الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام المجتمع
YEAR OF COMMUNITY
UAE

نحن الإمارات
WE THE UAE
2031

مفتاح الإجابات

2025-2026

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

دليل الطالب التفاعلي

الصف
10
متقدّم

McGraw Hill

مفتاح الإجابات

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

دليل الطالب التفاعلي

1

10

3 2020-2021 2

McGraw Hill

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 10 Advanced Math Vol.1
FM. Front Matter, from Integrated Math I © 2012
1. Systems of Equations and Inequalities, from Algebra 2 Chapter 3 © 2014
& Matrices, from Algebra 2 Chapter 4 lesson 1 © 2010
2. Quadratic Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 4 © 2014
3. Polynomials and Polynomial Functions, from Algebra 2 Chapter 5 © 2014
4. Inverses and Radical Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 6 © 2014
EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math I © 2012

صورة الغلاف: hunthomas/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 2-700165-44-1-978 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700165-6 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 8-700163-44-1-978 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-700163-X (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

محتويات موجزة

المحتويات

الوحدة 4 الدوال والعلاقات العكسية والجذرية

الوحدة 5 الدوائر

الوحدة 6 التحويلات الهندسية والتناظر

الوحدة 7 الاحتمالات والقياس

الوحدة 8 الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية

الوحدة 9 الدوال والعلاقات النسبية

الوحدة 10 الدوال المثلثية

الوحدة 11 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 12 المتتاليات والمتسلسلات

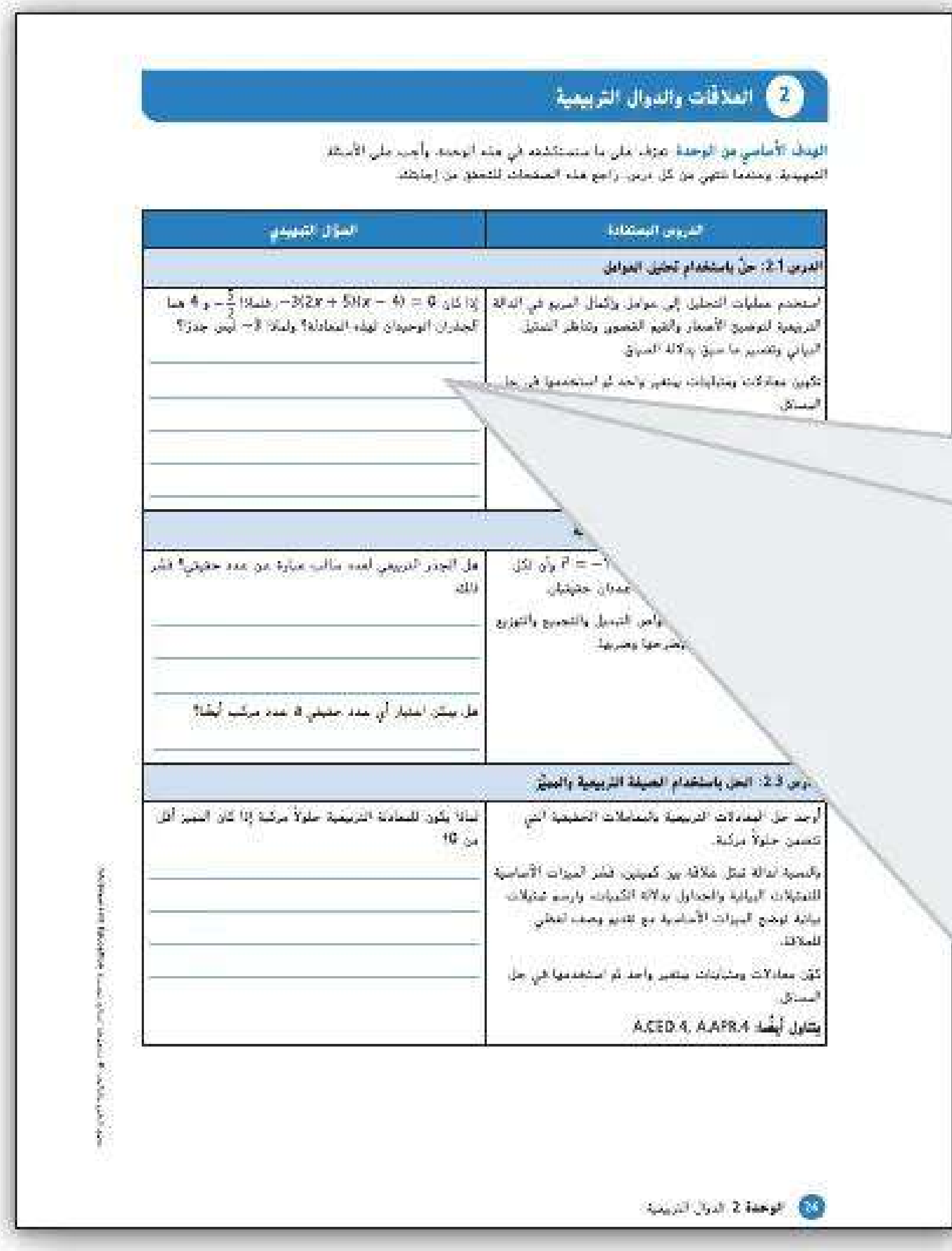
محتويات التمرين

كيفية استخدام هذا البرنامج الدراسي

تشتمل كل وحدة من وحدات *دليل الطالب التفاعلي* على ميزات تساعدك على النجاح.

نظرة عامة على الوحدة

يمنحك كل قسم من أقسام **الهدف الأساسي من الوحدة** نظرة عامة لما أنت مقبل على تعلمه. ارجع إلى هذا القسم لإتمام كل سؤال وأنت تدرس كل وحدة.



أي مما يلي لا يمثل دالة كثيرة الحدود؟ اشرح.

A. $(x+1)(x^2-1)$ **B.** $(x^2+1)+3x^3$ **C.** $\frac{x+1}{x-1}$

نظرة عامة على الدرس

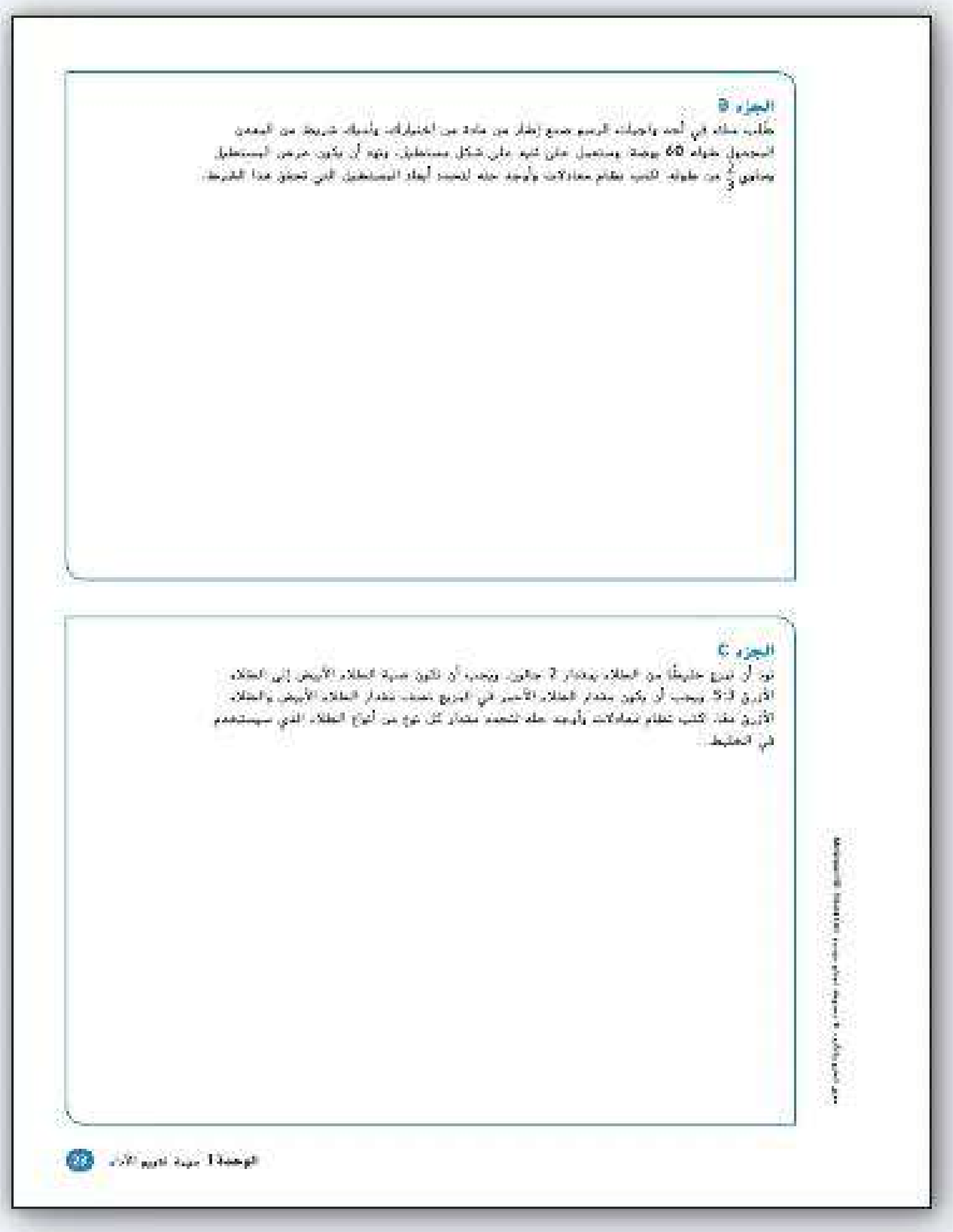
يتيح لك كل درس من **الدروس** فرصة كبيرة لاستكشاف المفاهيم وتعميق الفهم.

ويستهدف التركيز القوي على استخدام النماذج مساعدتك على ربط الرياضيات بالحياة اليومية. خلال هذا البرنامج، سوف تصنع نماذج وتختبرها وتحسنها بغية تمثيل مواقف من الحياة اليومية بشكل أكثر دقة.

