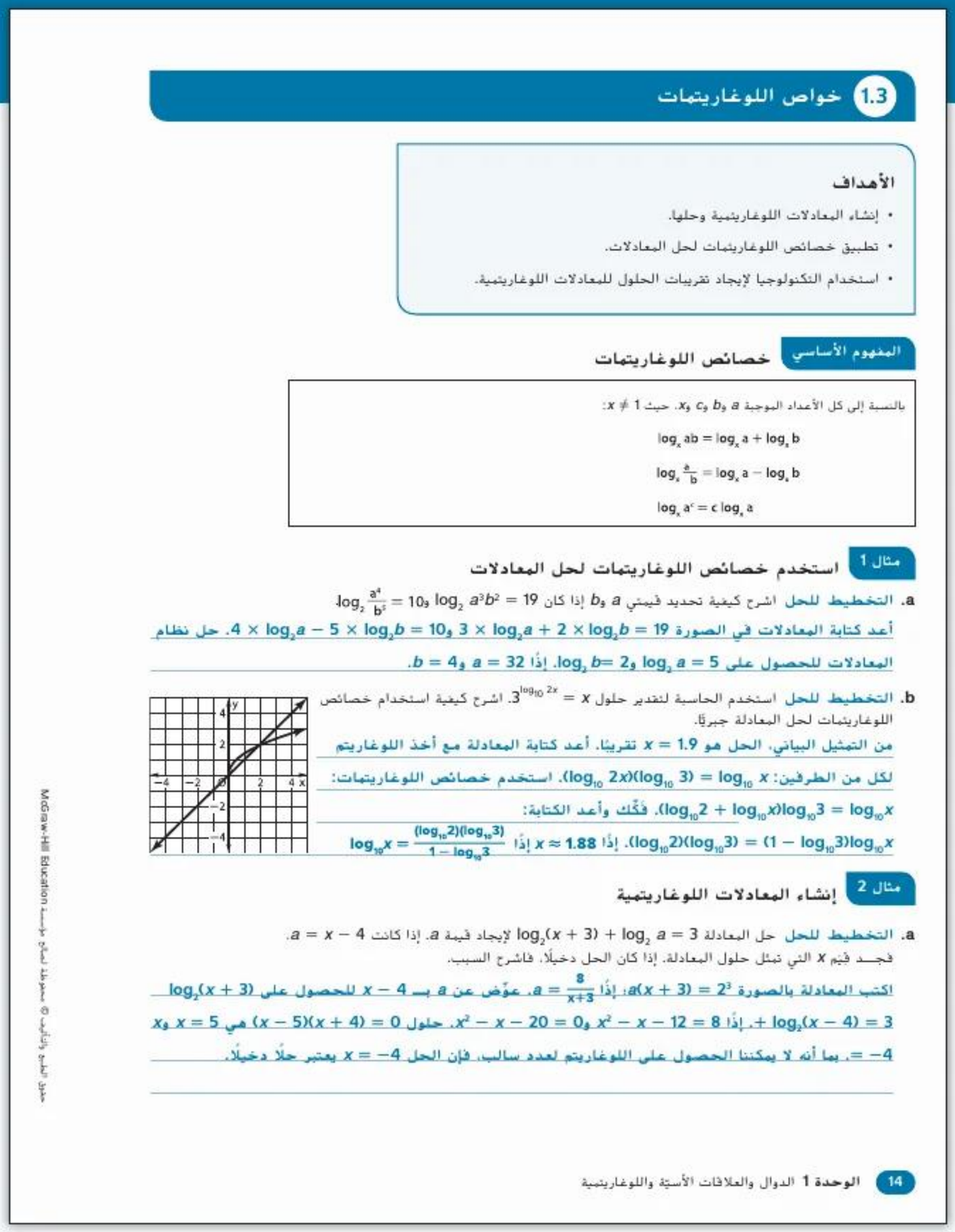
### نصيحة للتدريس

في **الجزء a**، وضِّح أن المعادلات تحتوي على قيمتين مجهولتين. اسأل الطلاب أين رأوا معادلتين تتضمنان مجهولين من قبل (نظام المعادلات الخطية). حاول أن ترشدهم إلى إدراك أن *x* وy يمكن أن يصبحا log *a* وlog *b* في نظام المعادلات.

في **الجزء b**، اشرح أنه يمكنهم عرض المعادلة في الصيغة الأسيَّة، واطلب منهم تَذكُّر أساليب حل المعادلات الأسيَّة (بأخذ لوغاريتم كل من الطرفين).

### الأسئلة الداعمة

- ما أساليب حل نظام المعادلات الخطية؟
  **الأساليب الشائعة هي التمثيل البياني والتعويض والاختزال.**
- في **الجزء b**، يظهر أن التمثيلات البيانية تتقاطع عند نقطة الأصل. لمَ لا يُعد $x = 0$ حلًا للمعادلة؟ **لا يعد حلًا لأن $\log_{10}(0)$ غير مُعرَّف في الطرف الأيسر للمعادلة.**



1.3 خواص اللوغاريتمات

**الأهداف**

- إنشاء المعادلات اللوغاريتمية وحلها.
- تطبيق خصائص اللوغاريتمات لحل المعادلات.
- استخدام التكنولوجيا لإيجاد تقريبات الحلول للمعادلات اللوغاريتمية.

**المفهوم الأساسي** خصائص اللوغاريتمات

بالنسبة إلى كل الأعداد الموجبة $a$ و$b$ و$c$ و$x$، حيث $x \neq 1$:

$$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_x a^c = c \log_x a$$

**مثال 1** استخدم خصائص اللوغاريتمات لحل المعادلات

a. **التخطيط للحل** اشرح كيفية تحديد قيمتي $a$ و$b$ إذا كان $\log_2 a^3b^2 = 19$ و$\log_2 \frac{a^4}{b^5} = 10$. أعد كتابة المعادلات في الصورة $3 \times \log_2 a + 2 \times \log_2 b = 19$ و$4 \times \log_2 a - 5 \times \log_2 b = 10$. حل نظام المعادلات للحصول على $\log_2 a = 5$ و$\log_2 b = 2$. إذًا $a = 32$ و$b = 4$.

b. **التخطيط للحل** استخدم الحاسبة لتقدير حلول $3^{\log_{10} 2x} = x$. اشرح كيفية استخدام خصائص اللوغاريتمات لحل المعادلة جبريًا.




من التمثيل البياني، الحل هو $x = 1.9$ تقريبًا. أعد كتابة المعادلة مع أخذ اللوغاريتم لكل من الطرفين: $\log_{10} x(\log_{10} 3) = (\log_{10} 2x)(\log_{10} 3)$. استخدم خصائص اللوغاريتمات: $\log_{10} x \log_{10} 3 = (\log_{10} 2 + \log_{10} x)\log_{10} 3$. فكّك وأعد الكتابة: $\log_{10} x - \log_{10} x \log_{10} 2 = \log_{10} 2$. $\log_{10} x(1 - \log_{10} 2) = \log_{10} 2$. إذًا $\log_{10} x = \frac{\log_{10} 2}{1 - \log_{10} 2}$ إذًا $x \approx 1.88$

**مثال 2** إنشاء المعادلات اللوغاريتمية

a. **التخطيط للحل** حل المعادلة $\log_2(x + 3) + \log_2 a = 3$ لإيجاد قيمة $a$. إذا كانت $a = x - 4$، فجد قيم $x$ التي تمثل حلول المعادلة. إذا كان الحل دخيلًا، فاشرح السبب.

اكتب المعادلة بالصورة $a(x + 3) = 2^3 = 8$؛ إذًا $a = \frac{8}{x+3}$. عوِّض عن $a$ بـ $x - 4$ للحصول على $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 4) = 3$. إذًا $x^2 - x - 12 = 8$ و$x^2 - x - 20 = 0$. حلول $(x + 4)(x - 5) = 0$ هي $x = 5$ و$x = -4$. بما أنه لا يمكننا الحصول على اللوغاريتم لعدد سالب، فإن الحل $x = -4$ يعتبر حلًا دخيلًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



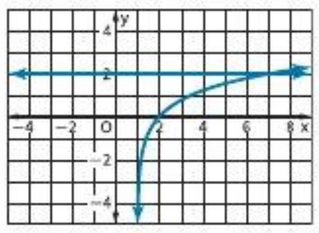
## خلفية عن الرياضيات

بفضل الحاسبات وبرامج التمثيل البياني أصبحت العمليات الحسابية التي تتضمن اللوغاريتمات بسيطة نسبيًا. نادرًا ما تُستخدم جداول اللوغاريتمات مما يسمح بتقليل الخطأ والحصول على الحلول بصورة أسرع للمسائل التي تتضمن اللوغاريتمات. لا تزال قوانين اللوغاريتمات ضرورية لتحويل المعادلات إلى معادلات أسهل وأسرع في حلها. يعرض هذا الدرس قوانين اللوغاريتمات وكيف يمكن استخدامها لإيجاد قيم التعابير وحل المعادلات.

**b.** **التخطيط للحل** ما قيمة $a$ في المعادلة $2\log_{10} a - \log_{10}(x-3) = 2$ عند $x = 7$؟ اشرح إجابتك. وحدّد ما إذا كان ثمة أي حلول دخيلة.

يبسّط المعادلة إلى $\frac{a^2}{x-3} = 100$. إذًا $a^2 = 400$ و$a = \pm 20$. يُعد الحل $a = -20$ حلًا دخيلًا.

**c.** **التخطيط للحل** حل المعادلة $\log_6 a = 2 + \log_6(x-1)$ إذا كان $a = x - 1$.
اشرح إجابتك. وحدّد ما إذا كان أي من هذه الحلول حلًا دخيلًا. هل يدعّم كل تمثيل بياني لكل من طرفي المعادلة إجابتك؟




يبسّط المعادلة إلى $(x-1)^2 = 6^2$. إذًا $x^2 - 2x + 1 = 36$ و$x^2 - 2x - 35 = 0$.
الحلول هي $x = 7$ و$x = -5$. تقاطع التمثيلات البيانية هو $(2, 7)$ الذي يدعم الحل $x = 7$. يُعد الحل $x = -5$ دخيلًا كما أكد ذلك التمثيل البياني.

**تمرين**

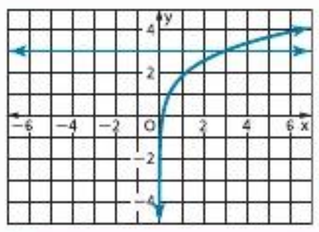
1. **التعليق على طريقة الاستنتاج** فكّر في الدالة $f(x) = \log_2 x$. تعتقد بدرية أن ضغط التمثيل البياني أفقيًا بعامل قيمته 8 يساوي تمامًا إزاحة التمثيل البياني 3 وحدات إلى أعلى. هل هذا صحيح؟ اشرح إجابتك.

إنها على صواب. يؤدي ضغط التمثيل البياني أفقيًا بعامل مقداره 8 إلى إنتاج الدالة $g(x) = \log_2 8x$. استخدم خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة $\log_2 8x = \log_2 x + \log_2 8 = \log_2 x + 3$. يوضّح هذا التمثيل البياني للدالة $f(x)$ بعد إزاحته بمقدار 3 وحدات إلى أعلى.

2. **استخدام البنية** إذا كان $\log_{10} 2 \approx 0.301$ و$\log_{10} 3 \approx 0.477$. فاشرح كيفية تحديد الحلول التقريبية لـ $\log_{10} a = 0.903$ و$\log_{10} b = 2.477$. من دون استخدام الحاسبة.

اضرب المعادلة الأولى في 3؛ إذًا $3 \log 2 = 0.903$. و$a = 8$. أضف 2 إلى كل من طرفي المعادلة الثانية؛ إذًا $2 + \log 3 = \log 100 + \log 3 = 2.477$. و$b = 300$.

3. **التخطيط للحل** أنشئ معادلة لوغاريتمية بالأساس 3 لها حل صحيح لـ $x = 3$ وحل دخيل لـ $x = -9$. اشرح استنتاجك. وبيّن طريقة التحقق من إجابتك بيانيًا.




ابدأ بـ $(x-3)(x+9) = 0$ أو $x^2 + 6x - 27 = 0$. أعد كتابتها للحصول على $x(x+6) = 27$. أعد كتابتها في صورة لوغاريتمية كما يلي $\log_3 x + \log_3(x+6) = 3$. مثّل كلًا من طرفي المعادلة بيانيًا كدالة. وستقع نقطة التقاطع عند $x = 3$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## مثال 2

معايير الممارسات في الرياضيات 1

### نصيحة للتدريس

ناقش كيف يكون لمعادلة صيغتها $\log_x a + \log_x b = c$ كل من الحلين الصحيح والدخيل. لأن قيمتي $a$ و$b$ تتضاعفان عندما تُستخدَم خصائص اللوغاريتمات، ويكون ناتجهما موجبًا عندما تكون كل منهما سالبة، وبهذه الطريقة تنشأ الحلول الدخيلة.

### الأسئلة الداعمة

- كيف يمكن كتابة المعادلة $\log_x a + \log_x b = c$ باستخدام لوغاريتم فردي؟ **تُكتَب في صورة** $\log_x ab = c$.
- كيف يمكن كتابة المعادلة $ab = x^c$ في صورة مجموع مكوَّن من لوغاريتمين؟ **تُكتَب في صورة** $\log_x a + \log_x b = c$.

### التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

**معايير الممارسات في الرياضيات 1** تتطلب هذه الممارسة أن يخطط الطلاب مسارًا للحل، بدلًا من الانتقال مباشرة إلى محاولة للحل. في **المثال 1**، سيحتاج الطلاب إلى التفكير بعناية في كيفية الوصول إلى كل مسألة. تتطلب المسائل أن يحلل الطلاب المعادلات المعطاة، والتفكير في كيفية تطبيق خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابتها بصيغة مختلفة. في **المثال 1a**، يستطيع الطلاب إعادة كتابة المعادلات في صورة مجموع لوغاريتمات، ومن ثم يدركون أن لديهم نظام معادلات يمكن حله باستخدام الطرق التي تشتمل عليها الوحدة 2 الخاصة بالمعادلات الخطية. في **المثال 1b**، سيحتاج الطلاب إلى التفكير في كيفية إعادة كتابة المعادلة بدون أي أسس، بحيث يمكنهم تطبيق طرق جبرية للحصول على الحل.

## إرشادات تقنية

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني أو برامج التمثيل البياني لمساعدة الطلاب لحل المعادلات بالصيغة $f(x) = g(x)$ من خلال تمثيل كل دالة بيانيًّا وإيجاد نقطة (نقاط) التقاطع. يمكن كذلك استخدام تمثيل بياني للتحقق من الحلول. شجِّع الطلاب على التحقق دائمًا من عملهم الجبري هندسيًا إن أمكنهم ذلك.

يمكن للطلاب أيضًا استخدام الحاسبة لتمثيل دالة لوغاريتمية بيانيًّا لملاحظة السمات الأساسية للتمثيل البياني.

بالنسبة إلى المسائل التي تحتوي على تحويلات للدوال اللوغاريتمية، يمكن للطلاب استخدام حاسبة للتحقق من التغيرات التي تحدث لمجال الدالة ومداها. يمكن للطلاب أيضًا فحص أنواع مختلفة من التحويلات، بما في ذلك الإزاحات و/أو تغيُّر الأبعاد و/أو الانعكاسات.

## تدريب

في **الجزء 1**، يجب على الطلاب كتابة معادلة ما واستخدامها للتحقق من النتيجة.

يتطلب **الجزء 2** أن يكتب الطلاب معادلات لتقريب الحل إلى معادلة لوغاريتمية.

في **الجزء 3**، يجب على الطلاب كتابة معادلة لوغاريتمية لها حلول معينة.

يطلب **الجزء 4** من الطلاب كتابة خمس معادلات استنادًا إلى المعلومات المعطاة.

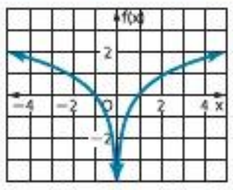
في **الجزء 5**، يُطلب من الطلاب اختبار تعبير ما بيانيًّا وجبريًّا، مع كتابة معادلة بصورة صحيحة لدعم إجاباتهم.

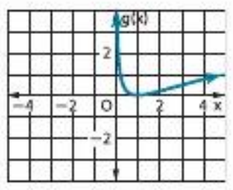
4. **استخدام البنية** إذا كان $\log_{10} 5 \approx 0.70$. فأنشئ خمس معادلات لوغاريتمية يمكن حلها باستخدام هذه المعلومات ومن دون استخدام الحاسبة. جِد حلول كل معادلة أنشأتها. *تلميح: يمكن الحصول على إحدى المعادلات الممكنة عن طريق ضرب كل من طرفي المعادلة* $\log_{10} 5 = 0.70$ *في 10 للحصول على* $\log_{10}(5^{10}) = 7$. *ثم التعويض عن* $5^{10}$ *بـ* $x$.

**نموذج الإجابة: $\log_{10} x = 0.35$، حيث $x = 5^{\frac{1}{2}}$؛ و$\log_{10} x = 3.50$، حيث $x = 5^5$؛ و$\log_{10}(2x) = 1.40$، حيث $x = 12.5$؛ و$\log_{10}(x - 1) = 0.70$، حيث $x = 6$؛ و$\log_{10}(x + 1) = 1.40$، حيث $x = 24$.**

5. **استخدام الأدوات** هل $\log_5 x^2 = (\log_5 x)(\log_5 x)$ لجميع قيم $x$؟ كيف يمكنك إثبات هذه العبارة أو رفضها باستخدام الحاسبة؟ كيف يمكنك إثبات هذه العبارة أو رفضها جبريًا؟

**مثِّل بيانيًّا كلًا من طرفي المعادلة كدالة. وقارن التمثيلات البيانية. التمثيلات البيانية غير متماثلة لجميع قيم $x$، لذلك تكون المتطابقة خاطئة. للرفض جبريًا، $\log_5(x^2) = 2\log_5 x$ من خلال خصائص اللوغاريتمات و$2\log_{10} x \neq (\log_5 x)(\log_5 x)$.**




6. **التخطيط للحل** إذا كان للمعادلة $\log_4(x + 6) + \log_4 2a = 3$ الحل $x = 2$. فلماذا يمكن أن يساوي $a$ بدلالة $x$؟ اشرح إجابتك. وحدِّد أي حلول أخرى. إذا كان الحل دخيلًا. فاشرح السبب.

**بسِّط المعادلة إلى $(x + 6)(2a) = 64$. إذا كان $x = 2$، إذًا $a = 4$، أو $a = x + 2$. حل المعادلة $2(x + 6)(x + 2) = 64$ للحصول على الحلول $x = -10$ و$x = 2$. الحل $x = -10$ حل دخيل لأنه لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب.**

7. **التخطيط للحل** إذا كان للمعادلة $\log_8 a + \log_8 (x - 2) = 1$ الحل الدخيل $x = 0$. فلماذا يمكن أن يساوي $a$ بدلالة $x$؟ اشرح إجابتك. وحدِّد أي الحلول صحيحًا.

**بسِّط المعادلة إلى $(a)(x - 2) = 8$. بما أنَّ $x = 0$، إذًا $a = -4$، أو $a = x - 4$. جِد حل $(x - 4)(x - 2) = 8$. الحل الآخر هو $x = 6$. وهو الحل الصحيح.**

8. **استخدام نموذج** يقل عدد جماعة أحيائية من الحشرات بمعدل 2.5% كل عام. ويبلغ عدد الجماعة الأحيائية حاليًا 250,000. اكتب دالة لوغاريتمية للزمن بالأعوام استنادًا إلى الجماعة الأحيائية للحشرات. اشرح كيفية استخدام الدالة لتحديد عدد الأعوام المنقضي حتى يصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 100,000. قرّب إلى أقرب عام.

**36 عامًا تقريبًا: معادلة الاضمحلال الأسي للحشرات هي $p = 250{,}000(0.975)^t$. أعد الكتابة في صورة لوغاريتمية للحصول على $t = \frac{\log p - \log 250{,}000}{\log 0.975}$ عوّض بـ 100,000 عن $p$ وجِد القيمة. $t \approx 36.2$، إذًا سيكون هذا في 36 عامًا تقريبًا.**

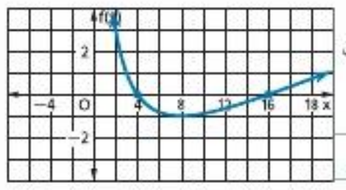
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## أخطاء شائعة

أحد الأخطاء الأكثر شيوعًا عند استخدام خصائص اللوغاريتمات هو استخدام خاصية ناتج الضرب مثل $\log ab = (\log a)(\log b)$ وخاصية ناتج القسمة مثل $\log \frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$ بطريقة غير صحيحة. قم بتعزيز هاتين الخاصيتين بالعديد من الأمثلة التي يمكن حلها ذهنيًا. على سبيل المثال، $\log_{10}(10)(10) = \log(100) = 2$ والذي لا يساوي $(\log_{10} 10)(\log_{10} 10)$ الذي يساوي 1.

9. **استخدام البنية** اشرح طريقة تحديد حلول $\frac{8}{\log_2 x} = 6 - \log_2 x$ جبريًا. ثم تحقق من إجابتك بيانيًا.




اضرب المعادلة في $\log_2 x$ للحصول على $(\log_2 x)^2 - 6\log_2 x + 8 = 0$.

حلل إلى عوامل: $(\log_2 x - 4)(\log_2 x - 2) = 0$. ويكون الحل هو $x = 16$ و$x = 4$. تم التحقق من الحلول من خلال التمثيل البياني.

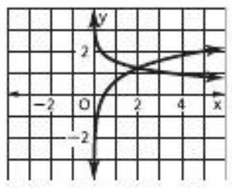
10. **استخدام نموذج** يزيد عدد الجماعة الأحيائية لذباب الفاكهة بمعدل 5.3% يوميًا. ويبلغ عدد الجماعة الأحيائية حاليًا 690. اكتب دالة لوغاريتمية للزمن بالأيام استنادًا إلى الجماعة الأحيائية لذباب الفاكهة. استخدم الدالة لتحديد العدد التقريبي للأيام التي مرت إذا كان عدد الجماعة الأحيائية يساوي 10,000.

حوالي 52 يومًا؛ معادلة النمو الأسي للذباب هي $p = 690(1.053)^t$.

أعد كتابتها في صورة لوغاريتمية للحصول على $t = \log_{1.053} \frac{p}{690}$ وعوّض بـ 10,000 عن $p$ وجد قيمة $t$:

$t = \log_{1.053} \frac{10000}{690} \rightarrow t \approx 51.8$

11. **التخطيط للحل** يوضّح الشكل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2\log_{10}(2x)$ و$g(x) = 2 - \log_{10}(3x)$ وكذلك نقطة تقاطعهما. اشرح طريقة إيجاد نقطة التقاطع جبريًا.




تتقاطع التمثيلات البيانية عند حل $f(x) = g(x)$ أو $2\log_{10}(2x) = 2 - \log_{10}(3x)$. استخدم خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابتها في صورة $3\log_{10}(x) = 2 - 2\log_{10}(2) - \log_{10}(3)$.

حل المعادلة لإيجاد قيمة $x$ للحصول على $x \approx 2.03$.

12. **استخدام البنية** أجب عن الأسئلة المتعلقة بالمبالغ المالية المستثمرة في الحسابات ذات المرابحة المركبة السنوية.

a. إذا كان يتم إيداع مبلغ AED 5000 مبدئيًا في حساب يتلقى نسبة مرابحة مركبة سنوية 4%. فاكتب دالة لوغاريتمية $T(x)$ لعدد الأعوام التي يستغرقها الحساب للوصول إلى $x$ درهمًا إماراتيًا.

يصل المبلغ المالي $x$ بعد مرور $t$ من السنوات إلى $x = 5000(1.04)^t$. أعد كتابة ذلك في صورة لوغاريتمية للحصول على $t = \log_{1.04}\left(\frac{x}{5000}\right)$ إذًا $T(x) = \log_{1.04}\left(\frac{x}{5000}\right)$

b. افترض أن حسابًا آخر يحصل على مرابحة مركبة سنوية بنسبة 2% وأنه قد تم إيداع مبلغ AED 10,000 مبدئيًا في الحساب. اكتب دالة لوغاريتمية $P(x)$ لعدد الأعوام التي يستغرقها الحساب للوصول إلى $x$ درهمًا إماراتيًا.

الوقت الذي يستغرقه الحساب الثاني ليزيد إلى $x$ درهمًا هو $P(t) = \log_{1.02}\left(\frac{x}{10000}\right)$

c. هل يوجد مبلغ من المال بحيث يستغرق كل من الحسابين المقدار نفسه من الوقت للوصول إليه؟ اشرح استنتاجك.

نعم، AED 20,276.42 تقريبًا؛ ويمثل المبلغ حل المعادلة $\log_{1.04}\left(\frac{x}{5000}\right) = \log_{1.02}\left(\frac{x}{10000}\right)$ مثّل بيانيًا كلًا من التعبيرين وجد نقطة التقاطع $x \approx 20276.42$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



**يطلب الجزءان 6 و7** من الطلاب كتابة معادلات وحلها استنادًا إلى المعلومات المعطاة.

في **الجزءين 8 و10**، يجب على الطلاب كتابة دالة لوغاريتمية واستخدامها لحل مسائل من الحياة اليومية.

**يتطلب الجزء 9** أن يضع الطلاب معادلة ما وأن يستخدموها لحل مسألة.

في **الجزء 11**، يُطلب من الطلاب إيجاد نقطة التقاطع من خلال كتابة معادلة ما وحلها.

في **الجزء 12**، يجب على الطلاب كتابة معادلتين للمبلغين الماليين الموجودين في حسابين واستخدام هاتين المعادلتين لحل المسألة.

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

**معايير الممارسات في الرياضيات 3** تتطلب هذه الممارسة أن يعلق الطلاب على طريقة استنتاج الآخرين. في **مثال 1** يجب على الطلاب التحقق من عبارة بدرية وإيجاد طريقة لتأكيد أو نفي صحتها.

يجب على الطلاب أولًا تحليل كيفية كتابة دالة لوغاريتمية عندما تنضغط الدالة الرئيسة أفقيًا بعامل قيمته 8 وعندما تتم إزاحتها بمقدار 3 وحدات إلى أعلى. بمجرد كتابة هذه المعادلات، يستطيع الطلاب توضيح ما إذا كانت على خطأ أم على صواب من خلال معالجة المعادلات جبريًّا، أو يمكنهم استخدام حاسبة أو برامج تمثيل بياني لتوضيح ما إذا كان التمثيلات البيانية للدوال متماثلة.

# 1.4 اللوغاريتمات العادية

## المعايير

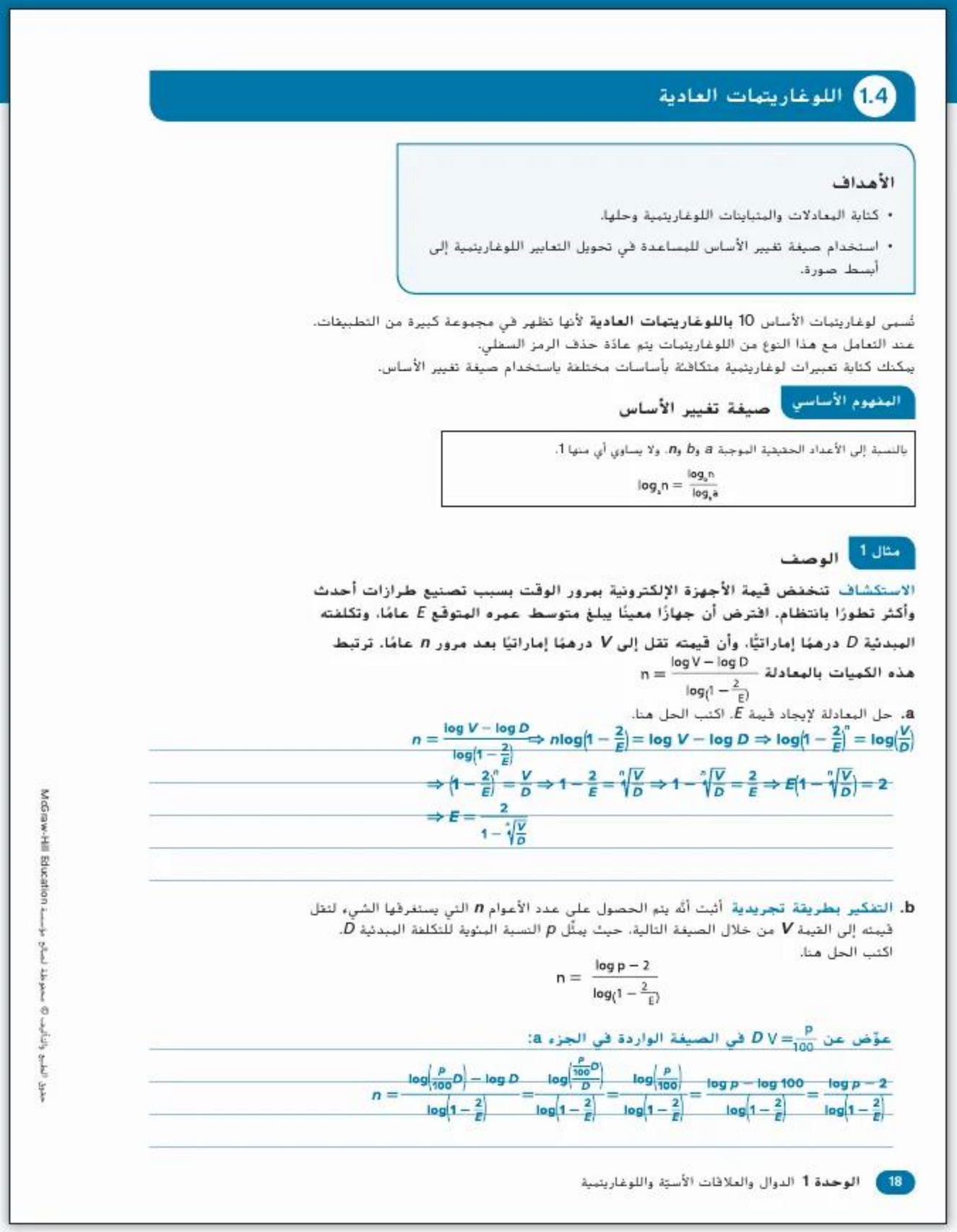
**معايير الممارسات في الرياضيات:**
**1، 2، 3، 6، 7، 8**

## المهارات المطلوبة

- تبسيط التعابير اللوغاريتمية والأسيَّة الأساسية
- استخدام خصائص اللوغاريتمات وقواعد الأسس لتبسيط التعابير ولحل المعادلات التي تنشأ فيها.
- حل معادلات جذرية بسيطة

## التدريس المتمايز

قبل البدء في هذا الدرس، قد يكون من المفيد مراجعة خصائص اللوغاريتمات وقواعد الأسس والروابط بين اللوغاريتم والصيغة الأسيَّة المرتبطة به.



1.4 اللوغاريتمات العادية

**الأهداف**

- كتابة المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية وحلها.
- استخدام صيغة تغيير الأساس للمساعدة في تحويل التعابير اللوغاريتمية إلى أبسط صورة.

تُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **باللوغاريتمات العادية** لأنها تظهر في مجموعة كبيرة من التطبيقات. عند التعامل مع هذا النوع من اللوغاريتمات يتم عادةً حذف الرمز السفلي.
يمكنك كتابة تعبيرات لوغاريتمية متكافئة بأساسات مختلفة باستخدام صيغة تغيير الأساس.

المفهوم الأساسي **صيغة تغيير الأساس**

بالنسبة إلى الأعداد الحقيقية الموجبة $a$ و$b$ و$n$، ولا يساوي أي منها 1.

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

مثال 1 **الوصف**

**الاستكشاف تنخفض قيمة الأجهزة الإلكترونية بمرور الوقت بسبب تصنيع طرازات أحدث وأكثر تطورًا بانتظام. افترض أن جهازًا معينًا يبلغ متوسط عمره المتوقع $E$ عامًا، وتكلفته المبدئية $D$ درهمًا إماراتيًا، وأن قيمته تقل إلى $V$ درهمًا إماراتيًا بعد مرور $n$ عامًا. ترتبط هذه الكميات بالمعادلة** $n = \frac{\log V - \log D}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)}$

**a.** حل المعادلة لإيجاد قيمة $E$. اكتب الحل هنا.

$$n = \frac{\log V - \log D}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)} \Rightarrow n\log\left(1 - \frac{2}{E}\right) = \log V - \log D \Rightarrow \log\left(1 - \frac{2}{E}\right)^n = \log\left(\frac{V}{D}\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{E}\right)^n = \frac{V}{D} \Rightarrow 1 - \frac{2}{E} = \sqrt[n]{\frac{V}{D}} \Rightarrow 1 - \sqrt[n]{\frac{V}{D}} = \frac{2}{E} \Rightarrow E\left(1 - \sqrt[n]{\frac{V}{D}}\right) = 2$$

$$\Rightarrow E = \frac{2}{1 - \sqrt[n]{\frac{V}{D}}}$$

**b.** **التفكير بطريقة تجريدية** أثبت أنه يتم الحصول على عدد الأعوام $n$ التي يستغرقها الشيء لتقل قيمته إلى القيمة $V$ من خلال الصيغة التالية، حيث يمثّل $p$ النسبة المئوية للتكلفة المبدئية $D$.
اكتب الحل هنا.

$$n = \frac{\log p - 2}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)}$$

عوّض عن $V = \frac{p}{100} D$ في الصيغة الواردة في الجزء a:

$$n = \frac{\log\left(\frac{p}{100}D\right) - \log D}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)} = \frac{\log\left(\frac{\frac{p}{100}D}{D}\right)}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)} = \frac{\log\left(\frac{p}{100}\right)}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)} = \frac{\log p - \log 100}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)} = \frac{\log p - 2}{\log\left(1 - \frac{2}{E}\right)}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



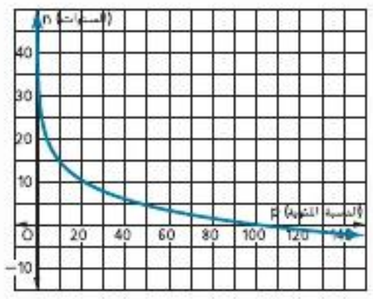
## خلفية عن الرياضيات

يعتمد هذا الدرس على المواد التي تعلمها الطلاب في الدروس السابقة في الوحدة 1 ويستخدم عددًا كبيرًا من الخصائص اللوغاريتمية الواردة في الدرس 1.3 وقواعد الأسس. يعرف الطلاب خصائص اللوغاريتمات ويمكنهم حل المزيد من المعادلات اللوغاريتمية المعقدة باستخدامها.

في هذا الدرس، يواجه الطلاب معادلات ومتباينات لوغاريتمية تتضمن أساسات مختلفة، ويتعرفون على صيغة تغيير الأساس كوسيلة للتعامل مع مثل هذه المعادلات. ستكون المعادلات التي تحتوي على هذه الأفكار الجديدة متصلة بالسياقات المُطبَّقة.

c. **تفسير المسائل** افترض أن $E = 14$ في **الجزء b**. عبر عن $n$ كدالة لـ $p$ بالصيغة $n = A \log p + B$ للعددين الحقيقيين المناسبين $A$ و$B$. مثّل هذه الدالة بيانيًا وضع التسمية المناسبة للمحاور.

الدالة هي $n = \frac{\log p - 2}{\log\left(1 - \frac{2}{14}\right)} = \frac{1}{\log\left(\frac{6}{7}\right)} \log p - \frac{2}{\log\left(\frac{6}{7}\right)}$




d. **تفسير المسائل** ما تقاطع $p$ للتمثيل البياني؟ لماذا يبدو هذا منطقيًا في هذا السياق؟

يقع تقاطع $p$ عند $n = 0$. إذًا، حل المعادلة $\frac{\log p - 2}{\log\left(1 - \frac{2}{14}\right)} = 0$. وهذا يعني أنَّ $\log p = 2$. وهو ما يعني أنَّ $p = 100$. يبدو هذا منطقيًا لأنه إذا كان $p = 100$. إذًا $V = D$. السعر الأصلي. ومن ثمَّ لم تقل قيمة الشيء.

e. **التفكير بطريقة كميّة** ما مجال هذه الدالة في هذا السياق؟ ناقش مدى واقعية النموذج.

المجال هو $(0, 100]$. يبدو هذا منطقيًا لأنه لا يمكن أن تنخفض قيمة أي شيء إلى ما بعد 0% من قيمته الأصلية. ومع ذلك، ينبغي أن يكون من الممكن أن تنخفض قيمته AED 0. وهو أمر غير ممكن في هذا النموذج لعدم وجود تقاطع مع المحور $y$.

**مثال 2** **متباينات أسيّة تتضمن معلّمة**

a. **التفكير بطريقة كميّة** فكّر في المتباينة $2^x \leq 5^{x+a}$. حيث يمثّل $a$ عددًا حقيقيًا. أثبت أنّه يمكن التعبير عن مجموعة الحل لهذه المتباينة في صورة المجموعة $\left\{x | x \leq \frac{a \log 5}{\log\left(\frac{2}{5}\right)}\right\}$. اكتب الحل هنا.

$5^{x+a} \leq 2^x \Rightarrow 5^x \times 5^a \leq 2^x \Rightarrow 5^a \leq \frac{2^x}{5^x} \Rightarrow 5^a \leq \left(\frac{2}{5}\right)^x \Rightarrow \log_5(5^a) \leq \log_5\left(\frac{2}{5}\right)^x \Rightarrow$

$\frac{\log(5^a)}{\log 5} \leq x \log_5\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow \frac{a \log 5}{\log 5} \leq x \log_5\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow \frac{a}{\log_5\left(\frac{2}{5}\right)} \geq x \Rightarrow \frac{a}{\frac{\log\left(\frac{2}{5}\right)}{\log 5}} \geq x \Rightarrow \frac{a \log 5}{\log\left(\frac{2}{5}\right)} \geq x$

ومن ثمَّ، تكون مجموعة حل هذه المتباينة $\left\{x | x \leq \frac{a \log 5}{\log\left(\frac{2}{5}\right)}\right\}$

b. **بناء فرضية** فكر في المتباينة $2^x \leq b \times 5^{x+a}$. حيث $a$ و$b$ عددان حقيقيان. هل لهذه المتباينة مجموعة حل غير خالية لجميع قيم $a$ و$b$؟ اشرح استنتاجك. بالنسبة إلى قيم $a$ و$b$ التي تكون عندها مجموعة الحل غير خالية. إن وجدت. عبر عن مجموعة الحل باستخدام اللوغاريتمات العادية إذا كان ذلك ممكنًا.

افترض أن $b > 0$:

$b \times 5^{x+a} \leq 2^x \Rightarrow b \times 5^x \times 5^a \leq 2^x \Rightarrow b \times 5^a \leq \frac{2^x}{5^x} \Rightarrow b \times 5^a \leq \left(\frac{2}{5}\right)^x$

$\Rightarrow \log(b \times 5^a) \leq \log\left(\frac{2}{5}\right)^x \Rightarrow \log(b \times 5^a) \leq x \log\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow x \geq \frac{\log(b \times 5^a)}{\log\left(\frac{2}{5}\right)}$

إذًا، بالنسبة إلى $b > 0$، تكون مجموعة الحل $\left\{x | x \geq \frac{\log(b \times 5^a)}{\log\left(\frac{2}{5}\right)}\right\}$

افترض أن $b \leq 0$:

تكون المتباينة الناتجة $2^x \leq b \times 5^{x+a}$ صحيحة لجميع قيم $x$ الحقيقية لأن $2^x > 0$ والطرف الأيسر $\geq 0$. إذًا، عندما يكون $b \leq 0$، فالحل هو جميع الأعداد الحقيقية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

**معايير الممارسات في الرياضيات 2** تتطلب هذه الممارسة أن يكون الطلاب قادرين على *إخراج أحد المواقف المعطاة من سياقه* والنظر إليه بشكل تجريدي وتمثيله بشكل رمزي ووضع *الإجابات في سياقها* والانتباه إلى معنى الكميات وعدم التوقف على حساب قيمتها فقط.

في **المثال 1**، يجب على الطلاب التفكير بطريقة تجريدية لإيجاد قيمة متغير معين في معادلة ما، فضلًا عن تفسير مجال الدالة في *السياق*. في **المثال 2**، يجب على الطلاب حل متباينة أسيَّة تحتوي على معلّمة مجردة باستخدام خصائص متنوعة.

يظهر استنتاج مماثل في **التمرينين 1 و2**.

## مثال 1

**معايير الممارسات في الرياضيات 3**

### نصيحة للتدريس

بالنسبة **إلى الجزء a**، فإن العقبة النموذجية هي تبسيط البسط باستخدام الخطأ الشائع "لوغاريتم الفرق هو الفرق بين لوغاريتمين".

بالنسبة **إلى الجزء b**، فكر في مراجعة النسب المئوية قبل البدء في المسألة. تحديدًا، تذكَّر أنَّ $p\%$ تعني $\frac{p}{100}$، وليس $p.0$. تعتبر الحسابات معتادة وتحاكي **الجزء a**.

**يتطلب الجزء c** استخدام الإزاحة للحصول على التمثيل البياني. اطلب من الطلاب إيلاء الوحدات هنا اهتمامًا خاصًّا. وتفسير الدالة في السياق المُطبَّق. اطلب من الطلاب تذكُّر أنَّ الكسر يمكن أن يكون صفرًا إذا كان البسط صفرًا فقط.

بالنسبة **إلى الجزء e**، ناقش مفهوم النسبة المئوية وماذا يعني أن تكون خارج الفترة $[0, 100]$ وفسِّر ذلك في السياق الحالي.

### الأسئلة الداعمة

- أعطِ مثالًا ملموسًا عندما يصبح شيئًا ما لا قيمة له عمليًّا بعد مرور عدد معين من الأعوام. **نموذج الإجابة: الكمبيوتر.**
- ما الذي يمكن تعلمه بشأن استخدام النماذج من **الجزء e**؟ **نموذج الإجابة: يمكن أن يكون للنماذج الرياضية قيود، فهي ليست مناسبة دائمًا للبيانات بشكل تام.**

## مثال 2

معايير الممارسات في الرياضيات 6

### نصيحة للتدريس

أكد على حقيقة أن وجود معلمات في معادلة ما مقابل وجود أعداد في أماكنها لا ينتج عنه معادلة أسوأ في التعامل معها. شجّع الطلاب على التعويض عن المعلّمات بالأعداد مؤقتًا حتى يشعروا بالارتياح عند التعامل معها دون إجراء ذلك.

### الأسئلة الداعمة

- هل ستنتج متباينة متكافئة عن ضرب كل من طرفي متباينة ما في لوغاريتم عدد ما بين 0 و1؟ **لا؛ يكون لوغاريتم هذا العدد سالبًا.**
- ما ميزة استخدام اللوغاريتم العادي عن غيره من اللوغاريتمات؟ **نموذج الإجابة: تتيح معظم أساليب التكنولوجيا أن تكون اللوغاريتمات بأساسين مختلفين، أحدهما 10.**

### التدريس المتمايز

يتمثل نهج آخر لدراسة المتباينات اللوغاريتمية في **المثال 2** في التفكير في التمثيلات البيانية لقيم المعلّمات المختلفة ومحاولة استخراج المعلومات لتخمين بنية مجموعة الحل.

على سبيل المثال، انظر إلى ما يحدث عند $a = 0$؛ لاحظ أن الحل يتكون من جميع قيم $x$ غير الموجبة. ومن ثمَّ، اسأل عما ستفعله قيمة $a$ للتمثيل البياني للطرف الأيسر من الدالة. وضِّح هذا على اللوحة مع نسخة متنقلة من الدالة الرئيسة للطرف الأيسر من الدالة. ينبغي أن توضح حقيقة أن نقطة النهاية اليمنى لمجموعة الحل تنتقل إلى اليمين كلما أصبحت قيمة $a$ أكبر.

**تمرين**

1. وجد علماء الأحياء أنه يمكن تمثيل الطاقة اللازمة لنقل مادة ما من خارج خلية حية معينة إلى داخلها من خلال $E = 2.08(\log Y_1 - \log Y_0)$، مقيسة بالكيلو سعر حراري لكل جرام جزيئي. حيث يمثّل $Y_1$ تركيز المادة في الخلية ويمثّل $Y_0$ تركيز المادة خارج الخلية.

   a. **التفكير بطريقة تجريدية** أثبت أن $E = \frac{2.08}{\log_2 10} \times \log_2\left(\frac{Y_1}{Y_0}\right)$. اكتب الحل هنا.