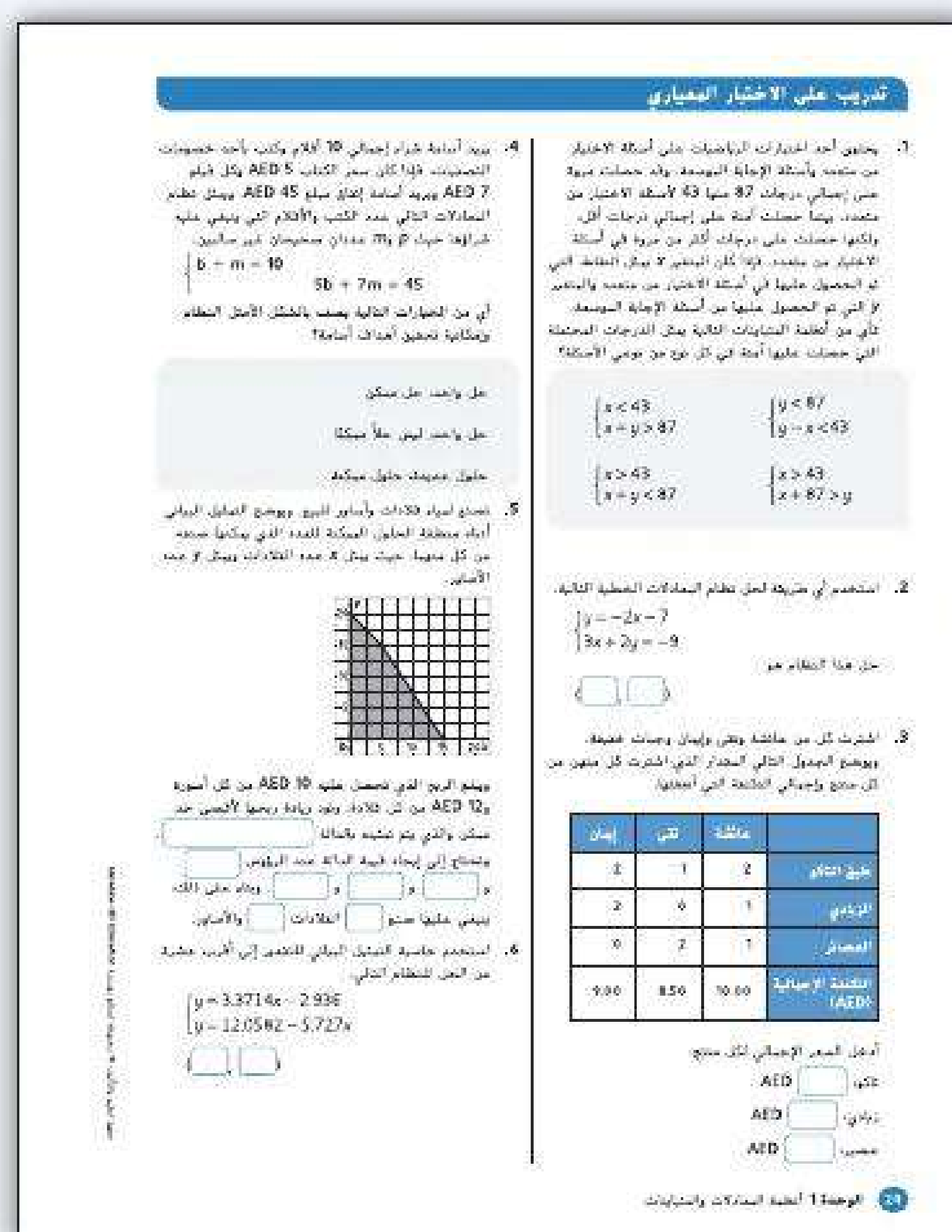
b. **التخمين** ضع تخمينًا بخصوص درجة مجموع دالتين كثيرتي الحدود أو الفارق بينهما. اشرح استنتاجك.

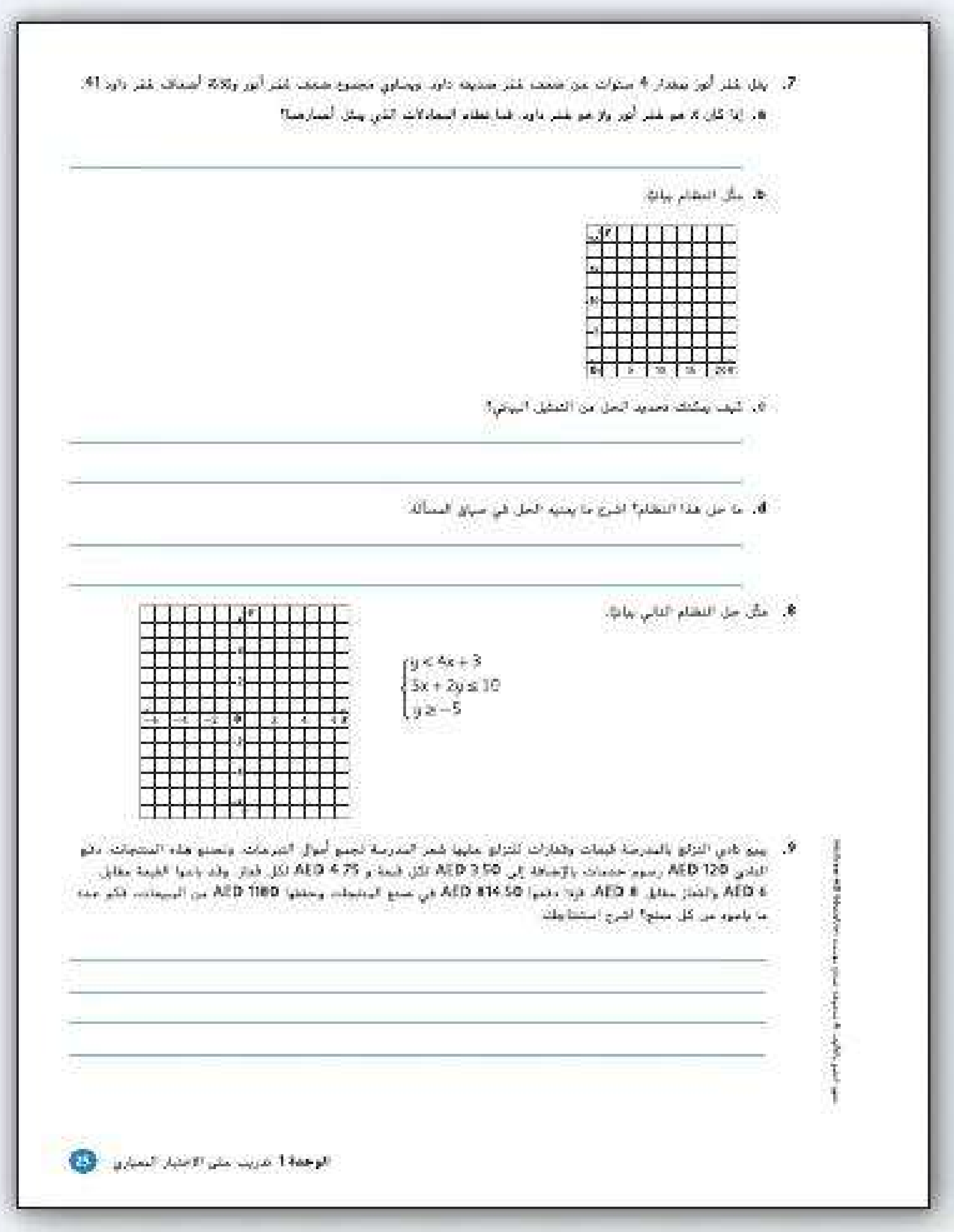
تمرين التقويم

مهمات تقويم الأداء بنهاية كل وحدة تهدف إلى تمرينك على الاستنتاج المجرد والمثابرة وحل المسائل.



يوجد في نهاية كل وحدة قسم **تدريب على الاختبار**. استفد من التدريب على الاختبار في التعرف على الأنواع الجديدة من أسئلة التقويم.





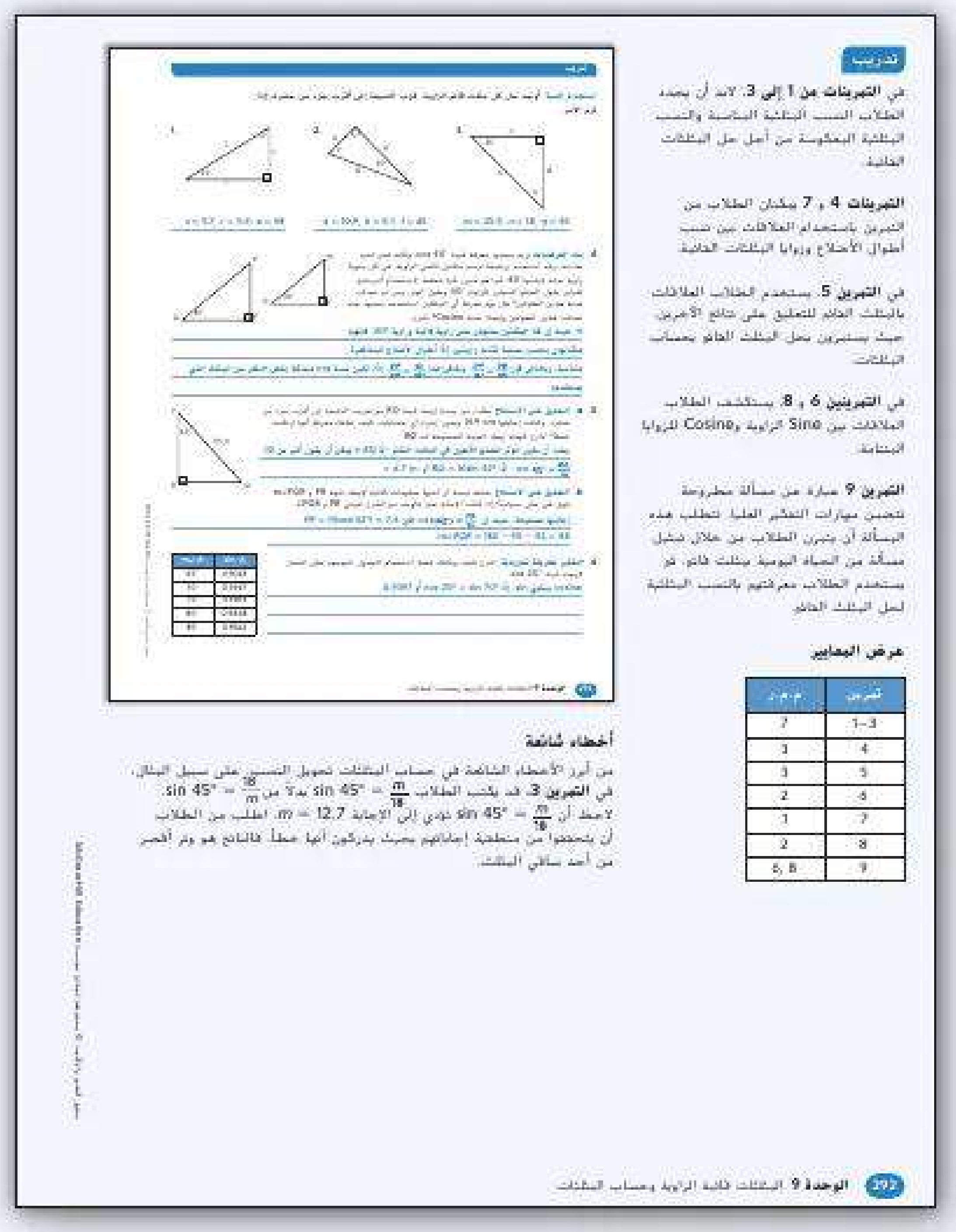
صُمّم كل درس وتقويم لتنمية الفهم الرياضي لدى طلابك، وربط التعلم بمعايير الممارسة الرياضية.

الهدف الأساسي

إن دليل الطالب التفاعلي يسمح لك بأن تكرّس وقت صفك الدراسي لاستكشاف المفاهيم استكشافًا عميقًا؛ بحيث يتأسّس الطلاب تأسيسًا قويًا في المعرفة الرياضية والتفكير الرياضي.

الترابط المنطقي

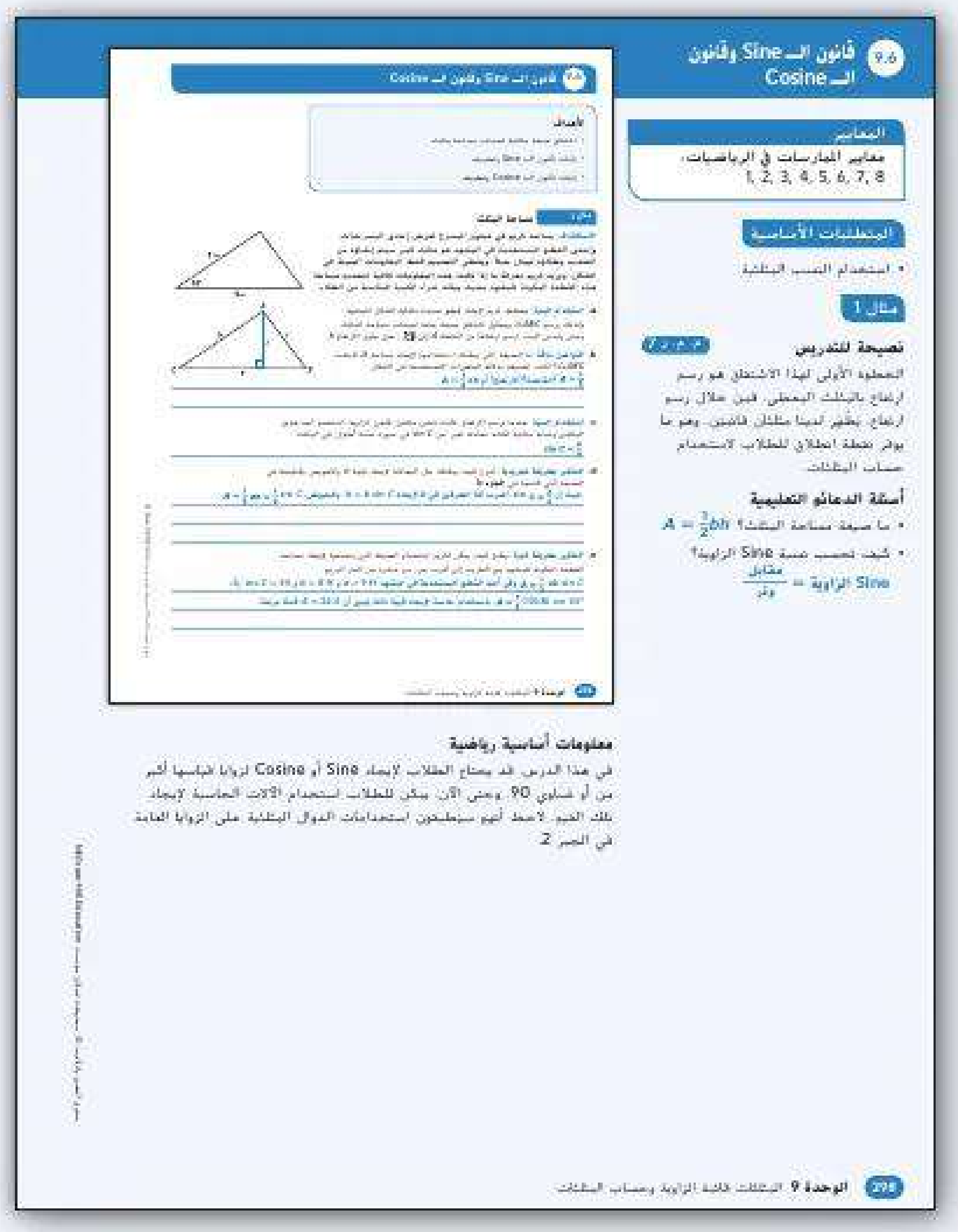
إن دليل الطالب التفاعلي يبني على المعرفة المكتسبة في الدروس والدورات الدراسية السابقة، ويوجّه الطلاب في كل مفهوم بخطوات تدرجية مدروسة في الوقت الذي يكوّن فيه بعض الروابط؛ بحيث يكون كل معيار امتدادًا طبيعيًا لما تعلّمه الطلاب قبل ذلك.



الدقة

إن المركّبات الثلاثة للدقة: الفهم التصوري والتطبيق والمهارة والطلاقة الإجرائيتان متضمنة في جميع وحدات دليل الطالب التفاعلي؛ مما يتيح لطلابك فرصة التقدم للوصول إلى مستوى أعلى من الإنجاز.

ولا تتعلق الدقة بالمسائل الأصعب فحسب، بل إنها تتعلق أيضًا بضمان توصّل الطلاب إلى فهم عميق للمفاهيم الرياضية والقدرة على تطبيقها في مواقف من الحياة اليومية.



الدليل إلى تطوير معايير الممارسة الرياضية

تتبع جميع الممارسات الرياضية نهجًا قائمًا على تحليل المعايير، كل على حدة، بما يتضمن معنى الممارسة الرياضية وكيف تبدو في الفصل وأنواع الأسئلة التي يمكن للمعلمين استخدامها لتعزيز المعرفة الرياضية لدى طلابهم.

والهدف من معايير الممارسة غرس قدرات المعرفة بالرياضيات وخلق نزعة إيجابية نحو أهمية استخدام الرياضيات بكفاءة لدى جميع الطلاب.

ما معايير الممارسات في الرياضيات؟

1. فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
2. التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
3. بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
4. استخدام نماذج الرياضيات.
5. استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
6. مراعاة الدقة.
7. محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
8. البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

ما سبب أهمية معايير الممارسة الرياضية بالنسبة لطلاب المدارس الثانوية؟

تُحدد معايير الممارسة الرياضية التوقعات لاستخدام اللغة والتمثيلات الرياضية لفهم المسائل وحلها، واستخدام النماذج في الإعداد للوظائف والمجموعة الواسعة من التخصصات الجامعية. وتؤسس رياضيات المرحلة الثانوية خبرة جديدة وأكثر تطورًا من الخبرة السابقة المكتسبة من رياض الأطفال حتى الصف الثامن والتي تركزت على الحساب العددي.

1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل. ويضعون في اعتبارهم التفكير في المسائل المماثلة وتجربة حالات خاصة وصيغًا أبسط من المسألة الأصلية حتى يكتسبوا رؤية تجاه حلها. ويراقبون تقدمهم ويقيمونه ويغيرون مسارهم إذا لزم الأمر. وقد يحوّل الطلاب الأكبر سنًا، بناءً على سياق المسألة، التعابير الجبرية أو يغيرون نافذة العرض في حاسبة الرسوم البيانية للحصول على المعلومات التي يحتاجونها. ويستطيع الطلاب المتفوقون رياضيًا شرح حالات التشابه بين المعادلات والأوصاف اللفظية والجداول والرسوم البيانية، أو يرسمون رسومًا تخطيطية بالسمات والعلاقات المهمة، ويمثلون البيانات ويبحثون عن التوافق أو الاتجاهات.

وقد يعتمد الطلاب الأحدث سنًا على استخدام أشياء ملموسة أو صور لمساعدتهم على تصور المفاهيم وحل المسألة. يتحقق الطلاب المتفوقون رياضيًا من صحة إجابات المسائل باستخدام طريقة مختلفة، ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل الجواب منطقي؟" ويمكنهم فهم منهجيات الآخرين في حل المسائل المعقدة وتحديد حالات التطابق بين المنهجيات المختلفة.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
يستغرق حل المسألة الرياضية بعض الوقت. يستخدم الطلاب المتفوقون رياضيًا عملية منطقية لفهم المسائل، وفهم احتمالية وجود أكثر من طريقة لحل مسألة ما، وتغيير العملية عند الضرورة.	• مثّل العملية باستمرار أثناء حل المسائل للفصل. • اسمح للطلاب ببذل محاولات جاهدة، وقدم المساعدة عن طريق طرح الأسئلة. • اطلب من الطلاب التحقق من حلهم باستخدام طريقة أخرى.	يتعزز اجتهاد الطلاب في حل المسائل التي يصعب عليهم حلها مع تقدمهم في الفهم. ويستخدمون عملية ستوجههم خلال كل مسألة لتوصلهم إلى الحل.	• ما خطتك لحل المسألة؟ • ماذا ينبغي عليك فعله إذا "تعذر" عليك الحل؟ • هل الإجابة منطقية؟ • هل توجد طريقة أخرى لحل المسألة بها؟ • الآن بعد أن حللت المسألة، ما الذي أبليته حسنًا؟ كيف ستتعامل مع مسألة مشابهة المرة المقبلة؟

2 التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

يفهم الطلاب المتفوقون رياضيًا الكميات والعلاقة بينها في مواقف المسألة، ويأتون بقدرتين متممتين لاستخدامهما في حل المسائل التي تضم علاقات كميّة: القدرة على الفصل عن السياق - لتلخيص موقفٍ معين وتمثيله رمزيًا واستخدام الرموز الممثلة كما لو كانت لها نمطها الخاص، دون الانشغال بمراجعها بالضرورة - والقدرة على الربط بالسياق، والتوقف المؤقت بحسب الحاجة أثناء عملية المعالجة بغية التدقيق في المراجع الخاصة بالرموز المعنية. يستلزم التفكير الكمي عادات ابتكار تمثيل متسق للمسألة المطروحة، ووضع الوحدات المشتركة في الاعتبار؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس كيفية حسابها فقط؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
يمكن للطلاب المتفوقين رياضيًا البدء بسياق عمليّ أو من الحياة اليومية ثم تمثيله بأرقام مجردة أو بالرموز (الفصل عن السياق)، ثم إيجاد حل، والرجوع إلى السياق للتحقق من أن الحل منطقي (الربط بالسياق).	• مثّل استخلاص المعلومات من المسألة وتحديد المتغيرات. وأظهر كيف تربط بين المتغيرات حسب المعلومات المعطاة. • كوّن روابط بين الإجراءات ومدلولها.	يربط الطلاب المواقف الواقعية بالتمثيلات الرياضية المجردة سواء كانت نماذج جبرية أم أشكالاً هندسية. ويفكرون أيضًا بشأن ما تمثله المتغيرات والأشكال وما يعنيه هذا ضمن السياق.	• ما الذي تمثله الأرقام؟ ما المقصود بالمتغيرات وما علاقتها ببعضها البعض وبالأعداد؟ • كيف يمكن تمثيل العلاقات رياضيًا؟ هل توجد أكثر من طريقة؟

3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في بناء الفرضيات واستخدامها. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها. ويبررون استنتاجاتهم، وينقلونها للآخرين، ويردون على فرضيات الآخرين. ويستخدمون الاستدلال الاستقرائي بخصوص البيانات، مستنتجين فرضيات وجيهة تأخذ في النظر سياق البيانات الناشئة. ويُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين وتمييز المنطق أو الاستنتاج الصحيح من الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، فهم يستطيعون توضيح ماهيته. ويمكن لطلاب المرحلة الابتدائية تكوين فرضيات باستخدام مجسمات، مثل الأجسام والرسومات والرسوم التخطيطية والأفعال. ويمكن لمثل هذه الفرضيات أن تكون منطقية وصحيحة، بالرغم من أنها غير معممة أو رسمية حتى صفوف دراسية متقدمة. ولاحقًا، يتعلم الطلاب تحديد المجالات التي تنطبق عليها إحدى الفرضيات. ويمكن للطلاب في كل الصفوف الدراسية أن يستمعوا إلى فرضيات الآخرين ويقرؤوها، ويقررون إذا ما كانت منطقية أم لا، ويطرحون أسئلة مفيدة لتوضيح الفرضيات أو تحسينها.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
تتطلب الفرضيات الرياضية السليمة تقدمًا منطقيًا للعبارات والأسباب. ويكون بإمكان الطلاب توصيل أفكارهم بوضوح والدفاع عنها.	• ساعد الطلاب على التمييز بين الافتراضات والتقديرات المنطقية. • تمثيل تقييمات للفرضيات الصحيحة والخاطئة.	يتحدث الطلاب ويكتبون عن الرياضيات ويشاركون أفكارهم مع الآخرين. ويتوصلون إلى استنتاجات، ويضعون تقديرات، ويفسرون تفكيرهم المنطقي، ويبررون استنتاجاهم، ويعترضون على استنتاجات الطلاب الآخرين.	• كيف حصلت على هذه الإجابة؟ هل تكون صحيحة دائمًا؟ • لماذا نجح هذا؟ ما الدليل الرياضي الذي يمكنك تقديمه؟ • هل يمكنك إعطائي "مثال خارج عن التعريف"؟ أو مثال مضاد؟

4 استخدام نماذج الرياضيات.