   $E = 2.08(\log Y_1 - \log Y_0) = 2.08\left(\frac{\log_2 Y_1}{\log_2 10} - \frac{\log_2 Y_0}{\log_2 10}\right) = \frac{2.08}{\log_2 10}(\log_2 Y_1 - \log_2 Y_0) = \frac{2.08}{\log_2 10} \times \log_2\left(\frac{Y_1}{Y_0}\right)$

   b. **الحساب بدقة** إذا كان $Y_1 = 2Y_0$، فأثبت أن $E = 2.08 \log 2$. اكتب الحل هنا.

   باستخدام الصيغة $E = 2.08(\log Y_1 - \log Y_0)$ حيث $Y_1 = 2Y_0$، يكون $E = 2.08(\log(2Y_0) - \log Y_0)$

   $2.08\log\left(\frac{2Y_0}{Y_0}\right) = 2.08\log(2)$

   c. **وصف الطريقة** إذا كان $Y_1 = nY_0$، حيث يمثّل $n$ عددًا صحيحًا موجبًا، فحدد تعبيرًا مبسّطًا لـ $E$ مماثلًا للتعبير الوارد في **الجزء b**. اكتب الحل هنا.

   باستخدام الصيغة $E = 2.08(\log Y_1 - \log Y_0)$ حيث $Y_1 = nY_0$، يكون $E = 2.08(\log(nY_0) - \log Y_0)$

   $2.08\log\left(\frac{nY_0}{Y_0}\right) = 2.08\log(n)$

   d. **التفكير بطريقة تجريدية** ما أصغر عدد صحيح $n$ يكون عنده مستوى الطاقة 3.51 كيلو سعر حراري لكل جرام جزيئي على الأقل؟ اشرح استنتاجك.

   $\log n \geq \frac{3.51}{2.08} \Rightarrow n \geq 10^{\frac{3.51}{2.08}} \approx 48.7$؛ قرّب إلى العدد الأكبر للحصول على أصغر عدد صحيح يحقق هذه المتباينة، أي 49.

2. **التفكير بطريقة تجريدية** فكر في المتباينة $2^{-bx} \leq 5^{ax}$، حيث $a$ و$b$ عددان حقيقيان موجبان. أثبت أنّ مجموعة الحل لهذه المتباينة لا تعتمد على قيم $a$ أو $b$. اشرح استنتاجك.

   $\Rightarrow \log(5^{ax}) \leq \log(2^{-bx}) \Rightarrow ax\log 5 \leq -bx\log 25^{ax} \leq 2^{-bx}$

   $\Rightarrow ax\log 5 + bx\log 2 \leq 0 \Rightarrow x(a\log 5 + b\log 2) \leq 0$

   لأن $a$ و$b$ موجبان، يكون التعبير $a\log 5 + b\log 2$ موجبًا، ومن ثمَّ، تتحقق المتباينة فقط إذا كان $x \leq 0$، ولا يعتمد هذا على قيمتي $a$ و$b$. إذًا، مجموعة الحل لجميع قيم $a$ و$b$ هي $\{x | x \leq 0\}$.

3. تريد هدى الحصول على قيمة $\log_7 8$ مقربة إلى أقرب جزء من ألف. وتستخدم صيغة تغيير الأساس والحاسبة للحصول على التقريب. توضح الشاشة على الجانب الأيمن ما أدخلته، والنتيجة.

   log(8/log(7
   .9761828925

   a. **التعليق على طريقة الاستنتاج** هل أخطأت هدى؟ إذا كان الأمر كذلك، فاشرح كيف يمكنها تصحيح خطئها، مشيرًا إلى شاشة الحاسبة.

   نعم؛ يجب أن تدخل هدى قوسًا بعد 8، قبل القسمة، لحساب $\log 7 \div \log 8$.

   أظهرت الحاسبة أن $\log[7 \div \log 8]$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

**معايير الممارسات في الرياضيات 1** تتطلب هذه الممارسة أن يفهم الطلاب مسألة ما وأن يحددوا طريقة لحلها وأن يحللوا العلاقات بين الكميات التي تشتمل عليها ومن ثم تنفيذ هذه الطريقة.

في **المثال 1**، يجب على الطلاب تحليل العلاقة بين $n$ و$p$ في السياق ثم مقارنة هذا بالتمثيل البياني لـ $n$ من أجل تفسير أهمية التقاطع مع $p$. في **الجزء b**، يحلل الطلاب حالات منفصلة. ويبدؤون مناقشة من خلال تذكُّر أن الأسس موجبة، ثم السؤال عما إذا كان ثمة قيم لـ $a$ و$b$ تجعل الطرف الأيسر للمتباينة سالبًا. ينبغي أن يطرح هذا مناقشة ذات مغزى.

**b.** **التفكير بطريقة كميّة** اشرح سبب أن النتيجة 0.976... ينبغي أن تنبّه هدى إلى أنها قامت بخطأ ما من خلال النظر في العلاقة بين log 8 وlog 7.

إذا كان $0 < a < b$، إذًا $\log a < \log b$. إذًا، $\log 7 < \log 8$. وهذا يعني أن نسبة log 8 إلى log 7 يجب أن تكون أكبر من 1.

**4.** **تفسير المسائل** تعطي المعادلة $t = \frac{1}{\log(1+r)}$ عدد السنوات التي يستغرقها مبلغ AED 1000 ليزيد إلى AED 10,000 في حساب ادخار يتلقى نسبة مرابحة سنوية $r$، مركبة بصفة سنوية. إذا أرادت جِصّة الحصول على مبلغ AED 10,000 للتقاعد في سن 62، فمتى يجب أن تودع مبلغ AED 1000 إذا كان يمكنها الحصول على مرابحة بنسبة 4.9%؟ اكتب الحل هنا أو اشرح استنتاجك.

عندما يكون عمرها حوالي 14 عامًا؛ تحصل من التعويض عن $r = 0.049$ على $t \approx 48.13$، و$62 - 48 = 14$.

**5.** **استخدام البنية** أعد كتابة المعادلة المعطاة باستخدام اللوغاريثمات العادية وجد الحل.

**a.** $3\log_2(2x) - \log_4(3x) = 1$

$3\left[\frac{\log(2x)}{\log(2)}\right] - \frac{\log(3x)}{\log(4)} = 1 \rightarrow \frac{3\log(2x)}{\log(2)} - \frac{\log(3x)}{2\log(2)} = 1 \rightarrow \frac{6\log(2x) - \log(3x)}{2\log(2)}$

$= 1 \rightarrow 6(\log(2) + \log(x)) - \log(3) - \log(x) = 2\log(2) \rightarrow 5\log(x) = \log(3) - 4\log(2)$

so $x \approx 0.715$

**b.** $\log_6(x^2) + \log_3(x) = 3$

$\frac{\log(x^2)}{\log(6)} + \frac{\log(x)}{\log(3)} = 3 \rightarrow \frac{\log(3)\log(x^2) + \log(6)\log(x)}{\log(3)\log(6)} = 3 \rightarrow 2\log(3)\log(x) + \log(6)\log(x)$

$= 3\log(3)\log(6) \rightarrow \log(x)[2\log(3) + \log(6)] = 3\log(3)\log(6)$ so $x \approx 4.39$

**c.** $2\log_2(3x) = -8\log_3(x)$

$2\left[\frac{\log(3x)}{\log(2)}\right] = -8\left[\frac{\log(x)}{\log(3)}\right] \rightarrow 2\log(3)\log(3x) = -8\log(2)\log(x) \rightarrow 2\log(3)[\log(3) + \log(x)]$

$= -8\log(2)\log(x) \rightarrow \log(x)[2\log(3) + 8\log(2)] = -2[\log(3)]^2$

so $x \approx 0.732$

**6.** **استخدام البنية** أعد كتابة المتباينات المعطاة باستخدام اللوغاريثمات العادية وجد الحل.

**a.** $\log_7(2x) < 2\log_6(x)$

$\frac{\log(2x)}{\log 7} < \frac{2\log(x)}{\log 6} \rightarrow \frac{\log(2x)}{\log 7} - \frac{2\log(x)}{\log 6} < 0 \rightarrow \frac{\log(6)\log(2x) - 2\log(7)\log(x)}{\log(6)\log(7)} < 0$

$\rightarrow \log(6)\log(2x) - 2\log(7)\log(x) < 0 \rightarrow \log(6)[\log(2) + \log(x)] - 2\log(7)\log(x) < 0$

$\rightarrow \log(6)\log(x) - 2\log(7)\log(x) < -\log(2)\log(6) \rightarrow \log(x)[\log(6) - 2\log(7)] < -\log(2)\log(6)$

$\rightarrow \log(x) > \frac{-\log(2)\log(6)}{\log(6) - 2\log(7)} \rightarrow x > 10^{\frac{-\log(2)\log(6)}{\log(6) - 2\log(7)}}$ أو $x > 1.81$ تقريبًا.

**b.** $3\log_2(4x) \leq \log(8x)$

$\frac{3\log(4x)}{\log 2} \leq \log(8x) \rightarrow \frac{3\log(4x)}{\log 2} - \log(8x) \leq 0 \rightarrow \frac{3\log(4x) - \log(2)\log(8x)}{\log 2} \leq 0$

$\rightarrow 3\log(4x) - \log(2)\log(8x) \leq 0 \rightarrow 3[\log(4) + \log(x)] - \log(2)[\log(8) + \log(x)] \leq 0$

$\rightarrow 3\log(x) - \log(2)\log(x) \leq \log(2)\log(8) - 3\log(4)$

$\rightarrow \log(x)[3 - \log(2)] \leq \log(2)\log(8) - 3\log(4) \rightarrow \log(x) \leq \frac{\log(2)\log(8) - 3\log(4)}{3 - \log(2)}$

$\rightarrow x \leq 10^{\frac{\log(2)\log(8) - 3\log(4)}{3 - \log(2)}}$ أو $x \leq 0.27$ تقريبًا

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة النشر والتأليف © حقوق الطبع



## أخطاء شائعة

- غالبًا ما يسيء الطلاب تفسير خصائص اللوغاريتمات، فضلًا عن قواعد الأسس. ورد ذكر العديد من هذه الأخطاء الشائعة في الدرس السابق.
- غالبًا ما يهمل الطلاب إدراك أن $\log a$ سالب كلما كان $0 < a < 1$. يصبح هذا إشكاليًّا عندما نضرب كلًا من طرفي المتباينة في مثل هذه الكمية.

## تدريب

يتطلب **الجزء 1** أن يستخدم الطلاب خصائص لوغاريتمية لتبسيط الصيغة المعطاة. يجب على الطلاب أيضًا كتابة معادلة ما وحلها **للجزء d**.

في **الجزء 2**، يجب على الطلاب إدراك أنه تجب إعادة كتابة المعادلة باستخدام خصائص اللوغاريتمات.

يطلب **الجزء 3** من الطلاب التعليق على العمل باستخدام ما يعرفونه عن بنية المعادلات اللوغاريتمية.

يتضمن **الجزء 4** استخدام معادلة لحل مسألة ما.

في **الجزءين 5** و**6**، يجب على الطلاب إعادة كتابة معادلات ومتباينات لوغاريتمية وحلها.

## إرشاد تقني

يمكن أن تكون التكنولوجيا، مثل حاسبة التمثيل البياني، مفيدة في الدروس التي تشتمل على اللوغاريتمات. تحقق من أن الطلاب قادرين على حساب لوغاريتم ذي أساس غير الأساس 10 أو $e$ بطريقة صحيحة. قد تحتوي بعض الحاسبات على خطوات عملية خاصة على الحاسبة من أجل هذا، لكن تطبيق صيغة تغيير الأساس ببساطة غالبًا ما يكون أسهل. لاحظ أنه ينبغي على الطلاب تطبيق الأساليب نفسها عند التمثيل البياني. على سبيل المثال، لتمثيل $y = \log_3 x$ بيانيًّا، يجب على الطلاب إدخال $\frac{\log x}{\log 3}$ لأن التعبير يمثّل الدالة.

# 1.5 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

## المعايير

**معايير الممارسات في الرياضيات:**
**1، 3، 4، 5، 6، 7**

## المهارات المطلوبة

- تحليل الدوال الأسيَّة
- استخدام خصائص اللوغاريتمات
- إيجاد معكوس دالة

## مثال 1

معايير الممارسات في الرياضيات 1

### نصيحة للتدريس

عندما يخطط الطلاب كيفية الحصول على مبلغ الإيداع الابتدائي ونسبة المرابحة، تأكد من أنهم يحددون المصطلحات الأساسية من النص والتي يمكن أن تساعدهم في تحديد الصيغة التي يجب استخدامها.

### الأسئلة الداعمة

- ما الذي يمكنك إيجاده أولًا باستخدام المعلومات الحالية: نسبة المرابحة أم مبلغ المال الذي تم إيداعه في البداية؟ لماذا؟ **نسبة المرابحة أولًا لأنك تحصل على أرصدة الحساب كل عام. ومن ثم يمكنك تحديد مبلغ الإيداع الابتدائي.**
- في **الجزء c**. لماذا تحسب قيمة هذه الأعداد المحددة؟ **يجب أن تكون المرابحة المكتسبة بين الأعوام 1 و3، ثم 3 و4، في حساب كامل مساوية للمرابحة المكتسبة بين الأعوام 1 و4.**





**الأهداف**

- تحديد صيغ متكافئة للأساس $e$ التعابير اللوغاريتمية الطبيعية.
- استخدام هذه الصيغ المتكافئة لحل المعادلات الأسية والمعادلات اللوغاريتمية الطبيعية.

الدالة الأسيّة هي دالة تُكتب بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0$ و$b > 0$ باستثناء $b \neq 1$. الدالة **الأسيّة للأساس الطبيعي** هي دالة أسيّة تمثّل فيها $b$ **الأساس الطبيعي** $e$، وهو عدد غير نسبي يساوي 2.71828... تقريبًا. تُمثّل دوال الأساس الطبيعي التي تُستخدَم لإيضاح النمو الأسي أو الاضمحلال الأسي المستمر الذي تمثله العلاقة $y = e^x$ أو $y = e^{-x}$ على التوالي. معكوس الأساس الطبيعي $e$ هو **اللوغاريتم الطبيعي** الذي يُكتب في صورة $\ln x$. يُعد نموذج المرابحة المركَّبة بصفة مستمرة مثالًا على الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي، $A(t) = Pe^{rt}$، حيث يمثل $P$ رأس المال أو المبلغ الأوليّ، ويمثل $r$ نسبة المرابحة ويمثل $t$ الزمن ويمثل $A$ المبلغ خلال الزمن $t$.

**مثال 1** **استخدام لوغاريتمات الأساس الطبيعي**

**الاستكشاف** **استثمر كامل في حساب تقاعد مركب بصفة مستمرة. يوضّح الجدول المبلغ المالي الذي اكتسبه في الأعوام الخمسة الماضية، ابتداء من نهاية العام الأول الكامل لفتح الحساب.**

| عدد الأعوام التي مرت منذ فتح الحساب | المبلغ المالي المكتسب |
|---|---|
| 1 | AED 3720.35 |
| 2 | AED 4226.26 |
| 3 | AED 4800.97 |
| 4 | AED 5453.83 |
| 5 | AED 6197.47 |

**a.** **التخطيط للحل** اشرح كيفية تحديد المبلغ المالي الذي أودعه كامل مبدئيًا في الحساب ونسبة المرابحة، ثم جد قيمة كل منهما.

**نموذج الإجابة: الخطوة 1: جد نسبة المرابحة باستخدام مبلغين من عامين متتالين. الخطوة 2: استخدم النسبة والمبلغ المحسوبين بعد مرور أول عام لتحديد المبلغ الذي تم إيداعه مبدئيًا. المثال الأول، في هذه الحالة، جد أولًا نسبة المرابحة باستخدام المعادلة $A = Pe^{rt}$:**

**$\text{AED } 4226.26 = \text{AED}e^{r} 3720.35$؛ $r \approx 12.75\%$. ثم حدّد المبلغ الذي تم إيداعه في البداية من خلال حلّ**

**$\text{AED } 3720.35 = Pe^{0.1275 \times 0}$ لإيجاد قيمة $P$؛ $P \approx \text{AED } 3275$.**

**b.** **استخدام الأدوات** ما نسبة المرابحة التي ستؤدي إلى وصول وديعة كامل إلى الضعف في خمسة أعوام؟ قرّب النسبة المئوية إلى أقرب جزء من مئة.

**يجب أن تكون نسبة المرابحة 13.86% تقريبًا لتصل وديعة كامل إلى الضعف خلال خمسة أعوام.**

**c.** **استخدام البنية** اشرح لماذا $\ln\left(\frac{5453.83}{3720.35}\right) = \ln\left(\frac{5453.83}{4800.97}\right) + \ln\left(\frac{4800.97}{3720.35}\right)$

**$\ln\left(\frac{5453.83}{3720.35}\right) = \ln\left(\frac{4800.97}{3720.35} \times \frac{5453.83}{4800.97}\right) = \ln\left(\frac{4800.97}{3720.35}\right) + \ln\left(\frac{5453.83}{4800.97}\right)$ خاصية ناتج الضرب للوغاريتمات والتبسيط.**

محتوى الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### خلفية عن الرياضيات

الأساس الأكثر شيوعًا في الاستخدام للدوال الأسيَّة التي تمثل نموذجًا للتطبيقات من الحياة اليومية هو الأساس $e$. مثل pi، فإن $e$ عدد غير نسبي. سُمي الأساس $e$ بعد أن اكتشف العالم السويسري ليونهارت أويلر قيمته التي وصلت إلى 23 منزلة عشرية.

$e = 2.71828182845904523536028...$

## مثال 2

**معايير الممارسات في الرياضيات 6**

### نصيحة للتدريس

شجع الطلاب على التركيز على الدالة الأسيَّة المستخدمة لنمذجة المعلومات وما تمثله كل كمية في هذا السياق.

### الأسئلة الداعمة

- إذا كانت الكمية الابتدائية من الكربون 14 في عينة ما هي $P_0$، فما التعبير الذي يمثّل كمية الكربون 14 في العينة بعد عمر نصف واحد؟ $0.5P_0$
- ما قيمة $\ln(e^1)$؟ 1

كيف يمكنك استخدام هذا في **الجزء a**؟ **استخدمه لتبسيط المتباينة الأسيَّة.**

**مثال 2** تأريخ الكربون

تقل النسبة المئوية لكمية الكربون 14 في المواد العضوية غير الحية عبر الزمن. يعتبر تأريخ الكربون المشع طريقة لقياس كمية الكربون 14 الموجودة في هذه المواد لتقدير أعمارها. تمثّل الدالة الأسيّة $P = P_0e^{kt}$. العلاقة بين الكمية الحالية $P$ من الكربون 14 في المواد العضوية والكمية الأولية $P_0$ من الكربون 14 عبر الزمن $t$ مع معدل الانحلال $k$.

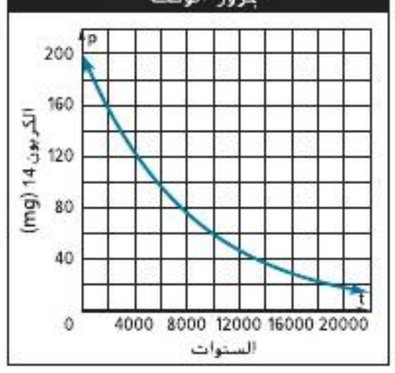
a. **تفسير المسائل** مقدار الوقت الذي تستغرقه النسبة المئوية من الكربون 14 الموجودة في المواد العضوية غير الحية لتقل إلى النصف هو 5730 عامًا. وهذا ما يُعرف بعمر النصف. استخدم هذه المعلومات لإيجاد المعدل الأسي للانحلال $k$ المرتبط بالكربون 14. *ملاحظة: لا تبسّط اللوغاريتم الطبيعي في الإجابة حتى تصل إلى الجزء c.*

$P = P_0e^{kt}$; $0.5P_0 = P_0e^{5730k}$; $0.5 = e^{5730k}$; $\ln(0.5) = 5730k(\ln e)$; $k = \frac{\ln(0.5)}{5730}$

b. **استخدام الأدوات** أحفورة كانت تحتوي على 200 ملليجرام من الكربون 14 في البداية. اكتب معادلة تمثّل العلاقة بين عمر الأحفورة وكمية الكربون 14 الموجودة في العينة حاليًا. مثّل هذا العلاقة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني وارسم التمثيل البياني.

$P = 200e^{\frac{\ln(0.5)}{5730}t}$

كمية الكربون 14 في عينة بمرور الوقت




c. **استخدام نموذج** استخدم التمثيل البياني لتقدير أقرب عدد من الأعوام تستغرقه الأحفورة لتحتوي على 40% أو أقل من الكربون 14 الذي كانت تحتوي عليه في البداية. حل المتباينة الأسّية.

نموذج الإجابة: 7500 عام تقريبًا. جسد حل المتباينة: $P \le 200e$

$P \le 200e^{\frac{\ln(0.5)}{5730}t}$; $80 \le 200e^{\frac{\ln(0.5)}{5730}t}$; $0.4 \le e^{\frac{\ln(0.5)}{5730}t}$;

$\ln(0.4) \le \frac{\ln(0.5)}{5730}t \times \ln(e)$; $t \ge \frac{5730 \times \ln(0.4)}{\ln(0.5)}$; $\approx 7575$ عامًا.

**مثال 3** التعابير والمعادلات الأسيّة واللوغاريتمية

**الحساب بدقة** اكتب دالة أسيّة أو لوغاريتمية مكافئة.

a. $\ln x = e$ — $e^e = x$

b. $e^{x+2} = 5$ — $x = \ln 5 - 2$

c. $2 \ln 5 = x$ — $e^x = 25$

**الحساب بدقة** اكتب كلًا منها في صورة لوغاريتم فردي.

d. $5 \ln \frac{2}{3} + 2 \ln x$ — $\ln(\frac{32}{243}x^5)$

e. $2 \ln x^3 - 3 \ln 7$ — $\ln \frac{x^6}{343}$

f. $2 \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln 8$ — $\ln 2(x+1)^2$

**الحساب بدقة** إذا علمت أن $\ln 2 = 0.6931$ و$\ln 9 = 2.1972$. فجد قيمة كل تعبير من دون استخدام الحاسبة لتحديد اللوغاريتم الطبيعي.

g. $\ln 36$ — $\ln(2 \times 2 \times 9) = \ln 2 + \ln 2 +$ $\ln 9 = 3.5834$

h. $\ln 2.25$ — $\ln(9 \div 2 \div 2) = \ln 9 -$ $\ln 2 - \ln 2 = 0.811$

i. $\ln 1.5$ — $\ln(9^{\frac{1}{2}} \div 2) = \frac{1}{2}\ln 9 - \ln 2 =$ $0.4055$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### التدريس المتمايز

عند إكمال **الجزء c** من **المثال 1**، قد يجد بعض الطلاب أنه من الأسهل استخدام الدمج بين خاصية ناتج الضرب وخاصية ناتج القسمة للوغاريتمات لإظهار أن التعابير متكافئة.

$$\ln \frac{4800.97}{3720.35} + \ln \frac{5453.83}{4800.97} = \ln \frac{5453.83}{3720.35}$$

$$(\ln 4800.97 - \ln 3720.35) +$$
$$(\ln 5453.83 - \ln 4800.97) = \ln 5453.83 - \ln 3720.35$$
$$-\ln 3720.35 + \ln 5453.83 = \ln 5453.83 - \ln 3720.35$$
$$\ln 5453.83 - \ln 3720.35 = \ln 5453.83 - \ln 3720.35$$

## مثال 3

**معايير الممارسات في الرياضيات 6**

### نصيحة للتدريس

لإكمال المسائل في هذا المثال، يجب أن يركز الطلاب على استخدام خصائص اللوغاريتمات وتغيير المعادلة من الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسيَّة والعكس.

### الأسئلة الداعمة

- ما قيمة $\ln(e^x)$؟ اشرح بكلمات من عندك **هذا التعبير يساوي الأس الذي يجب أن يُرفع إليه $e$ للحصول على $e^x$. يجب أن يكون هذا الأس هو $x$.**
- ما صيغة التعبير $x^2 - 3x - 6$؟ كيف تستخدم هذا لحل **الجزء j**؟ **تعبير تربيعي؛ عوِّض عن $x$ بـ $3^x$.**

**الحساب بدقة** حل كل معادلة أو متباينة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

j. $4e^x + 2 < 18$

$4e^x < 16$; $\ln e^x < \ln 4$;

$x < \ln 4 \approx 1.3863$

k. $\ln (2x + 1)^5 \geq 14$

$\ln (2x + 1) \geq 2.8$;

$2x + 1 \geq e^{2.8}$;

$x \geq \frac{(e^{2.8} - 1)}{2} \approx 7.7223$

l. $9^x - 3^x = 6$

$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$;

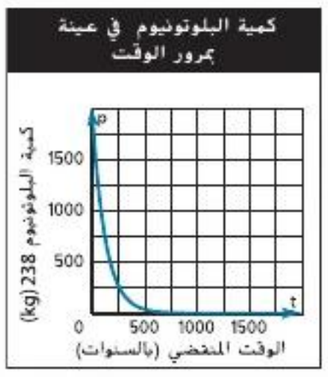
$(3^x - 3)(3^x + 2) = 0$;

$3^x = 3$; $x = 1$

**تمرين**

1. تُخزّن محطة لتوليد الطاقة النووية البلوتونيوم 238. نظير مشع يبلغ عمر النصف له 87.7 عامًا. في كهوف أحد الجبال. تمتلك المحطة 2000 kg من المادة مخزنة بعيدًا.

a. **استخدام الأدوات** اكتب دالة تمثّل كمية البلوتونيوم 238 المتوفرة بمرور الزمن. استخدم حاسبة التمثيل البياني الخاصة بك لتمثيل المعادلة بيانيًّا وارسم التمثيل البياني أدناه.




افترض أن $y = A_0e^{kt}$. حيث يمثّل $y$ كمية البلوتونيوم الجديدة

ويمثّل $A_0$ الكمية الابتدائية ويمثّل $k$ معدل الاضمحلال ويمثّل $t$ الزمن

بالأعوام. الحل: $87.7k = \ln 0.5$; $0.5 = e^{87.7k}$; $1000 = 2000e^{87.7k}$;

$k = \frac{\ln 0.5}{87.7} \approx -0.0079$. الدالة هي $y = 2000e^{-0.0079t}$.

b. **استخدام نموذج** استخدم التمثيل البياني لتقدير أقرب عدد من الأعوام يستغرقه انحلال 90% على الأقل من الكمية الأصلية من البلوتونيوم 238. ثم حل المتباينة للحصول على الإجابة.

300 عام تقريبًا؛ $y = 0.10(2000)$ أو $200 = 2000e^{-0.0079t}$ وهو ما يساوي $0.1 = e^{-0.0079t}$.

خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من الطرفين: $\ln 0.1 = -0.0079t \times \ln e$. إذًا، $t = \frac{\ln 0.1}{-0.0079} \approx 291$ عامًا.

c. **المشاركة بدقة** يبلغ عمر النصف لنظير مشع آخر، البلوتونيوم 239، 24,100 عام. إذا خزنت المحطة 20 كيلوجرامًا من هذا النظير، فبعد كم عامًا ستصبح كميتا نوعي البلوتونيوم متساويتين؟ *ملاحظة: لا تبسّط اللوغاريتم الطبيعي حتى تصل إلى الحساب النهائي.*

جد معدل الانحلال: $k = \frac{\ln 0.5}{24{,}100}$; $\ln 0.5 = 24{,}100k$; $0.5 = e^{24{,}100k}$; $10 = 20e^{24{,}100k}$ جد حل

$t$: $100e^{\frac{\ln (0.5)}{87.7}t} = e^{\frac{\ln (0.5)}{24{,}100}t}$; $20e^{\frac{\ln (0.5)}{87.7}t} = 20e^{\frac{\ln (0.5)}{24{,}100}t}$; $2000e^{\frac{\ln (0.5)}{87.7}t} = 20e^{\frac{\ln (0.5)}{24{,}100}t}$;

$\ln 100 + \frac{\ln 0.5}{87.7}t = \frac{\ln 0.5}{24{,}100}t$;

$t = (\ln 100) \div \left(\frac{\ln 0.5}{24{,}100} - \frac{\ln 0.5}{87.7}\right) \approx 585$ years

2. **الحساب بدقة** اكتب دالة أسيّة أو لوغاريتمية مكافئة.

a. $e^2 = x^6$

$\ln x = \frac{2}{5}$

b. $\ln (x - 4) = 7$

$x = e^7 + 4$

c. $e^{3e} = x^3$

$\ln x = e$

محقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



24 الوحدة 1 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

3. **الحساب بدقة** اكتب كلًا منها في صورة لوغاريتم فردي.

a. $3 \ln x - 2 \ln 2x$
$\ln \frac{x}{4}$

b. $x \ln 25 + x \ln 5$
$3x \ln 5$

c. $8 \ln (x + 1) - 3 \ln (x + 1)$
$5 \ln (x + 1)$

4. **الحساب بدقة** بافتراض أنّ $\ln 5 = 1.6094$ و$\ln 8 = 2.0794$. جـد قيمة كل تعبير من دون استخدام الحاسبة لتحديد اللوغاريتم الطبيعي.

a. $\ln 200$
$\ln(5\times5\times8) = \ln 5 + \ln 5 + \ln 8 = 5.2982$

b. $\ln 3.125$
$\ln(5\times5\div8) = \ln 5 + \ln 5 - \ln 8 = 1.1394$

c. $\ln 10$
$\ln(5\times 8^{\frac{1}{3}}) = \ln 5 + \frac{1}{3}\ln 8 = 2.3025$

5. **الحساب بدقة** حل كل معادلة أو متباينة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $5e^{2x} - 11 < 4$
$5e^{2x} > 15;\ \ln e^{2x} > \ln 3;\ x > \frac{(\ln 3)}{2} \approx 0.5493$

b. $-[\ln (x - 3)^{-2}] \le 8$
$2[\ln (x - 3)] \le 8;\ x - 3 \le e^4;\ x \le e^4 + 3 \approx 57.5982$

c. $-5^{x+1} + 25^x = -6$
$(5^x)^2 - 5(5^x) + 6 = 0;\ (5^x - 3)(5^x - 2) = 0;\ x \approx 0.6826$ أو $0.4307$

6. **بناء الفرضيات** تقول ليلى إن $e^{e^x} = x$. هل تتفق معها أم لا؟ برر إجابتك.
لا أتفق؛ $e^{e^x} = x$ يمكن كتابتها في صورة $e^x (\ln e) = \ln x$ والتي يمكن كتابتها في صورة $e^x = \ln x$. الدالتان $y = e^x$ و$y = \ln x$ دالتان معكوستان ليس لهما نقطة تقاطع لذلك لا توجد قيم لـ $x$ يكون فيها $e^{e^x} = x$.

7. **الحساب بدقة** افترض أنه تم إيداع AED 10,000 في حساب يتلقى مرابحة مركبة بصفة مستمرة. إذا كان المبلغ بعد 5 أعوام يساوي AED 13,438. فما نسبة المرابحة للحساب؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة في المئة.
5.9% تقريبًا؛ استخدم المعادلة $A = Pe^{rt}$، عوّض بـ 10,000 عن $P$ وبـ 5 عن $t$ وبـ 13,438 عن $A$ لتحصل على $13,438 = 10,000e^{5r}$، حل لإيجاد قيمة $r$: $r = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{13,438}{10,000}\right)$ or $r \approx 0.059$

8. **استخدام البنية** إذا تم استثمار AED 5000 في حساب يتلقى مرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 2% وفي الوقت نفسه يتم استثمار AED 3000 في حساب يتلقى مرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 4%. ففي أي وقت سيكون في كل من الحسابين المبلغ نفسه من المال؟
25.5 عامًا تقريبًا. سيحتوي الحسابان على المبلغ نفسه عند الحل $5000e^{0.02t} = 3000e^{0.04t}$. أعد كتابته في صورة $\frac{5000}{3000} = \frac{e^{0.04t}}{e^{0.02t}} \rightarrow \frac{5}{3} = e^{(0.04t - 0.02t)} \rightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right) = 0.02t$ so $t \approx 25.5$

9. **استخدام البنية** افترض أنه تم إيداع AED 1000 في حساب يتلقى مرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 1.5% ما المعادلة اللوغاريتمية للزمن $t$ بالسنوات الذي يستغرقه المبلغ للوصول إلى المبلغ $A$.
المعادلة الأسيّة للمبلغ في أي وقت هي $A = 1000e^{0.015t}$. أعد كتابة هذا باستخدام خصائص اللوغاريتمات للحصول على $t = \left(\frac{1}{0.015}\right)\ln\left(\frac{A}{1000}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## تدريب

في **الجزء 1**، يستخدم الطلاب فهمهم للتعبيرات الأسيَّة لإنشاء دالة وتمثيل بياني يمثلان نموذجًا لتصور من الحياة اليومية.

في **التمارين 5–2**، يجب على الطلاب استخدام خصائص اللوغاريتمات والأسس لإعادة كتابة المعادلات أو حلها.

يطلب **الجزء 6** من الطلاب التعليق على طريقة عمل الآخرين، باستخدام تعبير مُعاد كتابته كأسلوب داعم.

يتطلب **الجزءان 7** و**8** أن يفهم الطلاب بنية الدوال اللوغاريتمية والأسيَّة لإعادة كتابة المعادلات ولحل المسائل.

في **الجزء 9**، يعيد الطلاب كتابة معادلة أسيَّة بصيغة لوغاريتمية.

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

يجب على الطلاب استخدام **معايير الممارسات في الرياضيات 6 (مراعاة الدقة)** عند حل المعادلات اللوغاريتمية أو الأسيَّة. فهم يطبقون تعريف كل من الأسس واللوغاريتمات وخصائصها، ويجرون العمليات الحسابية بدرجة الدقة المشار إليها.

# 1.6 استخدام الدوال الأسيَّة واللوغاريتمية

## المعايير

**معايير الممارسات في الرياضيات:**
**1، 2، 3، 4، 5، 6**

## المهارات المطلوبة

- التمثيل البياني للدوال الأسيَّة
- حل المعادلات الأسيَّة واللوغاريتمية

## مثال 1

معايير الممارسات في الرياضيات 1

### نصيحة للتدريس

في **الجزء a**، سيستكشف الطلاب نموذجًا أسيًّا. من خلال إنشاء جدول للقيم، سيكون الطلاب قادرين على فهم الشكل الذي سيكون عليه التمثيل البياني وتحديد أن القيم تُكوِّن منحنى أسيًّا. بعد أن ينتهي الطلاب من التمثيل البياني للدالة يدويًّا، اطلب منهم استخدام حاسبة التمثيل البياني للتحقق من شكل التمثيل البياني.

1.6 استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

**الأهداف**

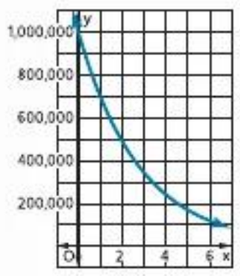
- استخدام الصيغ لحل المسائل
- تفسير تعبيرات الدوال الأسيّة واللوغاريتمية.
- تقييم اللوغاريثمات.

| النمو الأسّي | الاضمحلال الأسّي |
|---|---|
| يمكن نمذجة النمو الأسّي من خلال: $f(x) = ae^{kt}$ حيث يمثّل $a$ القيمة الابتدائية ويمثّل $t$ الزمن بالأعوام ويمثّل $k$ ثابتًا يمثّل معدل النمو الأسّي. | يمكن نمذجة الاضمحلال الأسّي من خلال: $f(x) = ae^{-kt}$ حيث يمثّل $a$ القيمة الابتدائية ويمثّل $t$ الزمن بالأعوام ويمثّل $k$ ثابتًا يمثّل معدل الاضمحلال الأسّي. |

**مثال 1** **نموذج الاضمحلال الأسّي**

**الاستكشاف** **تبدأ تجربة حيوية بـ 1,000,000 خلية ويموت 30% من الخلايا كل دقيقة. ما الوقت الذي ستستغرقه التجربة ليكون بها أقل من 1000 خلية؟**

**a. تفسير المسائل** أكمل جدول القيم ومثّل النقاط بيانيًّا. حدد نوع النموذج الرياضي الذي يَصف النقاط بصورة أفضل.




| $t$ (min) | يموت 30%، ومن ثمّ يبقى 70% أحياء | $(t, f(t))$ |
|---|---|---|
| 0 | المبلغ الابتدائي | (0, 1,000,000) |
| 1 | 700,000 = (0.70)(1,000,000) أحياء | (1, 700,000) |
| 2 | 490,000 = (0.70)(700,000) | (2, 490,000) |
| 3 | (0.70)(490,000) = 343,000 | (3, 343,000) |

يصف النموذج الأسي النقاط بأفضل شكل لأن عدد الخلايا يقل بالنسبة المئوية نفسها كل دقيقة.

**b. المشاركة بدقة** باستخدام الصيغة الأسيّة، عرّف ما يمثّله كل متغيّر لهذه التجربة الحيوية. أعد كتابة الصيغة الأسيّة باستخدام المعلومات المعطاة.

في النموذج $f(t) = ae^{kt}$، يمثل $f(t)$ عدد الخلايا المتبقية بعد $t$ دقيقة، ويمثل $a$ عدد الخلايا في بداية التجربة، ويمثل $t$ عدد الدقائق منذ بدء التجربة، ويمثل $k$ ثابت النمو أو الاضمحلال. $f(t) = 1{,}000{,}000e^{kt}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## خلفية عن الرياضيات

تستخدم العديد من مجالات العلوم المختلفة النماذج الأسيَّة واللوغاريتمية. في علم الحياة، تُستخدَم النماذج الأسيَّة لقياس الكائنات الدقيقة والفيروسات وحتى التعدادات السكانية البشرية. تُستخدم في الفيزياء للقياسات المتعلقة بالتفاعل المتسلسل النووي وانحلال المادة ونقل الحرارة، على سبيل المثال. تستخدم المجالات المالية هذه النماذج لحساب المرابحة المركبة. ويستخدمها خبراء تكنولوجيا الكمبيوتر لحساب قدرة المعالجة لأجهزة الكمبيوتر ونمو حركة البيانات عبر الإنترنت.

c. **التفكير بطريقة كميّة** جـد قيمة الثابت $k$. وحدّد ما إذا كان يشير إلى نمو أو اضمحلال. من جدول القيم. من المعلوم أنه بعد دقيقة واحدة، يوجد 700,000 خلية. استخدم هذه المعلومات للتعويض في الدالة ولإيجاد قيمة $k$ لأقرب 6 منازل عشرية. اكتب النموذج لهذه التجربة.

$k \approx -0.356675$؛ نظرًا لأن $k$ سالب، فهو اضمحلال أسي. عوّض بالقيم المعلومة في الصيغة: $\ln 0.7 = k$؛ $0.7 = e^k$؛ $700{,}000 = 1{,}000{,}000e^{k(1)}$؛ و$k \approx -0.356675$؛ نموذج الاضمحلال الأسي لهذه التجربة هو $f(t) = 1{,}000{,}000e^{-0.356675t}$

d. **الحساب بدقة** ما الوقت الذي ستستغرقه التجربة ليكون بها أقل من 1000 خلية؟

ستستغرق 19.367 دقيقة تقريبًا ليكون بها أقل من 1000 خلية. اكتب النموذج وحل لإيجاد قيمة $t$: $\ln 0.001 = -0.356675t$؛ $0.001 = e^{-0.356675t}$؛ $1000 = 1{,}000{,}000e^{-0.356675t}$؛

$t$ تساوي 19.367 تقريبًا.

**مثال 2** **نموذج النمو الأسّي**

**يَصِف نموذج النمو الأسي $f(t) = 250e^{0.01753t}$ التعداد السكاني في مدينة في الولايات المتحدة، بالآلاف بعد $t$ عامًا بعد 1992.**

a. **استخدام نموذج** باستخدام النموذج الأسي المعطى. أي متغير يمثل التعداد السكاني؟ كم كان التعداد السكاني للمدينة في عام 1992؟

$f(t)$ تمثّل الجماعة الأحيائية. 1992 هو وقت البدء، والعدد 250 يمثل الجماعة الأحيائية الابتدائية.

في 1992 كان عدد الجماعة الأحيائية 250,000.

b. **استخدام نموذج** بأي نسبة مئوية يزيد التعداد السكاني للمدينة كل عام في نموذج النمو المعطى؟

تبلغ النسبة المئوية للزيادة 1.768% تقريبًا كل عام. $f(1) = 250e^{0.01753(1)} \approx 250 \times 1.01768$؛ كنسبة مئوية، $1.01768 = 101.768\%$؛ إذًا النسبة المئوية للزيادة كل عام هي 1.768%.

c. **التفكير بطريقة كمية** كم كان التعداد السكاني للمدينة في 2003؟ متى سيصل التعداد السكاني للمدينة إلى 500,000؟

بلغ التعداد السكاني للمدينة 303,169 تقريبًا في عام 2003. $f(11) = 250e^{0.01753(11)} = 303.169155$.

في 2032، أي بعد 40 عامًا من 1992، سيصبح التعداد السكاني 500,000 تقريبًا. $500 = 250e^{0.01753t}$؛

$\frac{500}{250} = e^{0.01753t}$؛ $2 = e^{0.01753t}$؛ $\ln 2 = 0.01753t$؛ $t \approx 39.54062$

d. **المشاركة بدقة** جـد سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $f(t)$. بناءً على سلوك طرفي التمثيل البياني، هل تُعد $f(t)$ نموذجًا دقيقًا؟ اشرح استنتاجك.

السلوك الطرفي هو $f(t) \to 0$ حيث $t \to -\infty$ و$f(t) \to +\infty$ حيث $t \to +\infty$. هذا النموذج ليس دقيقًا للفترات الطويلة جدًا من الزمن. يشير النموذج إلى أن التعداد السكاني لن يتوقف عن النمو، ولكن من الواضح أن المدينة لا يمكنها استيعاب إلا عدد محدود من الأشخاص.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

في **معايير الممارسات في الرياضيات 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)** يتمكن الطلاب من شرح التطابق بين المعادلات والأوصاف اللفظية والجداول والتمثيلات البيانية، ثم يتحققون من إجاباتهم باستخدام طريقة مختلفة. في **المثال 1**، يكون الطلاب قادرين على استخدام المعلومات الواردة لتكوين جدول بالقيم والذي ينشئ منحنى أسيًّا عند تمثيل نقاطه. وبذلك يقومون بنمذجة علاقة بين الكميتين. ومن ثمَّ فإنهم يعبرون عن هذا النموذج جبريًّا من خلال إعادة كتابة الصيغة الأسيَّة باستخدام المعلومات المعطاة. يمكنهم تحديد كم سيساوي المعدل وكتابة نموذج أسيّ للمسألة. سيكون الطلاب قادرين على التحقق من دقة النموذج باستخدام جدول القيم.

في **الجزء b**، من المهم أن يكون الطلاب قادرين على تعريف المتغيرات في الصيغة الأسيَّة في سياق المسألة. أحل الطلاب إلى التعريفات المذكورة في مربع المفاهيم.

### الأسئلة الداعمة

- هل تتغير قيمة الدالة بالمقدار نفسه أو بالنسبة المئوية نفسها عند كل قيمة للزمن؟ **تتناقص الدالة بالنسبة المئوية نفسها، 30%.**
- ما قيمة $e^{kt}$ عند $t = 0$ وماذا يخبرك ذلك عما يمثّله $a$ في النموذج الأسّي؟ **$e^{k(0)} = e^0 = 1$ لأي قيمة من قيم $k$ إذًا $a$ هو قيمة $f(t)$ عند $t = 0$.**
- كيف تتحقق من إجابتك في **الجزء c**؟ **لتتحقق من أن $k$ يساوي $-0.356675$ عوّض به في الصيغة وأوجد قيمة أي قيمة من قيم $t$ الموجودة في الجدول. ينبغي أن تكون النتيجة $f(t)$.**
- كيف تتحقق من إجابتك في **الجزء d**؟ **عوّض بـ $t = 16.367$ في النموذج الأسي. ينبغي أن تكون النتيجة عددًا قريبًا جدًا من 1000.**

**مثال 2**

**معايير الممارسات في الرياضيات 4**

### نصيحة للتدريس

في **المثال 2**، سيستخدم الطلاب نموذجًا للنمو الأسي لتحديد تعداد السكان. من المهم بالنسبة إلى الطلاب في هذا الجزء فهم الوصف، "بالآلاف". في **الجزء a**، عندما يُسألون عن تعداد السكان، لا يكون 250 بل 250,000. ناقش أوجه الاختلاف بين معدلات التغير في **الجزء b** ومعدَّل التغير في **المثال 1**.

## الأسئلة الداعمة

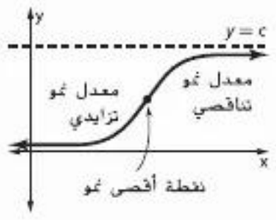
- ما دلالة كلمة "بالآلاف" في عبارة المسألة؟ كيف يؤثر هذا في إجابتك عن الجزء a؟ **تعطي الدالة *f(t)* عدد *الآلاف* من الأشخاص لذلك أحتاج إلى ضرب 250 في النموذج في 1000 للحصول على تعداد السكان الابتدائي.**
- كيف يمكنك الحصول على زيادة التعداد السكاني بعد مرور عام واستخدام هذا لإيجاد الزيادة في النسبة المئوية؟ **استخدم النموذج لإيجاد تعداد السكان بعد مرور عام واطرح تعداد السكان الابتدائي ثم اقسم على تعداد السكان الابتدائي لإيجاد الزيادة في صورة نسبة مئوية.**
- في **الجزء c**، تم التعويض بـ 500 في الدالة. لماذا لم يتم استخدام 500,000 عند التعويض؟ **تصف المسألة تعداد السكان بالآلاف، وذلك بخلاف الدالة.**
- كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت دالة ما تمثل نموًّا أو اضمحلالًا؟ **عندما يكون *k* موجبًا، تكون نموًّا. عندما يكون *k* سالبًا، تكون اضمحلالًا.**
- هل تُعد الإجابة، 2043، إجابة منطقية للسؤال عن متى ستصل المدينة إلى التعداد السكاني 500,000؟ **نعم؛ لا يمكن أن ينمو السكان بنسبة كبيرة غير متناهية. هناك قيود مثل الحيز المعيشي والغذاء وما إلى ذلك.**

**دالة النمو اللوجستي**

لنفترض أن $a$ و$b$ و$c$ ثوابت موجبة، حيث $b < 1$. تُمثّل دالة النمو اللوجستي من خلال $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$، حيث يمثّل $t$ الزمن.

يكون النمو الأسّي غير مفيد، مما يعني أنه سيزداد دون حد. يمثّل نموذج النمو اللوجستي نموًا ذا عامل محدد.

تحتوي التمثيلات البيانية لدوال النمو اللوجستي على الخصائص التالية:




- الخطان الأفقيان $y = 0$ و$y = c$ هما خطا التقارب.
- نقطة التقاطع مع المحور $y$ هي $\frac{c}{1 + a}$.
- يضم المجال كل الأعداد الحقيقية، والمدى هو $0 < y < c$.
- التمثيل البياني تزايدي من اليسار إلى اليمين.
- نقطة أقصى نمو هي $\left(\frac{\ln a}{b}, \frac{c}{2}\right)$

**مثال 3** **دالة النمو اللوجستي**

**تصف دالة النمو اللوجستي $f(t) = \frac{400}{1 + 9e^{-0.2t}}$ الجماعة الأحيائية لأنواع من الجراد تم إدخاله إلى موطن بيئي، حيث يمثّل $t$ الزمن بالأشهر.**

**a. المشاركة بدقة** ما خطوط التقارب للدالة؟ وما الذي تمثّله؟

$y = 0$، $y = 400$ هما خطا التقارب. لا يمكن أن يكون أقل من 0 أو أكثر من 400 جرادة.

**b. استخدام نموذج** جِد نقطة التقاطع مع المحور $y$ ونقطة أقصى نمو. وما الذي تمثّله كل منهما؟

نقطة التقاطع مع المحور $y$ هي (0, 40). يمثّل هذا عدد الجراد الذي أُدخل إلى الموطن البيئي. تقع نقطة أقصى نمو عند (9.98, 200). يزداد معدل الزيادة عند الجانب الأيسر من هذه النقطة، ويقل معدل الزيادة على الجانب الأيمن.

**c. استخدام نموذج** ارسم التمثيل البياني لهذه الدالة. مبيّن خطوط التقارب ونقاط التقاطع مع المحور $y$ ونقطة أقصى نمو، حيث يتزايد نمو ويتناقص نمو آخر.

$y = 0$، $y = 400$ هما خطا التقارب. لا يمكن أن يكون أقل من 0 أو أكثر من 400 جرادة.

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### إرشاد تقني

حاسبة تمثيل بياني تتميز بإمكانية إيجاد نموذج النمو اللوجستي. من خلال إدخال مجموعة البيانات، يمكن لحاسبة التمثيل البياني تمثيل النقاط. مع البيانات، باستخدام دالة STAT CALC، يمكن للحاسبة إيجاد $a$ و$b$ و$c$ لنموذج النمو اللوجستي. بمجرد إيجادها، اطلب من الحاسبة تمثيل الدالة بيانيًّا. يمكن للطلاب ملاحظة أنَّه يمكن إيجاد نموذج النمو اللوجستي وتحديد خصائص الدالة باستخدام مجموعة من البيانات.

d. **الحساب بدقة** كم عدد الجراد المتوقع في الموطن البيئي خلال 6 أشهر؟

118 جرادة تقريبًا في 6 أشهر؛ $f(6) = \frac{400}{1 + 9e^{-0.22(6)}} \approx 117.50$

**تمرين**

1. **استخدام الأدوات** بمجرد أن يموت كائن حي، يتحلل عنصر الكربون 14. جد ثابت الانحلال والنموذج الذي سيمثّل هذه البيانات. تحقق من إجابتك.

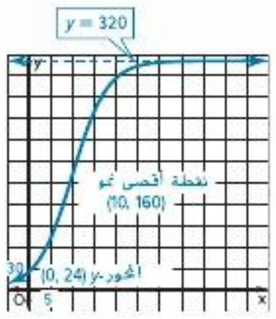
| $t$ (سنة) | $f(t)$ |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 1 | 999.876 |
| 2 | 999.752 |
| 3 | 999.628 |

استخدم النموذج الأسي: $k = -0.000124$; $f(t) = 1000e^{-0.000124t}$

$f(t) = ae^{kt}$; $999.628 = 1000e^{k(3)}$; $0.999628 = e^{3k}$; $\ln 0.999628 = \ln e^{3k}$; $\ln 0.999628 = 3k$; $k = -0.000124$

التحقق: $f(2) = 1{,}000e^{-0.000124(2)} = 999.752$

2. تصف دالة النمو اللوجستي $f(t) = \frac{320}{1 + 12.4e^{-2t}}$ الجماعة الأحيائية لأنواع من العناكب بعد $t$ شهرًا من إدخالهم في موطن بيئي جديد في حديقة الحيوان.




a. **استخدام نموذج** ارسم التمثيل البياني للدالة مع تمييز خطوط التقارب ونقطة التقاطع مع المحور $y$ ونقطة أقصى نمو.

خطا التقارب هما $y = 0$ و$y = 320$. نقطة التقاطع مع المحور $y$ هي (0, 24). توجد نقطة أقصى نمو عند (10, 160).

b. **استخدام نموذج** كم عدد العناكب التي تم إدخالها في الموطن البيئي في البداية، وكيف تعرف هذا؟

كان ثمة 24 عنكبوتًا في البداية تم إدخالها إلى الموطن البيئي.

تمثّل نقطة التقاطع مع المحور $y$ هذه النقطة.

c. **استخدام نموذج** اكتب معادلة لإيجاد عدد الأشهر $t$ التي تستغرقها الجماعة الأحيائية للعناكب لتصل إلى 200. استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلة بيانيًا.

مثّل بيانيًا $g(t) = 200$ و$h(t) = \frac{320}{1 + 12.4e^{-0.23t}}$ وجد قيمة $t$ لنقطة التقاطع. $\frac{320}{1 + 12.4e^{-0.23t}} = 200$.

$t \approx 12.1$. سيصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 200 بعد 12.1 شهرًا تقريبًا.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

### معايير الممارسات في الرياضيات 4 (استخدام نماذج الرياضيات)

تُستخدم هذه الممارسة في العديد من الأمثلة والتمارين في هذا الدرس. في المثال 1، يُطلب من الطلاب تحديد نوع النموذج الرياضي والذي يلائم السيناريو المعطى بشكل أفضل. ثم تحديد قيم المعلّمات المتطابقة مع سياق من الحياة اليومية ثم استخدام النموذج لحل مسألة. في **المثال 2**، يتم إعطاء النموذج للطلاب ويُطلب منهم شرح كيف يلائم النموذج السياق المُعطى. يُطلب من الطلاب بعد ذلك ترجمة النموذج المُعطى "$e^{kt}$" إلى النموذج الأسي "$(1 + r)^n$" لتحديد النسبة المئوية السنوية للزيادة في **المثال 2 الجزء b**. يتم تناول قيود النماذج الرياضية الأسيَّة البحتة في مناقشة النموذج اللوجستي.

## مثال 3

**معايير الممارسات في الرياضيات 4**

### نصيحة للتدريس

في **المثال 3**، سيلاحظ الطلاب ما يحدث لتمثيل بياني عند وجود قيود. تتيح هذه المسألة للطلاب معرفة ما يمثله كل جزء من الدالة في التمثيل البياني. ناقش، على سبيل المثال، سبب عدم إمكانية أن ينمو التعداد السكاني بشكل لانهائي نظرًا لوجود العديد من العوامل التي لا تسمح بهذه الإمكانية. اطلب من الطلاب إعطاء أمثلة للأسباب المحتملة وراء أنَّ الجراد لا يمكنه النمو بشكل لانهائي. يمكن أن تكون الأمثلة هي الحيز أو الغذاء

### الأسئلة الداعمة

- ماذا يحدث لقيمة $e^{-0.22t}$ عندما تزداد قيمة $t$؟ ماذا يحدث بعد ذلك لقيمة $f(t)$؟
  **$e^{-0.22t}$ تقترب من 0 إذًا $f(t)$ تقترب من 400. وفقًا للنموذج، فإن عدد الجماعة الأحيائية للجراد لن يتجاوز 400.**
- لماذا تمثّل نقطة التقاطع مع المحور $y$ الكمية الابتدائية؟ **عند نقطة التقاطع مع المحور $y$ $t = 0$. كان الوقت عند 0 عندما تم إدخال الجماعة الأحيائية، ومن ثمَّ يجب أن تتوافق $f(0)$ مع عدد الجراد الذي تم إدخاله.**
- قدِّر نقطة الزمن الذي يكون فيه عدد الجراد قريبًا من 400. **عند 40 شهرًا، يتوقع النموذج أنَّ عدد الجراد سيتجاوز 399.**

## أخطاء شائعة

في **المثال 1**، قد يخلط الطلاب بين 70% و30% باعتبارها النسبة المئوية للخلايا الباقية على قيد الحياة. سيضرب بعض الطلاب في 0.30 ولا يطرحون ذلك من الكمية الأصلية.

الخطأ الشائع هو عدم وجود بيانات كافية لمعرفة ما إذا كان التمثيل البياني أسيًّا. قد ينظر الطلاب فقط إلى نقطتين أو ثلاث نقاط ويستنتجون أن الدالة خطية أو ربما تكون تربيعية بدلًا من أسيَّة.

قد يواجه الطلاب مشكلة في إيجاد قيمة $k$ في المعادلة الأسيَّة. إنهم لا يفهمون خاصية التساوي للدوال اللوغاريتمية. اطلب من الطلاب التدرُّب على حل المعادلات اللوغاريتمية والوقت الذي يستخدمون فيه الخصائص.

عندما يعمل الطلاب مع تقدير الزمن بالأعوام، يضع بعض الطلاب العام بدلًا من عدد الأعوام التي مرت منذ عام البداية. في **المثال 2 الجزء c**، يجب على الطلاب طرح 1992 من 2003 لتحديد قيمة $t$ التي ستحلّ المسألة.

عند الحل لإيجاد نقطة أقصى نمو لنموذج النمو اللوجستي، قد يقسم الطلاب $\ln a$ على $-b$. تنص الصيغة على قسمة $\ln a$ على قيمة $b$.

3. **استخدام نموذج** تحدث الإصابة بالكوليرا، مرض معوي، نتيجة لبكتيريا الكوليرا. تحدث العدوى في الأصل عن طريق شرب مياه ملوثة أو تناول طعام ملوث. تتضاعف البكتيريا بمعدل أسي من خلال انقسام الخلايا وفقًا للنموذج الذي توضحه الدالة $f(t) = Ne^{1.386t}$. حيث يمثّل $f(t)$ عدد البكتيريا الموجودة بعد $t$ ساعة ويمثّل $N$ عدد البكتيريا الموجودة عندما $t = 0$. نموذجيًا، يجب أن يبتلع الشخص حوالي 100 مليون بكتيريا لتحدث الإصابة بالكوليرا في الأشخاص البالغين الأصحاء. املأ الجدول

| $t$ (ساعة) | $f(t)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 2 | 15.99 |
| 4 | 255.7 |
| 6 | 4,088.8 |
| 8 | 65,382 |
| 10 | 1,045,493.94 |

بفضل الممارسات المتقدمة شبه العالمية لمعالجة المياه والصرف الصحي، لم تعد تُشكِّل الكوليرا مصدر قلق رئيسًا على الصحة. وفقًا للبيانات، هل هذا مرض سريع التضاعف؟ لماذا تعتقد أنه من المهم فهم مدى سرعة أو بطء التضاعف لمرض ما؟

نعم، إنه تضاعف سريع: في 10 ساعات فقط كان ثمة ما يزيد على مليون بكتيريا. من المهم معرفة المعدل الذي تنمو به البكتيريا أو الفيروسات لتكون قادرًا على علاجها قبل أن تتمكن من الانتشار.

4. على مقياس ريختر، يُقاس مقدار القوة $R$ لزلزال ما شدته $I$ بالعلاقة $R = \log \frac{I}{I_0}$، حيث يمثل $I_0 = 1$ الحد الأدنى للشدة المستخدمة للمقارنة. جد الشدّات لكل وحدة مساحة للزلزالين التاليين. قارن بين الشدّات.

a. **التخمين** زلزال 1960 في تشيلي حيث $R = 9.5$

b. **التخمين** زلزال 1923 في اليابان حيث $R = 7.9$

بالنسبة إلى الزلزال في تشيلي، $9.5 = \log \frac{I}{1} \Rightarrow I = 10^{9.5} \approx 3.16 \times 10^9$

بالنسبة إلى الزلزال في اليابان، $7.9 = \log \frac{I}{1} \Rightarrow I = 10^{7.9} \approx 7.94 \times 10^7$

الفرق في مقياس ريختر بين الزلزالين هو 1.6، ولكن زلزال تشيلي كان أقوى بمقدار $10^{1.6}$ أو حوالي 40 مرة من زلزال اليابان.

c. **التفكير بطريقة كميّة** يوجد في المتر الواحد 1,000,000 ميكرون، أو أن مترًا واحدًا = $10^6$ ميكرون. إذا كان الحد الأدنى للشدة المستخدمة للمقارنة هو ميكرون واحد، فجد مقدار القوة $R$ لزلزال شدته مترين.

متران = 2,000,000 ميكرون، إذًا مدى قوة الزلزال هو $R = \log(2{,}000{,}000) \approx 6.3$.

d. **التفكير بطريقة كميّة** إذا كانت شدة زلزال ما تساوي عشرة أضعاف شدة زلزال آخر، فجد الفرق بين مقداري قوتيهما على مقياس ريختر.

لنفترض أن الزلزال $A$ شدته $I_A$ والزلزال $B$ شدته $I_B = 10I_A$. إذًا مقدار قوة الزلزال $B$ هو $R_B = \log\left(\frac{I_B}{I_0}\right) = \log\left(\frac{10I_A}{I_0}\right) = \log(10) + \log\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 1 + R_A$.

والفرق بينهما مقداره 1 على مقياس ريختر.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## أخطاء شائعة

من الأخطاء الشائعة الأخرى الاعتقاد أن نقطة أقصى نمو في نموذج النمو اللوجستي تحدث عند أعلى نقطة في المنحنى. في الواقع، تتطابق نقطة أقصى نمو مع أقصى ميل. على سبيل المثال، تحدد نقطة أقصى نمو مكان أكبر نتاج يمكن الحصول عليه من مخزون نوع معين. يهدف المفهوم إلى الحفاظ على حجم الجماعة الأحيائية عند نقطة أقصى معدل نمو عن طريق حصاد الأفراد التي تضاف إلى الجماعة الأحيائية بشكل طبيعي، ما يتيح للجماعة الأحيائية الاستمرار في الإنتاج بشكل لانهائي.

5. تصف دالة النمو اللوجستي $g(t) = \frac{16000}{1 + 79e^{-0.57t}}$ الجماعة الأحيائية للفئران بعد $t$ أشهر من إدخالها في موطن بيئي جديد.

a. **المشاركة بدقة** ما خطوط التقارب للدالة؟ وما الذي تمثّله؟

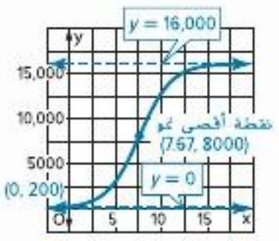
**$y = 0$ و $y = 16{,}000$. هما خطا التقارب. لا يمكن أن يكون أقل من 0 أو أكثر من 16,000 فأر.**

b. **استخدام نموذج** جِد نقطة التقاطع مع المحور $y$ ونقطة أقصى نمو. وما الذي تمثّله كل منهما؟

**نقطة التقاطع مع المحور $y$ هي (0, 200). يمثّل هذا عدد الفئران التي تم إدخالها في الموطن البيئي.**

**تقع نقطة أقصى نمو عند (7.67, 8000). بالنسبة إلى $x < 7.67$، يزداد معدل التغير. بالنسبة إلى $x > 7.67$، يقل معدل التغير.**

c. **استخدام نموذج** ارسم التمثيل البياني لهذه الدالة. مبّز خطوط التقارب ونقاط التقاطع مع المحور $y$ ونقطة أقصى نمو.




d. **استخدام نموذج** كم كان عدد الجماعة الأحيائية للفئران بعد 10 أشهر من إدخالها؟ استخدم التمثيل البياني لتقدير الوقت الذي ستصل فيه الجماعة الأحيائية للفئران إلى 5000.

**كان عدد الجماعة الأحيائية 12,655 بعد عشرة أشهر من إدخالها؛ $g(10) = \frac{16{,}000}{1 + 79e^{-0.57(10)}} \approx 12{,}655$.**

**سيصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 5000 تقريبًا بعد 6 أشهر من إدخالها بناءً على التمثيل البياني.**

6. **التفكير بطريقة كميّة** يمكن نمذجة جماعة أحيائية من الطيور باستخدام دالة النمو اللوجستي $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$ حيث يمثّل $t$ الزمن بالأعوام.

a. يبلغ عدد الجماعة الأحيائية الابتدائي للطيور 20 وتقع النقطة التي تكون فيها الجماعة الأحيائية عند أقصى نمو عند 5 أعوام عندما يبلغ عدد الجماعة الأحيائية 1000. جِد الثوابت $a$ و$b$ و$c$ واكتب دالة النمو اللوجستي $f(t)$.

**نقطة أقصى نمو هي $\frac{c}{2} = 1000$ so $\left(\frac{\ln a}{b}, \frac{c}{2}\right) = (5, 1000)$ أو $c = 2000$. تمثّل نقطة التقاطع مع المحور $y$ الجماعة الأحيائية الابتدائية لذلك $\frac{2000}{1 + a} = 20$ أو $\frac{c}{1 + a} = 20$. هذا يعني أن $a = 99$. من نقطة أقصى نمو $\frac{\ln 99}{b} = 5$، إذًا $b = \frac{\ln 99}{5} \approx 0.919$. $\frac{\ln a}{b} = 5$، تتم نمذجة الجماعة الأحيائية من خلال دالة النمو اللوجيستي $f(t) = \frac{2000}{1 + 99e^{-0.919t}}$**

b. بمرور الزمن، ما العدد الذي ستصل إليه الجماعة الأحيائية للطيور؟ اشرح استنتاجك.

**2000؛ لأن $c = 2000$، يوجد خط التقارب $y = 2000$ على التمثيل البياني للدالة $f(t)$، مما يعني أن عدد الجماعة الأحيائية سيقترب من 2,000.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## تدريب

في **الجزء 1**، سيفسر الطلاب دالة معطاة في شكل جدول لتحديد الميزات الأساسية لصيغة الدالة. سيعمل الطلاب على إيجاد حل أيضًا من خلال إعادة كتابة معادلة ما بصيغة لوغاريتمية.

في **الجزء 2**، سيكتب الطلاب معادلة ما ويمثلون دالة النمو اللوجستي بيانيًّا ويحددون الميزات الأساسية من التمثيل البياني.

يطلب **الجزء 3** من الطلاب تفسير جدول معين في السياق.

في **الجزء 4**، يجب على الطلاب إيجاد قيمة تعبيرات من خلال إعادة كتابتها.

يتطلب **الجزء 5** أن يمثّل الطلاب دالة ما بيانيًّا وأن يفسروا ميزات التمثيل البياني في السياق.

في **الجزء 6**، يجب على الطلاب كتابة معادلات ذات متغير واحد لإيجاد دالة النمو اللوجستي.

## التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

في **معايير الممارسات في الرياضيات 5 (استخدام الأدوات الملائمة بطريقة استراتيجية)** يفكر الطلاب في الأدوات المتاحة عند حل مسألة رياضية. عند إنشاء نماذج رياضية، فإنهم يعلمون أن التكنولوجيا يمكن أن تمكنهم من تصور النتائج ومقارنة التوقعات باستخدام البيانات. في هذا الدرس، يمكن للطلاب استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدوال بيانيًّا وإنشاء جداول للقيم وتحديد خصائص التمثيلات البيانية. يمكنهم مقارنة التمثيلات البيانية التي أنشؤوها وتحديد أي أخطاء من المحتمل أن يكونوا قد وقعوا فيها أو أي أخطاء في الحسابات. بمساعدة هذه الأدوات، يمكنهم إجراء تخمين علمي في ما يتعلق بناتج الدوال.

# 1 مهمة تقويم الأداء

## نمذجة نمو البكتيريا

سيقارن الطلاب نماذج النمو الأسّي ويمثلونها بيانيًا ويحددون أفضل معلومات إضافية مقدمة.

### المعايير

**معايير الممارسات في الرياضيات:** تعزز مهمة تقويم الأداء الواردة في الوحدة 1 كلًا من **معايير الممارسات في الرياضيات 4** و**م ر 8.**

### نقطة الانطلاق

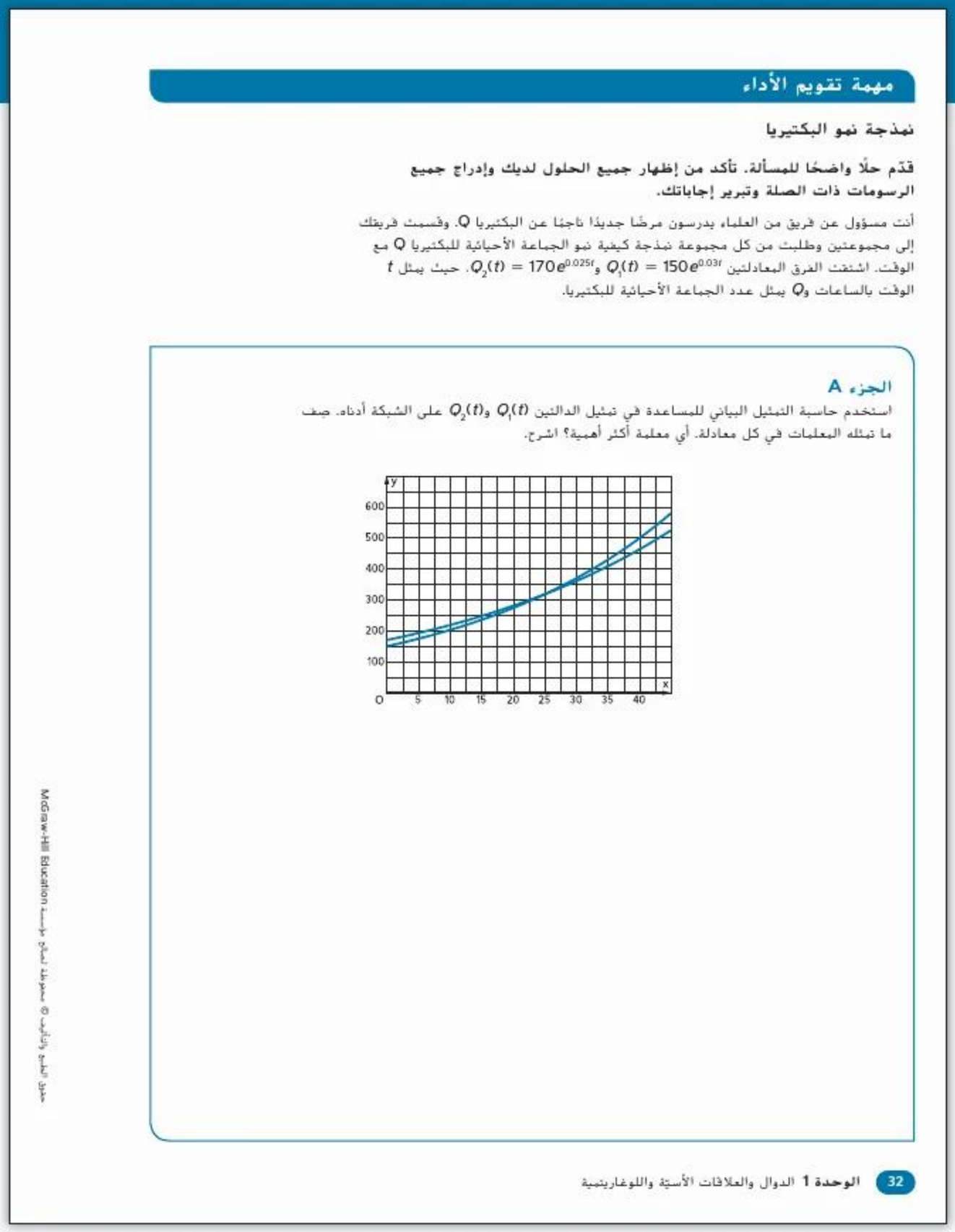
قد يحتاج الطلاب إلى تذكيرهم بالصيغة العامة لدالة أسيَّة. قد تكون المعلومات التالية مفيدة للطلاب للبدء:

- ماذا تمثل المعلمة $a$ في الدالة الأسيَّة $f(x) = ab^{kx}$؟ **القيمة الابتدائية للدالة أو القيمة $f(0)$**
- ماذا تمثل المعلمة $k$ في الدالة الأسيَّة $f(x) = ab^{kx}$؟ **معدل النمو**

بينما يكمل الطلاب **الجزء A**، تحقق من أن تمثيلاتهم البيانية دقيقة بما يكفي بحيث تكون هناك نقطة تقاطع قريبة (25, 300) وتكون أيضًا أفضل تقدير.

### التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

تتناسب مهمة تقويم الأداء هذه مع **معايير الممارسات في الرياضيات 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. يعد نمو البكتيريا موضوعًا شائعًا في دراسة الدوال الأسيَّة. من خلال وضع افتراضات معينة، يتمكن الطلاب من تبسيط موقف معقد، ويتجلى في هذه الحالة في تمثيل النمو بصيغة بسيطة $P = P_0e^{rt}$. في الدورات الدراسية اللاحقة، سيرى الطلاب أنه يلزم أحيانًا التمتع بمزيد من التحرر لتبسيط المسائل في المواقف الأكثر تعقيدًا، وفي النهاية، سيستخدمون التقديرات التقريبية العددية لمسائل معينة.



مهمة تقويم الأداء

**نمذجة نمو البكتيريا**

**قدّم حلًا واضحًا للمسألة. تأكد من إظهار جميع الحلول لديك وإدراج جميع الرسومات ذات الصلة وتبرير إجاباتك.**

أنت مسؤول عن فريق من العلماء يدرسون مرضًا جديدًا ناجمًا عن البكتيريا Q. وقسمت فريقك إلى مجموعتين وطلبت من كل مجموعة نمذجة كيفية نمو الجماعة الأحيائية للبكتيريا Q مع الوقت. اشتقت الفرق المعادلتين $Q_1(t) = 150e^{0.03t}$ و$Q_2(t) = 170e^{0.025t}$. حيث يمثل $t$ الوقت بالساعات و$Q$ يمثل عدد الجماعة الأحيائية للبكتيريا.

**الجزء A**

استخدم حاسبة التمثيل البياني للمساعدة في تمثيل الدالتين $Q_1(t)$ و$Q_2(t)$ على الشبكة أدناه. صف ما تمثله المعلمات في كل معادلة. أي معلمة أكثر أهمية؟ اشرح.




حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

**الجزء B**

عند أخذ هذين النموذجين بعين الاعتبار، في أي وقت تتنبأ الفرق بأن أعدادها مماثلة؟ اذكر ذلك العدد؟ جـد الإجابة الدقيقة والتقدير التقريبي.

**الجزء C**

بدأت في إجراء دراستك الخاصة بعدد يصل إلى 200 من البكتيريا واكتشفت أنه توجد 257 من البكتيريا خلال 10 ساعات. أي من نموذجي الفرق، إذا كان أي منهما، تدعمه هذه النتيجة؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



معايير الممارسات في الرياضيات 8

## نصيحة للتدريس

يقدم **الجزءان B وC** فرصًا للتأكيد على **معايير الممارسات في الرياضيات 8 (البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)**. يطلب **الجزء A** من الطلاب تكوين روابط بين معلمات المعادلات الأسيَّة ومعانيها الفيزيائية، كذلك تحديد أي معلمة ترتبط أكثر بدراسة البكتيريا. يطلب **الجزء B** منهم الاعتماد على هذه الروابط. يطلب **الجزء C** منهم استخدام هذه الروابط للقيام بتحديد نهائي بين النموذجين من خلال عقد مقارنة بينهما.

## أخطاء شائعة

بالنسبة إلى **الجزء A** ينبغي للطلاب ضبط النافذة على حاسبات التمثيل البياني الخاصة بهم لتطابق الشبكة الموضحة. وإلا فقد تكون التمثيلات البيانية غير دقيقة.

إذا وجد الطلاب صعوبة في إيجاد الحل الدقيق في **الجزء B**، ففكر في مراجعة خواص الأسس، وخاصة أن $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

## إرشادات تسجيل الدرجات

| الجزء | أقصى عدد من النقاط | إجابة الدرجة الكاملة |
|---|---|---|
| A | 2 | راجع *دليل الطالب التفاعلي* للاطلاع على التمثيل البياني. 150 و170 هما العددان الابتدائيان للجماعة الأحيائية للبكتيريا و0.03 و0.025 هما معدلا النمو المستمر للبكتيريا. ويمثل معدل النمو أهمية أكثر، لأنه مستقل عن العدد الابتدائي. |
| B | 3 | إذا كان $\frac{e^{0.03t}}{e^{0.025t}} = e^{0.005t} = \frac{17}{15}$ و$150e^{0.03t} = 170e^{0.025t}$، $t = \frac{\ln\frac{17}{15}}{0.005} \approx 25.03$. فإن عدد الجماعة الأحيائية في هذا الوقت سيساوي حوالي 318 من البكتيريا. يتوافق ذلك مع نقطة التقاطع في التمثيلات البيانية. |
| C | 3 | $257 = 200e^{10k}; k = \frac{\ln\frac{257}{200}}{10} \approx 0.025075\ldots \approx 0.025$. يدعم ذلك النموذج $Q_2(t)$. |
| الإجمالي | 8 | |

# 1 مهمة تقويم الأداء

## قياس الهزات الأرضية باستخدام اللوغاريتمات

سيستخدم الطلاب اللوغاريتمات لاستكشاف خواص الزلازل.

### المعايير

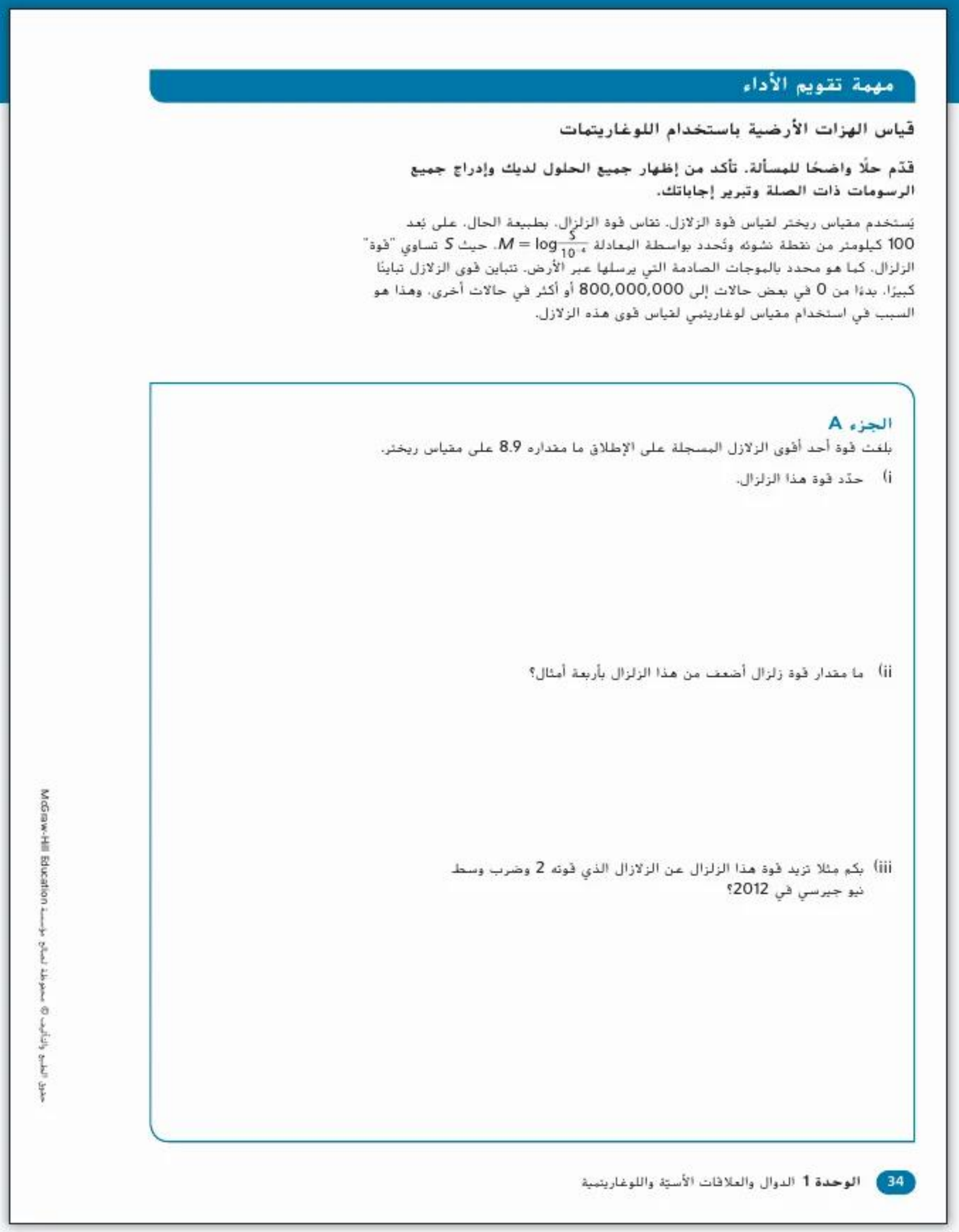
**معايير الممارسات في الرياضيات:** تعزز مهمة تقويم الأداء الواردة في الوحدة 1 كلًا من **معايير الممارسات في الرياضيات 5** و**معايير الممارسات في الرياضيات 7**.

### نقطة الانطلاق

قد لا يشعر الطلاب بالراحة عند التعامل مع قياس "قوة" الزلازل، حيث لا توجد أي وحدات. وقد تكون المعلومات التالية مفيدة.

- تقاس قوة الزلزال حسب سعة الموجات الصادمة التي يرسلها عبر الأرض. وتكون عادة عشوائية وتقاس مقارنة بالنقطة المرجعية $10^{-4}$. إذًا، فهي لا تتضمن وحدات.
- كيف يمكن إعادة صياغة معادلة لوغاريتمية لتوضيح أحد المتغيرات في فرضية اللوغاريتم؟
  **سيلغي مقابل اللوغاريتم أو $10^x$، في هذه الحالة، العملية الحسابية باستخدام اللوغاريتمات.**
- ذكّر الطلاب أن مقارنات القوة مثل "أضعف بمقدار أربعة أضعاف" ستجرى *قبل* اللوغاريتم.

في **الجزء B**، شجّع الطلاب على كتابة معادلة كاملة وتحويلها إلى أبسط صورة. وينبغي أن يخفف ذلك من أي مخاوف بشأن عدم توفر معلومات كافية.



مهمة تقويم الأداء

**قياس الهزات الأرضية باستخدام اللوغاريتمات**

**قدّم حلًا واضحًا للمسألة. تأكد من إظهار جميع الحلول لديك وإدراج جميع الرسومات ذات الصلة وتبرير إجاباتك.**

يَستخدم مقياس ريختر لقياس قوة الزلازل. تقاس قوة الزلزال، بطبيعة الحال، على بُعد 100 كيلومتر من نقطة نشوئه وتُحدد بواسطة المعادلة $M = \log\frac{S}{10^{-4}}$، حيث $S$ تساوي "قوة" الزلزال. كما هو محدد بالموجات الصادمة التي يرسلها عبر الأرض. تتباين قوى الزلازل تباينًا كبيرًا، بدءًا من 0 في بعض حالات إلى 800,000,000 أو أكثر في حالات أخرى. وهذا هو السبب في استخدام مقياس لوغاريتمي لقياس قوى هذه الزلازل.

**الجزء A**

بلغت قوة أحد أقوى الزلازل المسجلة على الإطلاق ما مقداره 8.9 على مقياس ريختر.

i) حدّد قوة هذا الزلزال.

ii) ما مقدار قوة زلزال أضعف من هذا الزلزال بأربعة أمثال؟

iii) بكم مثلا تزيد قوة هذا الزلزال عن الزلازال الذي قوته 2 وضرب وسط نيو جيرسي في 2012؟

محقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

تتناسب مهمة تقويم الأداء مع **معايير الممارسات في الرياضيات 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. تتضمن المهمة أمثلة عديدة حول حاجة الطلاب إلى القيام بالإجراء نفسه (حل معادلة لوغاريتمية لأحد المتغيرات في فرضية اللوغاريتم). سيجيد الطلاب إعداد عملية مخصصة لهذا الإجراء. وينص المعيار على أن "الطلاب البارعين في مادة الرياضيات يدققون لتمييز نمط أو بنية". ثمة أمران أساسيان لنجاح الطلاب هما: فهم السبب وراء كل خطوة وإمكانية تطبيقها بفعالية، في سياق المهمة وخارجه.

**الجزء B**

افترض وجود زلزال معين مقدار قوته مِثلي قوة زلزال آخر. حدّد وجه الاختلاف بين هذين الزلزالين من حيث مقدار القوة.

**الجزء C**

تمثل أكبر انفجار صنعته البشرية في اختبار تفجير قنبلة *القيصر الهيدروجينية*. كانت قوة الانفجار تعادل ما يقرب من 50 مليون طن (45,359,237 طنًا مترِيًّا) من مادة TNT. كان الانفجار يعادل في شدته زلزال قوته 8.5. كان زلزال فالديفيا الذي حدث في عام 1960 في شيلي أقوى زلزال مسجل على الإطلاق حيث بلغت قوته 9.5. كم ضعفًا تزيد قوة هذا الزلزال عن قنبلة *القيصر*؟ بكم تعادل قوة الزلزال من مادة TNT؟ اكتب الحل هنا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



معايير الممارسات في الرياضيات 5

## نصيحة للتدريس

عند التعامل مع الجبر باستخدام اللوغاريتمات، يُنصح بوجه عام باستخدام آلة حاسبة. غير أن الآلات الحاسبة بها عيوب وعرضة لأخطاء المستخدمين وذلك من بين أمور أخرى. والأهم من ذلك، أن الجبر اللوغاريتمي يتضمن دائمًا الاقتطاع العشري أو التقريب. وسيحتاج الطلاب إلى التقريب بعناية وبصورة غير متكررة أثناء القيام بعملياتهم الحسابية لتجنب تحويل قيم الاقتطاع الصغيرة إلى أخطاء كبيرة. تنص **معايير الممارسات في الرياضيات 5** على أن الطلاب "يكتشفون الأخطاء المحتملة بطريقة استراتيجية باستخدام التقدير وغيره من المعرفة الرياضية".

## أخطاء شائعة

ستكون أكثر الأخطاء شيوعًا هي الأخطاء الجبرية عند التعامل مع المعادلات اللوغاريتمية.

فكّر في مراجعة خواص اللوغاريتمات قبل تعيين المهمة.

## إرشادات تسجيل الدرجات

| الجزء | أقصى عدد من النقاط | إجابة الدرجة الكاملة |
|---|---|---|
| A | 2 | i) $S = 10^{8.9}(10^{-4})$ أو حوالي 79,433<br>ii) $m = \log\left(\frac{19,858.25}{10^{-4}}\right)$ أو حوالي 8.3<br>iii) $S = 10^{2}(10^{-4}) = 0.01$; $79,433 \div 0.01 \approx 7,943,300$ |
| B | 3 | $\log\frac{2S}{10^{-4}} - \log\frac{S}{10^{-4}} = \log\frac{2S}{S} = \log 2 = 0.301$ |
| C | 3 | مقاييس القوى هي $10^{4.5}$ و$10^{1}$ = $\frac{10^{5.5}}{10^{4.5}}$ x$10^{5.5}$. إذًا كانت قوة الزلزال أقوى 10 أضعاف. قد يلاحظ الطلاب أن تغير 1 على مقياس لوغاريتمي يشير إلى تغير يتضمن زيادة مقدارها 1 (أو عاملًا مقداره 10). ومن ثَمّ، تعادل قوة زلزال فالديفيا 500 مليون طن تقريبًا (453,592,370 طنًا مترِيًّا) من مادة TNT. |
| الإجمالي | 8 | |

# تدريب على الاختبار المعياري

## تشخيص الأخطاء

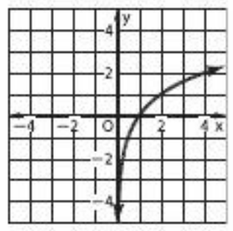
قد يجد الطلاب الذين يحلون المعادلة الثانية في **الفقرة 3** بشكل غير صحيح اللوغاريتم 8.9 مقسومًا على اللوغاريتم 6.2 بدلًا من اللوغاريتم 8.9 مقسومًا على اللوغاريتم 6.2. راجع عملية حل هذه الأنواع من المعادلات مع الطلاب.

قد يخطئ الطلاب الذين يجيبون عن **الفقرة 6** بشكل غير صحيح في تحليل العوامل. ذكّر الطلاب بأنهم يحاولون عزل $x$. إذا كان هناك أكثر من حد $x$، فإنهم سيحتاجون إلى تجميع هذه الحدود التي قد تتضمن التحليل باستبعاد المعامل $x$.

قد لا يفهم الطلاب الذين يجيبون عن **الفقرة 7** بشكل غير صحيح كيفية استخدام المعلومات المتوفرة لإعداد معادلة لحلها. وضح أن الزوج المرتّب يعطيهم القيمتين $x$ و$y$ اللتَين يمكن للطلاب التعويض عنهما في الدالة، مع ترك $k$ فقط كقيمة مجهولة. ثم يمكنهم حل هذه المعادلة لإيجاد قيمة $k$.

تدريب على الاختبار المعياري

1. ما الدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



$f(x) = \log x$ $f(x) = \log_4 x$

$f(x) = \log_2 x$ $f(x) = \sqrt{x}$

2. جِد قيم اللوغاريتمات التالية.

$\log_{0.5} 0.125 =$ 3

$\log_7(\frac{1}{49}) =$ −2

3. جِد قيمة $x$. عند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من الألف.