يمكن للطلاب المتفوقين في الرياضيات تطبيق المفاهيم الرياضية التي يعرفونها لحل المسائل التي يواجهونها في الحياة اليومية والمجتمع والعمل. في الصفوف الدراسية الأولى، قد يتمثل هذا في كتابة معادلة جمع بسيطة لوصف موقفٍ ما. وفي الصفوف الدراسية المتوسطة، يمكن أن يطبق الطالب إستراتيجية الاستنتاج التناسبي للتخطيط لحدث مدرسي أو لتحليل مشكلة يواجهها المجتمع. وفي المدرسة الثانوية، قد يستخدم الطالب الهندسة لحل مسألة ترتبط بالتصميم، أو يستخدم دالة لوصف كيف تعتمد كمية ما على كمية أخرى. يرتاح الطلاب المتفوقون رياضيًا القادرون على تطبيق ما يعرفونه عند وضع افتراضات وتقريبات لتبسيط موقف معقد، مدركين أن هذه الأمور قد تحتاج مراجعة لاحقًا. وهم قادرون على تحديد الكميات المهمة في موقف عملي ورسم مخطط للعلاقات باستخدام أدوات مثل الرسوم التخطيطية، والجداول بمدخلين، والتمثيلات البيانية والمخططات الانسيابية والمعادلات. كما يمكنهم تحليل هذه العلاقات رياضيًا للتوصل إلى استنتاجات، ويفسرون نتائجهم الرياضية بصورة روتينية في سياق الموقف، ويفكرون ما إذا كانت النتائج منطقية أم لا، وربما يحسنون النموذج إذا لم يؤدي الغرض منه.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
يُحدث استخدام النماذج ترابطًا بين الرياضيات والإحصائيات اللتين يتم تناولهما بالصف الدراسي والحياة العامة والعمل وصناعة القرار. ويُتوقع من طلاب المدارس الثانوية في هذا المستوى أن يطبقوا النقاط الأساسية المكتسبة من صفوف مبكرة على المسائل من مستوى المرحلة الثانوية.	• أعد ربط النماذج المحددة، بالموقف. • ناقش مدى ملاءمة نماذج متعددة. • حل مسائل من واقع الحياة بطرق متعددة.	يختار الطلاب ويستخدمون الملائم من الرياضيات والإحصائيات بغية تحليل المواقف وفهمها بشكل أفضل وتحسين القرارات. يرى الطلاب أن الرياضيات ليست مجرد مجموعة من المهارات ليس لها استخدام في الحياة اليومية.	• كيف يمكنك تمثيل الموقف رياضيًا؟ • كيف يتمثل الموقف في المعادلة أو الرسم التخطيطي لديك؟ • ما الافتراضات التي يمكنك وضعها؟ هل يجب عليك وضعها؟ • هل يمكنك وضع تقدير جيد للإجابة؟

5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

يراعي الطلاب المتفوقون في الرياضيات الأدوات المتاحة أثناء حل مسألة رياضيات. وقد تتضمن هذه الأدوات ورقة، أو قلم رصاص، أو نماذج ملموسة، أو مسطرة، أو منقلة، أو حاسبة، أو جدول بيانات، أو نظامًا جبريًا حاسوبيًا، أو حزمة إحصائية، أو برنامج هندسة ديناميكي. ويُلمّ الطلاب المتفوقون رياضيًا بما يكفي من الأدوات المناسبة لصفهم الدراسي أو مقررهم الدراسي لاتخاذ قرارات صائبة حول أي من هذه الأدوات قد يكون مفيدًا، مع إدراكهم للرؤية التي سيكتسبونها والحدود التي تقيدهم. فعلى سبيل المثال، يحلل الطلاب المتفوقون رياضيًا في المرحلة الثانوية الرسوم البيانية للدوال والحلول التي تم إنشاؤها باستخدام حاسبة تمثيل بياني. ويكتشفون الأخطاء المحتملة من خلال استخدام التقدير بشكل إستراتيجي وغيره من المعرفة الرياضية. وعند عمل نماذج رياضية، يعرف الطلاب أن التقنية قد تتيح لهم تصور نتائج الافتراضات المختلفة، واستكشاف عواقبها، ومقارنة التنبؤات بالبيانات. ويستطيع الطلاب المتفوقون رياضيًا في مستويات الصفوف الدراسية المتعددة أن يحددوا الموارد الرياضية الخارجية ذات الصلة، مثل المحتوى الرقمي الموجود على موقع ويب، واستخدامها في وضع مسألة أو حلها. ويمكنهم استعمال الأدوات التقنية لاستكشاف المفاهيم وتعميق فهمهم لها.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
تكون بعض الأدوات، بما في ذلك التقدير والأدوات الافتراضية، مناسبة أكثر من غيرها. وينبغي أن يفهم الطلاب منافع استخدام كل أداة وحدود استخدامها.	• قم بتوفير مختلف الأدوات في فصلك. وشجع الطلاب على أن يكون لديهم الأدوات المتاحة عند العمل خارج الفصل. • ناقش منافع استخدام مختلف الأدوات وحدود استخدامها.	يجري الطلاب الاختيارات بفعالية في تحديد الأداة/ الإستراتيجية لحل المسألة. وينبغي أن تتضمن مختلف الأدوات عناصر مثل الورق والقلم الرصاص، والأجسام المادية، والوسائل التعليمية اليدوية، وحاسبات الرسوم البيانية، وبرنامجًا هندسيًا ديناميكيًا. وينبغي أن تتضمن كذلك إستراتيجيات مثل التقدير أو الرياضيات الذهنية أو إنشاء ورقة بيانات أو استخدام برنامج تمثيل بياني أو استخدام الإنترنت لحل المسائل.	• ما الأدوات التي سوف تساعدك على تصور الموقف؟ ما حدود استخدام هذه الأداة؟ • هل تحتاج إلى إجابة دقيقة؟ • كيف يمكنك استخدام التقدير باعتباره أداة؟ • هل يمكنك حل هذه المسألة باستخدام أداة أخرى؟

6 مراعاة الدقة.

يحاول الطلاب المتفوقون رياضيًا التواصل بدقة مع الآخرين. وسوف يحاولون استخدام تعريفات واضحة خلال نقاشهم مع الآخرين إلى جانب استنتاجهم الخاص. ويبينون معنى الرموز التي يختارونها، بما في ذلك استخدام علامة التساوي باستمرار وبشكل صحيح. وهم حريصون بشأن تحديد وحدات القياس وتسمية المحاور لتوضيح ارتباطها بالكميات في المسألة. ويحسبون بدقة وكفاءة ويعبرون عن الإجابات العددية بدرجة من الدقة تناسب سياق المسألة. في الصفوف الدراسية الابتدائية، يقدم الطلاب تفسيرات صيغت بعناية لبعضهم البعض. وبحلول الوقت الذي يلتحقون فيه بالمدرسة الثانوية، سيكونون قد تعلموا التحقق من الادعاءات واستخدام التعريفات استخدامًا واضحًا.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
إن مراعاة الدقة في الرياضيات تتعدى كونها مجرد حسابات دقيقة. فهي تعني كذلك القدرة على التواصل بلغة الرياضيات. وفي رياضيات المرحلة الثانوية، تؤدي اللغة الدقيقة إلى التواصل الفعال وتعمل بمثابة أداة لفهم المسائل وحلها.	• استخدم لغة رياضيات دقيقة. • وضح كيفية استخدام أدوات مثل مسرد المصطلحات. • ناقش ما يعنيه أن يكون التعريف دقيقًا. اطلب من الطلاب التعاون معًا لكتابة تعريفاتهم الخاصة وتحسينها.	يستخدم الطلاب مفردات واضحة ودقيقة وهم يشرحون استنتاجهم ويطرحون الأسئلة. ويميزون كذلك -بشكل صحيح- سمات القياس، ويميزون الإجابات، ويحددون وحدات القياس، ويسمون الرسوم البيانية، ويعرّفون المتغيرات، ويستخدمون الرموز الرياضية لتجنب سوء الفهم.	• كيف يمكن لاستخدام المعنى العام لمصطلح رياضي ما أن يساعدك على تذكر المعنى الرياضي؟ • هل يمكنك إعطاء أمثلة قياسية وأمثلة خارجة عن التعريف لهذا المصطلح؟ • هل هذا المصطلح مشابه لشيء ما تعرفه بالفعل؟ • ماذا يعني الرمز الرياضي؟

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

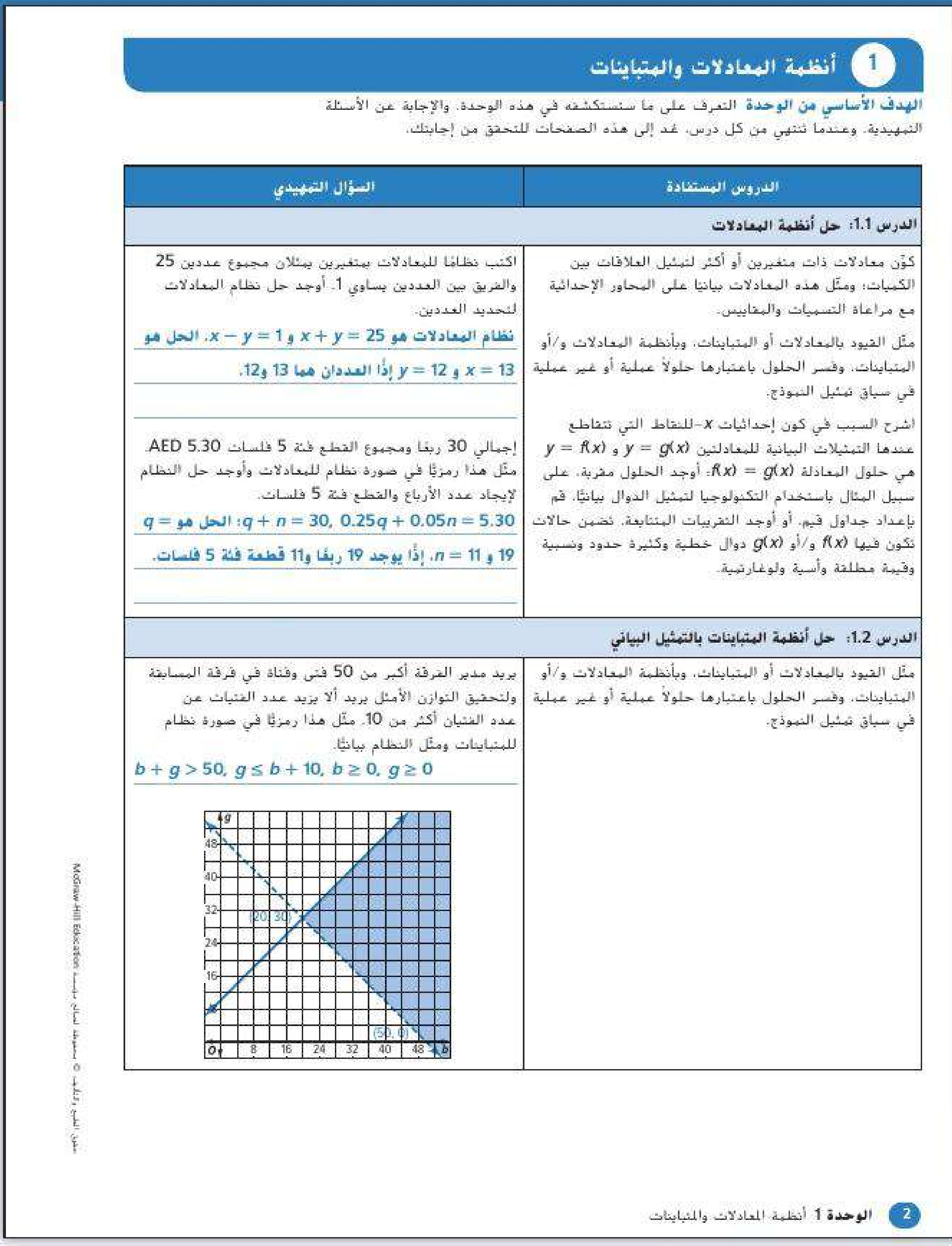
يمعن الطلاب المتفوقون في الرياضيات النظر لتمييز النمط أو البنية. قد يلاحظ الطلاب صغار السن، على سبيل المثال، أن إضافة ثلاثة إلى سبعة يؤدي إلى نفس مجموع إضافة سبعة إلى ثلاثة، أو يمكنهم تصنيف مجموعة من الأشكال بناءً على عدد الجوانب التي تمتلكها الأشكال. ولاحقًا، سيرى الطلاب أن 8×7 تساوي $3 \times 7 + 5 \times 7$، المحفوظة جيدًا، وذلك أثناء الإعداد لتعلّم ما يتعلّق بخاصية التوزيع. في التعبير $x^2 + 9x + 14$، يمكن أن يرى الطلاب الأكبر سنًا العدد 14 على أنه 2×7 والرقم 9 على أنه $2 + 7$. وهم يدركون أهمية أي خطٍ موجود في شكلٍ هندسي ويمكنهم استخدام إستراتيجية رسم خط مساعد لحل المسائل. كما يمكنهم الرجوع خطوة لإلقاء نظرة عامة وتغيير منظورهم. ويمكنهم رؤية الأشياء المعقدة، مثل بعض التعابير الجبرية، على أنها أشياء مفردة أو أنها تتألف من عدة أشياء. فعلى سبيل المثال، يمكنهم رؤية $5 - 3(x - y)^2$ على أنها 5 ناقص رقم موجب مضروبًا في تربيع، واستخدام ذلك لإدراك أن قيمته لا يمكن أن تزيد عن 5 لأي من الأعداد الحقيقية x و y.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
تعتمد الرياضيات على البنية المحددة بدقة. ويحاول الطلاب المتفوقون رياضيًا إيجاد البنية لإيجاد طرق أسهل لحل المسائل.	• اطلب من الطلاب التحدث بشأن ما يلاحظونه في بنية التعبيرات والمعادلات. • شجع الطلاب على التفكير بشأن خواص الأشكال التي يعرفونها وكيف يمكن تطبيق هذه الخواص على الشكل المحدد في مسألة ما.	يستخدم الطلاب الخواص للمساعدة على التوصل إلى طرق بديلة للحل. ويستفيد الطلاب من مصطلحات المقارنة ويبحثون عن طرق مختصرة إلى الوصول إلى الحل. ويستخدمون خرائط المفاهيم والمطويات لتوضيح الأمثلة/الأمثلة الخارجة عن التعريف، وتصنيف الأشكال/الأعداد، وتفسير بنية التعبيرات الجبرية.	• كيف يمكنك استخدام ما تعرفه بالفعل لمساعدتك على حل هذه المسألة؟ • كيف يمكن ما تعرفه بشأن الأعداد الصحيحة أن يساعدك وأنت تتعامل مع كثيرات الحدود؟ • ما الأشكال التي تراها في الرسم؟ هل يمكنك إضافة خط أو قطعة مستقيمة أخرى تعطينا مزيدًا من المعلومات؟