$81^{x-1} = 27^{x+2}$ $x = 10$

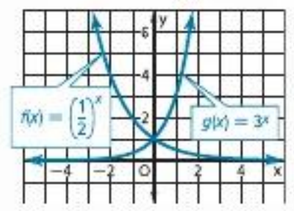
$6.2^{x-3} = 8.9$ $x \approx 4.198$

$(\frac{1}{25})^{x} = 125^{x+1}$ $x = -0.6$

4. توضح الدالة $dB = 10\log(\frac{I}{I_0})$ جهارة الصوت بالديسيبل، حيث $I$ يمثل شدة الصوت و$I_0$ يمثل شدة عتبة الصوت. بلغ مقدار جهارة صوت مواء القطة 72 ديسيبل. بكم ضعفًا تزيد شدة صوت مواء القطة عن عتبة الصوت؟

حوالي 15,848,932 ضعف شدة الصوت

5. مثّل بيانيًا $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ و$g(x) = 3^x$.




ما نقطة تقاطع هاتين الدالتين؟

(0, 1)

6. جِد قيمة $x$. اذكر قيمة دقيقة وقيمة مقربة إلى أقرب جزء من المئة.

$\ln 2x - \ln(x - 3) = 1$

$x = \frac{3e}{e-2}$ $x \approx 11.35$

7. يمر التمثيل البياني $y = 8e^{kx}$ عبر النقطة (4, 20). ما القيمة الدقيقة لـ $k$؟

$k = \frac{\ln 2.5}{4}$

8. اكتب تعبيرًا مكافئًا لـ $\ln \frac{8}{9}$ بدلالة $\ln 2$ و$\ln 3$.

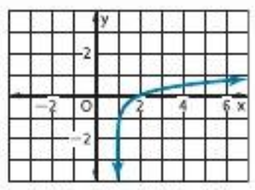
3 ln 2 − 2 ln 3

9. افترض أنّ $f(x) = 3\log_4(x - 2)$. ما الدالة التي ينتج عنها إزاحة $f(x)$ وحدتين إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل؟

$d(x) = 3\log_4(x - 3) + 2$ $h(x) = 3\log_4(x - 4) - 1$

$r(x) = 3\log_4(x - 1) - 2$ $g(x) = 3\log_4(x) - 1$

10. مثّل بيانيًا $f(x) = \log(x - 1)$ وحدد خط التقارب الرأسي.



يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 1$.

11. ما الدالة التي يمكن استخدامها لنمذجة البيانات الموضحة في الجدول؟

| الزمن | المقدار |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 8 |
| 2 | 16 |
| 3 | 32 |

$A(t) = 2(4)^t$

$A(t) = 4\log_2(t)$

$A(t) = 4(t + 1)^2$

$A(t) = 4(2)^t$

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## استراتيجية حل الاختبار

قد يصاب الطلاب بالدهشة من الإجابة التي يحسبونها في **الفقرة 4.** ذكّر الطلاب بأنهم يتعين عليهم دائمًا أن يسألوا أنفسهم هل الإجابة تبدو منطقية، وإذا لم تكن منطقية، فيتعين عليهم أن يرجعوا ويعيدوا التحقق من عملهم. في هذه الحالة، يمكن شرح الإجابة من خلال الحقيقة التي مفادها أن لوغاريتم عدد كبير يساوي عددًا صغيرًا، إذًا الإجابة منطقية في الواقع.

12. اذكر السلوك الطرفي للتمثيل البياني لـ $g(x) = -5(0.5)^x$.

السلوك الطرفي للتمثيل البياني هو $g(x) \to$ [0] حيث $x \to -\infty$ و$g(x) \to$ [$\infty$] حيث $x \to \infty$.

13. فكّر في كل معادلة أو متباينة في الجدول حيث $a > 0$ و$b > 0$ وحدد إن كانت صوابًا أم خطأ. حدد صوابًا أم خطأ في كل صف.

| المعادلة أو المتباينة | صواب | خطأ |
|---|---|---|
| $\log_a a = \frac{1}{\log_a b}$ | ✓ | |
| إذا كانت $a > b$ و$x \neq 0$، فإن $\log_a x > \log_b x$. | | ✓ |
| إذا كانت $x < 0$، فإن $\log_b x < 1$. | ✓ | |

14. يوضح الجدول تعداد سكان مدينة ما بعد دمجها.

| الأعوام منذ الدمج | 2 | 5 | 8 | 10 | 15 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| تعداد السكان | 6329 | 7103 | 7289 | 7412 | 7609 | 7715 |

a. هل النموذج الأسي أم اللوغاريتمي يناسب البيانات بشكل أفضل؟ اشرح استنتاجك.

اللوغاريتمي؛ حيث يتضمن النموذج اللوغاريتمي قيمة $r^2$ الأقرب إلى 1.

b. اكتب معادلة للنموذج الأفضل؟

$y = 5989.27 + 612.34 \ln x$

c. استخدم نموذجك للتنبؤ بالتغير في تعداد السكان ما بين الأعوام 20 و25 عامًا بعد الدمج.

سيزيد تعداد السكان بنحو 137 نسمة.

15. عمّر النصف لعنصر الكادميوم 113 هو 14.1 عامًا.

a. ما ثابت الانحلال لعنصر الكادميوم 113؟ اكتب الحل هنا.

$k \approx 0.04916$؛ $\frac{1}{2} = 1e^{-14.1k}$، $-\ln 2 = -14.1k$، $k \approx 0.04916$

b. كم سيستغرق من الوقت كي تتحلل عينة مقدارها 16 جرامًا من عنصر الكادميوم 113 إلى 5 جرامات؟ اكتب الحل هنا.

حوالي 23.7 عامًا: $5 = 16e^{-0.04916t}$، $0.3125 = e^{-0.04916t}$، $\ln 0.3125 = -0.04916t$

$t \approx 23.7$

c. اشرح سبب اعتقادك بأن إجابتك عن **الجزء b** منطقية.

تتحلل العينة من 16 إلى 8 g في حوالي 14 عامًا. تزيد الـ 5 عن نصف الـ 8. إذًا تستغرق العينة أقل من 14 عامًا كي تتحلل إلى 5 جرامات. 23.7 أقل قليلًا من 14 + 14.

16. يستثمر مبلغ $P$ من المال في حساب بنسبة المرابحة السنوية $r$ المركبة بصفة مستمرة ونسبة المرابحة المستحقة.

a. اكتب دالة لمبلغ $A$ من المال الموجود في الحساب بعد مرور $t$ من السنوات إذا كان $P = \text{AED } 10{,}000$ و$r = 2\%$.

$A(t) = 10{,}000e^{0.02t}$

b. اكتب معادلة للوقت الذي سيستغرقه $t$ كي يصل مبلغ 10,000 AED المستثمر في الجزء a إلى AED 25,000 وقم بحلها.

حوالي 45.8 عامًا: $25{,}000 = 10{,}000e^{0.02t}$، $2.5 = e^{0.02t}$، $\ln(2.5) = 0.02t$، $t \approx 45.8$.

c. إذا استُثمر مبلغ $P = \text{AED } 5000$ في الحساب وزاد المبلغ إلى AED 10,000 خلال 16 عامًا. فجد نسبة المرابحة لهذا الحساب.

حوالي 4.3%: $10{,}000 = 5000e^{16r}$، $2 = e^{16r}$، $\ln(2) = 16r$، $r \approx 0.043$.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

## استراتيجية حل الاختبار

بالنسبة إلى أسئلة صواب/خطأ حول القواعد الرياضية العامة مثل تلك الواردة في **الفقرة 13**، ينبغي للطلاب اختبار إجاباتهم بالتعويض عن العديد من القيم المختلفة لـ $a$ و$b$ و$x$ في المعادلة أو المتباينة المعطاة إذا كانت المعادلة أو المتباينة صحيحة.

### تشخيص الأخطاء

قد لا يقوم الطلاب الذين يحددون المعادلة الأولى في **الفقرة 13** على أنها خاطئة بتطبيق التغير في خاصية الأساس. اطلب منهم إعادة كتابة $\log_b a$ باستخدام الأساس $a$، ثم تحويل التعبير إلى أبسط صورة.

قد لا يفهم الطلاب الذين يعطون إجابة غير صحيحة في **الفقرة 15a** كيفية استخدام واحد ونصف واحد في معادلة الاضمحلال لإيجاد ثابت الاضمحلال. راجع هذه العملية، ووضح أن الثابت دائمًا هو ناتج قسمة ln 2 وعمْر النصف.

## معايير التقدير

### الفقرة 14

[3] يتم تحديد النموذج اللوغاريتمي كأفضل خيار لأن $r^2$ تقترب من 1 ويتم توضيح المعادلة الصحيحة وتحديد التغير الصحيح في عدد الجماعة الأحيائية

[2] يوجد استنتاج غير صحيح في **الجزء a** أو يتم تحديد تغير غير صحيح في عدد الجماعة الأحيائية في **الجزء c**

[1] **الجزء a** صحيح لكن **الجزأين b** و **c** غير صحيحين أو لا يتوفر شرح في **الجزء a** و**الجزء c** غير صحيح

[0] لا توجد إجابة أو الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

### الفقرة 15

[4] ثابت الاضمحلال صحيح وطريقة العمل موضحة والإجابة صحيحة في **الجزء b** وتوجد طريقة عمل موضحة ويتوفر شرح معقول في **الجزء c**

[3] خطأ ثانوي في الحساب في **الجزء a** أو **b** أو شرح غير كامل في **الجزء c**

[2] خطأ في الحساب في **الجزء a** أو **b** ولا توجد إجابة أو الإجابة غير صحيحة في **الجزء c**

[1] محاولة صحيحة تمت في بعض أجزاء المسألة

[0] لا توجد إجابة أو الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

### الفقرة 16

[4] كل الأجزاء صحيحة

[3] المعادلة صحيحة في **الجزء a** وأي من الجزأين **b** أو **c** صحيح

[2] المعادلة غير صحيحة في **الجزء a**، لكن كلًا من **الجزء b** و**الجزء c** صحيح استنادًا إلى هذه المعادلة

[1] المعادلة غير صحيحة في **الجزء a**، لكن أيًا من **الجزء b** أو **الجزء c** صحيح استنادًا إلى هذه المعادلة

[0] لا توجد إجابة أو كل الأجزاء غير صحيحة

# 2 الهدف الأساسي من الوحدة

## استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام دليل الطالب التفاعلي مع كتاب *الرياضيات للصف 12 المسار التطبيقي*.

| درس دليل الطالب التفاعلي | *الرياضيات للصف 12 المسار التطبيقي* |
|---|---|
| 2.1 | الدرس 2-1 |
| 2.2 | الدرس 2-2 |
| 2.3 | الدرس 2-3 |
| 2.4 | الدرس 2-4 |
| 2.5 | الدرس 2-5 |

## نصيحة للتدريس

يقدّم السؤال التمهيدي للدرس 2.1 إلى الطلاب **م. م. ر. 6 (مراعاة الدقة)**. ابدأ بتكليف الطلاب بالبحث عن فرص لتحويل التعابير النسبية إلى أبسط صورة. أشر إلى الحدّين اللذين سيتم تقسيمهما:

$$\frac{\cancel{x+3}}{3x-1} \cdot \frac{x+1}{\cancel{x+3}} \cdot \frac{x+2}{6x+4}$$

ثم كلّف الطلاب باستخدام طريقة ضرب قوسين لضرب ثنائيات الحدود الموجودة في البسط والمقام.

## نصيحة للتدريس

يقدّم السؤال التمهيدي للدرس 2.3 إلى الطلاب **م. م. ر. 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. تعرّف الطلاب في الوحدات السابقة على تحويلات أنواع أخرى من الدوال. فإذا كانت لديهم صعوبة في فهم طريقة تمثيل $g(x)$ بيانيًا، فاقترح عليهم إيجاد قيمة الدالة بدلالة قيم متعددة لـــ $x$ وتحديد موقع هذه النقاط حتى يتمكنوا من رؤية الطريقة التي ينبغي بها تمثيل الدالة بيانيًا.





**الهدف الأساسي من الوحدة** التعرف على بعض المعايير الحكومية الأساسية المشتركة التي سنستكشفها في هذه الوحدة. والإجابة على الأسئلة التمهيدية. عندما تنتهي من كل درس، عُد إلى هذه الصفحات للتحقق من إجابتك.

| الدروس المستفادة | السؤال التمهيدي |
|---|---|
| **الدرس 2.1: ضرب التعابير النسبية وقسمتها** | |
| فَهْمُ أن التعابير النسبية تشكل نظامًا مشابهًا للأعداد النسبية ومغلقًا في الجمع والطرح والضرب والقسمة على تعبير نسبي غير صفري. وفَهْم جمع التعابير النسبية وطرحها وضربها وقسمتها. | اضرب هذه التعابير النسبية.<br>$\frac{x+3}{3x-1} \times \frac{x+1}{x+3} \times \frac{x+2}{6x+4}$<br>$\frac{x^2+3x+2}{18x^2+6x-4}$ |
| **الدرس 2.2: جمع التعابير النسبية وطرحها** | |
| فَهْمُ أن التعابير النسبية تشكل نظامًا مشابهًا للأعداد النسبية ومغلقًا في الجمع والطرح والضرب والقسمة على تعبير نسبي غير صفري. وفَهْم جمع التعابير النسبية وطرحها وضربها وقسمتها. | ما محيط المستطيل؟<br><br><br>$\frac{14x+34}{x^2+5x+6}$ |
| **الدرس 2.3: تمثيل دوال المقلوب بيانياً** | |
| تكوين معادلات ذات متغيرين أو أكثر لتمثيل العلاقات بين الكميات؛ وتمثيل هذه المعادلات بيانيًا على المحاور الإحداثية مع مراعاة التسميات والمقاييس.<br><br>إيجاد العلاقة بين مجال الدالة وتمثيلها البياني، والعلاقة الكمية التي تصفها حيثما ينطبق ذلك.<br><br>تحديد تأثير استبدال $k$ بـ $f(x)$ by $f(x) + k$، و $k\,f(x)$، و $f(kx)$، و $f(x + k)$ بقيم معينة لـــ $k$ (سواءً إيجابية أو سلبية) على التمثيل البياني؛ وإيجاد قيمة $k$ بعد إعطاء التمثيلات البيانية. والتجربة في حالات وتوضيح تفسير للتأثيرات على التمثيل البياني باستخدام التكنولوجيا. وتضمين التعرف على الدوال الزوجية والفردية من تمثيلاتها البيانية وتعابيرها الجبرية. | التمثيل البياني الذي يمثل $f(x) = \frac{1}{x}$ موضحٌ أدناه. صِف كيف يرتبط التمثيل البياني الذي يخص $g(x) = \frac{2}{x+1} - 4$ بالتمثيل البياني الذي يخص $f(x)$. بعد ذلك، مثّل بيانيًا $g(x)$.<br> <br>**التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ يُزاح بمقدار وحدة واحدة نحو اليسار، و 4 وحدات للأسفل. ويُمد رأسيًا بعامل قيمته 2 للحصول على تمثيل بياني يخص $g(x)$.** |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

| الدروس المستفادة | السؤال التمهيدي |
|---|---|
| **الدرس 2.4: التمثيل البياني للدوال النسبية** | |
| مقارنة خصائص دالتين كل منهما ممثلة بطريقة مختلفة (جبريًا، أو في تمثيل بياني، أو رقميًا في جداول، أو بالوصف اللفظي). على سبيل المثال، بإعطائك تمثيل بياني لدالة تربيعية واحدة وتعبير جبري لدالة أخرى، تحديد أيهما لها حد أقصى أكبر. تكوين معادلات ذات متغيرين أو أكثر لتمثيل العلاقات بين الكميات؛ وتمثيل هذه المعادلات بيانيًا على المحاور الإحداثية مع مراعاة التسميات والمقاييس. | أي دالة تقترب من $y = 0.5$ بينما يقترب $x$ من اللانهاية؟ اشرح.<br>A. $f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x}}$ B. $f(x) = \frac{4-\frac{1}{x}}{2-\frac{2}{x}}$<br>**A. بينما يزيد $x$ في قيمته، تقترب قيمة الحد $\frac{1}{x}$ من الصفر.** |
| **الدرس 2.5: حل المعادلات والمتباينات النسبية** | |
| إيجاد حل المعادلات النسبية والجذرية البسيطة التي تحتوي على متغير واحد، وإعطاء أمثلة تبين كيف يمكن أن تظهر حلول دخيلة.<br>تكوين معادلات ومتباينات بمتغير واحد ثم استخدامها في حل المسائل.<br>شرح السبب في أن إحداثيات $x$ لنقاط تقاطع المعادلتين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بالرسم البياني هي حلول المعادلة $f(x) = g(x)$؛ إيجاد الحلول تقريبيًا، على سبيل المثال استخدام التكنولوجيا لتمثيل الدوال بيانيًا، أو إنشاء جداول القيم، أو إيجاد التقريبات المتتابعة. تضمين حالات حيث يكون $f(x)$ و/أو $g(x)$ دالة خطية وكثيرة الحدود ونسبية وتُمثل قيمة مطلقة وأسية ولوغاريتمية. | منطقة مساحتها $A$ قُسّمت إلى كميتين كسريتين، حيث أحد الكسرين هو نصف الآخر. اكتب المعادلة النسبية التي يمثلها هذا الوصف.<br>$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = A$<br>$\frac{2x + x}{2x^2} = A$<br>$\frac{3}{2x} = A$ |

حقوق الطبع والتأليف © بحقوقها لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



## نصيحة للتدريس

يمكن أن يُستخدم السؤال التمهيدي للدرس 2.4 كفرصة لاستكشاف **م. م. ر. 6 (مراعاة الدقة)**. ابدأ بعمل جدول قيم للتعبير $\frac{1}{x}$. اكتب القيم على هيئة أعداد نسبية. وكلّف الطلاب بتحديد ما يحدث لتسلسل الأعداد كلما ازدادت قيمة $x$.

بعد ذلك اطلب منهم تحديد ما يحدث للتعبير النسبي عندما تكون قيم $x$ كبيرة جدًا. أشر إلى أن كل تعبير نسبي له الحد $\frac{1}{x}$ في البسط والمقام.

نظرًا لأن هذه الحدود النسبية تقترب من الصفر عند قيم $x$ الكبيرة؛ يتم تبسيط التعابير النسبية إلى $\frac{2}{4}$ و $\frac{4}{2}$.

# 2.1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

## المعايير

**معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 6, 7**

## المتطلبات الأساسية

- استيعاب تعريف الانغلاق
- ضرب التعابير النسبية وقسمتها
- جمع التعابير كثيرة الحدود وطرحها وضربها وقسمتها وتحليلها إلى العوامل

## مثال 1

### نصيحة للتدريس

م.م.ر6

أكد على أوجه التشابه بين العمليات التي تُجرى على كل من الأعداد النسبية والتعابير النسبية.

### الأسئلة الداعمة

- هل المعلومات الواردة في مربع المفهوم الأساسي صحيحة لكل من التعابير النسبية والأعداد النسبية؟ اشرح. **نعم؛ فالأعداد النسبية عبارة عن تعابير نسبية.**
- كيف يمكن أن تكون مجموعة التعابير النسبية منغلقة في القسمة في حين قد يكون المقسوم عليه صفرًا، مما يجعل القسمة غير معرّفة؟ **تُحتسب عملية القسمة عندما يكون المقسوم عليه ليس صفرًا.**


## 2.1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها


**الأهداف**

- فهْمُ أن التعابير النسبية تكون مغلقة ضمن عمليتي الضرب والقسمة.
- تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.
- ضرب التعابير النسبية وقسمتها

**التعبير النسبي** هو نسبة بين تعبيرين كثيري الحدود. والعمليات في الأعداد النسبية والتعبيرات النسبية متشابهة.

**ضرب التعابير النسبية وقسمتها**

**لضرب** تعبيرين نسبيين، اضرب البسوط واضرب المقامات.
بالنسبة لجميع التعابير النسبية، $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

**لقسمة** تعبيرين نسبيين، اضربهما في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.
بالنسبة لجميع التعابير النسبية، $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$، و $c \neq 0$، و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

**مثال 1** استكشاف التعابير النسبية

**الاستكشاف** في هذا الاستكشاف، ستستكشف كيفية ضرب التعابير النسبية وقسمتها.

**a. استخدام البنية** افترض أن $\frac{a}{b} = \frac{6}{x-2}$ و $\frac{c}{d} = \frac{3}{x+2}$. جِد $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$. هل النتيجة تعبير نسبي؟ اذكر القيد (القيود) الواجب وضعها على x ولماذا هي موجودة.

$\frac{18}{(x-2)(x+2)}$؛ **ناتج الضرب هو تعبير نسبي.** $x \neq 2$ **و** $x \neq -2$؛ **إذا كان** $x = 2$ **أو** $x = -2$، **فسيكون تعبير واحد أو أكثر من التعابير النسبية غير مُعرّف**

**b. استخدام البنية** افترض أن $\frac{a}{b} = \frac{6}{x-2}$ و $\frac{c}{d} = \frac{3}{x+2}$. جِد $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$. هل النتيجة تعبير نسبي؟ اذكر القيد (القيود) الواجب وضعها على x ولماذا هي موجودة.

$\frac{2(x+2)}{x-2}$؛ **ناتج القسمة هو تعبير نسبي.** $x \neq 2$ **و** $x \neq -2$؛ **إذا كان** $x = 2$ **أو** $x = -2$، **فسيكون تعبير واحد أو أكثر من التعابير النسبية غير مُعرّف.**

**c. التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه لضرب $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ هل النتيجة تعبير نسبي؟ ما الذي يشير إليه هذا بشأن إغلاق التعابير النسبية في عملية الضرب؟ اشرح.

**نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن ناتج الضرب هو أيضًا تعبير نسبي.**

**d. التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه من أجل $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ هل النتيجة تعبير نسبي؟ ما الذي يشير إليه هذا بشأن إغلاق التعابير النسبية في عملية القسمة؟ اشرح.

**نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن ناتج القسمة هو أيضًا تعبير نسبي.**


حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لمكغرو هيل تعليم
McGraw Hill Education




### معلومات أساسية رياضية

سوف يجد الطلاب التعابير النسبية مستخدمة في العديد من التطبيقات في الفيزياء–القوة، السرعة المتجهة، السقوط الحر للأجسام. إذا سمح الوقت، تعاون مع معلمي مادة الفيزياء بالمدرسة لمعرفة متى سوف يدرسون المفاهيم التي تتضمن استخدام التعابير النسبية حتى يتسنى لك تقديم الدرس بالتزامن. سوف يساعد تقديم تطبيقات في الحياة اليومية الطلاب على تكوين روابط أكثر قوة بالمادة.

e. **بناء الفرضيات** هل مجموعة الأعداد النسبية مغلقة ضمن عمليتي الضرب والقسمة؟ اشرح كيف عرفت ذلك.

**نعم؛ تُعد مجموعة أعداد مغلقة ضمن عملية واحدة إذا كانت نتيجة هذه العملية لأي أعداد في هذه المجموعة موجودة أيضًا في المجموعة نفسها. وتُعد مجموعة أعداد نسبية مغلقة ضمن عمليتي الضرب والقسمة لأن ناتج الضرب أو ناتج القسمة لعددين نسبيين غير صفريين هو عددٌ نسبي أيضًا.**

**مثال 2** **تبسيط التعابير النسبية**

**بسّط** $\frac{5x^2 - 20x}{x^2 - x - 12}$.

a. **استخدام البنية** اكتب التعبير في أبسط صورة لها. اشرح كيف يُستخدم ضرب التعابير النسبية لتبسيط التعبير.

$\frac{5x^2 - 20x}{x^2 - x - 12} = \frac{5x(x - 4)}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{5x}{(x + 3)} \times \frac{(x - 4)}{(x - 4)} = \frac{5x}{(x + 3)}$ **بالنسبة لـ $x \neq 4$؛ بمجرد تحليل عوامل البسط والمقام، ستُعاد كتابة التعبير في صورة ناتج ضرب التعبير المُحوّل لأبسط صورة في العوامل المشتركة مكتوبًا كنسبة تساوي 1 عندما يكون $x \neq 4$.**

b. **التفكير بطريقة كمية** متى يكون التعبير النسبي غير مُعرّف؟ اشرح. كيف تمكن مقارنة هذا بكيفية معرفتك عندما يكون التعبير النسبي غير مُعرّف؟

**عندما يكون $x = -3$ أو يكون $x = 4$، فإن التعبير غير مُعرّف. وهذه هي قيم $x$ التي تجعل المقام يساوي 0 أو غير مُعرّف. والعدد النسبي غير مُعرّف أيضًا حين يساوي مقامه 0.**

c. **تفسير المسائل** بسّط $\frac{20x - 5x^2}{x^2 - x - 12}$. اشرح كيف يرتبط التعبير النسبي وهذا التعبير.

$\frac{20x - 5x^2}{x^2 - x - 12} = \frac{5x(4 - x)}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{-5x(x - 4)}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{-5x}{(x + 3)} \times \frac{(x - 4)}{(x - 4)} = \frac{-5x}{(x + 3)}$ **بالنسبة إلى $x \neq 4$؛ التعبير يساوي التعبير الأول مضروبًا في $-1$.**

**مثال 3** **ضرب التعابير النسبية**

**بسّط** $\frac{9x^2 - 25}{12x^3 + 21x^2 - 6x} \times \frac{x^3 - x^2 - 6x}{6x^2 - x - 15}$.

a. **التعليق على طريقة الاستنتاج** بدأ كلٌّ من السيد مازن وابنته رنا ضرب هذه التعابير. وعملهما موضح في الجدول أدناه. أي طريقة قد تصل إلى الإجابة الصحيحة؟ اشرح السبب.

| طريقة السيد مازن | طريقة رنا |
|---|---|
| $\frac{9x^2 - 25}{12x^3 + 21x^2 - 6x} \times \frac{x^3 - x^2 - 6x}{6x^2 - x - 15} = \frac{9 - 25}{12x^3 + 21 - 6x} \times \frac{x^3}{-15}$ | $\frac{9x^2 - 25}{12x^3 + 21x^2 - 6x} \times \frac{x^3 - x^2 - 6x}{6x^2 - x - 15} = \frac{(3x-5)(3x-5)}{3x(x+2)(4x-1)} \times \frac{x(x-3)(x+2)}{(2x+3)(3x-5)}$ |

**طريقة رنا. إذا اكتملتْ، قد تصل إلى الإجابة الصحيحة لأنها حللت عوامل البسوط والمقامات لإيجاد العوامل المشتركة. أما السيد مازن فقد جـد العوامل المشتركة ضمن الحدود وحذفها؛ مما لا تنتج عنه تعابير مكافئة.**

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

**تطلب م. م. ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)** من الطلاب الملاحظة الدقيقة لتمييز نمط أو بنية. ويستخدم الطلاب هذه المهارة عند إعادة كتابة التعابير النسبية على هيئة تركيبة من العوامل. مثلما هو في **المثال 2a**. أو عندما يدركون أوجه التشابه بين الأعداد النسبية والتعابير النسبية. مثلما هو في **المثال 1**.

وهذا يمكن أن يعني أيضًا تراجع الطلاب خطوة لإلقاء نظرة عامة. مثلما هو في **المثالين 1c** و **1d**، لرؤية أنه عندما تكون الأجزاء التي يتم ضربها أو قسمتها تعابير نسبية. فإن النتيجة تضم تعبيرًا نسبيًا. وبالتالي يثبتون فهمهم لأن التعابير النسبية منغلقة في الضرب والقسمة.

**مثال 2**

**م.م.ر8**

### نصيحة للتدريس

عندما يبدأ الطلاب في تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة، شدد على أهمية استخدام طريقة إيجاد العامل المشترك الأكبر بين البسط والمقام.

### الأسئلة الداعمة

- ما الخطأ في العبارة $\frac{(x-2)}{(x+3)} \cdot \frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{x+3}$

**على الرغم من أن الطرف الأيمن من المعادلة هو التعبير "المحول لأبسط صورة"، يجب تحديد أن التساوي يكون قائمًا فقط عندما تكون $x \neq 2$. التعبير على الطرف الأيسر غير محدد عندما تكون $x = 2$ و $x = -3$ ولكن التعبير على الطرف الأيمن يكون غير محدد فقط عندما تكون $x = -3$.**

- ما الذي يحتاجه تعبيران حتى يكونا متكافئين؟ وما القيم الخاصة التي يجب وضعها في الاعتبار عند النظر إلى تكافؤ تعبيرين نسبيين؟ **يكون التعبيران متكافئين عندما تكون لهما القيمة نفسها مع كل قيمة للمتغير. والقيم الخاصة التي يجب وضعها في الاعتبار عند تعيين التكافؤ بين التعابير النسبية هي القيم المستثناة، أو تلك القيم التي تجعل التعبير النسبي غير محدد.**

## مثال 3

### نصيحة للتدريس

م.م.ر3

ذكّر الطلاب بأن الحذف يمكن أن يحدث فقط مع كمية ما يمكن استبعادها تمامًا من البسط والمقام.

### الأسئلة الداعمة

- ما الخطوة الأولى عند ضرب التعابير النسبية؟ **ينبغي أن تكون الخطوة الأولى تحليل البسوط والمقامات إلى العوامل لتحديد ما إذا كانت هناك عوامل مشتركة.**
- هل يمكن حذف عاملين مشتركين في البسوط؟ **لا، فقط العوامل المشتركة بين البسط والمقام.**

## مثال 4

### نصيحة للتدريس

م.م.ر8

بينما يوضح الطلاب طريقة لإيجاد قيمة الارتفاع في هذا المثال، ذكرهم بأنه من المفيد التفكير في الطريقة التي سوف يحلون بها المسألة نفسها إذا كان حجم القاعدة ومساحتها عددين نسبيين.

### الأسئلة الداعمة

- اشرح لماذا ينتج عن اختزال العوامل المشتركة لجميع القيم التي لا تجعل العوامل تساوي صفرًا تعبيرًا متكافئًا. **يمكن كتابة العوامل المشتركة في البسط والمقام على هيئة نسبة تساوي 1 للقيم التي لا تجعل العامل يساوي صفرًا.**
- هل يؤدي ضرب المقسوم عليه في المعكوس الضربي للمقسوم في الإجابة نفسها مثل ضرب المقسوم في المعكوس الضربي للمقسوم عليه؟ **لا؛ حيث ينتج عنه المعكوس الضربي للإجابة الصحيحة.**

**b. الحساب بدقة** بسّط التعبير. اشرح السبب في أنك لن تضرب البسوط وتضرب المقامات بدون تحليل العوامل أولاً.

$$\frac{(3x+5)(x-3)}{3(4x-1)(2x+3)} = \frac{(3x+5)(3x-5)}{3x(x+2)(4x-1)} \times \frac{x(x+2)(x-3)}{(2x+3)(3x-5)} = \frac{x^3-x^2-6x}{6x^2-x-15} \times \frac{9x^2-25}{12x^3+21x^2-6x}$$

**بالنسبة لكل من $x \neq 0$ و$x \neq -2$ و$x \neq \frac{5}{3}$ و$x \neq -\frac{3}{2}$. الضرب أولاً سيؤدي إلى كثيرات حدود كبيرة للغاية في البسوط والمقامات؛ مما يُصعّب تحليل العوامل المشتركة لاستبعادها.**

## مثال 4 قسمة التعابير النسبية




**حجم المنشور الموضح هو $\frac{x^4-1}{x^3+27}$ ft³ . مساحة قاعدة المنشور، $B$، هي $\frac{x^3+3x^2+x+3}{2x^3+11x^2+12x-9}$ ft²، وارتفاعها هو $h$. صيغة إيجاد حجم أي منشور هي $V = Bh$.**

**a. التخطيط للحل** اكتب تعبيرًا يربط حجم القاعدة ومساحتها بارتفاع المنشور. كيف تساعدك معرفة كيفية الحل لإيجاد قيمة مجهولة في صيغة تضم أعدادًا نسبية في هذا الموقف؟

**إذًا $h = V \div B$، $ft$ $\frac{x^4-1}{x^3+27} \div \frac{x^3+3x^2+x+3}{2x^3+11x^2+12x-9}$ $= h$: عملية الحل لإيجاد متغير في الصيغة باستخدام الأعداد النسبية هي العملية ذاتها المستخدمة عند استخدام التعابير النسبية. وينبغي قسمة كلا طرفي المعادلة على $B$ لعزل $h$.**

**b. الحساب بدقة** جد ارتفاع المنشور. كيف تتشابه الطريقة التي استخدمتها لإيجاد ارتفاع المنشور الذي فيه $B$ و$V$ عددان نسبيان؟

$$h = \frac{x^4-1}{x^3+27} \div \frac{x^3+3x^2+x+3}{2x^3+11x^2+12x-9} = \frac{x^4-1}{x^3+27} \times \frac{2x^3+11x^2+12x-9}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x+3)(x^2-3x+9)} \times \frac{(2x-1)(x+3)^2}{(x+3)(x^2+1)} =$$

$\frac{(x-1)(x+1)(2x-1)}{x^2-3x+9}$ **بالنسبة إلى $x \neq -3$. في مجموعتي الأعداد، تغيرت القسمة إلى ضرب باستخدام المعكوس الضربي للمقسوم عليه.**

**c. التواصل بدقة** هل يمكن لقيمة $x$ أن تكون $-3$؟ $-2$؟ اشرح لمَ أو لمَ لا.

**لا. عندما يكون $x$ بقيمة $-3$، فمقام التعبير الأصلي للحجم يساوي صفرًا، أي غير مُعرّف. وعندما يكون $x$ بقيمة $-2$، فمساحة القاعدة تصبح سالبة، وهو مستحيل في موقف من الحياة اليومية.**

**الكسر المركب** هو تعبير نسبي له بسط و/أو مقام يُعد أيضًا تعبيرًا نسبيًا. بطريقة خرى، الكسر المركب هو نتيجة قسمة تعبيرين نسبيين. ومن أجل تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة، يمكن استخدام طريقة قسمة التعابير النسبية. ويتشابه ضرب الكسور المركبة وقسمتها مع ضرب التعابير النسبية وقسمتها. ولكن تحويل النتيجة لأبسط صورة قد يتم في عدة خطوات إضافية.

## مثال 5 تبسيط الكسور المركبة

**a. التفكير بطريقة كمية** بالنسبة لأي قيم من $a$ و$b$ و$c$ و$d$، يكون الكسر مركبًا $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ غير معرّف؟

**$b = 0$، و$c = 0$، و$d = 0$**

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لمكغرو هيل للتعليم



### التدريس المتمايز

لمساعدة الطلاب على الاستعداد لضرب التعابير النسبية وقسمتها، اسمح لهم بالتحليل إلى العوامل الأنواع المختلفة من كثيرات الحدود.

ضع عدة تعابير من كثيرات حدود في أنحاء الحجرة واسمح للطلاب بالتجول في الأنحاء بهدف تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل مع مقارنة النتائج مع زملاء آخرين. لمزيد من الفائدة، يمكنك تكليف الطلاب بتصنيف كثيرات الحدود التي تم تحليلها إلى العوامل في مجموعات تبين العوامل المشتركة.

b. **استخدام البنية** أعد كتابة الكسر المركب $\frac{\frac{w}{x}}{\frac{y}{z}}$ في صورة $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ وبسّط.

$\frac{\frac{w}{x}}{\frac{y}{z}} = \frac{w}{x} \div \frac{y}{z} = \frac{w}{x} \times \frac{z}{y} = \frac{wz}{xy}$ **بالنسبة إلى** $z \neq 0$.

c. **استخدام البنية** بسّط $\frac{\frac{x+3}{x-1}}{\frac{x-2}{x^2-1}}$. كيف يمكن إعادة كتابة هذا في صورة $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$؟

$\frac{(x+3)(x+1)}{x-2}$ = $\frac{\frac{x+3}{x-1}}{\frac{x-2}{x^2-1}}$؛ **يمكن كتابتها في صورة** $\frac{x-2}{x^2-1} \div \frac{(x+3)}{(x-1)}$.

**مثال 6** **مجال تعبير نسبي مبسّط**

**يراجع كل من ليلى وكريم مسألة رياضيات تبدأ بهذا التعبير** $\frac{x+1}{x^2-1}$. **تزعم ليلى أن هذا التعبير يتساوى مع** $\frac{1}{x-1}$.

a. **التعليق على طريقة الاستنتاج** لماذا تعتقد ليلى أن التعبيرين متساويان؟

**التعبير الأول يمكن كتابته في أبسط صورة كما يلي** $\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$. **الجزء** $x+1$ **من البسط والمقام يلغيان بعضهما، تاركين** $\frac{1}{x-1}$.

b. **التعليق على طريقة الاستنتاج** هل ليلى مُحقة؟ هل التعبيران متساويان لكل قيم x؟

**لا؛ بالرغم من أن التعبير الأول يتحول في أبسط صورة إلى التعبير الثاني، فهناك اختلاف عندما يكون** $x = -1$. **التعبير الأول غير مُعرّف عند** $x = -1$، **في حين أن التعبير الثاني بقيمة** $-\frac{1}{2}$ **عندما يكون** $x = -1$ $\frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$.

c. **التعليق على طريقة الاستنتاج** ليلى تمثل بيانيًا $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ و $y = \frac{1}{x-1}$ على حاسبة التمثيل البياني الخاصة بها. تزعم أن التمثيلين البيانيين متطابقان، ولهذا فالتعبيرين متطابقان. فكيف ترد على ليلى؟

**يوجد حدّ أقصى لما يمكن عرضه على شاشة حاسبة صغيرة. التعبيران متساويان في كل نقطة باستثناء** $x = -1$، **إذًا من المنطقي التفكير في أن التمثيلين البيانيين سيبدوان متماثلين باستثناء في نقطة واحدة. وباستخدام وظيفة (التتبع)** *Trace* **يبدو أن التعبير الأول به قيمة غير مُعرّفة عند** $x = -1$، **في حين أن التعبير الثاني به قيمة** $-\frac{1}{2}$ **عند** $x = -1$.

**تدريب**

**استخدم المعلومات التالية للإجابة على التمرينين 1 و 2.**

كريمة وعلياء يحلان لإيجاد قيمة $x$ في $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}(x) = \frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$، حيث يمثل x التعبير النسبي الذي سيجعل العبارة صحيحة. وتذكر كريمة أن عليك ضرب كلا طرفي المعادلة فبالمعكوس الضربي لـ $\frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$. وتذكر علياء أنه عليك ضرب كلا الطرفين في المعكوس الضربي لـ $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}$.

1. **التعليق على طريقة الاستنتاج** بدون حل، حدد من طريقته صحيحة: كريمة أم علياء؟ اشرح كيف عرفت هذا.

**طريقة علياء صحيحة. لعزل** $x$، **عليك قسمة كلا الطرفين على** $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}$، **للقسمة على تعبير نسبي، اضرب في معكوسه الضربي،** $\frac{4a^2-b^2}{a^3-b^3}$.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## أخطاء شائعة

في بعض الأحيان، يعتقد الطلاب الذين يتعاملون مع التعابير النسبية أن بإمكانهم شطب الحدود المتشابهة في كثيرات الحدود. أكد على أنه في جميع التعابير النسبية، يمكن حذف العوامل المشتركة فقط الموجودة بتلك التعابير.

صحيح:

$$\frac{\cancel{(x+1)}(x+4)}{(x-2)\cancel{(x+1)}}$$

غير صحيح

$$\frac{\cancel{x^2} - 2\cancel{x} - 15}{\cancel{x^2} - 2\cancel{x} - 35}$$

**مثال 5**

### نصيحة للتدريس

م.م.ر7

ذكّر الطلاب أن الكسور المركبة ليس مفهومًا جديدًا. وإنما هي ببساطة ترميز آخر لقسمة التعابير النسبية.

### الأسئلة الداعمة

- ما ميزة كتابة الكسر المركب بالصورة $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$؟ **الإجابة النموذجية: يمكن أن تساعد كتابة الكسر بهذه الصورة الطلاب على رؤية بنية المسألة وذلك للضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه بسهولة أكبر.**
- في الإجابة على **الجزء b**. لماذا يجب علينا تحديد أن $z$ لا يمكن أن تكون صفرًا ولكن ليس $x$ و $y$ أيضًا؟ **من الواضح أن $x$ و $y$ ليسا صفرًا لأنهما واقعين في مقام الحل. الاستثناء هو $z$ الذي يأتي من التعبير الأصلي. ويجب تحديد ذلك لأنه غير ممكن من خلال النظر إلى التعبير النهائي.**

**مثال 6**

### نصيحة للتدريس

م.م.ر3

ذكّر الطلاب بما يعنيه تكافؤ تعبيرين في مجال محدد، أي أن لهما قيمة $y$ نفسها لكلٍ من قيم $x$ في المجال.

### الأسئلة الداعمة

- ما مجال كل دالة في هذا المثال؟ **مجال الدالة الأولى هو جميع الأعداد الحقيقية التي لا تساوي 1− أو 1. ومجال الدالة الثانية هو جميع الأعداد الحقيقية التي لا تساوي 1.**
- هل $\frac{x+1}{x+1}$ تساوي 1 دائمًا؟ **لا، حيث قسمة أي عدد على نفسه تساوي 1 طالما أن هذا العدد ليس 0. بالنسبة إلى $x = -1$ فإن التعبير يكون $\frac{0}{0}$، وهو غير معرّف.**

## تمرين

يطلب **الجزءان 1** و **2** من الطلاب التعليق بطريقة نقدية على طريقةٍ لقسمة التعابير النسبية، ثم استخدام الطريقة الصحيحة في حل مسألة.

في **الجزءين 3** و **4**، يجب على الطلاب العمل باستخدام قسمة التعابير النسبية لحل المسائل.

يستلزم **الجزء 5** من الطلاب قسمة التعابير النسبية.

يطلب **الجزء 6** من الطلاب تبسيط دالة نسبية ناتجة عن عملية ضرب والتفكير في مجالي الدالة الأصلية والدالة المبسطة.

2. **الحساب بدقة** جِد قيمة x في المعادلة المعطاة. تحقق من إجابتك.

$\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}(x)=\frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$؛ $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}\left(\frac{4a^2-b^2}{a^3-b^3}\right)(x)=\frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}\left(\frac{4a^2-b^2}{a^3-b^3}\right)$؛ $x=\frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}\left(\frac{4a^3-b^3}{a^3-b^3}\right)$

$\left(\frac{a^3-b^3}{4a^3-b^3}\right)\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)=\left(\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(2a+b)(2a-b)}\right)$ **التحقق:** $x=\frac{2a-b}{a-b}$؛ $x=\frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}\left(\frac{(2a+b)(2a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right)$

$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)=\frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$

**استخدم المعلومات التالية للإجابة على التمرينين 3 و 4.**

الزمن الذي يستغرقه إبراهيم لتجديف 9 km ضد التيار هو $\frac{9}{5-c}$. والزمن الذي يستغرقه لتجديف 9 مع التيار هو $\frac{9}{5+c}$، حيث c هي سرعة التيار بكيلومترات في الساعة وحيث $0 \le c < 5$.

3. **تفسير المسائل** في أي اتجاه يتحرك إبراهيم أسرع، مع التيار أم ضده؟ اذكر سببين لإجابتك.

**هو يتحرك مع التيار أسرع حيث إنه يتحرك باتجاه التيار وكل قيم c تجعل وقت تحركه ضد التيار أكبر من زمن تحركه مع التيار.**

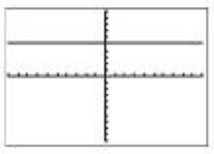
4. **الحساب بدقة** باستخدام إجابتك على **التمرين 3**، حدد كم يكون تحرك إبراهيم في الاتجاه السريع أسرع منه عن التحرك في الاتجاه البطيء. اشرح طريقتك.

**اقسم السرعة الأعلى (مع التيار) على السرعة الأبطأ (ضد التيار) لتحصل على مقدار زيادة سرعة التحرك مع التيار عن السرعة ضد التيار. $\frac{9}{5+c}\div\frac{9}{5-c}=\frac{9}{5+c}\times\frac{5-c}{9}=\frac{5-c}{5+c}$، إذًا إبراهيم يتحرك مع التيار $\frac{5-c}{5+c}$ مرات أسرع مما يتحرك ضد التيار.**

5. **التفكير بطريقة تجريدية** أثناء أسبوعها الأول في ممارسة الجري، استغرقت شيماء $t$ دقيقة لتجري واحد كيلومتر. بمقياس كيلومترات في الساعة، سرعتها موضحة بواسطة $\frac{60}{t}$. تأمل شيماء في الوصول بمتوسط توقيتها إلى $t-2$ دقيقة في جريها مسافة واحد كيلومتر في أسبوعها الثاني من الجري. في المتوسط، تأمل شيماء أن تجري مسافة واحد كيلومتر أسرع بكَمّ ضعف في أسبوعها الثاني مقارنة بأسبوعها الأول في الجري؟ اشرح كيف عرفت هذا.