8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية إن وجدت، ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معًا. وقد يلاحظ طلاب المدرسة الابتدائية العليا أثناء قسمة 25 على 11 أنهم يكررون نفس الحسابات مرة بعد مرة، وبذلك يستنتجون أن لديهم كسرًا عشريًا متكررًا. وبالانتباه إلى حساب الميل بينما يكررون التحقق مما إذا كانت النقاط على المستقيم عبر $(1, 2)$ وبميل مقداره 3، قد يستخلص طلاب المدرسة الإعدادية المعادلة $\frac{y-2}{x-1} = 3$. وقد تقودهم ملاحظة التوافق في طريقة حذف الحدود أثناء تفكيك $(x-1)(x+1)$ و $(x-1)(x^2+x+1)$ و $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ إلى الصيغة العامة لمجموع متسلسلة هندسية. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة، مع الانتباه في الوقت نفسه إلى التفاصيل. ويقيّمون باستمرار مدى صحة نتائجهم الوسيطة.

ماذا يعني؟	ماذا يمكنني أن أفعل؟	كيف يبدو ذلك؟	ما الأسئلة التي أطرحها؟
تُوصف الرياضيات بأنها دراسة الأنماط. ويمكن أن يؤدي التعرف على النمط للوصول إلى نتائج بشكل أسرع وأكثر فعالية.	• قدم للطلاب عددًا من الأمثلة المحددة ثم وجههم للوصول إلى استنتاج. • أشر إلى الأنماط وأنت تحل المسائل وتناقش المفاهيم.	يبحث الطلاب عن طرق مختصرة أو تعميمات. ويحاولون تجربة بضعة أمثلة محددة ثم يبتكرون حالة عامة. وتعمل هذه التجارب المتكررة التي يصف الطلاب من خلالها أفكارهم، على مساعدتهم في تكوين روابط بين ما يعرفونه والمواقف الجديدة التي تتطلب تفكيرًا مماثلًا.	• هل تلاحظ نمطًا؟ • هل هذا النمط يشبه النمط الذي رأيته من قبل؟ • هل هذه المسألة مشابهة لشيء ما تعلمه بالفعل؟ • كيف يمكن أن ينجح ذلك مع الأعداد الأخرى؟ هل ينجح ذلك في جميع الأوقات؟ كيف عرفت؟



1 أنظمة المعادلات والمتباينات

الهدف الأساسي من الوحدة التعرف على ما ستستكشفه في هذه الوحدة. والإجابة عن الأسئلة التمهيدية. وعندما تنتهي من كل درس، عُد إلى هذه الصفحات للتحقق من إجابتك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 1.1: حل أنظمة المعادلات	
كوّن معادلات ذات متغيرين أو أكثر لتمثيل العلاقات بين الكميات؛ ومثّل هذه المعادلات بيانيًا على المحاور الإحداثية مع مراعاة التسميات والمقاييس.	اكتب نظامًا للمعادلات بمتغيرين يمثلان مجموع عددين 25 والفرق بين العددين يساوي 1. أوجد حل نظام المعادلات لتحديد العددين. **نظام المعادلات هو $x + y = 25$ و $x - y = 1$. الحل هو $x = 13$ و $y = 12$ إذًا العددان هما 13 و12.**
مثّل القيود بالمعادلات أو المتباينات، وبأنظمة المعادلات و/أو المتباينات، وفسر الحلول باعتبارها حلولاً عملية أو غير عملية في سياق تمثيل النموذج.	
اشرح السبب في كون إحداثيات x-للنقاط التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية للمعادلتين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ هي حلول المعادلة $f(x) = g(x)$؛ أوجد الحلول مقربة. على سبيل المثال باستخدام التكنولوجيا لتمثيل الدوال بيانيًا. قم بإعداد جداول قيم. أو أوجد التقريبات المتتابعة. تضمن حالات تكون فيها $f(x)$ و/أو $g(x)$ دوال خطية وكثيرة حدود ونسبية وقيمة مطلقة وأسية ولوغاريتمية.	إجمالي 30 ربعًا ومجموع القطع فئة 5 فلسات AED 5.30. مثّل هذا رمزيًا في صورة نظام للمعادلات وأوجد حل النظام لإيجاد عدد الأرباع والقطع فئة 5 فلسات. **$q + n = 30,\ 0.25q + 0.05n = 5.30$؛ الحل هو $q = 19$ و $n = 11$، إذًا يوجد 19 ربعًا و11 قطعة فئة 5 فلسات.**
الدرس 1.2: حل أنظمة المتباينات بالتمثيل البياني	
مثّل القيود بالمعادلات أو المتباينات، وبأنظمة المعادلات و/أو المتباينات، وفسر الحلول باعتبارها حلولاً عملية أو غير عملية في سياق تمثيل النموذج.	يريد مدير الفرقة أكبر من 50 فتى وفتاة في فرقة المسابقة ولتحقيق التوازن الأمثل يريد ألا يزيد عدد الفتيات عن عدد الفتيان أكثر من 10. مثّل هذا رمزيًا في صورة نظام للمتباينات ومثّل النظام بيانيًا. **$b + g > 50,\ g \le b + 10,\ b \ge 0,\ g \ge 0$**

استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* مع كتاب *الرياضيات للصف 10 المتقدم.*

درس دليل الطالب التفاعلي	*الرياضيات للصف 10 المتقدم*
1.1	الدرس 1-1
1.2	الدرس 2-1
1.3	الدرس 3-1
1.4	الدرس 4-1

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

يقدم السؤال التمهيدي الأول في الدرس 1.1 إلى الطلاب **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. ابدأ بالإشارة إلى أن هناك أمرين معروفين حول العلاقة بين الأرقام: مجموعها 25 والفرق بينها هو 1. ويمكن تمثيل كل عبارة بمعادلة. هناك حاجة إلى المعادلتين لتمثيل كل شيء معروف عن العلاقة بين الأرقام. وحل نظام المعادلات هذا سوف ينتج قيم الأرقام التي تحقق كلا الشرطين.

وضّح هذا بيانيًا عن طريق التأكيد على أن التمثيل البياني للمعادلة $x + y = 25$ يحتوي على جميع القيم التي تحقق هذه المعادلة، في حين أن التمثيل البياني للمعادلة $x - y = 1$ يحتوي على جميع القيم التي تحقق هذه المعادلة. نقطة التقاطع فقط هي ما تحقق المعادلتين.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

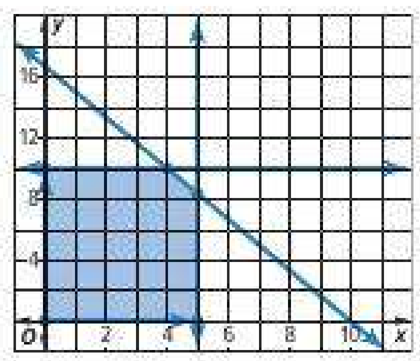
يمكن أن يمثل السؤال التمهيدي في الدرس 1.3 فرصة لاستكشاف **م.م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. ذكّر الطلاب بأن المعلومات المعطاة تؤدي إلى نظام متباينات، والذي يمثل حله حلولًا للمشكلة الأصلية. وبالإضافة إلى ذلك، تؤدي الشروط الضمنية إلى متباينات تقيد الحل أيضًا. فعلى سبيل المثال، لا يمكن للطالب شراء عدد سالب من صناديق الأقلام الجاف أو أقلام الرصاص. إذا ما تناولناها معًا، فعندما يتم تمثيل المتباينات بيانيًا، فإنها تحد منطقة من المستوى، والتي تمثل رؤوسها الحلول الممكنة لجزء البحث عن الحل الأمثل للمشكلة.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

يمكن أن يمثل السؤال التمهيدي في الدرس 1.4 فرصة لاستكشاف **م.م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. قم بالإشارة إلى أن نظام المعادلات في ثلاثة متغيرات يتطلب ثلاثة معادلات لإيجاد حل. ومع ذلك، لا يحتاج كل متغير إلى الظهور في كل معادلة. والنظام الموصوف في السؤال التمهيدي هذا لا يستخدم المتغيرات الثلاثة في كل معادلة، كما هو موضح هنا:

$$x + y + z = 35$$
$$x + y = 30$$
$$y + z = 15$$

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 1.3: إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية	
مثّل القيود بالمعادلات أو المتباينات، وبأنظمة المعادلات و/أو المتباينات، وفسر الحلول باعتبارها حلولاً عملية أو غير عملية في سياق تمثيل النموذج.	أنت بحاجة إلى شراء عدة صناديق من الأقلام الجاف والرصاص. ومتجر المدرسة به 5 صناديق من الأقلام الجاف في الوقت الحالي، بحيث يبيع كل صندوق مقابل AED 5. و10 صناديق من الأقلام الرصاص بحيث يبيع كل صندوق مقابل AED 3. ولا يمكنك إنفاق أكثر من AED 50. اكتب نظامًا للمتباينات يمثل القيود المتعلقة بهذا الموقف. ثم مثّل النظام بيانيًا وحدد رؤوس منطقة الحلول الممكنة. $5x + 3y \le 50,\ 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 10$  رؤوس منطقة الحلول الممكنة هي $(0, 0), (0, 10), (5, 0), (4, 10), (5, \frac{25}{3})$.
الدرس 1.4: أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات	
مثل القيود بالمعادلات أو المتباينات، وبأنظمة المعادلات و/أو المتباينات، وفسر الحلول باعتبارها حلولاً عملية أو غير عملية في سياق تمثيل النموذج.	مجموع الأعداد الثلاثة يساوي 35، ومجموع العددين الأول والثاني يساوي 30، ومجموع الثاني والثالث يساوي 15. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات لإيجاد الأعداد الثلاثة. $x + y + z = 35;\ x + y = 30;\ y + z = 15$ $x = 20,\ y = 10,\ z = 5$ لمباراة كرة القدم، كانت تذاكر الأطفال بسعر AED 2، وتذاكر الكبار AED 5 وتذاكر كبار السن AED 3. وتم بيع 3000 تذكرة بإجمالي AED 10.903 وكان عدد الأطفال يزيد عن عدد المسنين بمقدار 200. اكتب نظامًا للمعادلات لتمثيل هذه المعلومة. $c + a + s = 3000,\ 2c + 5a + 3s = 10903,$ $c = s + 200$

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 5, 6, 8

المتطلبات الأساسية

- تمثيل المعادلات الخطية بيانيًا

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

بمجرد قيام الطلاب بتمثيل المعادلات بيانيًا، اطلب منهم استخدام حاسبة التمثيل البياني للتحقق من صحة نقطة التقاطع.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يُعد من المهم التحقق من مدى الصحة بالتعويض في المعادلة الأصلية؟ **يقدم لك التمثيل البياني تقريبًا للتقاطع؛ وبالتعويض تتأكد مما إذا كانت الإجابة عملية.**
- إذا تم استخدام x لتمثيل سعر تذكرة بالغين، فماذا كانت نقطة تقاطع المستقيمين؟ **(2, 1)**

1.1 حل أنظمة المعادلات

الأهداف

- كتابة أنظمة المعادلات الخطية وإيجاد حلها.
- تفسير حلول أنظمة المعادلات الخطية على أنها عملية أو غير عملية في سياقات تمثيل النموذج.
- شرح السبب في كون النقاط التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية لأنظمة المعادلات هي حلول الأنظمة.

نظام المعادلات هو معادلتان أو أكثر لهما نفس المتغيرات. ولحل نظام معادلات، أوجد الزوج المرتّب الذي يحقق جميع المعادلات.

أوجد الحل باستخدام التمثيل البياني
الخطوة 1 اكتب كل معادلة بصيغة الميل والمقطع.
الخطوة 2 مثّل كل معادلة بيانيًا وأوجد نقاط التقاطع.
الخطوة 3 تحقق بالتعويض في كل معادلة أصلية.

مثال 1 أوجد الحل باستخدام التمثيل البياني

الاستكشاف كانت فرقة المدرسة الثانوية تبيع تذاكر الركوب. وفي اليوم الأول، تم بيع 200 تذكرة للأطفال و100 تذكرة للكبار بإجمالي AED 400. وفي اليوم الثاني، تم بيع 40 تذكرة للأطفال و10 تذاكر للكبار بإجمالي AED 60. ما سعر كل تذكرة للأطفال وكل تذكرة للكبار؟

a. **التفكير بطريقة تجريدية** اكتب نظام معادلات لتمثيل هذه الحالة.

$200x + 100y = 400$

$40x + 10y = 60$

b. **استخدام الأدوات** مثّل نظام المعادلات بيانيًا وقدر نقاط التقاطع.

الإجابة النموذجية: (1, 2)

c. **الحساب بدقة** تحقق من تقديرك بالتعويض في المعادلات الأصلية.

التقاطع عند (1, 2). $200(1) + 100(2) = 400$, $400 = 400$, $40(1) + 10(2) = 60$

$60 = 60$. نقطة التقاطع هي حل لكلتا المعادلتين، لذا فهو حل النظام.

d. **تفسير المسائل** ماذا تمثل نقطة التقاطع؟

القيمة x- تمثل تكلفة تذكرة الأطفال، AED 1، والقيمة y- تمثل تكلفة تذكرة الكبار، AED 2.

معلومات أساسية في الرياضيات

نشأ العديد من أعظم الاكتشافات الرياضية عن الحاجة لحل مسائل علمية. في عام 1810، أصبح كارل فريدريش غاوس (1777-1855)، الذي اشتهر بحساب مدار كويكب سيريس المكتشف حديثًا، مهتمًا باكتشاف مدار بالاس. قاده عمله إلى نظام من ست معادلات خطية بستة مجهولات. واخترع غاوس **طريقة الحذف**، التي ما زلنا نستخدمها اليوم.

طريقة التعويض
الخطوة 1 حل معادلة واحدة لأحد المتغيرين.
الخطوة 2 عوّض بالتعبير الناتج في المعادلة الأخرى لاستبدال المتغير. ثم أوجد حل المعادلة.
الخطوة 3 عوّض لإيجاد الحل للمتغير الآخر.

مثال 2 **الحل باستخدام التعويض**

يشتري كل من محمد وعلي الفطائر من أجل جمع التبرعات. فباع محمد 3 فطائر صغيرة و14 فطيرة كبيرة مقابل إجمالي AED 203. وباع علي 11 فطيرة صغيرة و11 فطيرة كبيرة مقابل إجمالي AED 220. حدد تكلفة كل فطيرة صغيرة وكل فطيرة كبيرة.

a. تفسير المسائل اكتب نظام معادلات وأوجد الحل باستخدام التعويض.

محمد: $3x + 14y = 203$، علي: $11x + 11y = 220$ حيث x تمثل تكلفة الصغيرة و y تمثل تكلفة الكبيرة. حل معادلة علي لإيجاد قيمة y: $y = -1x + 20$؛ عوّض في معادلة محمد: $3x + 14(-1x + 20) = 203$؛ أوجد الحل: $x = 7$؛ عوّض في معادلة أخرى: $y = -1(7) + 20$؛ أوجد حل y؛ $y = 13$.

b. تقييم مدى صحة الحل حلل النتائج. كيف يمكنك التحقق من صحة الحل؟

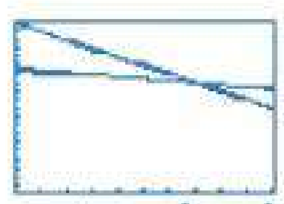
تكلفة كل فطيرة صغيرة تساوي AED 7، وتكلفة كل فطيرة كبيرة تساوي AED 13. بتعويض الحل في كل معادلة في النظام يمكنك التحقق من مدى صحته. $3(7) + 14(13) = 203$، و $11(7) + 11(13) = 220$.

c. بناء الفرضيات قارن حلك بحل زميلك. في **الجزء b** هل أوجدتما حل المتغير نفسه؟ إذا كان الجواب بلا، فهل كانت حلولكما هي نفسها؟ هل كان حل أحد المتغيرات أسهل من غيره؟ لماذا؟

الحل في أي متغير سينتج الحل نفسه، وأسهل متغير في الحل هو المتغير ذو المعامل. وفي هذه المسألة، معادلة علي كانت الأسهل في حل x أو y لأن جميع المعاملات كانت قابلة للقسمة على 11.

d. تقييم مدى صحة الحل استخدم حاسبة التمثيل البياني لوضع المستقيمين على المستوى الإحداثي نفسه. هل يحقق التمثيل البياني حلك؟

نعم، الحل مؤكد. يتقاطع المستقيمان عند النقطة (7, 13).



[0, 10] scl: 1 في
[0, 20] scl: 1

طريقة الحذف
الخطوة 1 اضرب إحدى المعادلتين أو كلتيهما في عدد لينتج معادلتين تحتويان على حدين متقابلين.
الخطوة 2 اجمع المعادلتين، مما سيحذف متغيرًا واحدًا. ثم أوجد حل المعادلة.
الخطوة 3 عوّض لإيجاد الحل للمتغير الآخر.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **م.م.ر 5**، يقوم طلاب الثانوية المتفوقون رياضيًا بتحليل التمثيلات البيانية للدوال والحلول الناتجة عن استخدام حاسبة التمثيل البياني. يسترسل هذا الدرس في استخدام حاسبة التمثيل البياني. تسمح الحاسبة للطلاب بإدخال معادلات ميل التقاطع وجعل الحاسبة تجد التقاطع باستخدام ميزة calc. تكون هذه أداة رائعة للتحقق من مدى صحة العمل الذي يكملونه. وهي أداة رائعة كذلك للطلاب الذين لم يتقنوا تمثيل المستقيمات بيانيًا. يجب أن يدرك الطلاب أن النتائج التي تقدمها الحاسبة ما زال يجب التحقق منها بواسطة التعويض. إذا لم تكن المعادلات صحيحة أو لم يتم إدخالها بشكل صحيح، فسيكون الحل غير عملي.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

قسم الفصل إلى أربع مجموعات واطلب من كل مجموعة إيجاد حل متغير مختلف. اجعل الطلاب يقومون بحل المسألة. ثم اطلب من المجموعات مقارنة عملهم لتحديد أي متغير كان الأسهل في إيجاد حله ولماذا.

الأسئلة الداعمة

- هل يمكن حل هذه المسألة باستخدام طريقة التمثيل البياني؟ **يمكن حل جميع الأنظمة باستخدام طريقة التمثيل البياني، ولكن ستكون الإجابة تقريبية.**
- إذا لم يكن لأي معادلة متغير بمعامل يساوي 1، فكيف سيزال يمكنك إيجاد الحل بسهولة باستخدام التعويض؟ **إذا كان هناك عامل مشترك للمعاملات والثوابت في معادلة واحدة، فيمكنني قسمة كل حد في المعادلة على ذلك العامل.**

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 3

اجعل الطلاب يناقشون الطرق الثلاثة. وضع إستراتيجيات لتحديد أي طريقة تستخدم لأنظمة معادلات مختلفة.

الأسئلة الداعمة

- كان لجميع هذه الأمثلة الثلاثة حلًا. ولكن الأمر لا يسري هكذا دائمًا. كيف سيبدو تمثيل بياني بدون حلول؟ **سيكون التمثيل البياني مستقيمات متوازية لعدم وجود تقاطع.**
- كيف سيبدو أحد الحلول عند استخدام طريقة الحذف أو التعويض ولا يوجد حل؟ **سيتم حذف المتغيرات وستكون النتيجة عبارة غير صحيحة مثل $1 = 0$.**

أخطاء شائعة

عند استخدام **طريقة الحذف**، ينتج عن ضرب معادلة واحدة أو كلتيهما نظام متكافئ. ويكون الخطأ الشائع هو نسيان ضرب جميع أطراف المعادلة. الضرب في كلا طرفي علامة التساوي.

في **طريقة الحذف**، من المفيد أن يقوم الطلاب بصف المتغيرات. يكون العديد من المعادلات معدًا بحيث لا تكون المتغيرات في طرف واحد. يحتاج الطلاب إلى معرفة أنه يجب أن تكون لديهم جميع المتغيرات في طرف واحد ومتغيري "x" و"y" مصطفان قبل إجراء الجمع أو الطرح لحذف المتغير.

سيعاني الطلاب كذلك من صعوبة في إيجاد الثابت الملائم الذي يقومون بضربه في إحدى المعادلات أو الثوابت الملائمة التي يقومون بضربها في كلتا المعادلتين لإيجاد حدود مشتركة تكون متقابلة.

عند استخدام **طريقة التعويض**، يقوم الطلاب بالتعويض في المتغير الخاطئ. عندما يقومون بإيجاد الحل فيكون لا يزال لديهم متغيران مختلفان. عند التعويض، يحتاج الطلاب إلى إدراك أنه ينبغي أن يكون لديهم متغير واحد فقط.

الطلاب الذين لا يدركون أهمية تمثيل مستقيم بيانيًا بدقة سيعانون من صعوبة عند استخدام **طريقة التمثيل البياني**، لإيجاد نقطة التقاطع الدقيقة.

مثال 3 **الحل باستخدام الحذف**

لدى خديجة مجموعة من القطع المعدنية فئة 10 فلسات و5 فلسات، ومجموعها 17 عملة. والقيمة الإجمالية للمجموعة هي AED 1.15. فما عدد القطع المعدنية فئة 5 فلسات وما عدد القطع المعدنية فئة 10 فلسات لديها؟

a. اكتب نظام معادلات وأوجد الحل باستخدام الحذف.

الإجابة النموذجية: $0.05n + 0.10d = 1.15$ ،$n + d = 17$. أوجد الحل بالضرب: $-0.05(n + d = 17)$ يعطي الناتج $-0.05n - 0.05d = -0.85$. معاملات المتغير n متضادة الآن. وإضافة المعادلات تنتج $0.05d = 0.30$، حذف المتغير n. $d = 6$، عوّض في $n + d = 17$، $n = 11$

b. حلل النتائج. وتحقق من صحة الحل.