**بقسمة سرعة الأسبوع الثاني على سرعة الأسبوع الأول يمكنك تحديد ما المعدل الأسرع الذي تأمل أن تجري وفقًا له في المتوسط. $\frac{60}{t-2}\div\frac{60}{t}=\frac{60}{t-2}\times\frac{t}{60}=\frac{t}{t-2}$. تأملُ في الجري بمعدل $\frac{t}{t-2}$ أسرع أثناء أسبوعها الثاني من جريها في أثناء أسبوعها الأول.**

6. **التعليق على طريقة الاستنتاج** مثّلت سَما بيانيًا الدالة $y=\frac{5(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ على حاسبة التمثيل البياني وتزعم أن النتيجة خط أفقي بسبب الرسم التالي. هل سما محقة؟ اشرح استنتاجك.



**سما تكاد تكون محقة. استنادًا إلى العوامل المشتركة، تكون الدالة في أبسط صورة وهي $y=5$، وهي خط أفقي. ولكن مجال $y=5$ كله أعداد حقيقية، في حين أن الدالة الأصلية غير مُعرّفة عند $x=-1$، وعند $-2$، وعند $-3$. فإذا كانت سما ستستخدم وظيفة التتبع "Trace"، فعند هذه القيم لـ x سترى أن الدالة غير مُعرّفة. والنتيجة تكاد تكون خطًا أفقيًا.**

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لمكرو هيل للتعليم



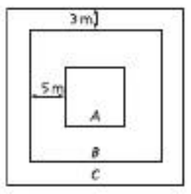
### التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

**يتطلب م. م. ر 6 (مراعاة الدقة)** من الطلاب حساب الكميات بدقة وتوصيل المفاهيم الرياضية وطرق التفكير إلى الآخرين بفعالية.

في **المثال 3b**، يوضح الطلاب طريقة تبسيط حاصل ضرب تعابير نسبية معطاة بشكل صحيح باستخدام المهارات والمعرفة الخاصة بتحليل كثيرات الحدود إلى العوامل. ويجب عليهم استخدام استنتاجهم الخاص لاستكشاف فائدة التحليل إلى العوامل قبل الضرب.

**استخدم المعلومات التالية للإجابة على التمرينين 7 و 8.**

يتم تنسيق باحة منزل آمنه بشكل احترافي. ويتألف التصميم النهائي من نافورة قطرها $x$ m في المربع A محاطة بمساحة عشبية بعرض 5 m في المربع B. وممشى من الحصى بعرض 3 m في المربع C الذي يحد المساحة العشبية. وستتمركز المساحات المربعة فوق بعضها البعض كما هو موضح في الرسم التخطيطي. وسيكون طول ضلع المربع A $2x$ m.




7. **استخدام نموذج** ترغب آية في أن تكون أطوال أضلاع المربعات متناسبة. فلأي قيم من $x$، ستكون نسبة أطوال ضلع المربع C إلى ضلع من المربع B مساويةً لنسبة أطوال ضلع المربع B إلى ضلع من المربع A؟ اشرح استنتاجك. كم سيكون قطر النافورة؟

$C : B = \frac{(x+8)}{(x+5)}$، $B : A = \frac{(x+5)}{x}$؛ حتى تصبح هاتان النسبتان متساويتين، $\frac{C}{B} \times \frac{A}{B}$ يجب أن تساويا 1. وحتى تساويا 1، يجب أن يكون ناتج ضربهما ناتجًا عن تساوي البسط والمقام. إذًا، $\frac{x+8}{x+5} \times \frac{x}{x+5} = \frac{x^2+8x}{(x+5)^2}$

و $x^2 + 8x = (x+5)(x+5)$. الحل لإيجاد قيمة $x$ يؤدي إلى $x = -12.5$. بما أن $x$ لا يمكن أن يكون سالب القيمة، فليست هناك قيم لـ $x$ ستجعل هذه النسب متساوية.

8. **التفكير بطريقة كمية** إذا غيّر مهندس تنسيق الحدائق عرض ممشى الحصى إلى 4 m وعرض المساحة العشبية إلى 2 m. فهل هناك قيمة لـ $x$ ستجعل النسب الموصوفة في **التمرين 7** متساوية؟ اشرح استنتاجك. كم سيكون قطر النافورة؟

نعم؛ $C : B = \frac{x+6}{x+2}$، $B : A = \frac{x+2}{x}$ و $\frac{x+6}{x+2} \times \frac{x}{x+2} = \frac{x^2+6x}{(x+2)^2}$، حينما يكون $x^2 + 6x = (x+2)(x+2)$ و $x = 2$.

يجب أن يكون طول ضلع المربع $A$ بمقياس 4 $m$ ويجب أن تكون النافورة بمقياس 2 $m$.

9. **استخدام البنية** بسّط الكسر المركب.

a. $\frac{\frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12}}{\frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-3)}}$

$\frac{\frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12}}{\frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-3)}} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12} \div \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12} \times \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x^2+1)}$

$= \frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-3)} \times \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+4)(x^2+1)}$ لكل $x \neq -1, 2, 3$

b. $\frac{x^2-x-6}{\left[\frac{2(x-3)}{x^2-1}\right]}$

$\frac{x^2-x-6}{\left[\frac{2(x-3)}{x^2-1}\right]} = \frac{x^2-x-6}{1} \div \frac{2(x-3)}{x^2-1} = \frac{x^2-x-6}{1} \times \frac{x^2-1}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+2)(x^2-1)}{2(x-3)} = \frac{(x+2)(x^2-1)}{2}$

لكل $x \neq -1$، 1، 3.

c. $\frac{\left[\frac{x^2+5x+4}{x-3}\right]}{(x+1)(x+2)}$

$\frac{\left[\frac{x^2+5x+4}{x-3}\right]}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+5x+4}{x-3} \div \frac{(x+1)(x+2)}{1} = \frac{x^2+5x+4}{x-3} \times \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+4)}{x-3} \times \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$= \frac{(x+4)}{(x-3)(x+2)}$ لكل $x \neq -1$.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



في **الجزءين 7 و 8**، يجب على الطلاب ضرب تعبيرين نسبيين في سياق من الحياة اليومية.

يطلب **الجزء 9** من الطلاب قسمة التعابير النسبية في شكل كسور مركبة.

## تناول المعايير

| التمرين | م. م. ر |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 1 |
| 4 | 6 |
| 5 | 2 |
| 6 | 3 |
| 7 | 4 |
| 8 | 2 |
| 9 | 7 |

## أخطاء شائعة

في بعض الأحيان، يخلط الطلاب الذين يتعاملون مع الكسور المركبة بين الصيغتين $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$ و $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$، مفترضين أن أبسط صورة لكليهما هي $\frac{ac}{b}$ أو $\frac{a}{bc}$ قد يكون مفيدًا للطلاب إعادة كتابة الكسر المركب باستخدام العدد 1 بدلاً من المقام المفقود. على سبيل المثال، $\frac{x}{\left(\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{\left(\frac{x}{1}\right)}{\left(\frac{2}{x^2}\right)}$. قد يساعد ذلك على إعادة كتابة الكسر المركب على هيئة عملية ضرب.

# 2.2 جمع التعابير النسبية وطرحها

## المعايير

**معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8**

## المتطلبات الأساسية

- جمع التعابير كثيرة الحدود وطرحها وضربها وقسمتها وتحليلها إلى العوامل
- جمع الأعداد النسبية وطرحها

## مثال 1

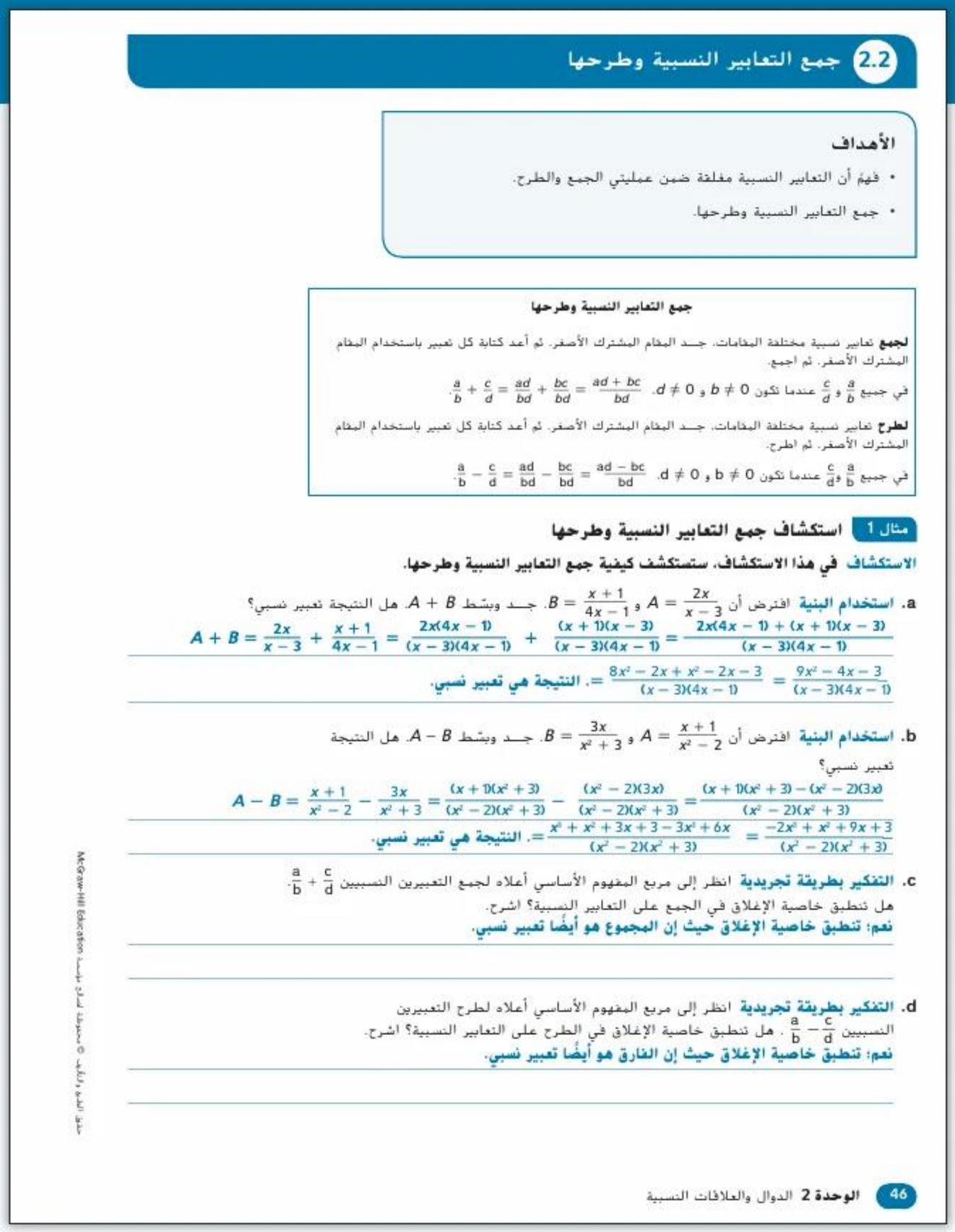
### نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

إذا واجه أي طالب صعوبة في دمج التعابير النسبية، فاطلب منه اتباع مربع المفهوم الأساسي بتحديد $a$، و $b$، و $c$، و $d$ ثم محاكاة النمط والحل الموضحين.

### الأسئلة الداعمة

- هل الطريقة الموضحة في مربع المفهوم الأساسي هي الطريقة الوحيدة لدمج التعابير النسبية؟ **لا؛ حيث يمكن دمج تعبيرين نسبيين باستخدام أي مقام مشترك.**
- هل يحقق جمع التعابير النسبية خاصية التبديل؟ هل يحقق الطرح بها؟ **يحقق جمع التعابير النسبية خاصية التبديل بينما الطرح فلا يحققها.**



## 2.2 جمع التعابير النسبية وطرحها

**الأهداف**

- فهمُ أن التعابير النسبية مغلقة ضمن عمليتي الجمع والطرح.
- جمع التعابير النسبية وطرحها.

**جمع التعابير النسبية وطرحها**

**لجمع** تعابير نسبية مختلفة المقامات، جد المقام المشترك الأصغر. ثم أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم اجمع.

في جميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$.

**لطرح** تعابير نسبية مختلفة المقامات، جد المقام المشترك الأصغر. ثم أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم اطرح.

في جميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$.

**مثال 1** **استكشاف جمع التعابير النسبية وطرحها**

**الاستكشاف** **في هذا الاستكشاف، ستستكشف كيفية جمع التعابير النسبية وطرحها.**

**a. استخدام البنية** افترض أن $A = \frac{2x}{x-3}$ و $B = \frac{x+1}{4x-1}$. جد وبسّط $A + B$. هل النتيجة تعبير نسبي؟

$$A + B = \frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{4x-1} = \frac{2x(4x-1)}{(x-3)(4x-1)} + \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(4x-1)} = \frac{2x(4x-1) + (x+1)(x-3)}{(x-3)(4x-1)}$$

$$= \frac{8x^2 - 2x + x^2 - 2x - 3}{(x-3)(4x-1)} = \frac{9x^2 - 4x - 3}{(x-3)(4x-1)}$$

**النتيجة هي تعبير نسبي.**

**b. استخدام البنية** افترض أن $A = \frac{x+1}{x^2-2}$ و $B = \frac{3x}{x^2+3}$. جد وبسّط $A - B$. هل النتيجة تعبير نسبي؟

$$A - B = \frac{x+1}{x^2-2} - \frac{3x}{x^2+3} = \frac{(x+1)(x^2+3)}{(x^2-2)(x^2+3)} - \frac{(x^2-2)(3x)}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{(x+1)(x^2+3) - (x^2-2)(3x)}{(x^2-2)(x^2+3)}$$

$$= \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3 - 3x^3 + 6x}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{-2x^3 + x^2 + 9x + 3}{(x^2-2)(x^2+3)}$$

**النتيجة هي تعبير نسبي.**

**c. التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه لجمع التعبيرين النسبيين $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. هل تنطبق خاصية الإغلاق في الجمع على التعابير النسبية؟ اشرح.
**نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن المجموع هو أيضًا تعبير نسبي.**

**d. التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه لطرح التعبيرين النسبيين $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$. هل تنطبق خاصية الإغلاق في الطرح على التعابير النسبية؟ اشرح.
**نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن الفارق هو أيضًا تعبير نسبي.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### معلومات أساسية رياضية

تُستخدم الدوال النسبية لعمل نماذج للمعادلات المعقدة في العلوم والهندسة، بما فيها الكيمياء والديناميكا الهوائية وعلم البصريات والصوت. وتستخدم الرياضيات العليا الدوال النسبية، بما فيها على سبيل المثال لا الحصر الجبر التجريدي والتحليل العددي.

e. **بناء الفرضيات** هل مجموعة الأعداد النسبية مغلقة في الجمع والطرح؟ اشرح كيف عرفت ذلك.
**نعم؛ تُعد مجموعة أعداد مغلقة ضمن عملية واحدة إذا كانت نتيجة هذه العملية لأي أعداد من هذه المجموعة موجودة أيضًا في المجموعة نفسها. وتُعد مجموعة أعداد نسبية مغلقة ضمن عمليتي الجمع والطرح لأن مجموع عددين نسبيين أو أكثر أو الفرق بينهما هو أيضًا عدد نسبي.**

**مثال 2** **المقامات أحادية الحدود**

**بسّط $\frac{7z^2}{3x^2y} + \frac{3x}{6y^3}$ نفسه.**

a. **التفكير بطريقة كمية** ما المقام المشترك الأصغر لـ $\frac{7z^2}{3x^2y}$ و $\frac{3x}{6y^3}$؟
$6x^2y^3$

b. **الحساب بدقة** بسّط التعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. اشرح كيف عرفت أن إجابتك في أبسط صورة.
$\frac{7z^2}{3x^2y} + \frac{3x}{6y^3} = \frac{(7z^2)(2y^3)}{(3x^2y)(2y^3)} + \frac{(3x)(x^2)}{(6y^3)(x^2)} = \frac{(7z^2)(2y^3)}{6x^2y^3} + \frac{(3x)(x^2)}{6x^2y^3} = \frac{14y^3z^2 + 3x^3}{6x^2y^3}$
**الإجابة في أبسط صورة لأن البسط والمقام ليست بينهما أي عوامل مشتركة.**

**مثال 3** **المقامات كثيرة الحدود**

**بسّط $\frac{3x}{x^2-4} - \frac{3}{2x-4}$ نفسه.**

a. **الحساب بدقة** جد المقام المشترك الأصغر وبسّط التعبير. لماذا لا تحتوي الإجابة في أبسط صورها على المقام المشترك الأصغر كمقام لها؟
**المقام المشترك الأصغر هو $2(x^2 - 4)$.**
$\frac{3x}{x^2-4} - \frac{3}{2x-4} = \frac{3x(2)}{2(x^2-4)} - \frac{3(x+2)}{(2x-4)(x+2)} = \frac{6x}{2(x^2-4)} - \frac{3x+6}{2(x^2-4)} = \frac{6x-(3x+6)}{2(x^2-4)}$
$= \frac{3(x-2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{3}{2(x+2)}$ بالنسبة إلى $x \neq 2$.
**عند التبسيط، كل العوامل المشتركة يتم تحليلها لاستبعادها. وبما أن أحد العوامل في المقام المشترك الأصغر يظهر في البسط، فيكون مُلغًى.**

b. **التفكير بطرقية كمية** كيف سيختلف التبسيط بالنسبة للتعبير $\frac{3x}{4-x^2} - \frac{3}{4-2x}$؟
جد المقام المشترك الأصغر، وحول هذا التعبير لأبسط صورة. كيف يرتبط بالتعبير الأصلي؟ ولماذا يُعتبر هذا صحيحًا؟
**المقام المشترك الأصغر هو $2(4 - x^2)$.**
$\frac{3x}{4-x^2} - \frac{3}{4-2x} = \frac{3x(2)}{2(4-x^2)} - \frac{3(2+x)}{(4-2x)(2+x)} = \frac{6x}{2(4-x^2)} - \frac{6+3x}{2(4-x^2)} = \frac{6x-(6+3x)}{2(4-x^2)} = \frac{3x-6}{2(4-x^2)}$
$= \frac{3(x-2)}{2(2-x)(2+x)} = \frac{-3(2-x)}{2(2-x)(2+x)} = -\frac{3}{2(2+x)}$، بالنسبة إلى $x \neq 2$. **الإجابة هي القيمة السالبة للإجابة من الجزء a. وهذا صحيح لأن كل حد في التعبير هو القيمة السالبة للحدود المناظرة من الجزء a.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

في **م. م. ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**، يستطيع الطلاب النظر إلى نواتج الجمع أو الطرح المعقدة للتعابير النسبية باعتبارها تعابير منفردة أو تركيب لتعبيرين أو أكثر. وعند تبسيط جمع التعابير النسبية أو طرحها، قد يتعين على الطلاب تناول الأجزاء المختلفة في التعبير قبل أن يستطيعوا التأكد من أنهم قد حوّلوا المجموع أو الفارق إلى أبسط صورة. وبتحليل كل مقام إلى العوامل، سيتمكنون من إيجاد المقام المشترك وكتابة كل تعبير. وبعد إجراء الجمع أو الطرح، قد لا تزال هناك حاجة لتحليل النتيجة إلى العوامل من أجل تبسيط التعبير النسبي بشكل كامل.

## مثال 2

**م. م. ر6**

### نصيحة للتدريس

راجع جمع/طرح الكسور ذات المقامات المختلفة إذا لزم لضمان قدرة الطلاب على إيجاد المقام المشترك الأصغر.

### الأسئلة الداعمة

- فيم يتم ضرب التعبير النسبي لتتم إعادة كتابته على هيئة تعبير نسبي متكافئ له مقام مختلف؟ اضرب مثالاً على ذلك.
**يتم ضربه في 1 على هيئة تعبير نسبي.**
$$\frac{3x}{4y} \cdot \left(\frac{x+2}{x+2}\right) = \frac{3x(x+2)}{4y(x+2)}$$
- هل من الضروري تقديم مجموع تعبيرين نسبيين أو الفارق بينهما في أبسط صورة للحدود؟ **إذا ذكرت التوجيهات ذلك، فنعم. وإلا يعتمد على ما إذا كانت الحدود في أبسط صورة لها أكثر فائدة للحالة المقدمة أم لا.**

## مثال 3

**م. م. ر6**

### نصيحة للتدريس

في بعض الأحيان يلزم تحليل المقام إلى العوامل من أجل إيجاد المقام المشترك الأصغر. ودائمًا ما ينجح التوصل إلى مقام مشترك عن طريق ضرب المقامات، ولكن قد يتطلب ذلك المزيد من التبسيط في النهاية.

### الأسئلة الداعمة

- ما العامل (العوامل) المشتركة بين $x^2 - 4$ و $2x - 4$؟ **$(x - 2)$**
- إذا لم تجد أي عوامل مشتركة، فماذا يمكنك فعله للتوصل إلى مقام مشترك؟ **ضرب المقامين معًا للحصول على $(x^2 - 4)(2x - 4)$.**

## مثال 4

### نصيحة للتدريس

م. م. ر 7

شجّع الطلاب على التركيز على كل خطوة منفصلة في العملية لهذه المسألة. وبمجرد أن يكتبوا الكسر المركّب، اطلب منهم التركيز على البسط والمقام كل على حدة. بهذه الطريقة يتمكنون من تقليل صعوبة المسألة

### الأسئلة الداعمة

- ما المقام المشترك الأصغر بالمعادلة الذي يحدد العرض؟ $5y$
- ما المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات؟ $5x^2y$
- كيف تقارن المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات بالمقامات المشتركة الصغرى للمعادلات الفردية؟ $5x^2y = x^2 \cdot 5y$

يمكن أن يكون للكسر المركب مجموع تعابير نسبية أو فرقها موجود في البسط و/أو المقام. وإحدى طرق تحويل كسر مركب لأبسط صورة من هذه الصيغة هي تحويل البسط والمقام لأبسط صورة بشكل منفصل. وهناك طريقة أخرى لتحويل كسر مركب لأبسط صورة من هذه الصيغة، وهي إيجاد المقام المشترك الأصغر لكل المقامات. ثم استخدام المقام المشترك الأصغر لإعادة كتابة الكسر المركب وتبسيطه.

**مثال 4** **طريقتان لتبسيط الكسور المركبة**

**جـد طول الأبعاد المجهولة في الشكل المستطيل الموضح.**

$A = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}\ \text{cm}^2$ ؟ $2 - \frac{4}{5y}\ \text{cm}$

**a. استخدام نموذج** اكتب كسرًا مُركبًا يمثل طول البعد المجهول. اشرح كيف وجـدت الكسر المركب. هل هناك أي قيود على القيم لكلٍّ من $x$ و $y$؟ اشرح.

بما أن $A = w\ell$، إذًا $\ell = \frac{A}{w}$، إذًا فالبعد المجهول طوله $\frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}}{2 - \frac{4}{5y}}\ cm$. هناك قيم مقيَّدة لأن المقامات لا يمكن أن تساوي صفرًا وينبغي أن يكون الطول والعرض موجبين. إذًا، $x > 0$ و $y > 0$ و $y > \frac{2}{5}$.

**b. استخدام البنية** قم بتبسيط البسط والمقام بشكل منفصل. اكتب الحل هنا.

البسط هو $\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{3+x}{x^2}$.

المقام هو $2 - \frac{4}{5y} = \frac{2(5y)}{5y} - \frac{4}{5y} = \frac{10y-4}{5y}$. إذًا $\frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}}{2 - \frac{4}{5y}} = \frac{\frac{3+x}{x^2}}{\frac{10y-4}{5y}}$.

**c. الحساب بدقة** ما البعد المجهول في أبسط صورة؟ كيف تساعدك معرفة كيفية ضرب التعابير النسبية وقسمتها؟

$\frac{15y + 5xy}{10x^2y - 4x^2}\ cm$ بالنسبة إلى $x > 0$، و $y > 0$، و $y > \frac{2}{5}$؛ لتحويل التعبير في الجزء $b$ إلى أبسط صورة، عليك إعادة كتابة المسألة كمسألة ضرب عن طريق ضرب كلا طرفي المعادلة في المعكوس الضربي للمقام.

**d. وَصْفُ طريقة الحل** جـد المقام المشترك الأصغر لكل المقامات في الكسر المركب الأصلي من **الجزء a**. استخدم هذا المقام المشترك الأصغر لتبسيط المعادلة. اشرح ما يحدث في المقامات.

المقام المشترك الأصغر هو $5x^2y$.

$$\frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}}{2 - \frac{4}{5y}} = \frac{\frac{3(5y)}{5x^2y} + \frac{5xy}{5x^2y}}{\frac{2(5x^2y)}{5x^2y} - \frac{4(x^2)}{5x^2y}} = \frac{\frac{15y + 5xy}{5x^2y}}{\frac{10x^2y - 4x^2}{5x^2y}} = \frac{15y + 5xy}{5x^2y} \div \frac{10x^2y - 4x^2}{5x^2y} = \frac{15y + 5xy}{5x^2y} \cdot \frac{5x^2y}{10x^2y - 4x^2}$$

$= \frac{15y + 5xy}{10x^2y - 4x^2}$ بالنسبة إلى $x > 0$، و $y > 0$، و $y > \frac{2}{5}$.

حُذفت كل المقامات بالضرب في المقام المشترك الأصغر المشترك بين كل المقامات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

في **م. م. ر 6 (مراعاة الدقة)**، يحاول الطلاب توصيل المعلومات بدقة للآخرين. سوف يستخدمون تعريفات واضحة مع الآخرين إلى جانب استنتاجهم الخاص. وعند حل الكسور المركبة، يمكن للطلاب استخدام إحدى طريقتين. سيتمكن الطلاب من مناقشة الأسباب التي تجعلهم يفضلون طريقة لمسألة محددة مع ذكر الأسباب الخاصة لذلك. قد يُضَمّنون إيجاد المقام المشترك الأصغر، و/أو التحليل إلى العوامل و/أو الضرب في المعكوس الضربي كأسباب لاختيار طريقة عن الأخرى في تبسيط الكسور المركبة.

## تمرين

في **الجزء 1**، يجب على الطلاب جمع التعابير النسبية وطرحها.

يطلب **الجزء 2** من الطلاب جمع التعابير النسبية وطرحها في سياق الحياة اليومية.

في **الجزء 3**، يجب على الطلاب تبسيط الكسر المركب، وهي عملية تتضمن جمع تعابير نسبية وطرحها وقسمتها.

**تدريب**

1. **الحساب بدقة** جـد وبسّط صورة المجموع أو الفرق. اكتب الحل هنا.

a. $\frac{2(x+5)}{2x^2-1}+\frac{4x}{x+1}$

$\frac{2(x+5)}{2x^2-1}+\frac{4x}{x+1}=\frac{2(x+5)(x+1)}{(2x^2-1)(x+1)}+\frac{4x(2x^2-1)}{(x+1)(2x^2-1)}=\frac{2(x+5)(x+1)+4x(2x^2-1)}{(x+1)(2x^2-1)}$

$=\frac{2x^2+12x+10+8x^3-4x}{(x+1)(2x^2-1)}=\frac{8x^3+2x^2+8x+10}{(x+1)(2x^2-1)}$

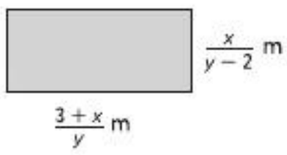
b. $\frac{x-1}{x^2+x-12}-2$

$\frac{x-1}{x^2+x-12}-2=\frac{x-1}{x^2+x-12}-\frac{2(x^2+x-12)}{x^2+x-12}=\frac{x-1-2(x^2+x-12)}{x^2+x-12}$

$=\frac{x-1-2x^2-2x+24}{x^2+x-12}=\frac{-2x^2-x+23}{x^2+x-12}$

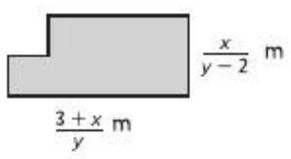
2. **استخدام نموذج** تحتاج منى لشراء سياج لحديقتها مستطيلة الشكل.

a. اكتب تعبيرًا، في أبسط صورة، يمثل مقياس السياج بالمتر الذي تحتاجه منى. هل هناك أي قيود على المتغيرات؟ اشرح.




المحيط: $\frac{(6+2x)(y-2)+2xy}{y(y-2)}=2(\frac{3+x}{y})+2(\frac{x}{y-2})$ . وينبغي أن يكون $x$ و$y$ عددين نسبيين إيجابيين، حيث $y \geq 0$، و $y \neq 2$، و $x \geq 0$. وعندما يكون $x = 0$، فعرضُ الحديقة سيكون 0 متر. وعندما يكون $x$ أو $y$ عددًا نسبيًا سالبًا، فإن $\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}}$ ستنتج عنه قيمة سلبية. وعندما يكون $y = 0$ أو $y = 2$، يكون الطول غير محدد.

b. ترغب منى في إزالة رُكْنٍ مربع الشكل من حديقتها. والقسم المربع المزال ستكون أضلاعه طولها نصف عرض الحديقة الأصلية. ما التعبير الذي يمثل محيط الحديقة الجديدة؟ اشرح.




$(\frac{3+x}{y})+(\frac{3+x}{y}-\frac{x}{2(y-2)})+(\frac{x}{y-2})+3(\frac{x}{2(y-2)})=$

$2(\frac{3+x}{y})+\frac{x}{(y-2)}+\frac{2x}{(2(y-2))}=\frac{(6+2x)(y-2)+2xy}{y(y-2)}$

التعبير هو نفس محيط الحديقة الأصلية.

3. **التواصل بدقة** بسّط التعبير النسبي، $\frac{\frac{1}{h}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{h^2}-\frac{7}{h}}$. صف الطريقة التي استخدمتها.

الإجابة النموذجية: $\frac{h(4+3h)}{4(2-7h)}$؛ وجـدتُ المقام المشترك الأصغر في الكسر المركب، وضربتَ البسط والمقام في المقام المشترك الأصغر لتبسيط التعبير:

$\frac{\frac{1}{h}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{h^2}-\frac{7}{h}}\times\frac{4h^2}{4h^2}=\frac{4h+3h^2}{8-28h}=\frac{h(4+3h)}{4(2-7h)}$ نفسه.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



## أخطاء شائعة

إحدى الأخطاء الشائعة هي التحليل إلى العوامل بشكل خاطئ عندما تبدو العوامل متشابهة ولكنها مختلفة، مثل $\frac{(2-x)}{(x-2)}$. عادة ما يساوي الطلاب هذا النوع من التعابير بالعدد 1. اقترح عليهم التعويض عن $x$ بقيمة ما حتى يروا أن التعبير لا يساوي 1 فعلاً وأن البسط والمقام في الحقيقة معكوسان جمعيان (مجموعهما 0) لبعضهما البعض. اطلب من الطلاب الاستعانة بخاصية التوزيع واستخدامها لتحليل البسط (أو المقام) إلى العوامل لإيجاد العامل المشترك. على سبيل المثال، $\frac{(2-x)}{(x-2)}=\frac{-1(x-2)}{(x-2)}=-1$.

يتطلب **الجزء 4** من الطلاب جمع ثلاثة تعابير نسبية لإيجاد متوسطهم.

في **الجزء 5**، يجب على الطلاب تبسيط كسر مركب مستخدم لتمثيل المقاومة عن طريق جمع التعابير النسبية.

في **الجزء 6**، يجب على الطلاب جمع التعابير النسبية في سياق من الحياة اليومية.

4. **الحساب بدقة** حدد متوسط الأعداد الثلاثة النسبية التي تمثلها هذه التعابير النسبية: $\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-3}$ و $\frac{1}{2x}$، بالنسبة إلى $x \neq 3$، و $x \neq 0$. اشرح كيف وجـدت المتوسط.

**المتوسط هو مجموع الأعداد المعطاة متسومًا على عدد هذه الأعداد.**

**إذًا، جـد متوسط $\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-3}$ و $\frac{1}{2x}$ هو** $\frac{\frac{1(2)(x-3)}{x(2)(x-3)} + \frac{1(2)(x)}{(x-3)(2)(x)} + \frac{1(x-3)}{2x(x-3)}}{3} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2x}}{3}$

$$= \frac{\frac{2(x-3)}{2x(x-3)} + \frac{2x}{2x(x-3)} + \frac{x-3}{2x(x-3)}}{3} = \frac{\frac{2(x-3)+2x+x-3}{2x(x-3)}}{3}$$

$$= \frac{2(x-3)+2x+x-3}{6x(x-3)} = \frac{5x-9}{6x(x-3)}$$

**بالنسبة إلى $x \neq 0$ و $x \neq 3$.**

5. المقاوم هو مُكوّن كهربي يقلل تدفق التيار الكهربي خلال الدائرة. ويتصل المقاوم بالتوازي حين يتصل كلا طرفيه بكلي طرفي مقاوم مجاور. وعند توصيل ثلاثة مقاومات بالتوازي فإن المقاومة الإجمالية، $R_T$، تكون موضحة بالصيغة $R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** بسّط الكسر المركب. اشرح كيف عرفت أن نتيجتك محولة لأبسط صورة ممكنة.

$\frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$؛ **بسبب عدم وجود عوامل مشتركة بين البسط والمقام يمكن حذفها بالتحليل إلى العوامل، فإن نتيجتي مُحولة لأبسط صورة.**

b. **تقييم منطقية النتائج** جـد نامر هذه الصيغة للمقاومة الإجمالية، $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. وقال إن هذه الصيغة مكافئة للصيغة الأصلية.. هل نامر محق؟ اشرح.

**نعم؛ حيث** $R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$، $\frac{1}{R_T} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$

$$= \frac{R_2R_3}{R_1R_2R_3} + \frac{R_1R_3}{R_1R_2R_3} + \frac{R_1R_2}{R_1R_2R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

6. **التخطيط للحل** تُنسّق مدرسة ثانوية محلية حديقة منتزه محلي. يمكن لخالد زرع حوض زهور في 3 ساعات. ويمكن لكامل أن يزرع حوض زهور بالحجم نفسه في 4 ساعات. باستخدام t، الزمن بالساعات، اكتب تعبيرًا يمثل عدد أحواض الزهور التي سيكملانها في عدد t من الساعات بالعمل معًا. اشرح استنتاجك.

**في ساعة واحدة، سيزرع خالد $\frac{1}{3}$ من حوض الزهور، أو $\frac{t}{3}$ أحواض زهور في غضون t ساعات. وفي ساعة واحدة سيزرع كامل $\frac{1}{4}$ من حوض الزهور، أو $\frac{t}{4}$ أحواض زهور في غضون t ساعات. وبجمع التعبيرين، $\frac{7t}{12} = \frac{t}{3} + \frac{t}{4}$.**

**إذًا، $\frac{7t}{12}$ يمثل عدد أحواض الزهور التي ستتم زراعتها في t ساعات.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## تلميح تقني

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني للتحقق من صحة الإجابات عند جمع التعابير النسبية وطرحها في أحد المتغيرات. أدخل التعبير الأصلي إلى $Y_1$ والحل إلى $Y_2$. اجعل الحاسبة ترسم التمثيل البياني لكلا الدالتين في نافذة العرض نفسها. إذا تطابق التمثيلان البيانيان فيمكنك استنتاج صحة الحل.

في **الجزء 7**، يتعين على الطلاب قسمة الطول إلى أربعة أجزاء متساوية باستخدام جمع التعابير النسبية.

يطلب **الجزء 8** من الطلاب تبسيط التعابير النسبية الناتجة عن عمليات الجمع.

## تناول المعايير

| التمرين | م. م. ر |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 4 |
| 3–4 | 6 |
| 5 | 2, 8 |
| 6–7 | 1 |
| 8 | 2 |

7. **التخطيط للحل** حدد ثلاثة أعداد حقيقية تقسم خط الأعداد الحقيقية بين $\frac{x}{6}$ و $\frac{x}{2}$ $(x \neq 0)$ إلى أربعة أجزاء متساوية. اشرح استنتاجك.

**الأعداد الثلاثة هي $\frac{x}{4}$، $\frac{x}{3}$ و $\frac{5x}{12}$ لكل $x \neq 0$. إذا كان $m$ هو العدد الأوسط بين $\frac{x}{6}$ و $\frac{x}{2}$، إذًا $\frac{x}{3} = \frac{4x}{12} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{x}{6} + \frac{x}{2}) = m$.**

**إذا كان $n$ هو العدد الأوسط بين $\frac{x}{6}$ و $\frac{x}{3}$، إذًا $\frac{x}{4} = \frac{3x}{12} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{x}{6} + \frac{x}{3}) = n$. إذا كان $p$ هو العدد الأوسط بين $\frac{x}{3}$ و $\frac{x}{2}$، إذًا $p = (\frac{x}{3} + \frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5x}{12}$.**

8. **التفكير بطريقة كمية** فكّر في التعبير $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

a. بسّط التعبير.

$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 1(\frac{x}{x+1}) = \frac{x}{x+1}$، $x \neq 0$.

b. استخدم ما أجريته من **الجزء a** لتبسيط ما يلي $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = 1(\frac{x+1}{2x+1}) = \frac{x+1}{2x+1}$، $x \neq 0$، $-1$.

c. استخدم ما أجريته من **الجزء b** لتبسيط ما يلي $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$.

$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = \frac{1}{1+\frac{x+1}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{x+1}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{(2x+1)+(x+1)}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}} = 1(\frac{2x+2}{3x+2}) = \frac{2x+2}{3x+2}$، $x \neq 0$، $-1$، $-\frac{1}{2}$.

d. استخدم ما أجريته من **الجزء c** لتبسيط ما يلي $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}}$.

$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}} = \frac{1}{1+\frac{2x+2}{3x+2}} = \frac{1}{\frac{3x+2}{3x+2}+\frac{2x+2}{3x+2}} = \frac{1}{\frac{(3x+2)+(2x+1)}{3x+2}} = \frac{1}{\frac{5x+3}{3x+2}} = 1(\frac{3x+2}{5x+3}) = \frac{3x+2}{5x+3}$،

$x \neq 0$، $-1$، $\frac{1}{2}$، أو $-\frac{2}{3}$.

e. بالنسبة إلى $x = 1$، جد قيم كل التعابير الأربعة.

**بالنسبة إلى $x = 1$، $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = \frac{(2x+1)}{(3x+2)}$؛ $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$؛ $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$؛**

$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = \frac{3x+2}{5x+3} = \frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8}$؛ $= \frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$.

f. تعتبر أرقام فيبوناتشي متتالية مشهورة تبدأ بالحدين 1 و 1. حيث يمكن إيجاد الحد التالي بجمع الحدين الأوليين. إذًا فمتتالية فيبوناتشي هي 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... فما الذي يبدو مشتركًا بين إجاباتك من **الجزء e**؟ ما تخمينك للقيمة التالية في النمط من **الجزء e**؟

**يبدو أن القيم هي نسب من عددي فيبوناتشي متتاليين. فينبغي أن تكون القيمة التالية هي $\frac{8}{13}$.**

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

في **م. م. ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**، يبدأ الطلاب بشرح معنى المسألة إلى أنفسهم والبحث عن مداخل إلى الحل. بإمكان الطلاب ربط عملية جمع التعابير النسبية وطرحها بجمع الأعداد النسبية وطرحها في الصيغة الكسرية. ويعد فهم أهمية الحصول على مقام مشترك، ومعرفة طريقة تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل لإيجاد المقام المشترك الأصغر، والتحلي بمهارة إعادة كتابة التعابير النسبية في تعابير متكافئة قبل إجراء العمليات عليها، كل ذلك مهارات لازمة لتبسيط التعابير النسبية.

# 2.3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

## المعايير

**معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8**

## المتطلبات الأساسية

- فهم معدل التغير والميل
- فهم التعابير النسبية

## مثال 1

### نصيحة للتدريس

م.م.ر4

شجع الطلاب على رسم عدة مستطيلات وكتابة الأبعاد التي ينتج عنها مساحة $100\ m^2$. بإمكان الطلاب بعد ذلك تحويل هذا العمل إلى جدول من الأزواج المرتبة واستخدام الجدول لمساعدتهم على تمثيل الدالة بيانيًا.

### الأسئلة الداعمة

- لأي قيم $x$ تكون الدالة $y = \frac{100}{x}$ معرفة؟ **الدالة معرفة مع جميع قيم $x$، عدا $x = 0$.**
- هل تمس التمثيلات البيانية المحور $x$ أبدًا؟ لِمَ أو لم لا؟ **لا؛ فلو مست التمثيلات البيانية المحور $x$، فسوف تكون قيمة $y$ أو $y_2$ تساوي 0 وهذا غير ممكن. تقترب التمثيلات البيانية للغاية من محور $x$ ولكنها لا تمسه.**


## 2.3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً


**الأهداف**

- تكوين دالة عكسية وتمثيلها بيانيًا وتفسير ميزات أساسية للتمثيل البياني.
- حساب متوسط معدل التغيير لدالة على مدار فترة وتفسيره.

**مثال 1** **إنشاء دالة وتمثيلها بيانيًا**

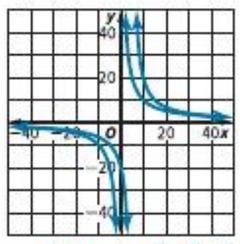
**الاستكشاف** **إن جرد *الغابات* هو إحصاء للأشجار وصفاتها. وغالبًا ما يستخدم الباحثون *قطعة أرض ثابتة المساحة* لتحليل الأشجار ضمن منطقة محددة المساحة. ويحلل جرد الغابات الحالي قطع أراضٍ مستطيلة مساحتها $100\ m^2$.**

a. **استخدام نموذج** إحدى قطع الأراضي طولها $x$ أمتار وعرضها $y$ أمتار.
اكتب معادلة لـ $y$ في صورة $x$ لتوضيح كيف يرتبط $x$ و $y$ بمساحة قطعة الأرض.
$y = \frac{100}{x}$؛ $xy = 100$

b. **تفسير المسائل** افترض أن قطعة أرض أخرى ستتألف من طول أقل بخمسة أمتار من القطعة الأولى. اكتب معادلة تُمثل غرَض $y_2$ قطعة الأرض الثانية بدلالة $x$، وهو طول القطعة الأولى.
$y_2 = \frac{100}{x - 5}$؛ $y_2x_2 = 100$، حيث $x_2 = x - 5$ بحيث يكون $y_2(x - 5) = 100$.

c. **استخدام نموذج** مثّل بيانيًا المعادلات التي تخص $y$ و $y_2$ على المستوى الإحداثي.

d. **التفكير بطريقة كمية** ما المجال المناسب للدوال، مع وضع السياق الذي تُستخدم فيه هذه الدوال في الاعتبار؟ اشرح.
$D = \{x | x > 0\}$؛ يمكن لطول قطعة الأرض أن يكون أي عدد حقيقي موجب.




e. **التواصل بدقة** كيف يقارَن التمثيل البياني الذي يخص $y_2$ بالتمثيل البياني الذي يخص $y$؟ اشرح التغيير في التمثيل البياني بناءً على السياق.
**التمثيل البياني الذي يخص $y_2$ هو التمثيل البياني نفسه الذي يخص $y$ ولكنه مُزاح بمقدار 5 وحدات إلى اليمين. وعرض قطعة الأرض الثانية محدد وفقًا لطول أقل من طول قطعة الأرض الأولى بمقدار 5 أمتار. إذا كان عرض قطعة الأرض الأولى هو $w$ عندما يكون الطول هو $x$، فيكون عرض قطعة الأرض الثانية بمقدار $w$ عندما يكون الطول هو $x + 5$.**

f. **التفكير بطريقة كمية** ما الذي يحدث للتمثيلات البيانية حينما يصبح $x$ كبيرًا بقيمة بالغة $(x \to \infty)$؟ ما السبب في أن هذا منطقي؟
**$y$ و $y_2$ تقتربان من 0 $(y \to 0$ و $y_2 \to 0)$؛ وهذا منطقي لأنه عندما يكون الطول كبيرًا للغاية، ينبغي أن يكون العرض صغيرًا للغاية حتى تكون المساحة $100\ m^2$.**


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



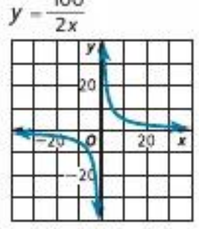
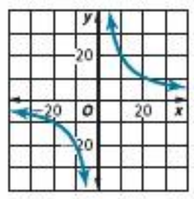
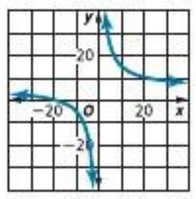

### معلومات أساسية رياضية

دالة المقلوب الأم هي $f(x) = \frac{1}{x}$. نظرًا لأن $f(x) \times x = 1$، يمكن اعتبار هذه الدالة على أنها الدالة التي تصل بالرسم كل عدد حقيقي غير صفري بمعكوسه الضربي.