كان لدى خديجة 6 قطع المعدنية فئة 10 فلسات و11 قطع معدنية فئة 5 فلسات في مجموعتها. للتحقق من صحة التعويض في كل المعادلة. $(11) + (6) = 17$ و $0.05(11) + 0.10(6) = 1.15$

c. **استخدام البنية** افترض أن عدد العملات نفسه كانت قيمته AED 1.20. بدون كتابة نظام معادلات جديد أو حله: حدد عدد القطع المعدنية فئة 10 فلسات و5 فلسات الموجود. واشرح استنتاجك.

7 قطع المعدنية فئة 10 فلسات و10 قطع معدنية فئة 5 فلسات ؛ باستبدال قطعة معدنية واحدة فئة 5 فلسات مكان قطعة معدنية واحدة فئة 10 فلسات ، تزيد قيمة العملات من AED 0.05 إلى AED 1.20.

d. **التفكير النقدي** صف كيف تقرر أي طريقة تستخدمها لحل نظام المعادلات. وناقش استنتاجك مع زميلك.

الإجابة النموذجية: عندما تكون الأنظمة بصيغة الميل والمقطع، يمكن استخدام التمثيل البياني. وعندما يكون للنظام متغير بمعامل 1، يمكن استخدام التعويض. وعندما يكون النظام بمتغيرات متعاكسة المعاملات، يمكن استخدام الحذف.

تمرين

التخطيط للحل **اكتب نظام معادلات وأوجد حله لكل موقف. وفسر الحل في سياق الموقف.**

1. توجد ممحاوات معروضة للبيع مقابل 45 فلسًا لكل ممحاة، وأقلام رصاص للبيع مقابل 40 فلسًا لكل قلم. تشتري شيرين 23 قلمًا رصاص وممحاوات وتدفع إجمالي AED 9.70، غير شامل الضرائب. فإذا اشترت شيرين الأقلام الرصاص وحدها والممحاوات، فما عدد ما اشترته شيرين من كل نوع؟

$0.45x + 0.40y = 9.70,\ x + y = 23;\ 0.45x + 0.40(-x + 23) = 9.70;\ 0.45x - 0.40x + 9.20 = 9.70;\ 0.05x + 9.20 = 9.70;\ 0.05x = 0.5;\ x = 10$؛ عوض في $x + y = 23$: $10 + y = 23$، $y = 13$

اشترت شيرين 10 ممحاوات و13 قلمًا رصاصًا.

أخطاء شائعة

عند حل أنظمة المعادلات، لا يدرك الطلاب ما يعنيه الحل. فهم يجرون المهمة ميكانيكيًا بدلًا من الاعتماد على المفهوم. ويميلون إلى إجراء طريقة واحدة بدلًا من اختيار أفضل إستراتيجية لكل موقف. يمكن أن يمثل تخطيط واتباع إجراءات حل صحيحة مشكلة عندما لا يعلم الطلاب بما يمثله الحل أو لم ينجح الإجراء. يمكن أن يكون التحقق من الإجابات عن طريق التحقق من مدى صحة الحلول صعبًا لنفس الأسباب. يجب أن يقدم إلى الطلاب فرصة لفهم كل طريقة وسبب نجاح طريقة بصورة أفضل عن أخرى.

2. يتم استثمار إجمالي AED 21,000 في سندات تدفع 4% و7.5% بالفائدة البسيطة. والسند الذي له نسبة مرابحة 7.5% يكسب 6 أضعاف فائدة السند بمعدل 4% فائدة. فما مقدار المستثمر في كل سند؟ وما إجمالي الفائدة المكتسبة؟ اشرح عملية الحل.

بفرض أن y تساوي السند الذي قيمته 7.5% نسبة مرابحة وأن x تساوي السند الذي قيمته 4% نسبة مرابحة. نظام المعادلات هو $0.075y = 6(0.04x)$ ؛ $x + y = 21,000$. أوجد حل المعادلة الثانية لـ x. وعوّض عن هذه القيمة في المعادلة الأولى. $0.075y = 6(0.04(21,000 - y)) \rightarrow 0.075y = 5040 - 0.24y \rightarrow y = 16,000$.

عوّض عن قيمة y في المعادلة الثانية: $x + 16,000 = 21,000 \rightarrow x = 5000$. الفائدة المكتسبة تساوي $0.075(16000) + 0.04(5000) = 1400$.

3. اشترت ياسمين 3 ألعاب و2 DVDs مقابل AED 58. واشترى خالد لعبة واحدة و4 DVDs مقابل AED 46. حدد سعر كل لعبة وسعر DVD.

$3x + 2y = 58,\ 1x + 4y = 46;\ 3(-4y + 46) + 2y = 58;\ -12y + 138 + 2y = 58;\ -10y = -80;\ y = 8$؛ عوّض في $x + 4y = 46,\ 1x + 4(8) = 46,\ x = 14$. سعر اللعبة الواحدة يساوي AED 14، وسعر DVD واحد يساوي AED 8.

4. يجز وليد حشائش 0.72-فدان خلال ساعتين و 15 دقيقة. وآلة جز الحشائش بالموتور الخاصة به تجز بسرعة ضعف سرعة آلة الجز بالدفع. وهو يستخدم آلة الجز بالموتور أكثر مما يستخدم آلة الجز بالدفع بمقدار 3 مرات. فما مقدار الحشائش التي يمكنه جزها بآلة الجز التي تعمل بالدفع؟ استخدم التكنولوجيا في تقدير الحل. اشرح عملية الحل.

الإجابة النموذجية: 0.103≈؛ بفرض أن p تساوي الكمية التي تم جزها بآلة الجز التي تعمل بالدفع و r تساوي الكمية التي تم جزها بآلة الجز التي تعمل بالموتور. وبفرض أن t_p و t_r تساوي مقدار الزمن الذي استخدم فيه وليد آلة الجز بالدفع وآلة الجز بالموتور، على الترتيب. وبفرض أن v_p و v_r تساوي سرعة كل من آلة الجز بالدفع والجز بالموتور، على التوالي.

باستخدام تلك المتغيرات، تحصل على المعادلات التالية.

$p + r = 0.72;\ t_p + t_r = 135$ دقيقة؛ $3t_p = t_r;\ 2v_p = v_r$

استخدم المعادلتين التاليتين للزمن وأوجد حل t_p و t_r. $t_p = 33.75$ دقيقة و $t_r = 101.25$ دقيقة.

بما أن $v = \frac{\text{المسافة}}{\text{الوقت}}$، يمكنك إعادة كتابة المعادلة بطريقة $p + r = 0.72$ و $2\frac{p}{33.75} = \frac{r}{101.25}$ مثل هذه المعادلات بيانيًا وأوجد نقطة التقاطع. (617, 0.103.0).

5. استثمر السيد عمرو في ورقتين ماليتين. فاشترى عدة أسهم في إحداهما بقيمة AED 12 لكل سهم واشترى عدة أسهم بسعر AED 15 لكل سهم. فكان إجمالي ما اشتراه السيد عمرو من الأسهم 400 سهمًا وإجمالي ما استثمره AED 5250. فما عدد أسهم كل من الورقتين الماليتين التي اشتراهما السيد عمرو؟ وما مقدار المال الذي استثمره في كل من الورقتين الماليتين؟

$x + y = 400,\ 12x + 15y = 5250$؛ أوجد الحل باستخدام الحذف: اضرب طرفي المعادلة الأولى في 15: $15x + 15y = 6000$؛ اطرح المعادلة الثانية من المعادلة الجديدة: $3x = 750$، إذًا $x = 250$؛ عوّض في $x + y = 400$: $250 + y = 400$، إذًا $y = 150$. اشترى السيد عمرو 250 سهمًا من الأوراق المالية بقيمة AED 12، لاستثمار AED 3000. واشترى 150 سهمًا من الأوراق المالية بقيمة AED 15، لاستثمار AED 2250.

تمرين

التمارين 5–1 قدم إلى الطلاب فرصة لكتابة المعادلات بمتغيرين لتمثيل الحلول المعطاة. وكذلك تقدم هذه التمارين إلى الطلاب فرصة لتمثيل القيود وتفسير صلاحية الحلول.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1–3	1
4	1
5	1

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

في **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**، يكون الطلاب قادرين على تجريد موقف محدد وتمثيله بالرموز ومعالجة رموز التمثيل كما لو أن لها نمطها الخاص. في كل من أمثلة هذا الدرس تم تقديم موقف من الحياة اليومية إلى الطلاب حيث تعين عليهم كتابة معادلة جبرية لتمثيل ذلك الموقف. وتعلم الطلاب أنه توجد أكثر من طريقة لمعالجة نظام المعادلات، ولكن تعين عليهم تقدير أي طريقة تناسب الموقف؛ وأهمية التأكد من كون الحل عمليًا بعد إيجاده فيما يتعلق بالمواقف من الحياة اليومية.

1.2 حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: 1, 2, 3, 4, 5

المتطلبات الأساسية

- استخدام خواص المتباينات
- ستمثّل المتباينات ذات المتغيرين بيانيًا
- حل أنظمة المعادلات

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

قد ينسى الطلاب الخطوة التي تتعلق بالتحقق من مدى الصحة. ذكر الطلاب بالتفكير بشأن السيناريو الذي يمثلونه. واطلب منهم سؤال أنفسهم ما إذا كان يمكن أن تمثل جميع الحلول الإجابة أو إذا كانوا يحتاجون إلى التخلص من جزء منها أو جميعها (مثال: أعداد سالبة).

الأسئلة الداعمة

- ما أعلى نقطة مسموح بها كحل محتمل؟ ما هو أقصى اليمين؟ ولماذا؟ **أعلى نقطة مسموح بها كحل محتمل هي (0, 14)، وأقصى نقطة عند اليمين مسموح بها هي (14, 0). هذا لأنه يمكن لجميلة أن تعمل 14 ساعة فقط بحد أقصى. لذا، يمكنها مجالسة الأطفال لمدة 14 ساعة بحد أقصى وليس التدريس أو العكس.**
- هل حلول الكسور العشرية أو الكسور مقبولة؟ **نعم، لأنه يمكن لجميلة العمل جزء من الساعة. على سبيل المثال، يمكنها مجالسة الأطفال لمدة 1.5 ساعة.**

1.2 حل أنظمة المتباينات بالتمثيل البياني

الأهداف

- استخدام التمثيلات البيانية في حل أنظمة المتباينات.
- استخدام أنظمة المتباينات في تمثيل مواقف من الحياة اليومية.
- تفسير الحلول لأنظمة المتباينات وتحديد مدى صحة الحل.

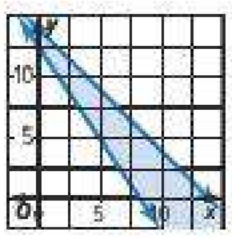
نظام المتباينات هو مجموعة من المتباينات لها نفس المتغيرات. لحل نظام المتباينات، مثّل المتباينات بيانيًا لتحديد منطقة حل مشتركة. والأزواج المرتبة داخل المنطقة المشتركة تفي بجميع المتباينات في نظام واحد.