تتسم الدالة بخاصية مميزة، وهي أنها معكوس نفسها. ويمكن رؤية ذلك في التمثيل البياني للدالة عن طريق تماثلها على الخط $y = x$. ويمكن عرض ذلك جبريًا أيضًا: $f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1/x} = x$ لجميع القيم عدا $x \neq 0$. بعبارة أخرى، الدالة $f(x)$ "تلغي" نفسها، ولذلك $f(x)$ هي معكوس نفسها.

g. **تفسير المسائل** فكّر في الدوال التالية. كلٌّ منها يُعتبر تنويعًا على الدالة الأصلية. مثّل بيانيًا كل الدوال وصف نتيجة المقارنة بين التمثيلات البيانية الناتجة مع النموذج الأصلي.

$y = \frac{100}{2x}$ $y = 2(\frac{100}{x})$ $y = \frac{100}{x} + 5$

**في الحالة الأولى، التمثيل البياني مماثل للنموذج الأصلي، ولكنه ممتد للأعلى بمقدار 5 وحدات. وفي الحالة الثانية، التمثيل البياني مماثل للنموذج الأصلي ولكنه ممدود رأسيًا بعامل قيمته 2. وفي الحالة الأخيرة، التمثيل البياني هو النموذج الأصلي نفسه، ولكنه منضغط أفقيًا بعامل قيمته 2.**

**الدالة العكسية** لها معادلة بصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث تكون $a(x)$ دالة خطية ويكون $a(x) \neq 0$.
الدالة الأصلية للدوال العكسية هي $f(x) = \frac{1}{x}$، وتمثيلها البياني هو **قطع زائد**.

**المفهوم الأساسي** **تحويلات الدوال العكسية**

**أكمل الجدول عن طريق وصف التأثير على التمثيل البياني الذي يخص $f(x) = \frac{1}{x}$ عند استبدال $f(x)$ بكلّ مما يلي.**

| $f(x) + k$ (الإزاحة الرأسية) | | $f(x + k)$ (الإزاحة الأفقية) | |
|---|---|---|---|
| $k > 0$ | إزاحة بمقدار $k$ وحدات للأعلى | $k > 0$ | إزاحة بمقدار $k$ وحدات لليسار |
| $k < 0$ | إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدات للأسفل | $k < 0$ | إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدات لليمين |
| $kf(x)$ (الامتداد/الانضغاط الرأسي) | | $f(kx)$ (الامتداد/الانضغاط الأفقي) | |
| $k < 0$ | الانعكاس في المحور $x$ | $k < 0$ | الانعكاس في المحور $y$ |
| $1 < \lvert k \rvert < 0$ | انضغاط رأسي | $1 < \lvert k \rvert < 0$ | امتداد أفقي |
| $\lvert k \rvert > 1$ | امتداد رأسي | $\lvert k \rvert > 1$ | انضغاط أفقي |

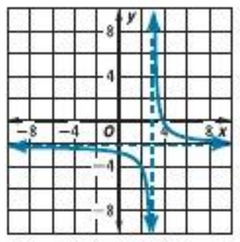
**مثال 2** **التمثيل البياني لدالة عكسية**

**اتبع هذه الخطوات للتحليل والتمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{2}{x-3} - 2$.**

a. **تفسير المسائل** استخدم التحويلات لشرح كيف يرتبط التمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ بالتمثيل البياني للدالة العكسية الأصلية $f(x) = \frac{1}{x}$.

**التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ ممتد رأسيًا بعامل قيمته 2، ومزاح بمقدار 3 وحدات لليمين، ومزاح بمقدار وحدتين للأسفل.**

b. **استخدام البنية** استخدم إجابتك من **الجزء a** لتمثل $g(x)$ بيانيًا.



c. **تقييم منطقية النتائج** اشرح كيف يمكنك استخدام خطوط التقارب الرأسية والأفقية لتمثيلك البياني للتحقق من أن التمثيل البياني منطقي.

**خط التقارب الرأسي هو $x = 3$، مما يبدو منطقيًا لأن $g(x)$ غير مُعرّف عند $x = 3$.**

**خط التقارب الأفقي هو $y = -2$، مما يبدو منطقيًا لأنه بينما يقترب $x$ من $+\infty$ أو $-\infty$، فإن $\frac{2}{x-3}$ يقترب من 0 وقيمة الدالة تقترب من $-2$.**

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## مثال 2

### نصيحة للتدريس

م.م.ر1

يطلب هذا المثال من الطلاب تمثيل دالة بيانيًا. وعندما يواجه الطلاب مثل هذه المهام، ينتقلون مباشرة إلى عملية تحديد مواقع النقاط ورسم المنحنيات، ولكن قد يوضح **الجزء a** من هذا المثال قيمة التفكير في الدالة أولاً. بمجرد أن يفهم الطلاب طريقة تكوّن الدالة، سيصبح رسم تمثيلها البياني أكثر وضوحًا.

### الأسئلة الداعمة

- قبل تمثيل الدالة بيانيًا، هل تعتقد سيكون لها خط تقارب رأسي؟ إذا كان كذلك، فأين تتوقع وجوده؟ **نعم. فالدالة غير معرّفة عند النقطة $x = 3$، لذا ينبغي أن يكون الخط $x = 3$ خط تقارب رأسيًا.**
- هل للتمثيل البياني نقطة تقاطع مع المحور x؟ إذا كان له، فما هي ولماذا يعد وجودها أمرًا منطقيًا؟ **نعم؛ $x = 4$. ووجودها أمر منطقي لأن $g(4) = \frac{2}{4-3} - 2 = 0$.**
- ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذا التمثيل البياني وذلك الذي يُرسم إذا كانت الدالة $g(x) = \frac{2}{x-3} + 2$؟ **كان الشكل ليكون واحدًا ولكن مع إزاحة هذا التمثيل البياني بمقدار 2 وحدة أعلى الدالة الأم.**

### التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

**يقدم المثال 2** فرصة لتناول **م. م. ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. بإمكان الطلاب – على الأخص – استخدام إستراتيجية البحث عن بنية والحل بترتيب عكسي لتمثيل دالة معطاة بيانيًا. على سبيل المثال، الدالة $g(x) = \frac{2}{x-3} - 2$ تتخذ الصورة $g(x) =$ [دالة] $- 2$. لذلك يجب أن يكون تمثيلها البياني مماثلاً للتمثيل البياني للدالة بين القوسين ولكن بإزاحتها وحدتين لأسفل. الدالة بين القوسين هي $h(x) = \frac{2}{x-3}$. إذا كان الطلاب على معرفة بطريقة تمثيل الدالة $h(x)$ بيانيًا، فكل ما عليهم هو رسم تمثيلها البياني ولكن بإزاحته وحدتين إلى أسفل. وإذا كانوا يجهلون طريقة تمثيل الدالة $h(x)$ بيانيًا، فبإمكانهم تطبيق العملية نفسها ومواصلة "التعديل العكسي" للدالة حتى يصلوا إلى دالة ذات تمثيل بياني مألوف.

## مثال 3

### نصيحة للتدريس

م.م.ر1

ساعد الطلاب على فهم التمثيلات البيانية بأن تقترح عليهم التركيز على خطوط التقارب. واطلب منهم التفكير في تحويل التمثيل البياني لـ f(x) إلى التمثيل البياني لـ h(x). واسألهم عن كيفية تغير كل خط تقارب. قد يُسهّل ذلك على الطلاب تحديد حالات الإزاحة ذات الصلة.

### الأسئلة الداعمة

- هل من الممكن أن يرتبط h(x) بـ f(x) عن طريق إزاحة أفقية فقط أو إزاحة رأسية فقط؟ كيف تعلم ذلك؟ **لا؛ فقد تغير كل من خطي التقارب الأفقي والرأسي، ويجب أن تشتمل الإزاحات على إزاحة أفقية وإزاحة رأسية.**
- كيف يمكنك التحقق من صحة المعادلة التي كتبتها؟ **الإجابة النموذجية: بإيجاد قيمة الدالة عند قيمة واحدة أو قيمتين لـ $x$ والتحقق من أن قيمة الدالة تطابق التمثيل البياني.**

## مثال 4

### نصيحة للتدريس

م.م.ر4

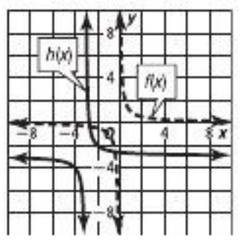
بالنسبة **للجزء a**، اقترح على الطلاب كتابة الدالة أولاً على هيئة [الوقت الكلي] = [مدة قيادة الدراجة] + [مدة الركض]. يمكنهم بعد ذلك استبدال الكميات بين الأقواس بالتعابير الصحيحة.

### الأسئلة الداعمة

- ما العلاقة التي تربط بين الزمن والمسافة والمعدل الذي قاد به مجيد الدراجة؟ $t = \frac{d}{r}$ أو $d = rt$
- ما الكمية الثابتة في هذه العلاقة؟ **المسافة**
- ما خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني، إن وُجد؟ $y = 2$

### مثال 3 تحليل التمثيل البياني لدالة عكسية

**يوضح الشكل التمثيل البياني للدالة العكسية الأصلية، $f(x)$، والتمثيل البياني للدالة العكسية الأصلية، $h(x)$.**




a. **تفسير المسائل** كيف يرتبط التمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ بالتمثيل البياني الذي يخص $f(x)$؟

**التمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ هو إزاحة لـ $f(x)$ بمقدار 3 وحدات لليسار و3 وحدات للأسفل.**

b. **استخدام الاستنتاج** ما معادلة الدالة $h(x)$؟ اشرح كيف عرفت هذا.

**$h(x) = \frac{1}{x+3} - 3$؛ الإزاحة بمقدار 3 وحدات لليسار هي $f(x+3)$ والإزاحة بمقدار 3 وحدات للأسفل هي $-3$؛ ووضع هذين معًا يوضح أن $h(x) = f(x+3) - 3 = \frac{1}{x+3} - 3$.**

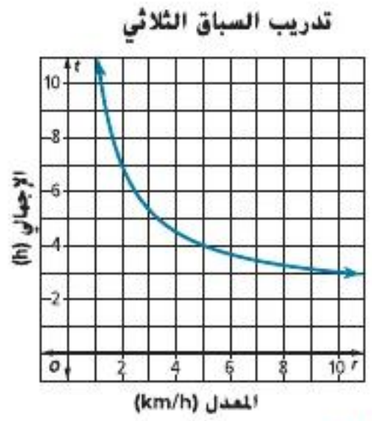
### مثال 4 حساب معدل التغيير على مدار فترة

**تتدرب لطيفة لخوض سباق الثلاثي الحديث (ترايثلون)، وفيه ستركض وتركب الدراجة وتسبح. ولجلسة اليوم، تخطط لركوب الدراجة لمسافة 10 km ثم ستركض لمدة ساعتين.**

a. **استخدام نموذج** افترض أن $r$ هو المعدل الذي تتحرك فيه لطيفة بالدراجة، بالكيلومترات في الساعة. اكتب معادلة تعطيك الزمن الإجمالي $t$، بالساعات، للتدريب اليوم في صورة $r$. اشرح كيف كتبت المعادلة.

**$t = \frac{10}{r} + 2$؛ الزمن الإجمالي هو الزمن الذي يستغرقه قطع مسافة 10 km بالدراجة، وهو $\frac{10}{r}$، بالإضافة لساعتين من الركض.**

b. **استخدام نموذج** استخدم المستوى الإحداثي على اليمين لتمثل بيانيًا الدالة التي كتبتها في **الجزء a**.




c. **بناء الفرضيات** تخطط لطيفة لحساب متوسط معدل التغيير على الفترة من $r = 2$ إلى $r = 8$. هل تعتقد أن هذه القيمة ستكون موجبة أم سالبة؟ لماذا؟ ولماذا يُعتبر هذا صحيحًا؟

**ستكون القيمة سالبة حيث إن التمثيل البياني يتناقص على مدار هذه الفترة.**

**وهذا يبدو صحيحًا لأنه مع تزايد المعدل، يقل زمن التدريب الإجمالي.**

d. **الحساب بدقة** جد متوسط معدل التغيير على الفترة من $r = 2$ إلى $r = 8$. فسّر النتيجة.

**$-0.625$؛ لكل زيادة بمقدار 1 km/h في المعدل، يتناقص الزمن بمقدار 0.625 ساعة.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### التدريس المتمايز

قد يكون من الأسهل لبعض الطلاب استيعاب **المثال 4** إذا كانوا قادرين على استكشاف جدول بالقيم. كلّف الطلاب بإدخال الدالة $t = \frac{10}{r} + 2$ على أنها $Y_1$ في حاسبات التمثيل البياني الخاصة بهم وعرض جدول بقيم الدالة. من خلال التمرير لأسفل الجدول، سيرى الطلاب أن قيم $y$ تتناقص دائمًا وتزداد قربًا من 2 لكن دون أن تصل إلى هذه القيمة أبدًا. سيلاحظ الطلاب أيضًا أن معدل التناقص يتباطأ كلما قاموا بالتمرير لأسفل الجدول. تتوافق هذه الملاحظات مع خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني. أي أن المنحنى يقترب من الخط الأفقي $y = 2$ ولكن لا يتقاطع معه، ثم يصبح المنحنى مستويًا كلما اقترب من هذا الخط.

## تمرين

يوفر **الجزءان 1** و **2** للطلاب تدريبًا إضافيًا على تمثيل دوال المقلوب بيانيًا بناءً على التحويلات.

يطلب **الجزء 3** من الطلاب تحديد التحويلات التي أجريت على دالة المقلوب الأم بدلالة تمثيلها البياني.

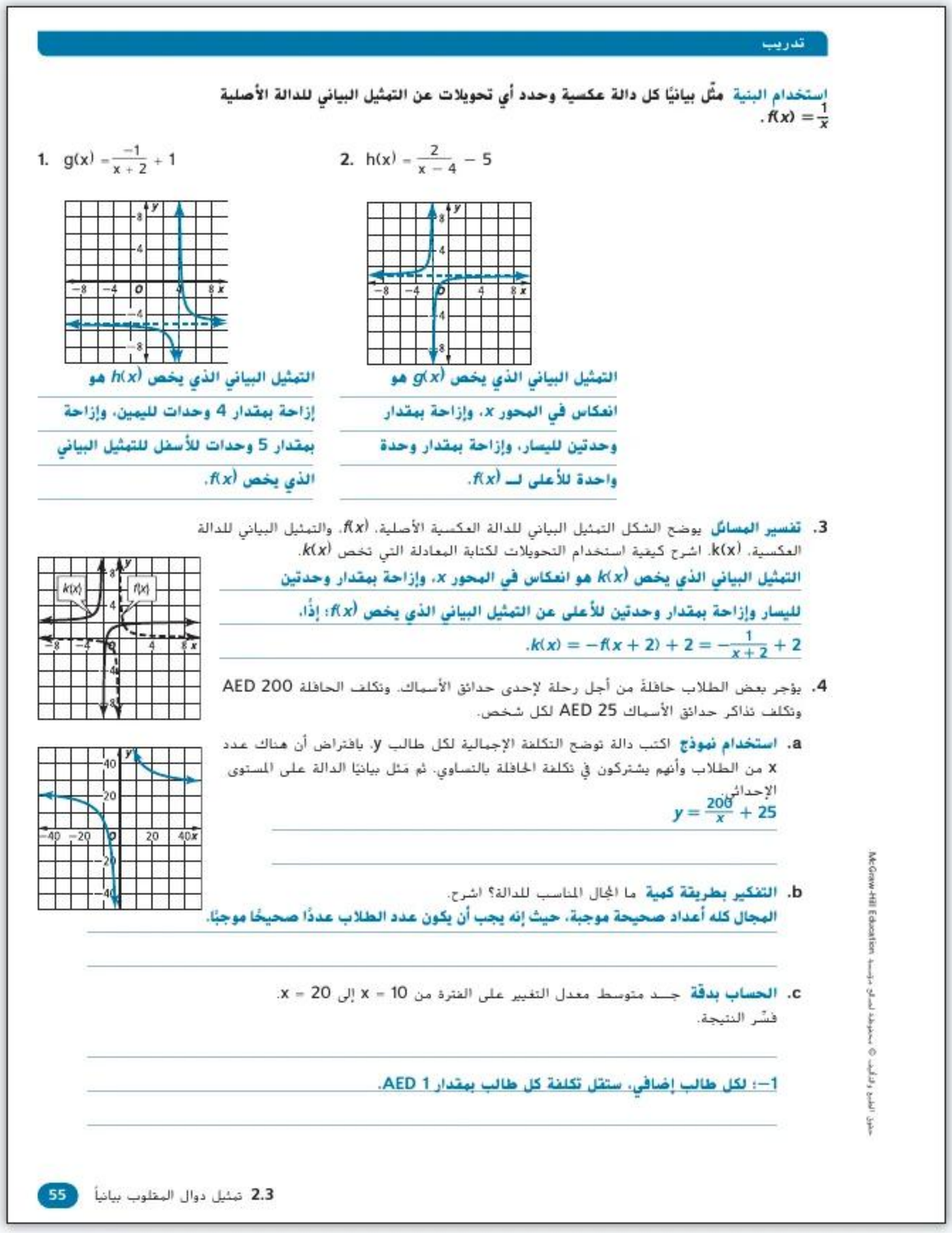
في **الجزء 4**، يجب على الطلاب كتابة معادلة لتمثيل الموقف. وبعد ذلك يوضح الطلاب مجال الدالة ويعملون على إيجاد متوسط معدل التغير في فترة معطاة.

### تناول المعايير

| التمرين | م. م. ر |
|---|---|
| 1–2 | 7 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2, 4, 6 |

### أخطاء شائعة

في **الجزء 3**، قد يحدد الطلاب خط الإزاحة الأفقية بشكل صحيح ولكن يكتبون معادلة $k(x)$ بشكل خاطئ. قد يحدد الطلاب الإزاحة الأفقية بأنها "وحدتان إلى اليسار" لكن يقومون بتطبيقها في الدالة بالصورة $f(x - 2)$ بدلاً من $f(x + 2)$. إذا كتب الطلاب $k(x) = -\frac{1}{x-2} + 2$، فاقترح أن يتحققوا من قيمة أو قيمتين لـ $x$ في المعادلة لرؤية ما إذا كانت قيم الدالة الناتجة تتطابق مع التمثيل البياني أم لا. ثم كلّف الطلاب بمراجعة حلّهم والانتباه بشكل خاص إلى الإزاحة الأفقية.



تدريب

**استخدام البنية** مثّل بيانيًا كل دالة عكسية وحدد أي تحويلات عن التمثيل البياني للدالة الأصلية $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. $g(x) = \frac{-1}{x+2} + 1$



التمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ هو إزاحة بمقدار 4 وحدات لليمين، وإزاحة بمقدار 5 وحدات للأسفل للتمثيل البياني الذي يخص $f(x)$.

2. $h(x) = \frac{2}{x-4} - 5$



التمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ هو انعكاس في المحور $x$، وإزاحة بمقدار وحدتين لليسار، وإزاحة بمقدار وحدة واحدة للأعلى لـ $f(x)$.

3. **تفسير المسائل** يوضح الشكل التمثيل البياني للدالة العكسية، $f(x)$، والتمثيل البياني للدالة العكسية، $k(x)$. اشرح كيفية استخدام التحويلات لكتابة المعادلة التي تخص $k(x)$.




التمثيل البياني الذي يخص $k(x)$ هو انعكاس في المحور $x$، وإزاحة بمقدار وحدتين لليسار وإزاحة بمقدار وحدتين للأعلى عن التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$؛ إذًا، $k(x) = -f(x + 2) + 2 = -\frac{1}{x+2} + 2$.

4. يؤجر بعض الطلاب حافلةً من أجل رحلة لإحدى حدائق الأسماك. وتكلف الحافلة AED 200 وتكلف تذاكر حدائق الأسماك AED 25 لكل شخص.



a. **استخدام نموذج** اكتب دالة توضح التكلفة الإجمالية لكل طالب y. بافتراض أن هناك عدد x من الطلاب وأنهم يشتركون في تكلفة الحافلة بالتساوي. ثم مثل بيانيًا الدالة على المستوى الإحداثي.

$y = \frac{200}{x} + 25$

b. **التفكير بطريقة كمية** ما المجال المناسب للدالة؟ اشرح.

المجال كله أعداد صحيحة موجبة، حيث إنه يجب أن يكون عدد الطلاب عددًا صحيحًا موجبًا.

c. **الحساب بدقة** جد متوسط معدل التغيير على الفترة من $x = 10$ إلى $x = 20$. فسّر النتيجة.

$-1$؛ لكل طالب إضافي، ستقل تكلفة كل طالب بمقدار AED 1.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



### التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

استخدم **الجزء 4** لتناول **م. م. ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. بعد أن يكتب الطلاب المعادلة ويمثلونها بيانيًا، يمكن أن يوضح إجراء متابعة قصيرة للصف للطلاب مدى فعالية هذا النموذج. قد يستخدم الطلاب المعادلة أو التمثيل البياني للإجابة على بعض الأسئلة الإضافية عن الرحلة. على سبيل المثال، كم عدد الطلاب الذين يتعين عليهم الذهاب إلى الرحلة لكي تكون التكلفة الإجمالية لكل طالب أقل من AED 30؟ بإمكان الطلاب حل المتباينة $\frac{200}{x} + 25 < 30$، أو يمكنهم استخدام حاسباتهم للاطلاع على جدول قيم للدالة. يمكنك أيضًا استغراق بضع دقائق لمناقشة القصور في النموذج. مثلاً، يكون النموذج واقعيًا فقط على الأرجح حتى عدد معين من الطلاب، وبتجاوز هذا العدد سيتعين عليهم استئجار حافلة أخرى.

# 2.4 التمثيل البياني للدوال النسبية

## المعايير

**معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

## المتطلبات الأساسية

- تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل
- تمثيل الدوال بيانيًا
- تحديد القيم التي يكون عندها تعبير ما غير معرّف

## مثال 1

### نصيحة للتدريس

م.م. ر 7

بينما يستكشف الطلاب التمثيلات البيانية لمجموعة مختلفة من الدوال النسبية، أكّد على أنهم بفهم بنية التعبير النسبي يمكنهم التنبؤ بالسمات الأساسية للتمثيل البياني للدالة، بما فيها الأصفار وخطوط التقارب والسلوك الطرفي. ومن الضروري تذكر أن مجال الدالة النسبية دائمًا ما يكون محصورًا على القيم التي تجعل المقام غير صفري وذلك لفهم خطوط التقارب ونقاط الانفصال.


## 2.4 التمثيل البياني للدوال النسبية


**الأهداف**

- تمثيل الدوال النسبية بيانيًا.
- مقارنة خواص الدوال النسبية، بما فيها الأصفار وخطوط التقارب.
- فهْم كيف تؤثر القيود المفروضة على مجال الدالة النسبية على تمثيلها البياني.

**الدالة النسبية** لها معادلة بصيغة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث تكون $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود و $b(x) \neq 0$.

**المفهوم الأساسي** **الأصفار وخطوط التقارب الرأسية**

بافتراض أن الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث لا تكون بين $a(x)$ و $b(x)$ عوامل مشتركة بخلاف الرقم 1.

$f(x)$ به صفر في كل قيم $x$ التي فيها $a(x) = 0$.

إذًا، التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ به تقاطع المحور $x$ في كل قيم $x$ التي فيها $a(x) = 0$.

$f(x)$ غير معرّف في كل قيم $x$ التي فيها $b(x) = 0$.

إذًا التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ به **خط تقارب رأسي** في كل قيم $x$ التي فيها $b(x) = 0$.

**مثال 1** **استكشاف المجال والأصفار وخطوط التقارب الرأسية**

a. **استخدام البنية** فكّر في الدالة $f(x) = \frac{x^3}{2x+2}$. صِف أي قيود على مجالها، وحدد أصفارها وخطوط التقارب الرأسية فيها. اشرح إجاباتك.

**المجال هو $\{x \mid x \neq -1\}$، لأنه حين يتساوى مقام الدالة $x = -1$ مع الصفر. وللدالة خط تقارب رأسي عند $x = -1$.**

**وللدالة صفر عند $x = 0$، لأن البسط يساوي الصفر عندما يكون $x = 0$.**

b. **استخدام البنية** قارن الدالة $g(x) = \left(\frac{x^3}{2x+2}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)$ مع $f(x)$ من **الجزء a**. قيم تتشابه وقيم تختلف مجالاتهما وأصفارهما وخطوط التقارب الرأسية الخاصة بهما وسلوكياتهما الطرفية؟

تذكّر أن السلوك الطرفي يتضمن تحليل قيم الدالة عند اقتراب $x$ من اللانهاية الموجبة واللانهاية السالبة.

**مجال $g(x)$، مثل مجال $f(x)$، ويستثني $x = -1$. ومجال $g(x)$ يستثني أيضًا $x = 1$، الذي يجعل مقام العامل الثاني مساويًا للصفر. إذًا $g(x)$ لها خط تقارب رأسي عند كلٍّ من $x = -1$ و $x = 1$. مثل $f(x)$، فإن $g(x)$ لها صفر واحد فقط عند $x = 0$. السلوك الطرفي لـ $f(x)$ هو $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$. وبالمثل، السلوك الطرف لـ $g(x)$ هو $g(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ و $g(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$.**

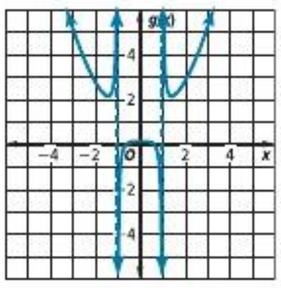

McGraw-Hill Education © محفوظ لصالح مؤسسة محمد للنشر والتأليف

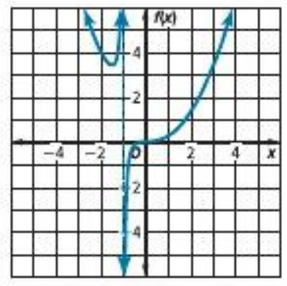



## معلومات أساسية رياضية

توفر دراسة الدوال النسبية بعض التهيئة المهمة لحساب التفاضل والتكامل. فهي تقدم مفهوم خط التقارب وفكرة الاقتراب من قيمة ما دون الوصول إليها بالضرورة، وهو ما يرتبط بفكرة الحدود. بالإضافة لذلك، يؤدي تكامل الدالة النسبية إلى تقديم تعريف للوغاريتم الطبيعي والأساس الطبيعي. وفي حساب التفاضل والتكامل الأكثر تقدمًا، يمكن استخدام الدوال النسبية لتمثيل سلوك الدوال الأخرى الأكثر تعقيدًا والظواهر الطبيعية.

**c. التواصل بدقة** استخدم مزايا التمثيل البياني المحددة في **الجزأين a و b** لتمثيل كلّ من $g(x)$ و $f(x)$ بيانيًا على الشبكات الموضحة. أي مزايا التمثيلين البيانيين يمكنك التنبؤ بها من المعادلات، وأيها احتجت إلى جدول القيم لإيجادها؟




تم التنبؤ بخطوط التقارب والأصفار والمجال والسلوك الطرفي من المعادلات. وكانت هناك حاجة إلى جدول من القيم لإيجاد فترات تزايد الدالة أو تناقصها.

**d. استخدام البنية** التمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ يبدو متماثلاً في المحور $y$. تحقق من هذا باستخدام القيم $x = 2$ و $x = -2$ و $x = 3$ و $x = -3$. لماذا من المنطقي بناءً على المعادلة أن يتواجد هذا التماثل؟

$g(2) = \left(\frac{8}{6}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$, $g(-2) = \left(\frac{-8}{-2}\right)\left(\frac{-2}{-3}\right) = \frac{8}{3}$, $g(3) = \left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16}$, $g(-3) = \left(\frac{-27}{-4}\right)\left(\frac{-3}{-4}\right) = \frac{81}{16}$.

إذًا $g(2) = g(-2)$، و $g(3) = g(-3)$. التماثل منطقي لأن الدالة تتحول لأبسط صورة لتصبح $\left(\frac{x^3}{2x+2}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x^4}{(2x+2)(x-1)} = \frac{x^4}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^4}{2(x^2-1)}$ لأن قُوَى $x$ الأسية زوجية، فتعويض قيمة وسالب هذه القيمة سيؤدي للنتيجة نفسها.

بالإضافة إلى خطوط التقارب الرأسية، يمكن للتمثيل البياني لدالة نسبية أن يكون به خط تقارب أفقي بصيغة $y = c$، أو خط تقارب مائل ليس برأسي ولا أفقي.

**المفهوم الأساسي** **خطوط التقارب الأفقية والمائلة**

الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ يمكن أن يكون بها على الأقل خط تقارب أفقي واحد أو خط تقارب مائل واحد على الأكثر. لا يمكنها أن تحتوي على الاثنين. ويمكن تحديد عدد خطوط التقارب هذه عن طريق مقارنة درجة بسط الدالة ومقامها.

خطوط التقارب الأفقية:

إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فسيكون خط التقارب الأفقي هو $y = 0$.

إذا كانت درجة $a(x)$ تتساوى مع درجة $b(x)$، فخط التقارب الأفقي هو $y = \frac{\text{المعامل الرئيسي لـ } b(x)}{\text{المعامل الرئيسي لـ } a(x)}$.

إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.

خطوط تقارب مائلة:

إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر بدرجة واحدة من درجة $b(x)$، فخط التقارب المائل هو $y = \frac{a(x)}{b(x)}$ دون الباقي.

وإلا، فليس هناك خط تقارب مائل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



**المثال 1 (يُتبع)**

### الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك تبسيط التعبير $g(x)$؟ **جد حاصل ضرب بسطي العاملين وحاصل ضرب مقامي هذين العاملين.**
- هل هناك حدود على عدد خطوط التقارب الأفقية التي يمكن أن تكون لدالة نسبية؟ هل يجب أن تحتوي الدالة النسبية على خط تقارب واحد على الأقل؟ **لا؛ ليس هناك حدود على عدد خطوط التقارب وليس بالضرورة أن يكون واحدًا.**

### التدريس المتمايز

قد يستفيد الطلاب الذين على معرفة بالفرضيات المفاهيمية من النظر إلى النمط العام المتضمن في قواعد تحديد خطوط التقارب الأفقية والمائلة. وقد يتعرفون عليه على هيئة $x \to \infty$، حيث تقترب قيمة التعبير كثير الحدود من قيمة حدّه الرئيسي. ولذلك، تقترب قيمة التعبير النسبي من نسبة الحدود الرئيسية بالبسط والمقام.

وبالتالي، عندما تكون درجة المقام أكبر، تقترب الدالة من 0 (فينشأ خط تقارب أفقي عند $y = 0$). عندما يكون للبسط والمقام الدرجة نفسها، تقترب الدالة من نسبة معاملات الحدود الرئيسية. وعندما تكون درجة البسط أكبر، تزداد الدالة أو تتناقص حيث $x \to \infty$. وبالتالي لن يكون هناك خط تقارب أفقي.

## مثال 2

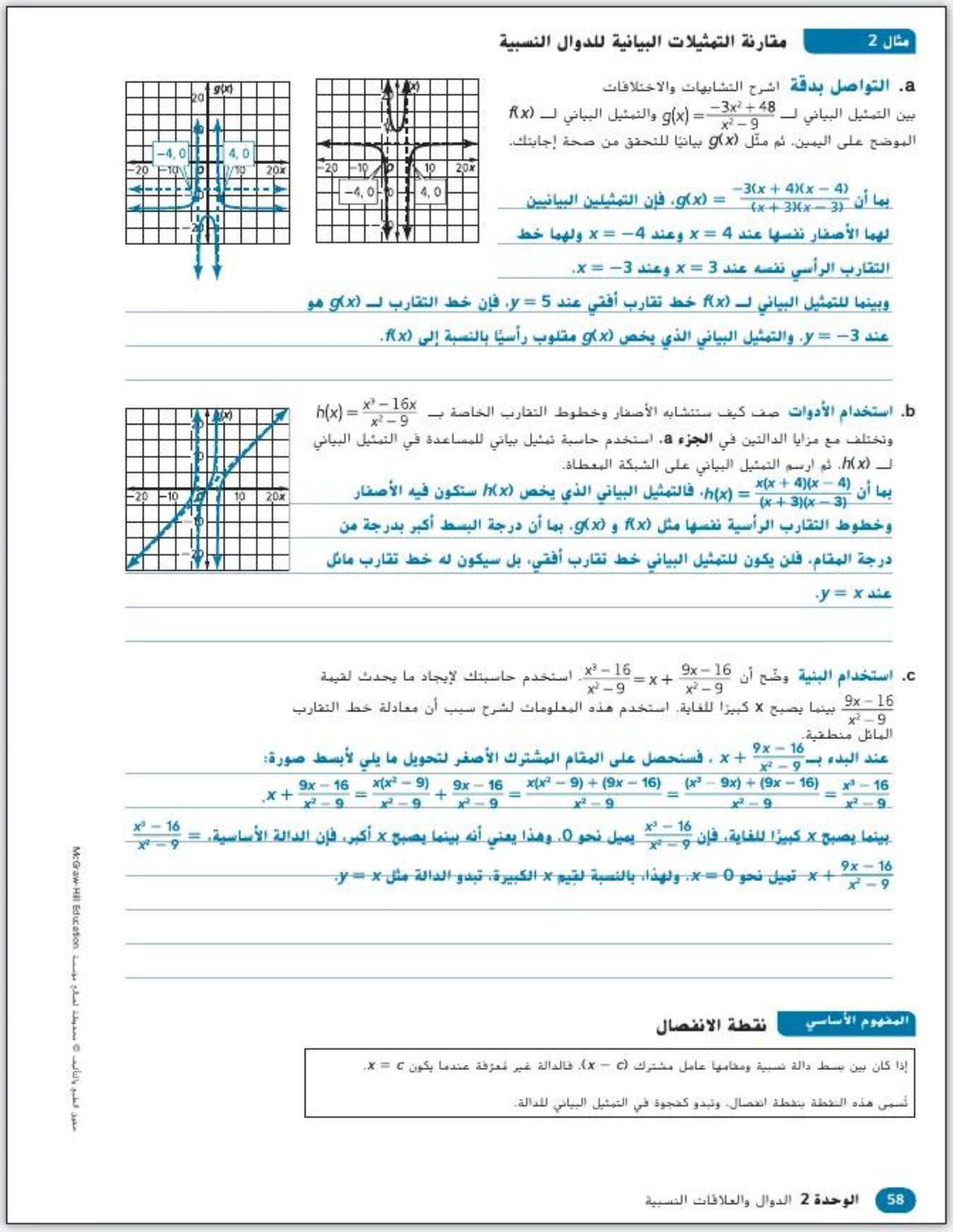
### نصيحة للتدريس

م. م. ر1

ناقش الصورتين المستخدمتين لكتابة معظم الدوال النسبية: صورة التوزيع وصورة التحليل إلى العوامل. تسمح كل صورة بالاطلاع على بعض سمات التمثيل البياني. فصورة التوزيع تساعد في الكشف عن خط التقارب أو خط التقارب المائل، إذا وُجِد، وتبسيط عملية حساب نقطة التقاطع مع المحور **y**. أما صورة التحليل إلى العوامل فيفيد في تحديد أي خطوط تقارب رأسية وأصفار وفجوات.

### الأسئلة الداعمة

- ما الذي يخبرك به العامل $3-$ الموجود في بسط الدالة $g(x)$ عن تمثيلها البياني؟ **يشير إلى أن التمثيل البياني سوف ينقلب رأسيًا بالنسبة إلى دالة ذات صلة دون وجود عامل سالب.**
- عند قسمة البسط على المقام لتحديد خط تقارب مائل، لماذا يمكنك إهمال الباقي؟ **بينما $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$، سوف تقترب قيمة الباقي من الصفر. وتعكس هذه القيمة الفجوة المتضائلة بين الدالة وخط التقارب.**



**مثال 2** مقارنة التمثيلات البيانية للدوال النسبية

**a. التواصل بدقة** اشرح التشابهات والاختلافات بين التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{-3x^2 + 48}{x^2 - 9}$ والتمثيل البياني لـ $f(x)$ الموضح على اليمين. ثم مثّل $g(x)$ بيانيًا للتحقق من صحة إجابتك.







بما أن $g(x) = \frac{-3(x + 4)(x - 4)}{(x + 3)(x - 3)}$، فإن التمثيلين البيانيين لهما الأصفار نفسها عند $x = 4$ وعند $x = -4$ ولهما خط التقارب الرأسي نفسه عند $x = 3$ وعند $x = -3$.

وبينما للتمثيل البياني لـ $f(x)$ خط تقارب أفقي عند $y = 5$، فإن خط التقارب لـ $g(x)$ هو عند $y = -3$. والتمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ مقلوب رأسيًا بالنسبة إلى $f(x)$.

**b. استخدام الأدوات** صف كيف ستتشابه الأصفار وخطوط التقارب الخاصة بـ $h(x) = \frac{x^3 - 16x}{x^2 - 9}$ وتختلف مع مزايا الدالتين في **الجزء a**. استخدم حاسبة تمثيل بياني للمساعدة في التمثيل البياني لـ $h(x)$، ثم ارسم التمثيل البياني على الشبكة المعطاة.




بما أن $h(x) = \frac{x(x + 4)(x - 4)}{(x + 3)(x - 3)}$، فالتمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ ستكون فيه الأصفار وخطوط التقارب الرأسية نفسها مثل $f(x)$ و $g(x)$. بما أن درجة البسط أكبر بدرجة من درجة المقام، فلن يكون للتمثيل البياني خط تقارب أفقي، بل سيكون له خط تقارب مائل عند $y = x$.

**c. استخدام البنية** وضّح أن $\frac{x^3 - 16}{x^2 - 9} = x + \frac{9x - 16}{x^2 - 9}$. استخدم حاسبتك لإيجاد ما يحدث لقيمة $\frac{9x - 16}{x^2 - 9}$ بينما يصبح x كبيرًا للغاية. استخدم هذه المعلومات لشرح سبب أن معادلة خط التقارب المائل منطقية.

عند البدء بـ $x + \frac{9x - 16}{x^2 - 9}$، فسنحصل على المقام المشترك الأصغر لتحويل ما يلي لأبسط صورة: $x + \frac{9x - 16}{x^2 - 9} = \frac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 9} + \frac{9x - 16}{x^2 - 9} = \frac{x(x^2 - 9) + (9x - 16)}{x^2 - 9} = \frac{(x^3 - 9x) + (9x - 16)}{x^2 - 9} = \frac{x^3 - 16}{x^2 - 9}$.

بينما يصبح x كبيرًا للغاية، فإن $\frac{x^3 - 16}{x^2 - 9}$ يميل نحو 0. وهذا يعني أنه بينما يصبح x أكبر، فإن الدالة الأساسية، $\frac{x^3 - 16}{x^2 - 9} = x + \frac{9x - 16}{x^2 - 9}$ تميل نحو $x = 0$. ولهذا، بالنسبة لقيم x الكبيرة، تبدو الدالة مثل $y = x$.

**المفهوم الأساسي** نقطة الانفصال

إذا كان بين بسط دالة نسبية ومقامها عامل مشترك $(x - c)$، فالدالة غير مُعرّفة عندما يكون $x = c$.

تُسمى هذه النقطة بنقطة انفصال. وتبدو كفجوة في التمثيل البياني للدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw Hill Education



### التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

في **المثال 3**، يجب على الطلاب تحليل التعابير النسبية ذات العامل المشترك بين كل من البسط والمقام وتفسيرها.

ويجب عليهم فهم أن العامل المشترك يمثل نقطة انفصال، وإدراك أنه من الممكن تجاهله عند تحديد نقاط التقاطع أو خطوط التقرب بالتمثيل البياني. وفي الحقيقة، فإن العامل المشترك لا تأثير له على شكل المنحنى أو اتجاهه. مع ذلك، يجب على الطلاب تذكر أنه يمثل فجوة في التمثيل البياني ولذلك لا يمكن تجاهله كليًا. وبتحليل بنية صورة العوامل المحللة والصورة الموزعة للدالة النسبية، يمكنهم استخلاص نتائج عن الجوانب المختلفة للتمثيل البياني، بالاستفادة من **م. م. ر 7**.

## مثال 3

### نصيحة للتدريس

م.م.ر7

نظرًا لأن الحاسبات والبرمجيات قد لا تعرض نقاط الانفصال، فذكّر الطلاب بإضافة تلك النقاط إلى تمثيلاتهم البيانية.

### الأسئلة الداعمة

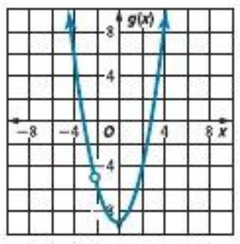
- كيف يمكنك تأكيد أن نقطة ما تمثل نقطة انفصال؟ **بالتعويض عن الإحداثي $x$ للنقطة في المعادلة الأصلية. فإذا تساوت الدالة مع $\frac{0}{0}$، فإن النقطة نقطة انفصال.**
- كيف تؤثر نقطة الانفصال على مكان أية نقاط تقاطع أو خطوط تقارب بالتمثيل البياني؟ **إذا كانت نقطة الانفصال على المحور، فلا يمكن أن تحتوي نقاط التقاطع بالدالة على تلك القيمة. وإلا فإن نقطة الانفصال لا تؤثر على مكان نقاط التقاطع أو خطوط التقارب أو شكل التمثيل البياني أو اتجاهه.**

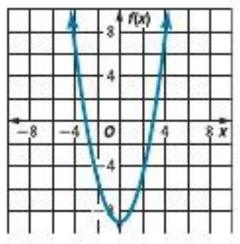
**مثال 3** **تمثيل الدوال بيانيًا بنقاط الانفصال**

**a. استخدام البنية** ما مجال $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x + 2}$؟ كيف يرتبط التمثيل البياني لـ $f(x)$ بالتمثيل البياني لـ $g(x) = x^2 - 9$؟ مثّل الدالتين بيانيًا على الشبكات المعطاة.

المجال هو $\{x \mid x \neq -2\}$. بما أن $f(x) = \frac{(x+3)(x-3)(x+2)}{(x+2)}$، وإلغاء العامل $(x + 2)$ ينتج عنه $g(x) = x^2 - 9$.

ولكن، بما أن $f(x)$ غير مُعرّفة عندما يكون $x + 2 = 0$، فإن تمثيلها البياني له نقطة انقطاع عند $x = -2$. ولتمثيل $f(x)$ بيانيًا، مثّل $g(x)$ بيانيًا وأزل $(-5, -2)$ من التمثيل البياني.



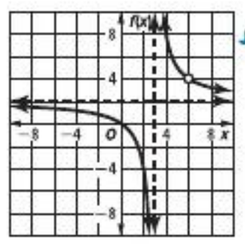




**b. استخدام البنية** ما قيم $x$ المستثناة من مجال $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$؟ كيف تُوضّح هذه القيم المستثناة على التمثيل البياني لـ $f(x)$؟

جد الدالة التي تنتج عند إزالتك لعامل مشترك من البسط والمقام الخاصين بـ $f(x)$. وحدد التقاطعات وخطوط التقارب الخاصة بالدالة في أبسط صورها. ثم استخدم هذه المعلومات لتمثيل $f(x)$ بيانيًا.

بما أن $f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}$، فإن القيمتين $x = -\frac{1}{2}$ و $x = 2$ مُستثنتين من المجال.

وسيكون للتمثيل البياني خط تقارب رأسي عند $x = -\frac{1}{2}$ ونقطة انقطاع عند $x = 2$. وإلغاء $(x - 2)$ ينتج عنه $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$. كلٌ من $g(x)$ و $f(x)$ له خط تقارب أفقي عند $y = \frac{1}{2}$، وتقاطع مع المحور $x$ بقيمة $-3$، وتقاطع مع المحور $y$ بقيمة 3.




**c. استخدام البنية** صف مزايا التمثيل البياني المبين، وحدد دالة يمثلها هذا التمثيل البياني.

الإجابة النموذجية: التمثيل البياني به صفر عند $x = 0$، وخط تقارب رأسي عند $x = 3$، وخط تقارب أفقي عند $y = 2$، والتمثيل البياني له نقطة انقطاع عند $x = 6$. والدالة التي لها هذه المزايا هي $f(x) = \frac{2x(x-6)}{(x-3)(x-6)} = \frac{2x^2 - 12x}{x^2 - 9x + 18}$.

**d. التعليق على طريقة الاستنتاج** يزعم هاني أن الدالة $y = \frac{(2x)(x-6)^2}{(x-3)(x-6)^2}$ ستستوفي أيضًا شروط التمثيل البياني. هل هاني مُحق؟ هل دالته تماثل دالتك؟

هاني محق. فأُس 2 على حدود $(x - 6)$ لا يؤثر على شكل التمثيل البياني. في هذه الحالة، لا تزال هناك فجوة في التمثيل البياني عند $x = 6$، ولأن القوة الأسية زادت بنفس الكمية في البسط والمقام، فخطوط التقارب لا تتأثر.

الإجابة النموذجية: نعم؛ دالته هي نفسها دالتي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### تلميح تقني

يمكن أن تساعد حاسبة التمثيل البياني أو برمجيات الحاسوب الطلاب على تصور التمثيلات البيانية للدوال النسبية والتحقق من دقة حلولهم. ينبغي على الطلاب معرفة أهمية إعداد نافذة عرض صحيحة. وقد يحتاجون إلى تكبير النافذة أو تصغيرها للحصول على رؤية أفضل لسلوك التمثيل البياني بالإضافة لمواقع الأصفار المتعددة وخطوط التقارب.

## تمرين

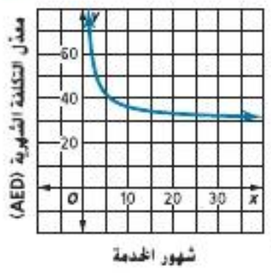
**تطلب التمارين 1 و 3 و 4** من الطلاب تمثيل دالة نسبية بيانيًا وتفسير إحدى السمات الأساسية بالتمثيل البياني بدلالة الكميات المتضمنة. وتلك مهارات مهمة في **م. م. ر 4**، والذي يتطلب منهم توضيح العلاقات المهمة باستخدام التمثيلات البيانية وتحليل تلك العلاقات رياضيًا لاستخلاص النتائج.

في **الجزء 2**، يجب على الطلاب تحديد الفرق بين مجال كل دالة والطريقة التي يرتبط بها بالتمثيلات البيانية لهاتين الدالتين.

يطلب **الجزء 3** من الطلاب كتابة معادلة وتمثيلها بيانيًا. ويجب على الطلاب بعد ذلك تفسير سمات التمثيل البياني في السياق المقدم.

**تدريب**

1. **استخدام نموذج** تكلف شركة تلفزيون كابلي عملاءها برسوم تركيب بقيمة AED 60 بالإضافة إلى AED 30 في الشهر مقابل الخدمة. اكتب ومثّل بيانيًا دالة تمثل متوسط التكلفة الشهرية كدالة لعدد شهور الخدمة. اشرح معنى خط التقارب الأفقي في سياق المسألة.

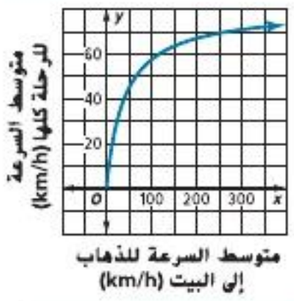



**الدالة التي يمكن استخدامها كنموذج لهذا الموقف هي $f(x) = \frac{60 + 30x}{x}$، مع تقييد المجال إلى $x > 0$. يشير خط التقارب الأفقي إلى أن متوسط التكلفة الشهرية سيقترب من AED 30 عندما يحتفظ العميل بالخدمة لفترة أطول من الزمن.**

2. **بناء الفرضيات** مُثّل إسراء بيانيًا $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}$. وتستبعد $(x - 4)$ باستخدام تحليل العوامل من البسط والمقام. ثم ترسمُ التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$ في إجابتها. هل هي محقة؟ اشرح إجابتك من ناحية مجال $f(x)$.

**إسراء ليست محقة. فالعامل الذي أزالته يتوافق مع نقطة انقطاع. ودالتها لها مجال مكون كله من أعداد حقيقية باستثناء $x = -1$، ولكن مجال $f(x)$ يستثني أيضًا $x = 4$، إذًا $g(x)$ ليست الدالة نفسها مثل $f(x)$. وسيكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مطابقًا تقريبًا لتمثيلها البياني ولكن سيحتوي على فجوة عند (4, 0.4).**

3. في رحلة بالسيارة لزيارة كلية قريبة، تقطع عائلة علي في المتوسط 40 km/h.




a. **تفسير المسائل** حدّد ومثّل بيانيًا دالة تمثل متوسط السرعة للرحلة بكاملها، من ناحية متوسط السرعة في رحلة العودة. (تلميح: اكتب أولاً تعبيرًا لمتوسط السرعة من ناحية المسافة ومدتي رحلة الذهاب ورحلة العودة. ثم عبّر عن الزمن من ناحية السرعة والمسافة.)

**السرعة المتوسطة $= \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{r_1} + \frac{d}{r_2}} = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$، حيث يكون $r_1$ و $t_1$ هما متوسط السرعة والزمن في اتجاه واحد ويكون $r_2$ و $t_2$ هما متوسط السرعة والزمن في رحلة العودة. والتبسيط والتعويض عن 40 بـ $r_1$ وعن $x$ بـ $r_2$ يؤدي إلى $f(x) = \frac{80x}{x + 40}$.**

b. **استخدام نموذج** إذا قطعت العائلة في المتوسط 60 km/h في رحلة العودة، فهل يساوي متوسط السرعة للرحلة بالكامل 50 km/h؟ لمَ أو لمَ لا؟ ما خط التقارب الأفقي، وما الذي يمثله في سياق هذه المسألة؟

**عندما يكون $x = 60$، فإن $f(x) = 48$، إذًا فمتوسط الرحلة بالكامل أقل من 50 km/h. وهذا بسبب قضاء وقت أكثر في القيادة على سرعة 40 km/h من القيادة على سرعة 60 km/h. خط التقارب الأفقي هو $f(x) = 80$. وهو يمثل متوسطًا عامًا للسرعة الذي لا يمكن للعائلة تحقيقه؛ حيث كان سينبغي عليهم السفر إلى المنزل بسرعة لانهائية والعودة دون انقضاء أي زمن.**

محقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### أخطاء شائعة

عند تحليل دالة أو تمثيل بياني، قد يجد الطلاب صعوبة في التمييز بين الأصفار ونقاط التقاطع وخطوط التقارب الأفقية أو الرأسية ونقاط الانفصال بالتمثيل البياني. وعندما يكونون في حيرة ذكّرهم بالتفكير في أهمية الصفر الذي قد يظهر في بسط الدالة أو مقامها: الصفر في المقام يعني أن الدالة غير معرّفة، بينما في البسط (مع مقام غير صفري) فيعني أن قيمة الدالة تساوي صفرًا. اقترح على الطلاب إنشاء خريطة مفاهيم تلخص الطريقة التي تؤثر بها العلاقة بين درجة البسط والمقام على خط التقارب الأفقي أو خط التقارب المائل.

يتطلب **الجزء 4** من الطلاب تقييد مجال الدالة بناءً على السياق المقدم وتفسير شكل التمثيل البياني وفقًا لما يمثله.

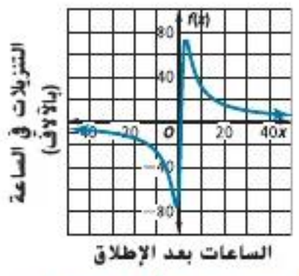
في **الجزء 5**، يجب على الطلاب تحديد السمات الأساسية للتمثيل البياني لتحديد دالة تمثل ذلك التمثيل البياني. وخلال هذه العملية، يتعين على الطلاب أيضًا الربط بين مجال الدالة وتمثيلها البياني.

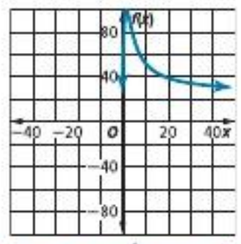
في **الجزء 6**، يرسم الطلاب تمثيلاً بيانيًا لمعادلات أربع دوال نسبية مختلفة ولكن مترابطة، والمقارنة بين التمثيلات البيانية.

## تناول المعايير

| التمرين | م. م. ر |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1,4 |
| 4 | 4 |
| 5 | 7 |
| 6 | 7 |

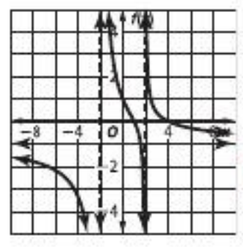
4. **استخدام نموذج** يستخدم استوديو موسيقيّ الدالة $f(x) = \frac{300x}{x^2+4}$ لتقدير عدد التنزيلات في الساعة (بالآلاف) في الساعات التالي لإطلاق أغنية جديدة على الإنترنت. مثّل الدالة بيانيًا. ثم قيّد مجال الدالة حسبما يتطلبه السياق. ومثّل الدالة بيانيًا باستخدام المجال المُقيّد. اشرح شكل التمثيل البياني في سياق المسألة.



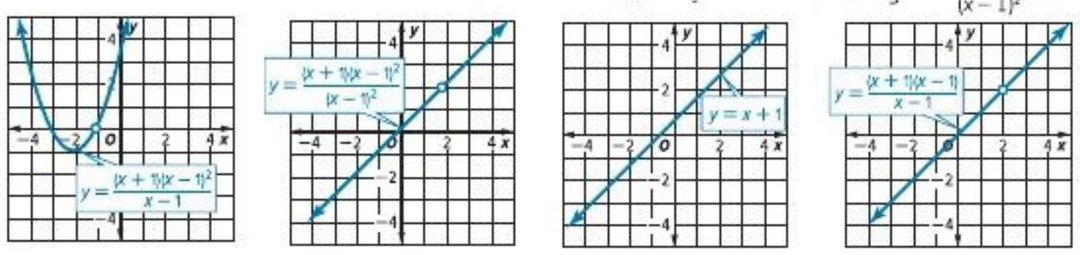
**يُظهر التمثيل البياني ارتفاعًا في الطلب في الساعات الأولى من إطلاق الأغنية؛ ثم يبدأ معدل التنزيلات في الانخفاض بسرعة في البداية ثم بمعدلٍ أبطأ.**

5. **استخدام البنية** حدد مجال التمثيل البياني وأصفاره وتقاطعاته وخطوط التقارب فيه. وحدد دالة تتوافق مع التمثيل البياني.



**الإجابة النموذجية: المجال هو $\{x \mid x \neq -2$ و $x \neq 2\}$. التمثيل البياني به أصفار عند $x = 1$ وعند $x = 4$ وتقاطع مع المحور $y$ عند $(0, 1)$. والتمثيل البياني له خط تقارب رأسي عند $x = -2$ وعند $x = 2$ وله خط تقارب أفقي عند $f(x) = -1$ بالنسبة إلى $x \leq 2$ أو $x \leq -2$. والدالة التي لها هذه المزايا هي $f(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$.**

6. **التمثيل البياني** فكّر في الدوال $y = \frac{(x+1)(x-1)^2}{x-1}$ و $y = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$ و $y = x+1$ و $y = \frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2}$. مثّل كل دالة بيانيًا. أيّ منها، إن وُجد، متكافئتان؟




**التمثيلات البيانية لـ $y = \frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2}$ و $y = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$ هما متكافئتان. وكلاهما يُمثلان الخط $y = x + 1$ بفجوة عند $x = 1$. تُعد $y = x + 1$ مكافأة لهما تقريبًا ولكن تنقصها الفجوة. $y = \frac{(x+1)(x-1)^2}{x-1}$ مختلف تمامًا لأن الفارق في الأسس لم يعُد 1.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

**يتطلب م. م. ر 2** من الطلاب أن يكونوا قادرين على الربط بين الكميات الموضحة رياضيًا والسياق. وفي **الجزء 3** يجب على الطلاب ربط القيم الواردة في التمثيل البياني بالعلاقات التي تمثلها في الحياة اليومية. يجب أن يشرح الطلاب لماذا متوسط السرعة ليس هو متوسط السرعة في كل مرحلة من الرحلة. ويجب عليهم أن يشرحوا أهمية خط التقارب الأفقي.

# 2.5 حل المعادلات والمتباينات النسبية

## المعايير

**معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

## المتطلبات الأساسية

- إيجاد المقام المشترك الأصغر
- إجراء العمليات على التعابير النسبية
- تمثيل الدوال النسبية بيانيًا وتحليلها

## مثال 1

### نصيحة للتدريس

إذا واجه الطلاب صعوبة في كتابة **للجزء a**، فاطلب منهم التفكير في مسألة أكثر مباشَرة: إيجاد النسبة المئوية إذا أحرز ممدوح هدفًا في كل رمية من الرميات الحرة الأربع التالية. يمكن للطلاب استخدام البنية في هذه المسألة الأكثر مباشَرة لكتابة المعادلة باستخدام متغير.

م.م.ر 2

### الأسئلة الداعمة

- لماذا يجب أن يكون عدد الرميات الحرة المحرزة متتاليًا في هذه الدالة؟ **إذا تم الإخفاق في بعض محاولات الرميات الحرة، فإن المتغيرات في البسط والمقام ستختلف.**
- هل $9\frac{2}{11}$ حل منطقي في سياق هذه المسألة؟ **لا، لأنه من غير الممكن وجود كسور للرمية الحرة.**

2.5 حل المعادلات والمتباينات النسبية

**الأهداف**

- تكوين معادلات ومتباينات نسبية بمتغير واحد لحل المسائل.
- حل المعادلات النسبية وشرح أهمية الحلول الدخيلة.
- ربط حل المعادلات والمتباينات النسبية بأنظمة حل الدوال في المستوى الإحداثي.

تحتوي **المعادلة النسبية** على تعبير نسبي واحد أو أكثر. يمكنك ضرب كلا طرفي معادلة نسبية في المقام المشترك الأصغر، لتحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.

**مثال 1** **كتابة المعادلات والمتباينات**

**الاستكشاف** أثناء مباراة لكرة السرة، أحرزت نادية 5 رميات حرة من 9 محاولات.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا أحرزت في كل $x$ من رميائها الحرة التالية على التوالي، فاكتب معادلة وحلها يمكن استخدامها لتحديد $x$، عدد الرميات الحرة المُحرزة التي ستصل بنسبة نادية المئوية إلى 75%. اشرح ما يعنيه حلك.

$\frac{5+x}{9+x} = \frac{75}{100} \Rightarrow 100(5+x) = 75(9+x) \Rightarrow 500 + 100x = 675 + 75x$

$25x = 175 \Rightarrow x = 7$. **تحتاج نادية لإحراز 7 رميات حرة على التوالي لتحصل على متوسط بنسبة 75% بالمئة.**

b. **التفكير بطريقة تجريدية** لتنضم نادية إلى الفريق الأساسي، يجب أن تصل نسبة رميائها الحرة إلى 78% بالمئة على الأقل. اكتب متباينة وحلها لتحديد كم عدد الرميات الحرة المتتابعة التي تحتاج لإحرازها حتى تنضم إلى الفريق الأساسي. وإلى أي مجموعة أعداد عليك أن تقيد حلك ولماذا؟ اشرح ما الذي تعنيه نتيجتك في سياق الموقف.

$\frac{5+x}{9+x} \geq \frac{78}{100} \Rightarrow 500 + 100x \geq 702 + 78x \Rightarrow 22x \geq 202 \Rightarrow x \geq 9\frac{2}{11}$

**يجب أن تكون حلول أعداد الرميات الحرة أعدادًا كلية، حيث لا يمكن لنادية إحراز جزء من رمية حرة.**

**وتحتاج نادية لإحراز 10 رميات حرة متتابعة أو أكثر لتنضم إلى الفريق الأساسي.**

حل معادلة نسبية باستخدام الطرق الجبرية أحيانًا ما تنتج عنه قيم ستجعل المقام يساوي صفرًا. وتُسمى هذه الحلول باسم **الحلول الدخيلة** ومن الواجب استبعادها من مجموعة الحل. ولمعرفة ما إذا كان الحل دخيلاً، عوّض بالحل في الدالة الأساسية. فإذا كانت النتيجة غير مُعرّفة، فالحل دخيل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## معلومات أساسية رياضية

تحتوي المعادلات النسبية على تعبير نسبي واحد أو أكثر، ويكون الحل الأسهل لها عن طريق إيجاد المقام المشترك الأصغر وضرب طرفي المعادلة فيه. تؤدي هذه الطريقة إلى تبسيط الكسور، ولكن قد ينتج عنها حلول دخيلة. في التعابير النسبية، يجب استبعاد القيم التي تجعل المقام (أو المقامات) تساوي صفرًا من مجموعة الحل.

نهج آخر لحل المعادلات النسبية هو تمثيل كل طرف من المعادلة بيانيًا كأنه دالة، ورؤية مكان تقاطعهما. في هذه الطريقة، سيكون الإحداثي $x$ لنقطة التقاطع هو الحل لأنه يؤدي إلى قيمة الناتج نفسها لكلا طرفي المعادلة. وتفيد هذه الطريقة في رؤية أي القيم تكون دخيلة لأنها لا تظهر في الرسم البياني.

## مثال 2

### نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

قد يكون من المفيد تكليف الطلاب بتحليل مقام الدالة $f(x)$ إلى العوامل عند حل $f(x) = g(x)$ في **الجزء b**.

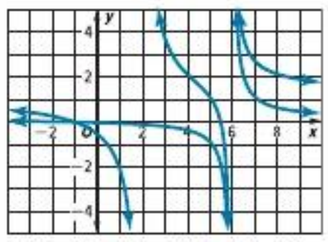
### الأسئلة الداعمة

- في بعض الأحيان، يكون إيجاد أصفار الدّالة مطلوبًا. كيف يمكن كتابة حل $f(x) = g(x)$ على هيئة مسألة تتضمن إيجاد أصفار دالة ما؟ **إن حل $f(x) = g(x)$ مكافئ لإيجاد أصفار الدالة $f(x) - g(x)$.**
- هل $\frac{x^2-4x-8}{(x-6)(x-2)} = \frac{1}{x-6}$ مكافئ لـ $x^2 - 4x - 8 = x - 2$؟ **لا.**

**حل المعادلة الثانية هو $x = 6$ ولكن المعادلة الأولى غير معرّفة عند هذه القيمة. ولكن بإضافة العبارة " عندما تكون $x \neq 6$" بعد المعادلة الثانية يجعل المعادلتين متكافئتين.**

**مثال 2** **استكشاف الحلول الدخيلة**

**الدالة $f(x)$ مُعرّفة بواسطة $f(x) = \frac{x^2-4x-8}{x^2-8x+12}$ والدالة $g(x)$ مُعرّفة بواسطة $g(x) = \frac{1}{x-6}$.**



a. **استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على حاسبتك وارسم النتائج على الشبكة الإحداثية المعطاة. بناءً على التمثيلين البيانيين، كم عدد الحلول التي تتوقع أن تحصل عليها المعادلة $f(x) = g(x)$؟ اشرح.

**أتوقع أن يكون للمعادلة $f(x) = g(x)$ حلٌّ واحد.**

b. **الحساب بدقة** حل جبريًا $f(x) = g(x)$ لإيجاد كل حلولها.

كيف يمكن استخدام التمثيل البياني من **الجزء a** للمساعدة في حل المعادلة؟

$\frac{x^2-4x-8}{x^2-8x+12} = \frac{1}{x-6} \rightarrow \frac{x^2-4x-8}{(x-6)(x-2)} = \frac{1}{x-6} \rightarrow \frac{x^2-4x-8}{(x-6)(x-2)} \cdot (x-6)(x-2) = \frac{1}{x-6} \cdot (x-6)(x-2)$

$\rightarrow x^2 - 4x - 8 = x - 2 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \rightarrow x = -1$

**أو $x = 6$ الحل $x = 6$ يجعل $f(x)$ و $g(x)$ غير مُعرّفين، إذًا فهو حل دخيل. الحل الوحيد هو $x = -1$.**

**يبين التمثيل البياني خط تقارب رأسي عند $x = 6$، إذًا فقيمة $x$ هذه لا يمكن أن تكون حلاً.**

c. **التفكير بطريقة كمّية** قبل حل $f(x) = g(x)$، هل هناك أي طريقة للتعرف على الحلول الدخيلة المحتملة للمعادلة بناءً على المعادلتين الخاصتين بكلٍ من $f(x)$ و $g(x)$؟ اشرح.

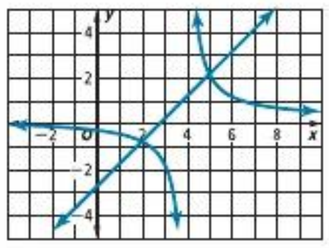
**قيم كلٌّ من $x = 2$ و $x = 6$ تجعل $f(x)$ أو $g(x)$ غير مُعرّفين ولهذا هما حلان دخيلان.**

أثناء حل المعادلات النسبية، هناك حاجة للانتباه الشديد لتجنب الحلول الدخيلة. كما أن هناك تحديات متضمنة في حل المتباينات النسبية. تذكّر أن ضرب كلا طرفي متباينة أو قسمتهما على كمية لا يعني بالضرورة الحصول على متباينة مكافئة، خاصةً عندما تكون الكمية سالبة.

**مثال 3** **حل المتباينات النسبية جبريًا**

**لنفترض أن $f(x) = \frac{2}{x-4}$ و $g(x) = x - 3$.**

a. **استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا كلاً من $f(x)$ و $g(x)$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني الخاصة بك وارسم النتائج على الشبكة الإحداثية المعطاة. كيف يمكن تفسير المتباينة $\frac{2}{x-4} < x - 3$ بيانيًا؟



**تمثل المتباينة قيم $x$ التي يكون فيها التمثيل البياني لـ $g(x)$ أسفل التمثيل البياني لـ $f(x)$.**

b. **التفكير بطريقة تجريدية** ما الذي يمكنك تحديده بشأن قيم $x$ التي يتغير فيها التمثيل البياني لـ $f(x)$ من أسفل التمثيل البياني لـ $g(x)$ إلى أعلى التمثيل البياني لـ $g(x)$ أو العكس؟

**قيم $x$ هذه هي خطوط تقارب رأسية أو مَواضع يتلامس فيها التمثيلان البيانيان لكلٍّ من $f(x)$ و $g(x)$، وحلول المعادلة $f(x) = g(x)$.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

**يمكن أن يكون لمراعاة الدقة (م.م.ر 6)** صورًا عدة في الرياضيات، وتشمل نقل الأفكار والمفاهيم بوضوح، وتفسير التعريفات والنظريات واستخدامها بشكل صحيح، والانتباه إلى التفاصيل عن طريق كتابة الرموز واستخدامها بطريقة ملائمة.

عند حل المعادلات، يجب على الطلاب مراعاة الدقة لتجنب الأخطاء الناتجة عن التهاون في تناول المعادلة. ويمكن أن يساعد التحقق من صحة الحلول عن طريق التعويض بها داخل المعادلة أو التحقق بأكثر من قيمة واحدة واردة بفترة الحل الطلاب على تحقيق الدقة في أجوبتهم. إذا فشل الطلاب في حذف القيم الدخيلة من مجموعة الحل في **المثال 2**، فاطلب منهم التحقق من بعض قيم $x$ الإضافية للتوصل إلى فترات مجموعة الحل الصحيحة.

## مثال 3

### نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

بالنسبة **للجزء b**، كلّف الطلاب بدراسة التمثيلات البيانية للدوال والتفكير فيما يجب حدوثه لإحدى الدول حتى تتغير وتصبح أسفل أو أعلى دالة أخرى. واسألهم إذا كان من الممكن لدالة ما أن "تقفز" فوق دالة أخرى أو إلى أسفلها. تعد هذه طريقة ملائمة لتذكير الطلاب أن الدوال النسبية يمكن أن يكون لها نقاط انقطاع أو خطوط تقارب رأسية فقط، وليس انقطاع قفزي.

### الأسئلة الداعمة

- هل من الضروري استخدام المساعدة التي يقدمها التمثيل البياني لحل المتباينة؟ **لا. يمكن استخدام قيم x عندما تكون أي من الدالتين غير معرّفة، أو حلول الدالة $f(x) = g(x)$ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات. وباستخدام التمثيل البياني، يتم اختبار كل فترة ببساطة، إلا أنه يمكن اختبار كل فترة جبريًا لتحديد ما إذا كانت تحقق المتباينة أم لا.**
- إذا كان مطلوب حل متباينة لها الصورة $f(x) < g(x)$. فهل ستكون حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ متضمنة في مجموعة الحل؟ **لا. لن تكون قيم x هذه متضمنة لأن المتباينة تامة.**

**c. التواصل بدقة** كيف يمكن لإجابتك من **الجزء b** أن تساعدك على تحديد مجموعة الحل للمتباينة؟ اشرح استنتاجك.

**نقاط النهاية في الفترات في مجموعة حل المتباينة هي قيم x الخاصة بخطوط تقارب رأسية أو حلول للمعادلة $f(x) = g(x)$.**

**d. استخدام البنية** حدد قيم x التي تكون فيها $f(x)$ أو $g(x)$ غير معرّفة وحلول $f(x) = g(x)$.

استخدم هذه القيم ورسمك للتمثيلين البيانيين لكلٍّ من $f(x)$ و $g(x)$ من **الجزء a** لكتابة مجموعة حل المتباينة $\frac{2}{x-4} > 3 - x$. مثّل بيانيًا مجموعة الحل على خط أعداد.

**$f(x)$ غير مُعرفة عند $x = 4$ و $f(x) = g(x)$ لها حلان وهما $x = 2$ و $x = 5$. التمثيل البياني لـ $g(x)$ أسفل التمثيل البياني لـ $f(x)$ بالنسبة لكل قيم x الأقل من 2 ولكل قيم x الأكبر من 5. مجموعة الحل هي $x < 2$ أو $x > 5$.**

## مثال 4

### ربط المتباينات بالمستوى الإحداثي

**أكمل الاستكشافات التالية لفهم العلاقة بين نظام الدوال وحل متباينة نسبية بيانيًا.**

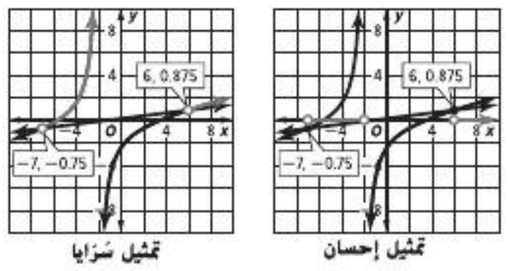
**a. الحساب بدقة** بافتراض أن $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{5}{x+2}$ و $g(x) = \frac{x+1}{8}$. في أي قيم لـ x تكون $f(x)$ غير مُعرّفة؟ $g(x)$؟

**$f(x)$ غير مُعرّفة عند $g(x)$. $x = -2$ مُعرفّة في كل قيم x.**

**b. استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا كلاً من $f(x)$ و$g(x)$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. كيف يمكنك تحديد المتباينة $\frac{x}{4} - \frac{5}{x+2} > \frac{x+1}{8}$ على التمثيل البياني؟

**يتم تمثيل هذه المتباينة بواسطة قيم x التي تتوافق مع أجزاء التمثيل البياني لـ $f(x)$ الذي يقع أعلى التمثيل البياني لـ $g(x)$.**

**c. التعليق على طريقة الاستنتاج** رَسَمَتْ سَرايا التمثيل البياني الموضح أدناه على اليمين لتحديد حلول المتباينة في **الجزء b**. ورسمت زميلتها في الفصل، إحسان، التمثيل البياني الموضح أدناه على اليسار. فأي طالبة حددت مجموعة حل المتباينة في **الجزء b** بشكلٍ سليم؟ برر إجابتك.




تمثيل سَرايا




تمثيل إحسان

**ستكون حلول متباينة بمتغير واحد هي قيم x، وليست الأزواج المرتبة. رَسْمُ أحمد هو التمثيل الصحيح لمجموعة الحل.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### تلميح تقني

من المهم أن يدخل الطلاب البسوط والمقامات بحرص مستخدمين الأقواس حسب الاقتضاء، وذلك حتى تتمكن الحاسبة من تفسير الدالة بالشكل الصحيح. بالإضافة إلى استخدام ميزة INTERSECT في حاسبة التمثيل البياني، تأكد من معرفة الطلاب لطريقة تغيير نافذة العرض أو كيفية الاطلاع على الجدول إذا لم تكن إحدى نقطة التقاطع واضحة في البداية. بإمكانهم أيضًا تغيير دقة القيم الواردة بالجدول عن طريق تحرير ميزة TABLE SET.

**d. الحساب بدقة** استخدم التمثيل البياني لمساعدتك على كتابة الفترات التي تتوافق مع حلول المتباينة في **الجزء b**. اشرح السبب في وجود دائرة مفتوحة عند $x = -2$.

**$x > 6$, $-2 > x > -7$؛ اخط التقارب عند $-2$ يحذف $-2$ من المجال.**

### مثال 5 القوى في المتباينات النسبية

**جد حل المتباينة** $\frac{(x+1)(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+3)^2(x-2)^3} > 0$.

**a. التفكير بطريقة تجريدية** فكّر في العامل $x + 1$. متى يكون هذا العامل 0؟ متى يكون موجبًا؟ متى يكون سالبًا؟

**$x + 1 = 0$ عندما يكون $x = -1$. فهو موجب بالنسبة إلى $x > -1$، وسالب بالنسبة إلى $x < 1$.**

**b. التفكير بطريقة تجريدية** فكّر في العامل $(x + 3)^2$. متى يكون هذا العامل 0؟ متى يكون موجبًا؟ متى يكون سالبًا؟

**$(x + 3)^2 = 0$ عندما يكون $x = -3$. وبخلاف هذا، فهي دائمًا موجبة.**

**c. التفكير بطريقة تجريدية** ما هي كل النقاط التي يكون فيها أي عامل صفرًا؟

**بالإضافة إلى $x = -1$ وإلى $x = -3$، هناك أيضًا $x = -2$ (من $x + 2$)، و $x = 1$ (من $x - 1$)، و $x = 2$ (من $x - 2$).**

**d. التفكير بطريقة تجريدية** فكّر في كل العوامل الأخرى. واملأ الجدول أدناه بإشارة + أو −.

| | $x < -3$ | $-3 < x < -2$ | $-2 < x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $1 < x < 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 1$ | − | − | − | + | + | + |
| $(x - 1)^2$ | + | + | + | + | + | + |
| $x + 2$ | − | − | + | + | + | + |
| $x - 1$ | − | − | − | − | + | + |
| $(x + 3)^2$ | + | + | + | + | + | + |
| $(x - 2)^3$ | − | − | − | − | − | + |

**e. التفكير بطريقة تجريدية** بافتراض أن الدالة هي ناتج ضرب وناتج قسمة كل العوامل أعلاه، فأكمل الجدول أدناه.

| | $x < -3$ | $-3 < x < -2$ | $-2 < x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $1 < x < 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{(x+1)(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+3)^2(x-2)^3}$ | + | + | − | + | − | + |

**f. التفكير بطريقة تجريدية** باستخدام الجدول من **الجزء e**، دوّن حل المتباينة الأصلية $\frac{(x+1)(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+3)^2(x-2)^3} < 0$ اشرح استنتاجك.

**$-2 > x > -1$ أو $1 < x < 2$؛ الإجابة النموذجية: وفقًا للجدول، المكان الوحيد الذي تكون الدالة النسبية فيه هو عندما يكون $-2 < x < -1$ أو $1 < x < 2$. لا تُضمَّن نقاط النهاية لأن المتباينة الأصلية أقل بكثير.**



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

## التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

عند التعليق بطريقة نقدية على الاستنتاج الرياضي للآخرين **(م.م.ر 3)**، فمن غير الكافي أن يذكر الطلاب ببساطة ما إذا كان يوافق على الاستنتاج أم يختلف معه، ولكن عليه أن يقدم حُجة أو تبريرًا لوجهة نظره. تأكد من شرح الطلاب لسبب خطأ إحدى مجموعات الحل الواردة في **الجزء c** من **المثال 4** وكيف يمكن إثبات ذلك. شجع الطلاب على مناقشة مواطن القوة والضعف في استنتاج كل من سلّام وأحمد حتى يشكّلوا رابطًا قويًا بالمعيار **م.م.ر 3**.

### مثال 4

**م.م.ر 6**

## نصيحة للتدريس

نظرًا لأهمية الدقة الدائمة في الجبر، يتطلب حل المتباينات باستخدام المستوى الإحداثي الانتباه إلى التفاصيل والرموز. بالنسبة إلى **الجزء b**، كلّف الطلاب بإيجاد قيمة الدوال عند إحدى قيم $x$ المختارة لكي يبحثون عن علاقة بين المتباينة والتمثيلات البيانية للدوال. والدقة مطلوبة في **الجزء c** لأن الرسم الظاهر على جهة اليمين يبين بوضوح المكان الذي تقع فيه الدالة $f(x)$ فوق $g(x)$ إلا أن هذه النقاط ليست هي الحلول. ذكّر الطلاب بأن حلول المتباينات ذات متغير واحد يتم تمثيلها بيانيًا على خط الأعداد.

## الأسئلة الداعمة

- كيف يختلف حل المتباينة عن حل المعادلة؟ **قد تتضمن الحلول الصحيحة للمتباينات فترات وليس أعداد محدودة فقط.**
- لماذا يجب عليك إيجاد أية قيم مستبعدة بالإضافة إلى نقاط التقاطع لدالتين ممثلتين بيانيًا؟ **لأن هذه القيم هي حدود للفترات التي تضم الحلول.**

### مثال 5

**م.م.ر 2**

## نصيحة للتدريس

قد يحتاج الطلاب إلى المساعدة لبحث متى يكون كل عامل سالبًا أو موجبًا ولماذا يهم ذلك عند حل المتباينة الأصلية.

## الأسئلة الداعمة

- لماذا يمكننا التأكد من أن علامات $x + 1$ تتغير مرة واحدة فقط؟ **$y = x + 1$ عبارة عن خط مائل، ولذا فإنه يقطع المحور $x$ مرة واحدة فقط عند النقطة $x = -1$.**
- كيف يمكنني أن أحدد سريعًا على المخطط ما إذا كانت الدالة النسبية النهائية موجبة أم سالبة في فترة محددة؟ **بالنسبة لتلك الفترة، كل ما أحتاجه هو إحصاء عدد العلامات السالبة في المخطط. فإذا كان العدد زوجيًا، فإن العلامات السالبة تقترن في ثنائيات معًا عند الضرب لنحصل على قيمة موجبة. أما إذا كان فرديًا، فهناك إذًا قيمة سالبة إضافية، وبالتالي تكون النتيجة سالبة.**

## تمرين

يطلب **الجزء 1** من الطلاب كتابة معادلة لحل مسألة من الحياة اليومية. يجب على الطلاب أيضًا حل المعادلة بيانيًا بالتعرف على نقطة التقاطع باعتبارها حل المعادلة.

في **الجزء 2**، يجب على الطلاب حل معادلة نسبية والتحقق من عدم وجود حلول دخيلة.

يتطلب **الجزء 3** أن يحل الطلاب معادلة نسبية بتمثيل كل طرف من طرفي التعبير بيانيًا بشكل منفصل وإيجاد نقطة تقاطع.

يطلب **الجزء 4** من الطلاب حل متباينة نسبية.

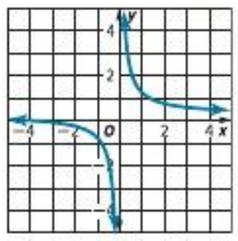
**تدريب**

1. **استخدام نموذج** يستغرق خط وقود واحد 3 ساعات لملء ناقلة نفط. فما السرعة التي يجب بها على خط وقود ثانٍ أن يتمكن بها من ملء ناقلة النفط بحيث، عندما يُستخدمان معًا، يملآن ناقلة النفط في 45 دقيقة؟

   a. اكتب معادلة للحل من أجل إيجاد عدد الساعات، $x$، التي سيستغرقها خط الوقود الثاني لملء ناقلة نفط. اشرح حلّك.

   **$\frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3/4}$ أو $\frac{x+3}{3x} = \frac{4}{3}$؛ يمكن لخط الوقود الأول ملء ناقلة نفط بمعدل $\frac{1}{3}$ ناقلة نفط بالساعة. ومعدل خط الوقود الثاني هو $\frac{1}{x}$ ناقلة نفط بالساعة. والمعدل المشترك للخطين هو $\frac{4}{3} = \frac{1}{3/4}$.**

   b. مثّل بيانيًا الدالة في الشبكة الإحداثية على اليسار. استخدم تمثيلك البياني لتقريب الحل. اشرح طريقتك.

   **الدالة لها قيمة 45 دقيقة، أو $\frac{3}{4}$ من الساعة، حوالي $x = 1$، إذًا فأحد التقريبات المنطقية هو ساعة واحدة، والتعويض بهذه القيمة في المعادلة، يجعل كلا طرفي المعادلة متساويين.**

2. بافتراض أن $\frac{5x}{x-2} = 7 + \frac{10}{x-2}$.

   a. **استخدام البنية** حل المعادلة لإيجاد قيمة $x$. هل حلك حل دخيل؟ اشرح كيف عرفت هذا.

   **$\frac{5x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{1} = 7(x-2) + \frac{10}{x-2} \cdot \frac{x-2}{1} \Rightarrow 5x = 7x - 14 + 10 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$. هذه القيمة دخيلة لأنها ستجعل المقامات في المعادلة الأصلية تساوي صفرًا.**

   b. **التخطيط للحل** كيف يمكنك استخدام الطرق البيانية للتحقق من إجابتك على **الجزء a**؟

   **يمكنني تمثيل كل طرف من المعادلة بيانيًا لرؤية أن التمثيلين البيانيين لا يتقاطعان، ولهذا، سأعرف أنه ليس هناك حل.**

3. **استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ على حاسبة التمثيل البياني خاصتك. ثم استخدم التمثيل البياني لحل $\frac{2}{x^2 - x} = \frac{1}{x-1}$. اكتب حلك أدناه واشرح السبب في جدوى هذه الطريقة.

   **$x = 2$. تُجدي هذه الطريقة لأن الإحداثي $x$ الخاص بنقطة التقاطع سيجعل كلا طرفي المعادلة مساويًا للقيمة نفسها، ولا تظهر أي جذور دخيلة.**

4. افترض أن $f(x) = -x - 2$ وأن $g(x) = -\frac{3}{x}$.

   a. **الحساب بدقة** جِد أي قيم $x$ تكون فيها $f(x)$ أو $g(x)$ غير مُعرّفة وأي حلول لـ $f(x) = g(x)$.

   **$g(x)$ هي غير مُعرّفة عند $x = 0$. والحلول لإيجاد قيمة $f(x) = g(x)$ هي $x = -3$ و $x = 1$.**

   b. **استخدام البنية** استخدم إجابتك من **الجزء a** والمساعدة من تمثيل بياني لكتابة مجموعة حل المتباينة $f(x) \leq g(x)$. مثّل نتائجك بيانيًا على خط أعداد.

   **$-3 \leq x < 0$ أو $x \geq 1$.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## أخطاء شائعة

عندما يحل الطلاب متباينات نسبية، فقد يحاولون حلّها مثلما يحلون معادلة نسبية. وقد يتذكرون أن ضرب أو قسمة طرفي متباينة ما في كمية سالبة يغير اتجاه المتباينة، إلا أن متغير مثل $x$ قد يظهر كمية موجبة بسبب عدم وجود علامة السالب. عند ارتكاب هذا الخطأ، كلف الطلاب باختبار مجموعة الحل الخاص بهم بيانيًا، فذلك سيمكنهم من التعرف على بعض الأخطاء المرتكبة في عملية الحل الخاصة بهم.

c. **التواصل بدقة** اشرح السبب في أن كل قيمة من **الجزء a** يجب تضمينها أو استبعادها من مجموعة حل المتباينة.

**القيمتان $x = -3$ و $x = 1$ متضمنتان لأنهما تُحققان $f(x) \leq g(x)$. القيمة $x = 0$ مستبعدة لأنها تجعل $g(x)$ غير مُعرّفة.**

5. تُنفق لجنة التخرج AED 1000 للمكان ولمنسق الأغاني بالإضافة إلى AED 35 مقابل كل وجبة مُقدمة. كم عدد الطلاب اللازم حضورهم للتخرج للحفاظ على سعر التذكرة أقل من AED 60؟

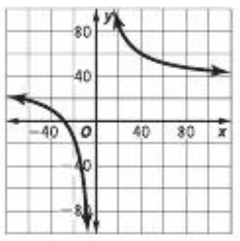
a. **التواصل بدقة** اكتب متباينة تصف هذا الموقف. اشرح كل حد في متباينتك.

**$\frac{1000 + 35x}{x} \leq 60$؛ تكلفة المكان ومنسق الأغاني هي AED 1000، وتكلفة الوجبات هي $x$ AED 35.**

**ومجموع هذين الاثنين هو إجمالي تكلفة التخرج. بالقسمة على عدد الطلاب، $x$، تنتج عنها التكلفة لكل طالب.**

**نرغب في تحديد عدد الطلاب اللازم حضورهم ليصبح متوسط التكلفة أقل من أو يساوي AED 60.**

b. **استخدام الأدوات** التمثيل البياني للدالة التي تمثل نموذجًا عن متوسط تكلفة تذكرة التخرج موضح على اليسار. فاستخدمه لتقريب الإجابة عن هذه المسألة. اشرح طريقتك.




**يهبط التمثيل البياني أسفل $y = 60$ عندما يكون $x = 40$، لذا فيلزم على الأقل حضور 40 طالبًا في التخرج.**

6. **التعليق على طريقة الاستنتاج** استخدم محمود الدالة النسبية $f(x) \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 2x - 3}$ لتحديد حلول $f(x) = 0$. وقد وجد أن $x$ يمكن أن تكون 3 أو 4−. تحقق من عمل محمود أدناه واذكر إذا ما كنت تتفق أو تختلف مع حلوله ولماذا.

| عمل محمود: |
| --- |
| $\frac{(x^2 + x - 12)}{(x^2 - 2x - 3)} = 0$ |
| $\frac{(x^2 + x - 12)}{(x^2 - 2x - 3)} \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0 \cdot (x^2 - 2x - 3)$ |
| $x^2 + x - 12 = 0$ |
| $(x - 3)(x + 4) = 0$ |
| $x = 3$ أو $x = -4$ |

**الإجابة النموذجية: أتفق مع عمل محمود، ولكن يجب استبعاد حله بقيمة 3، لأنه سيجعل مقام $f(x)$ يساوي صفرًا. القيمة 4− فقط تُمثل حلاً.**

7. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يحاول طالب حل المتباينة $\frac{1}{x} < 2$ ووجد أن مجموعة الحل هي $x > \frac{1}{2}$. عمل الطالب موضح أدناه. فحدد ما إذا كنت تتفق أو تختلف مع مجموعة الحل الخاصة به ولماذا. ما الطريقة التي كان بوسع هذا الطالب استخدامها للتحقق من صحة عمله؟

| عمل الطالب: |
| --- |
| $\frac{1}{x} < 2$ |
| $\frac{1}{x} \cdot x < 2 \cdot x$ |
| $1 < 2x$ |
| $\frac{1}{2} < x$ |
| |

**الإجابة النموذجية: أختلف مع مجموعة حله. فضرب كلا طرفي المتباينة في $x$ لا يؤدي إلى متباينة مكافئة إذا كان $x$ سالبًا. وعمله صحيح فقط بالنسبة لقيم $x$ الموجبة. وكان بمقدوره أن يُمثل بيانيًا المعادلتين $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = 2$ وتنظر إلى قيم $x$ التي يكون فيها التمثيل البياني لـ $f(x)$ أسفل التمثيل البياني لـ $g(x)$.**

حقوق الطبع والتأليف © McGraw-Hill Education. جميع الحقوق محفوظة.



في **الجزء 5**، يجب على الطلاب كتابة متباينة لتمثيل مسألة من الحياة اليومية. ويتعين على الطلاب بعد ذلك حل المتباينة بيانيًا.

يتطلب **الجزء 6** أن يعلق الطلاب على حل طلاب آخرين، وذلك لحاجتهم إلى فهم طريقة حل معادلة نسبية.

يطلب **الجزء 7** من الطلاب التعليق على حل طلاب آخرين في حل متباينة نسبية. ويجب على الطلاب فهم طريقة حل المتباينة بشكل صحيح للإجابة عن السؤال.

## تناول المعايير

| التمرين | م.م.ر |
| --- | --- |
| 1 | 4 |
| 2 | 1, 7 |
| 3 | 5 |
| 4 | 6, 7 |
| 5 | 5, 6 |
| 6–7 | 3 |

## التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

تبين المسألتان اللتان تستخدمان التمثيل بالنماذج (**الجزءان 1** و **5**) بقسم التمارين للطلاب كيف يمكن استخدام المعادلات والمتباينات النسبية لحل المسائل المتعلقة بالحياة اليومية والمجتمع ومكان العمل، حسبما يقتضي **م.م.ر 4**. تحدَّ الطلاب للخروج بأمثلة أخرى يمكن حلها بطريقة مشابهة لتعزيز مدى فائدة المعادلات النسبية. بالإضافة لذلك، كلّف الطلاب بمناقشة الافتراضات التي يطرحونها عند وضع معادلات بدلالة قدر محدود من المعلومات. على سبيل المثال، اسألهم عن مدى واقعية وجود خطوط للوقود بسرعات مختلفة أو إذا ما سيكون هناك تكاليف أخرى لحفل التخرج.

## التكلفة على حساب الزمن

سوف يستخدم الطلاب تمثيل الدوال النسبية لاستكشاف التكلفة السنوية لمصباح على حساب فترة صلاحيته.

### المعايير

**معايير الممارسات الرياضية:** تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 2 الممارسات الرياضية **م.م.ر 1، و م.م.ر 2، و م.م.ر 3، و م.م.ر 4.**

### بداية سريعة

تبدأ المهمة بسؤال مهم وصعب، ومن المرجح أن العديد من الطلاب سيشعرون بالقلق أو الحيرة حيال طريقة البدء فيه. قد يقدم ما يلي المساعدة.

- كلّف الطلاب باستخدام جدول لتسجيل التعابير التي تمثل التكلفة السنوية بعد عام وعامين و 3 أعوام و 4 أعوام
$\frac{(50 + 12 \cdot 1)}{1}$; $\frac{(50 + 12 \cdot 2)}{2}$; $\frac{(50 + 12 \cdot 3)}{3}$; $\frac{(50 + 12 \cdot 4)}{4}$
- كلف الطلاب بوضع خط أسفل التغيرات التي تطرأ على التعبير في كل سطر.

### التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. وينص هذا المعيار على أن الطلاب المتفوقين في الرياضيات "يفهمون أن النماذج تعتبر طريقة للتفكير بطريقة كمية وتجريدية (القدرة على الربط بالسياق والفصل عن السياق)". وصُممت هذه المهمة بحيث يقوم الطلاب بعمل نموذج مبدئيًا باستخدام الرموز، وبعد ذلك يتبعونه بعمل نموذج بياني، وأخيرًا يقومون بربط النموذج كله بالسياق مع المقارنة بين التمثيلات البيانية. وبالنظر إلى الطريقة التي تُبنى بها المهام على سابقاتها، فمن الضروري أن يصيب الطلاب في الدالة الأولية.

### مهمة تقويم الأداء

**التكلفة على حساب الزمن**

**قدّم حلاً واضحًا للمسألة. وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.**

يحتاج رامي إلى مصباح جديد. وقلّص خياراته إلى الخيارات الموضحة في الجدول.

| استخدام النماذج | السعر المبدئي | تكلفة الطاقة |
|---|---|---|
| A | 50 | 12 AED/سنة |
| B | 70 | 15 AED/سنة |
| C | 80 | 9 AED/سنة |
| D | 85 | 12 AED/سنة |

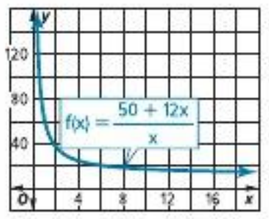
**الجزء A**

رامي يعجبه فعلاً شكل النموذج A، وسعره المبدئي ممتاز. وبافتراض أن التكاليف الوحيدة المرتبطة بالمصباح هي الشراء المبدئي وتكاليف الطاقة، فما التكلفة السنوية للنموذج A كدالة للسنوات $x$؟ اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

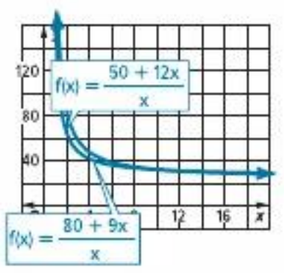
**الجزء B**

ارسم التمثيل البياني للدالة التي وجدتها في **الجزء A**. اشرح المجال وأي أصفار أو خطوط تقارب.




**الجزء C**

قرر رامي أنه سيشتري إما النموذج A أو النموذج C. استخدم الشبكة أدناه لرسم تمثيل بياني لكلا النموذجين. ثم ناقش أي نموذج كنت ستفضله، باستخدام الميزات الأساسية للتمثيل البياني لتبرير إجابتك.




حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



م.م.ر 3

## نصيحة للتدريس

تقدم هذه المهمة فرصًا متعددة لتناول **م.م.ر 3 (بناء فرضية عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. وينص هذا المعيار على أن الطلاب المتفوقين في الرياضيات "يبررون استنتاجاتهم، وينقلونها للآخرين، ويردّون على فرضيات الآخرين". بالنسبة **للجزأين B** و **C**، اقترح على الطلاب مناقشة طرق تفكيرهم واستنتاجاتهم مع أحد الزملاء أو في مجموعات صغيرة.

## أخطاء شائعة

قد يفكر الطلاب أن القيد $x \neq 0$ على المجال سينتج عنه فجوة في التمثيل البياني. ذكّر الطلاب أنه ينبغي وجود خط تقارب لأن الدالة لا تحتوي على عامل مشترك.

## معايير رصد الدرجات

| الجزء | أقصى النقاط | إجابة تستحق الدرجة الكاملة |
|---|---|---|
| A | 2 | $f(x) = \frac{50 + 12x}{x}$ يجب قسمة التكلفة الأولية وتكلفة الطاقة السنوية على عدد الأعوام الإجمالي للحصول على التكلفة السنوية. |
| B | 4 | انظر دليل الطالب التفاعلي للاطلاع على التمثيلات البيانية. ينبغي أن يكون المجال $x > 0$ ليس بسبب وجود خط تقارب عند 0 فحسب، وإنما لأن سياق الموقف لا يسمح إلا بأعوام غير سالبة أيضًا. يحدث خط التقارب الرأسي عند $x = 0$، وهي القيمة التي تجعل مقام الدالة يساوي صفرًا. ويحدث خط التقارب الأفقي عند 12 لأنه كلما كان المصباح قديمًا، كان لتكلفة الطاقة أثر أكبر على التكلفة الإجمالية. لا يوجد أصفار في مجال الدالة. |
| C | 4 | انظر دليل الطالب التفاعلي للاطلاع على التمثيلات البيانية. الإجابة النموذجية: إذا كان من المحتمل أن يستمر المصباح 10 أعوام، فسوف أختار النموذج C. تمر التمثيلات البيانية بنقطة 10 أعوام، وهي النقطة التي تتساوى عندها التكلفة السنوية. وبعد ذلك، يكون النموذج C أقل تكلفة. |
| الإجمالي | 10 | |

# 2 مهمة تقويم الأداء

## الطيران عكس الرياح

سيستخدم الطلاب معرفتهم بجمع وطرح التعابير النسبية لكتابة المعادلات لوصف سرعة الطائرات التي تحلق خلال الرياح المقابلة والرياح الخلفية.

### المعايير

**معايير الممارسات الرياضية:** تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 2 الممارسات الرياضية **م.م.ر 3** و**م.م.ر 7**.

### بداية سريعة

قد يساعد ما يلي الطلاب على البدء.

- ما المعادلة التي تربط بين المسافة والمعدل والزمن؟ **المعدل × الزمن = المسافة**
- بالنسبة للمعدلات والمسافات المختلفة، كيف نعبر عن الزمن الإجمالي؟ **نجمع التعابير الدالة على المسافة/المعدل.**

### مهمة تقويم الأداء

**الطيران عكس الريح**

**قدّم حلاً واضحًا للمسألة. وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.**

حين تطير طائرة من وجهة إلى أخرى، يكون لسرعة الرياح واتجاهها تأثير على مدة الرحلة. على الارتفاعات الشاهقة مثل تلك التي تطير عليها الطائرات (من 9,144-12,192 m)، فإن سرعات الرياح واتجاهاتها ثابتة إلى حد ما. ويُعرف هذا التأثير باسم *التيار النفاث*. ولهذه المهمة، سنفترض أن سرعات الرياح واتجاهاتها ثابتة.

**الجزء A**

افترض أن الطائرة سرعتها ثابتة بقيمة $x$ في رحلة لمسافة $d$. وسرعة الرياح هي $c$. اكتب وحوّل لأبسط صورة لتصل إلى دالة نسبية أحادية الحد لتعبير يمثل زمن رحلة طيران الذهاب والإياب إذا طارت الطائرة عكس الريح متحركةً نحو وجهتها ومع اتجاه الريح في رحلة الإياب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



### التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع **م.م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. يقلل التعبير المبسط الذي يتوصل إليه الطلاب في **الجزء A** مقدار الجبر المطلوب استخدامه في أقسام أخرى بدرجة كبيرة. قد يشعر الطلاب براحة أكبر عند استخدام الفكرة الأولية وهي جمع كل من تعابير "المسافة/المعدل" في كل مرة. وبينما لا يوجد بالتأكيد أي شيء خاطئ أو غير مقبول حول هذا النهج، فإنه يخدم الطلاب أيضًا لإدراك أن وجود تعبير نسبي أحادي الحد ومبسط يتم استخدامه عند الحاجة أفضل من حيث الكفاءة، وأيضًا من حيث تقليل الخطأ المحتمل.

**الجزء B**

تُحلق الطائرات عادةً على سرعات تقترب من 756 km/h. ورحلة الذهاب والإياب من مدينة نيويورك إلى سان فرانسيسكو تستغرق قرابة 12 ساعة. ومسار الرحلة الجوية هو نفسه في كلتي الرحلتين بمسافة 4506 km تقريبًا للاتجاه الواحد. بفرض أن سرعة الرياح واتجاهها ثابتان، ما سرعة الرياح لهذه الرحلة؟

**الجزء C**

وجد عيسى بيانات على الإنترنت عن سرعة التيار النفاث على امتداد المسار الذي ستتخذه رحلته الجوية. واستخدم هذه البيانات لحساب أن الزمن المجموع لرحلتي الذهاب والإياب على مسافة 1287.5 km. فستستغرق الرحلة الجوية في الاتجاه الواحد 50 ساعة إذا كانت سرعة الطائرة سرعة ثابتة بقيمة 804.7 km/h

i) حدد القيمة التي استخدمها عيسى لسرعة الرياح.

ii) هل تعتقد أن البيانات التي استخدمها عيسى كانت صحيحة؟ اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



## نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

يبدأ الطلاب هذه المهمة من خلال إنشاء معادلة من الصفر وينهونها بتحديد ما إذا كانت بعض القيم معقولة في سياق الموقف أم لا. وبالنظر إلى هذه الفلسفة الرياضية، يمكن للطلاب الاستفادة من **م.م.ر 3** لمناقشة أفكارهم بطريقة نقدية مع بعضهم البعض.

## أخطاء شائعة

في **الجزء B**، قد يحاول الطلاب مضاعفة مسافة الرحلة دون أن يدركوا أن هذه الصيغة معدَّة لمسافة الرحلة في اتجاه واحد

## معايير رصد الدرجات

| الجزء | أقصى النقاط | إجابة تستحق الدرجة الكاملة |
|---|---|---|
| A | 6 | $t=\frac{d}{x+c}+\frac{d}{x-c}=\frac{d(x-c)+d(x+c)}{(x+c)(x-c)}=\frac{2dx}{x^2-c^2}$ |
| B | 4 | باستخدام المعادلة من **الجزء A** $12=\frac{2(2800)(470)}{(470)^2-c^2}$ بإيجاد قيمة c، ينتج $470^2-c^2=\frac{2(2800)(470)}{12}; -c^2=\frac{2,632,000}{12}-470^2; c=\sqrt{-\left(\frac{2,632,000}{12}-470^2\right)}\approx\pm 39.6$. |
| C | 8 | i) $50=\frac{2(800)(500)}{(500)^2-c^2}; 500^2-c^2=\frac{2(800)(500)}{50}; -c^2=2(800)(10)-500^2; c=\sqrt{-(16,000-250,000)}\approx\pm 483.7$<br>ii) الإجابة النموذجية: يبدو أن سرعة الرياح شديدة للغاية. فهي قريبة جدًا من سرعة الطائرة، وهو ما يعني أن الطائرة ستحلق بسرعة 2.6 kmph للجزء الواحد من الرحلة. البيانات التي وجدها إسلام على شبكة الإنترنت غير دقيقة. |
| الإجمالي | 18 | |

## تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يواجهون صعوبة في **الجزء 2** قد لا يدركون أن بإمكانهم جمع مساحتين، ثم استخدام المساحة المُجمَّعة والطول لكتابة تعبير يمثل العرض.

الطلاب الذين يجيبون على **الجزء 6** بشكل خاطئ ربما يكونون قد ارتكبوا خطأً في حل المعادلة التربيعية. ومن الأفضل حل المعادلة التي تنتج عن هذه المسألة باستخدام الصيغة التربيعية.



1. جد ناتج ضرب التعبيرين. ثم أي قيم لـ $x$ يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

$$\frac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x^2-12x+32}{2x^2-7x-4}$$

$= \frac{x-8}{x-5}$؛ $x \neq -3$، $x \neq -\frac{1}{2}$، $x \neq 4$، $x \neq 5$

2. يتم تقسيم ملعب مستطيل الشكل إلى قسم للأطفال الصغار، وقسم للأطفال الأكبر سناً، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

| الأطفال الأكبر سنًا | الأطفال الصغار |
|---|---|
| المساحة = 195 m | المساحة = 104 m |

ما التعبير الذي يمثل محيط الملعب بالكامل؟

$2x + \frac{598}{x}$

إذا كان محيط الملعب هو 72 m. فما القيم المحتملة لـ $x$؟

13 أو 23 ياردة

3. اطرح. حدد أي قيم لـ $x$ يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

$$\frac{2x-5}{x+3} - \frac{x+1}{x+5}$$

$= \frac{x^2+x-28}{(x+3)(x+5)}$ $x \neq -3$، $x \neq -5$

4. ما قيم $x$ التي تُحقق المتباينة التالية؟

$$\frac{8}{2x+1} \leq 3$$

$x < -\frac{1}{2}$ أو $x \geq \frac{5}{6}$

5. اقسم. حدد أي قيم لـ $x$ ولـ $y$ يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

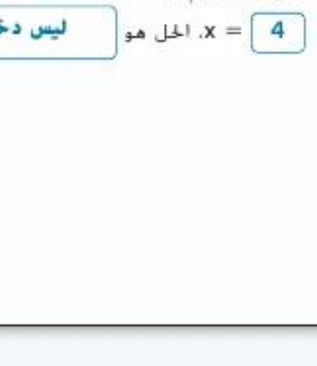
$$\frac{x-2}{x^2y} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x}$$

$= \frac{1}{xy}$، $x \neq 0$، $x \neq -2$، $x \neq 2$، $y \neq 0$

6. مجموع مِثلي عدد وثلاثة أمثال معكوسه الضربي يساوي 8.3. ما هو العدد؟

$\frac{2}{5}$ أو $\frac{15}{4}$

7. الدالة الموضحة في التمثيل البياني أدناه هي في صيغة $y = \frac{ax+b}{x+c}$ ولها خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

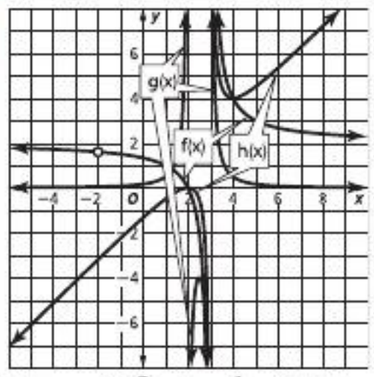



ما هي قيم $a$ و $b$ و $c$؟

$a =$ 2 $b =$ −1 $c =$ 3

8. التمثيل البياني لثلاث دوال موضح أدناه. أيّ من هذه يمثل التمثيل البياني لـ $y = \frac{2x^2-8}{x^2-x-6}$

f(x)
g(x)
h(x)




9. حل المعادلة $\frac{x+3}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ وحدد ما إذا كان الحل دخيلاً أم لا.

$x =$ 4. الحل هو ليس دخيلاً.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة **للأجزاء 1 و 3 و 5**، ذكّر الطلاب بأن التعبير يكون غير معرّف إذا كانت أي قيمة من قيم $x$ تجعل مقام التعبير الأصلي أو التعبير النهائي يساوي 0. وبما أن الطلاب سوف يقومون بحذف العوامل المشتركة عند تبسيط التعبير، فاقترح عليهم كتابة القيم المستثناة عندما تقابلهم بدلاً من محاولة تحديدها في نهاية الحل.

10. بالنسبة لكل دالة، حدد أي أصفار وأي خطوط تقارب رأسية وأفقية وأي فجوات.

| الدالة | الأصفار | خط التقارب الرأسي | خط التقارب الأفقي | الفجوات |
|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{x+3}+7$ | $-\frac{22}{7}$ | $x=-3$ | $y=7$ | |
| $y=\frac{x^2+2x-15}{x+5}$ | 3 | | | $x=-5$ |
| $y=\frac{9x^2-4}{4x^2-25}$ | $\pm\frac{2}{3}$ | $x=-\frac{5}{2}, x=\frac{5}{2}$ | $y=\frac{9}{4}$ | |

11. تُجدف نورا بقارب الكاياك الخاص بها في المياه الراكدة بسرعة 6 km/h. وتُجدف باتجاه التيار، ثم تستدير وتعود ضد التيار إلى النقطة التي بدأت منها. رحلتها بالكامل هي 18 km وتستغرق 3.2 ساعات. ما سرعة التيار؟ اكتب الحل هنا.

1.5 km/h؛ كل جزء من الرحلة بقيمة 9 km، والسرعة مع التيار هي $x-6$، والسرعة ضد التيار هي $x+6$.

$\frac{9}{6+x}+\frac{9}{6-x}=3.2, \frac{9(6-x)+9(6+x)}{(6+x)(6-x)}=3.2, 108=115.2-3.2x^2, x^2=2.25, x=\pm1.5.$

ينبغي أن تكون السرعة موجبة، لذا فالإجابة هي 1.5

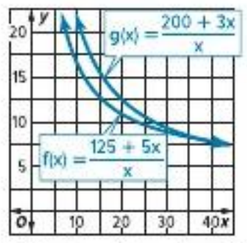
12. يرغب فريق الرياضيين في عمل زجاجات مياه عليها شعار فريقهم. ويبين الجدول رسوم التجهيز والسعر مقابل كل زجاجة مياه من شركتين مختلفتين.

| الشركة | رسوم التجهيز | السعر لكل زجاجة مياه |
|---|---|---|
| الملحقات الرياضية | AED 125 | AED 5 |
| المعدات الخارجية | AED 200 | AED 3 |

a. اكتب دالة، $f(x)$، تمثل متوسط التكلفة لكل زجاجة مياه لطلبية من $x$ زجاجة مياه من شركة الملحقات الرياضية. اكتب دالة أخرى، $g(x)$، تمثل متوسط التكلفة لكل زجاجة مياه لطلبية من $x$ زجاجة مياه من شركة المعدات الخارجية.

$f(x)=\frac{125+5x}{x}, g(x)=\frac{200+3x}{x}$

b. مثّل الدالتين بيانيًا في الربع الأول.




c. اشرح ما يخبرك به التمثيل البياني عن تكاليف الشركتين.

إذا اشتريت أقل من 37 زجاجة مياه تقريبًا، فشركة الملحقات الرياضية أرخص.

وإذا اشتريت أكثر من 37 زجاجة مياه تقريبًا، فشركة المعدات الخارجية أرخص.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



## إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة **للجزء 11**، سيجد الطلاب المسألة أبسط بكثير إذا أنشأوا جدولاً يبين المعدلات والمسافة والزمن لكل جزء من الرحلة. وبإمكان الطلاب استخدام المعلومات الواردة بالجدول لعمل معادلة يمكن حلها للتوصل إلى الإجابة.

## تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يفشلون في تحديد الفجوة في الدالة الثانية **بالجزء 10** ربما يكونون قد بسّطوا الدالة إلى $y=x-3$ فقط. ذكّرهم أنه يجب عليهم دائمًا التفكير في الدالة في ظل الصورة التي أعطيت عليها. وبما أن مقام الدالة هو $x+5$، فإن الدالة غير معرّفة عند النقطة $x=-5$.

الطلاب الذين كانت إجابتهم على **الجزء 11** تساوي 2.25 ربما قد لا يكونون قاموا بحساب الجذر التربيعي كخطوة نهائية لإيجاد قيمة $x$. أشر إلى أنهم لو كانوا تحققوا من إجابتهم لوجدوا أن 2.25 إجابة غير صحيحة. يجب عليهم الرجوع والتحقق من الحل وإيجاد الخطأ.

## العناوين

### الجزء 11

[2] إجابة صحيحة مع كتابة حل دقيق وكامل

[1] إجابة صحيحة مع كتابة الحل جزئيًا، أو إجابة خاطئة استندت إلى خطأ صغير في الحسابات مع كتابة حل كامل

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة وطريقة التفكير خاطئان

### الجزء 12

[3] المعادلات والتمثيل البياني وتفسير التمثيل البياني صحيح

[2] المعادلات صحيحة ولكن مع وجود خطأ بسيط في التمثيل البياني أو خطأ بسيط في تفسيره

[1] المعادلات صحيحة ولكن التمثيل البياني وتفسيره خاطئان، أو أن المعادلات خاطئة ولكن التمثيل البياني وتفسيره صحيحان

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة وطريقة التفكير خاطئان

# الوحدة 3 المتتاليات والمتسلسلات

## قبل القراءة

قبل قراءة الوحدة، أجب عن العبارات التالية.

1. اكتب **أوافق** إذا كنت توافق على العبارة.
2. اكتب **لا أوافق** إذا كنت لا توافق على العبارة.

| قبل القراءة | المتتاليات والمتسلسلات |
|---|---|
| **أوافق** | • المتتالية هي دالة مجالها مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية. |
| **لا أوافق** | • المتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتالية هندسية. |
| **أوافق** | • لإيجاد النسبة المشتركة لمتتالية هندسية، اقسم أي حد على الحد الذي يسبقه. |

## نصائح تدوين الملاحظات

- **عليك دراسة ملاحظاتك يوميًا.**

مراجعة كميات قليلة في المرة الواحدة يساعدك على الاحتفاظ بالمعلومات.

- **من المفيد قراءة ملاحظاتك قبل بدء واجباتك المنزلية.**

راجع المواد التي يشار إليها في الصفحات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

# الوحدة 3 المتتاليات والمتسلسلات

## النقاط الأساسية

ادرس الصفحات بهذه الوحدة. اكتب حقيقة واحدة على الأقل حول كل درس. على سبيل المثال، في الدرس الذي يتناول المتتاليات الحسابية، ربما تكون الحقيقة هي أنه في المتتالية الحسابية يكون الفرق بين حدين متتاليين ثابتًا. بعد إكمال الوحدة، يمكنك استخدام هذا الجدول في المراجعة الخاصة باختبار الوحدة.

| الدرس | الحقيقة |
|---|---|
| 3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية | **الإجابة النموذجية: من الممكن كتابة صيغة تكرارية(ضمنية) وصيغة صريحة لإيجاد الحد النوني $n$ في متتالية حسابية.** |
| 3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية | **الإجابة النموذجية: الحدود التي تقع بين حدين غير متتاليين تسمى أوساطًا هندسية.** |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

# 3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية



## ما ستتعلمه

ادرس الأمثلة بالدرس 3-2. توقع شيئين تعتقد أنك سوف تتعلمهما عن المتتاليات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

1. **الإجابة النموذجية: كيفية كتابة الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية)**

2. **الإجابة النموذجية: كيفية إيجاد مجموع *n* حدًا من الحدود الأولى في متسلسلة حسابية**

## المفردات المستخدمة

**المفردات الجديدة** صِل كل مصطلح بتعريفه برسم خط يصل بين الاثنين.

| | |
|---|---|
| *أوساط حسابية* | الفرق الحاصل من طرح أي حد في المتتالية الحسابية من الحد الذي يليه |
| *متتاليات حسابية* | الفرق المشترك في متتالية حسابية |
| *متسلسلة حسابية* | الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتاليين في متتالية حسابية |
| *فرق مشترك* | مجموعة أعداد يكون فيها الفرق بين كل حدين متتاليين ثابتًا |
| *الفرق الأول* | مجموع حدود المتتالية الحسابية |
| *الفرق الثاني* | فروق الفروق الأولى المتتالية |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## الفكرة الرئيسة

**التفاصيل**

### المتتاليات الحسابية

**اكتب المتتالية الحسابية التي تحتوي على خمسة أوساط حسابية بين 7 و 2−. لاحظ أن $a_7 = -2$.**

| | |
|---|---|
| أولاً، جـد الفرق المشترك مستخدمًا $a_7 =$ ____ و $a_1 =$ ____ و $n =$ ____. | ثم حدّد الأوساط الحسابية باستخدام $d =$ ____ |
| $a_n = a_1 + (n - 1)d$ | $a_2 = 7 +$ ____ = ____ |
| ____ = ____ + (____ − 1)$d$ | $a_3 =$ ____ + −1.5 = ____ |
| $-2 = 7 + 6d$ | $a_4 = 4 +$ ____ = 2.5 |
| $d =$ ____ | $a_5 =$ ____ + −1.5 = 1 |
| | $a_6 =$ ____ + ____ = ____ |

المتتالية هي 2− , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , 7.

### المتسلسلة الحسابية

**جـد $\sum_{n=8}^{32} 4n - 11$.**

جـد $a_1$ و $a_n$ و $n$.

حد أعلى مطروحًا منه حد أدنى مضافًا إليه 1 ____ $n =$ ____

حد أدنى = ____ ____ $a_1 =$ ____

بسّط. ____ = ____

حد أعلى = ____ ____ $a_{25} =$ ____

بسّط. ____ = ____

استخدم قانون المجموع الأول لمتسلسلة حسابية نهائية.

قانون مجموع متسلسلة حسابية نهائية ____ $S_n =$ ____

$n = 25$ و $a_1 = 21$ و $a_n = 117$ ____ $S_{25} =$ ____

بسّط. ____ $S_{25} =$ ____

ولذلك، ____ $\sum_{n=8}^{32} 4n - 11 = 1725$

# 3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

## ما ستتعلمه

ادرس النص بالدرس 3-3. اكتب حقيقتين تعلمتهما عن المتتاليات الهندسية والمتسلسلات الهندسية.

1. **الإجابة النموذجية: الحد النوني $n$ لمتتالية هندسية حدها الأول $a_1$ والنسبة المشتركة بها $r$ تحدّدها الصيغة $a_n = a_1 r^{n-1}$.**

2. **الإجابة النموذجية: المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية.**

## المفردات المستخدمة

**مراجعة المفردات** عرّف المتتالية بكلمات من عندك.

**الإجابة النموذجية: المتتالية هي دالة مجالها يتكون من مجوعة جزئية من الأعداد الطبيعية والمدى هو مجموعة من الأعداد الحقيقية في ترتيب معين.**

**المفردات الجديدة** املأ كل فراغ بالمصطلح الصحيح.

*نسبة مشتركة* **متسلسلة هندسية** هي مجموع حدود متتالية هندسية.

*أوساط هندسية* المتتالية التي فيها تكون النسبة بين الحدود المتتالية ثابتة تسمى **متتالية هندسية**.

*متتالية هندسية* **نسبة مشتركة** في متتالية هندسية هي ثابت يتم الحصول عليه بقسمة أي حد في المتتالية على الحد الذي يسبقه.

*متسلسلة هندسية* الحدود التي بين حدين غير متتاليين في متتالية هندسية تسمى **أوساط هندسية**.

الدرس 3-3

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## الفكرة الرئيسة

**المتتاليات الهندسية** — **استخدم المتتالية الهندسية ... ,0.1 ,1 ,10 ,100 في إكمال خريطة المفاهيم.**

## التفاصيل

**الخطوة 1:** حدد الحد الأول في المتتالية.

**100**

**الخطوة 2:** جـــد النسبة المشتركة.

**0.1**

**الخطوة 3:** اكتب صيغة صريحة لإيجاد الحد النوني $a_n$ في المتتالية.

$$a_n = 100(0.1)^{n-1}$$

**الخطوة 4:** اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد النوني $a_n$ في المتتالية.

$$a_1 = 100$$

$$a_n = 0.1a_{n-1}$$

**الخطوة 5:** جـــد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية.

**0.01, 0.001, 0.0001**

**المتسلسلات الهندسية** — **لكل متسلسلة هندسية لا نهائية، جـــد النسبة المشتركة. ثم اكتب نعم أو لا للإشارة إلى مدى وجود مجموع لكل منها. إن كان لها مجموع، فجـــده.**

| المتسلسلة | النسبة المشتركة | المجموع؟ نعم أو لا | المجموع |
|---|---|---|---|
| 40, 20, 10, 5, ... | $\frac{1}{2}$ | نعم | 80 |
| $-3, -6, -12, -24, \ldots$ | 2 | لا | لا يوجد |
| $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ | $\frac{1}{3}$ | نعم | $\frac{1}{2}$ |

الاسم _____ التاريخ _____ المدّة _____

الوحدة 3

# المتتاليات والمتسلسلات

## اربطها معًا

اذكر مثالاً لكل موقف يمكن أن يستخدم في إكمال الجدول.

<table>
<tr><td colspan="2">متتالية حسابية منتهية<br>الإجابة النموذجية: $-2, 2, 6, 10, 14$</td><td colspan="2">متسلسلة هندسية لا نهائية<br>الإجابة النموذجية: ... ، $\frac{1}{32}$ ، $\frac{1}{16}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">تحديد الفرق المشترك: 4</td><td colspan="2">تحديد النسبة المشتركة: $\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>صيغة صريحة لإيجاد الحد النوني $a_n$:<br>$a_n = a_1 + (n-1)d$<br>$a_n = -2 + (n-1) \cdot 4$</td><td>صيغة تكرارية(ضمنية) لإيجاد الحد النوني $a_n$:<br>$a_1 = -2$<br>$a_n = a_{n-1} + 4$</td><td>صيغة صريحة لإيجاد الحد النوني $a_n$:<br>$a_n = a_1 r^{n-1}$<br>$a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$</td><td>صيغة تكرارية(ضمنية) لإيجاد الحد النوني $a_n$:<br>$a_1 = \frac{1}{4}$<br>$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">كتابة المتتالية في صورة متسلسلة:<br>$-2 + 2 + 6 + 10 + 14$</td><td colspan="2">كتابة المتتالية في صورة متسلسلة:<br>$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$</td></tr>
<tr><td>جد المجموع بمعلومية $a_1$ و $a_n$:<br>$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$<br>$S_5 = \frac{5}{2}(-2 + 14)$<br>$= 30$</td><td>جد المجموع بمعلومية $a_1$ و $d$:<br>$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$<br>$S_n = \frac{5}{2}[2 \cdot -2 + (5-1) \cdot 4]$<br>$= 30$</td><td colspan="2">هل للمتسلسلة مجموع؟ نعم<br>إن كان الجواب بنعم، فلماذا؟ $|r| < 1$<br><br>جد المجموع، إن كان موجودًا.<br>$S = \frac{a_1}{1-r}$<br>$S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$</td></tr>
</table>

أعد كتابة مثلث باسكال الموجود على اليمين باستخدام الرمز ${}_nC_r$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الصف 0 | | | | | ${}_0C_0$ | | | | |
| الصف الأول | | | | ${}_1C_0$ | | ${}_1C_1$ | | | |
| الصف الثاني | | | ${}_2C_0$ | | ${}_2C_1$ | | ${}_2C_2$ | | |
| الصف الثالث | | ${}_3C_0$ | | ${}_3C_1$ | | ${}_3C_2$ | | ${}_3C_3$ | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الصف 0 | | | | | 1 | | | | |
| الصف الأول | | | | 1 | | 1 | | | |
| الصف الثاني | | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| الصف الثالث | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

# الوحدة 3 المتتاليات والمتسلسلات

## قبل الاختبار

الآن قد قمت بقراءة الوحدة ودراستها، فكّر فيما تعلمته. أكمل الجدول أدناه وقارن بين إجاباتك السابقة وإجاباتك التالية.

1. اكتب **أوافق** إذا كنت توافق على العبارة.
2. اكتب **لا أوافق** إذا كنت لا توافق على العبارة.

| المتتاليات والمتسلسلات | بعد القراءة |
|---|---|
| • المتتالية هي دالة مجالها مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية. | **أوافق** |
| • المتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتالية هندسية. | **لا أوافق** |
| • لإيجاد النسبة المشتركة لمتتالية هندسية، اقسم أي حد على الحد الذي يسبقه. | **أوافق** |

## هل أنت مستعد لاختبار الوحدة؟

استخدم قائمة التحقق هذه لمساعدتك في الدراسة.

☐ أكملت دليل الدراسة والمراجعة الخاص بالوحدة 3 في الكتاب المدرسي.

☐ أجريت تدريبًا على الاختبار خاصًا بالوحدة 3 في الكتاب المدرسي.

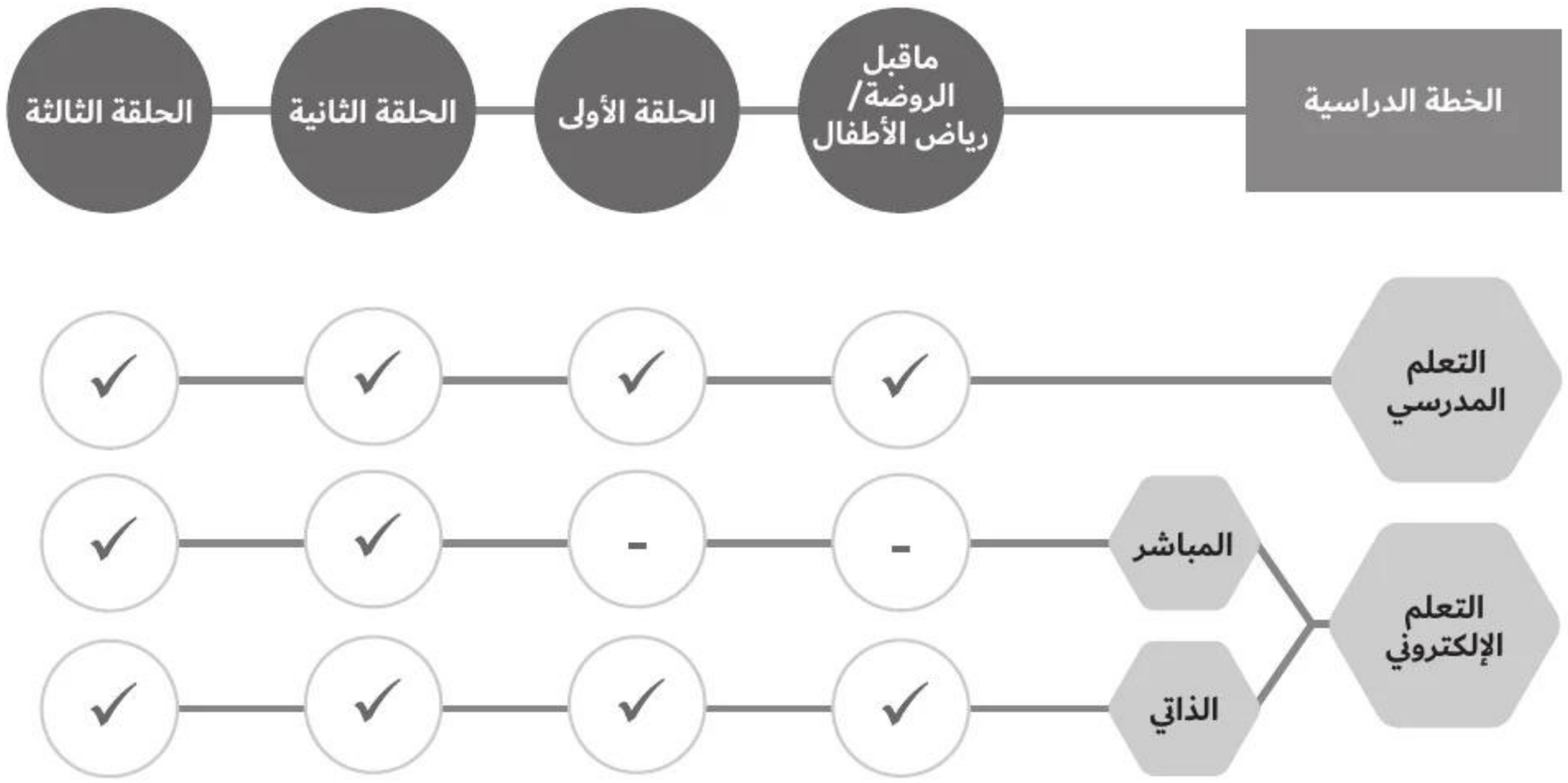
☐ راجعت واجباتي المنزلية وقمت بتصويب الإجابات غير الصحيحة.

☐ راجعت جميع مفردات المصطلحات التي وردت في الوحدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

## التعليم الهجين في المدرسة الإماراتية

في إطار البعد الإستراتيجي لخطط التطوير في وزارة التربية والتعليم، وسعيها لتنويع قنوات التعليم وتجاوز كل التحديات التي قد تحول دونه، وضمان استمراره في جميع الظروف، فقد طبقت الوزارة خطة التعليم الهجين للطلبة جميعهم في المراحل الدراسيّة كافة.




قنوات الحصول على الكتاب المدرسي:

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الوحدات الإلكترونيّة

التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 10
24

درجة الدكتوراه

(3-5 سنوات)

التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 9
22

درجة الماجستير

(2 سنتان)

شهادة مشتركة
البكالوريوس والماجستير

(4 - 5 سنوات)

التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 6-5
18

دبلوم الدراسات العليا
(سنة واحدة)

درجة البكالوريوس

(3 - 4 سنوات)

دبلوم الدراسات العليا
(1 - 2 سنتين)

درجة الماجستير

(2 سنتان)

درجة البكالوريوس

(3 - 4 سنوات)

التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 6-5
18

تقوم الوزارة بالتنسيق مع مؤسسات التعليم العالي الوطنية في قبول الطلبة في التخصصات المختلفة بما يتسق مع احتياجات سوق العمل وخطط التنمية البشرية المستقبلية. كما تحدد مؤسسات التعليم العالي أعداد الطلبة الذين يمكن قبولهم طبقًا لإمكانياتها ورسالتها وأهدافها. كما تضع مؤسسات التعليم العالي شروط قبول الطلبة في البرامج المختلفة بحسب المسار الذي تخرجوا منه ومستويات أدائهم في المرحلة الثانوية ونتائجهم في اختبار الإمارات القياسي.

***يتيح التكامل والتنسيق بين منظومتي التعليم العام والعالي اعتماد واحتساب مساقات دراسية مدرسية ضمن الدراسة الجامعية بحسب المسار المدرسي والتخصص الجامعي مما يتيح تقليص مدة الدراسة الجامعية.***

التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 4-1
12

الحلقة الثالثة المرحلة الثانوية

المسارات الأكاديمية

مسار النخبة | المسار المتقدم | المسار العام

أعلى 10 في المئة من الطلبة في نتائج الاختبارات الوطنية

المسارات التقنية والمهنية

المسار التقني المتقدم | المسار التقني العام | الأكاديميات المتخصصة | المسار التطبيقي

برامج ثانويات التكنولوجيا التطبيقي

(الصفوف 12-9) الأعمار من 14 إلى 18 عامًا (4 سنوات)

التعليم الأساسي

التصنيف الدولي
12

الحلقة الثانية

برنامج النخبة (الصفوف 8-5)
أعلى 10 في المئة من الطلبة في نتائج الاختبارات الوطنية
الأعمار 13-10 (4سنوات)

الصفوف 8-5
الأعمار 13-10 (4 سنوات)

التصنيف الدولي
6

الحلقة الأولى

الصفوف 1-4
الأعمار 9-6 (4 سنوات)

التصنيف الدولي
3

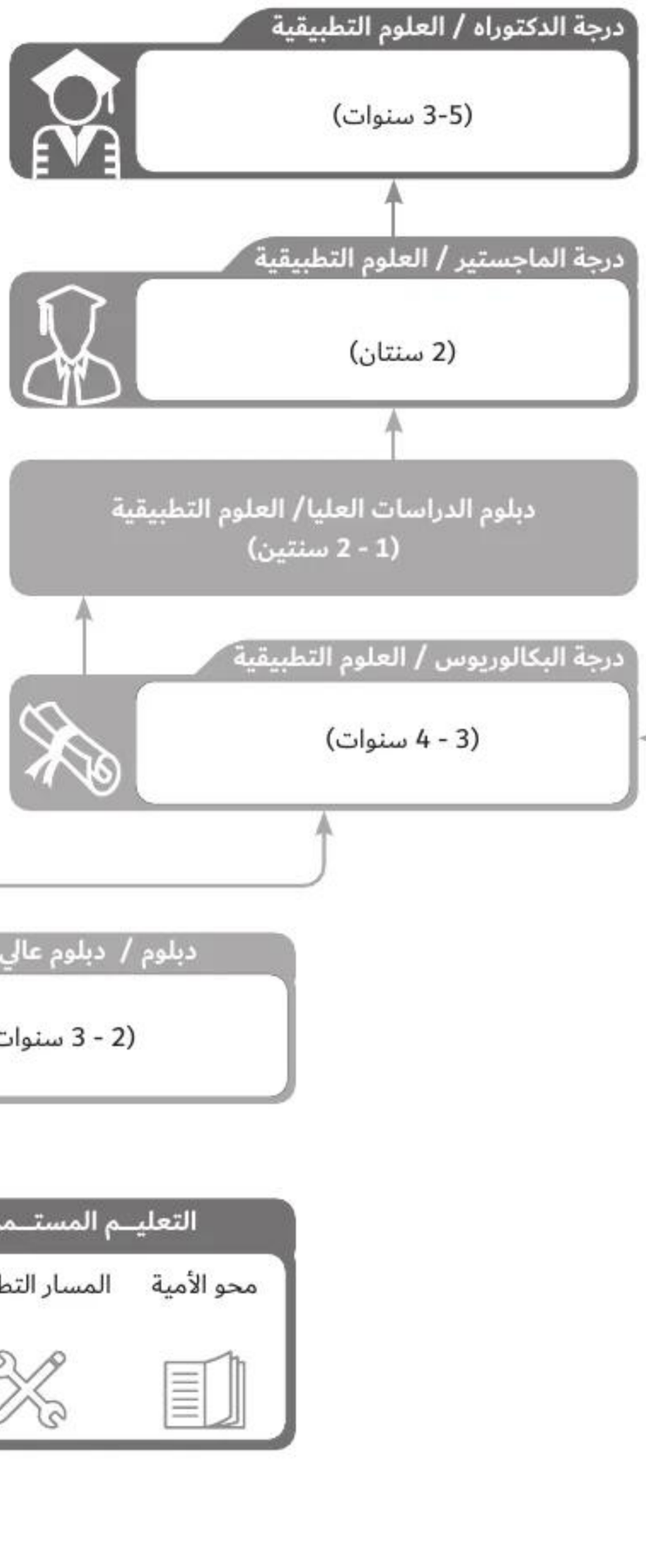
الطفولة المبكرة

رياض الأطفال | الأعمار من 6-4 سنوات (غير إلزامي)
حضانة/ رعاية | الأعمار 4-0 (غير إلزامي)

سن البداية النظري

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

## منظومة التعليم في دولة الإمارات العربية المتحدة



جميع الحقوق © محفوظة لوزارة التربية والتعليم. لايسمح بإعادة إصدار هذه الصفحة أو جزء منها أو تخزينها في نطاق استعادة المعلومات، أو نقله بأي شكل من الأشكال، من دون إذن مسبق من الناشر.

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم
اقتراح - استفسار - شكوى

80051115

04-2176855

www.moe.gov.ae

ccc.moe@moe.gov.ae