مثال 1 كتابة نظام المتباينات وإيجاد حله

تتقاضى جومانة 15 AED في الساعة للدروس الخصوصية و 10 AED في الساعة للجلوس مع الأطفال. ويُمكنها العمل بمعدل 14 ساعة في الأسبوع بحد أقصى. فما عدد الساعات التي يجب أن تقضيها جومانة في كل وظيفة إذا أرادت أن تكسب مبلغًا لا يقل عن 125 AED في الأسبوع؟

a. **التخطيط للحل** حدد المتغيرات، ثم اكتب نظام متباينات لتمثيل هذا الموقف. اذكر أي قيود على المتغيرات واشرحها.
بفرض أن x هو عدد الساعات التي تستغرقها جومانة في الدروس، وبفرض أن y هو عدد الساعات التي تستغرقها في الدروس والجلوس مع الأطفال لمدة 14 ساعة بحد أقصى، فإن إحدى المتباينات هي $x + y \leq 14$. والمتباينة الأخرى هي $15x + 10y \geq 125$ لأنها تريد أن تكسب 125 AED في الأسبوع. بإمكان جومانة ألا تقضي أي زمن في أداء الوظيفتين، لكن ليس بإمكانها أن تقضي عددًا سالبًا من الساعات. لذا $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

b. **استخدام الأدوات** مثّل نظام المتباينات. وصف حل النظام بناء على التمثيل البياني. إلى أي مدى تؤثر القيود المذكورة في **الجزء a** على التمثيل البياني ومنطقة الحل؟



حل نظام المتباينات هو المستقيمات الحدودية والنقاط الواقعة بينها في الربع الأول. $x \geq 0$ و $y \geq 0$ تعني أن المنطقة التي تمثّل الحل تقع بالكامل داخل الربع الأول.

c. **تفسير المسائل** هل النقاط (4, 5)، أو (7, 6) أو (5, 10) تُعد حلولاً للنظام؟ اشرح في سياق التمثيل البياني والموقف.
(4, 5): لا. ليس في منطقة الحل وهو 110 AED؛ (7, 6): نعم، في منطقة الحل وهو 13 ساعة، 165 AED؛ (5, 10): لا، ليس في منطقة الحل و15 عدد كبير جدًا من الساعات.

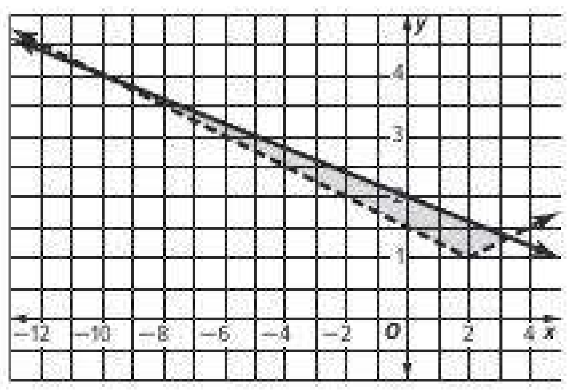
8 **الوحدة 1** أنظمة المعادلات والمتباينات

معلومات أساسية رياضية

الأعمال التجارية والاقتصاد والهندسة هي بعض من مجالات العمل حيث يكون نظام المتباينات الخطية مهمًا. في هذه المهن، يستخدم الأشخاص هذه الأنظمة للمساعدة في جمع الموارد والوقت والمال. فهم الكيفية التي يمكن أن تؤثر بها القيود و/أو المعوقات المختلفة على القدر الكبير أو القليل الذي يمكن أن تتوفر به هذه العناصر يساعد هؤلاء المحترفين في اتخاذ قرارات حكيمة حول أشياء مثل الاستثمارات وتكلفة الإنتاج.

مثال 2 **اكتب نظام متباينات.**

أنشأ زيد التمثيل البياني أدناه باستخدام دالة القيمة المطلقة ودالة خطية.



a. **التفكير بطريقة تجريدية** ما المتباينات الممثّلة على التمثيل البياني؟ اشرح استنتاجك.

في المتباينة الخطية، الإشارة هي ≥ لأن المستقيم ثابت والتظليل أسفل المستقيم. والميل المحسوب وتقاطع y-مع المستقيم هو 0.2− و2 على الترتيب. إذًا، المعادلة الخطية هي $y \leq -0.2x + 2$.

في متباينة القيمة المطلقة، إشارة المتباينة هي > لأن الدالة هي المخططة والمظللة فوق المستقيم. التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = |x|$ تحرك بمقدار وحدة واحدة وجهة اليمين بمقدار وحدتين. كما أن له معامل قياس 0.25. لذا، فإن متباينة القيمة المطلقة هي $y > 0.25|x - 2| + 1$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** في التمثيل البياني، x تمثّل ساعات زيد التي يقضيها في الدروس الخصوصية و y تمثّل الساعات التي يقضيها في الجلوس مع الأطفال. اكتب متباينتين لتمثيل قيود هذا الموقف. اشرح استنتاجك.

$y \geq 0$, $x > y$؛ يجب ألا يكون عدد الساعات بالسالب. إذًا $x > 0$ و$y > 0$، لكن $x > y$ أيضًا بما أن زيد يعطي دروسًا خصوصية أكثر مما يجالس الأطفال. إذًا فكتابة $x > 0$ غير مطلوبة.

مثال 3 **البرمجة الخطية**

يريد أحد مصانع الثلاجات وغسالات الأطباق أن يزيد من أرباحه لأقصى حد. استخدم الجدول التالي للإجابة عن الأسئلة.

	الثلاجات	غسالات الأطباق	أقل زمن متاح في الأسبوع
الإنتاج	2.5 ساعة	1.75 ساعة	35 ساعة
ضمان الجودة	1 ساعة	1 ساعة	18 ساعة
الأرباح لكل منتج	AED 325	AED 275	

a. **تفسير المسائل** ما الظروف التي تحدد الأرباح التي يحققها المصنع. كيف يمكن تمثيل هذه الحدود جبريًا؟

الأرباح محدودة بعدد الثلاجات وغسالات الأطباق التي يمكن إنتاجها وفحصها خلال أقصى موعد مسموح به للإنتاج وضمان الجودة $2.5x + 1.75y \leq 35$ و $x + y \leq 18$.

التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

م.م.ر 1 مهم للغاية. يجب أن يكون الطلاب قادرين على تخطيط الكيفية التي سيقومون بها بإيجاد حل المسائل المقدمة إليهم وفهم المعلومات المقدمة بالإضافة إلى النتائج التي تم الحصول عليها.

في **المثال 1a**، يطلب منهم كتابة الكيفية التي سيقومون بها بحل المسألة ثم مواصلة استخدام تلك الخطوات لحل المسألة الموجودة في الأسئلة اللاحقة. في **المثال 3b**، يستخدم الطلاب الجدول المقدم لتحديد وشرح القيود التي ستؤثر على حل المسألة.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

في هذا المثال، يقدم الطلاب حلولاً لنظام المتباينات ويجب عليهم إيجاد التعابير التي تحقق الشروط المقدمة. وبفحصهم للتمثيل البياني، ذكر الطلاب بالبحث عن أدلة ستخبرهم بشأن المتباينات مثل أنواع الدوال المستخدمة، وعدم تنافي الحدود أو تنافيها، واتجاه التظليل، إلخ.

الأسئلة الداعمة

- عند إعطاء تمثيل بياني لنظام متباينات، ما الذي يمكن أن يخبرك به التظليل بشأن علامات المتباينة في التعابير؟ **عندما يكون التظليل:**

  بين الحدود – يكون للمتباينات علامات متقابلة

  أسفل الحد الأدنى – تكون المتباينات الأقل من العلامة أو أقل منها أو تساويها

  فوق الحد الأعلى – تكون المتباينات الأكبر من العلامة أو أكبر منها أو تساويها

  في الاتجاهات المقابلة (لا يوجد تداخل) – يكون للمتباينات علامات متقابلة

- إذا لم يتم إخبارك أن واحدة من الدوال كانت دالة قيمة مطلقة، فكيف ستعرف؟ **فالشكل V للتمثيل البياني يعني أنه دالة قيمة مطلقة.**

مثال 3

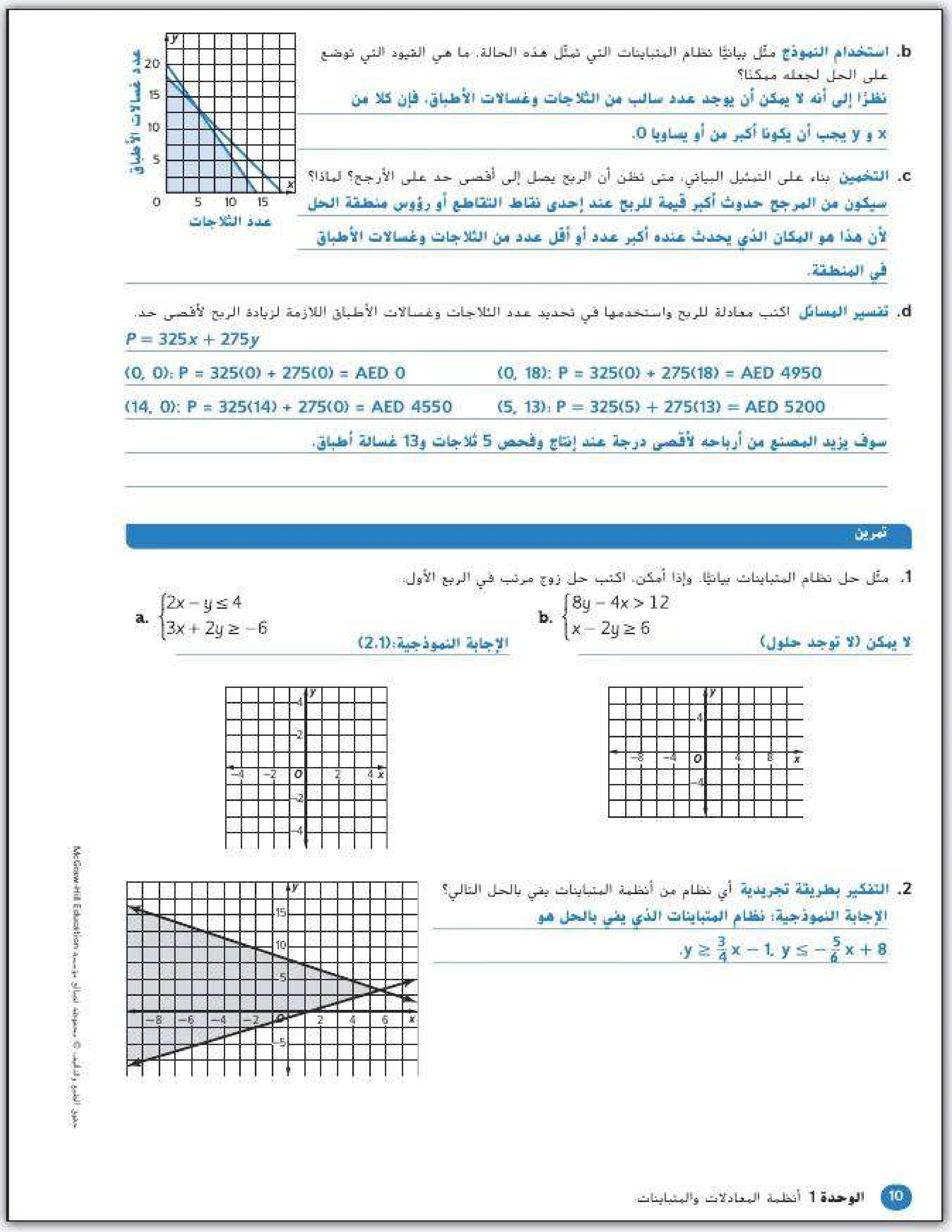
نصيحة للتدريس

م.م.ر 4

يقوم هذا المثال بتوسيع أنظمة المتباينات الخطية إلى البرمجة الخطية، وهو مفهوم سيستكشفه الطلاب بشكل أكبر في درس مستقبلي. سيبدأ الطلاب في تطبيق معرفتهم بشأن المتباينات الخطية ونقاط الحل على سيناريوهات الحياة اليومية التي يتعرض لها العديد من الأشخاص في مجال الأعمال بشكل يومي. وبينما يعمل الطلاب، ساعدهم على التفكير فيما تعنيه الزيادة أو التقليل ومكان المرجح حدوث مثل هذا النوع من الإجراء فيه بنطاق الحل.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يتم حساب ربح جهة التصنيع في صورة معادلة وليس متباينة؟ **يمكن أن يكون ربح جهة التصنيع مبلغًا محددًا فقط استنادًا إلى العدد الفعلي للمبردات وغسالات الصحون التي صنعتها.**
- لماذا يُعد من المهم التفكير في القيود عند حل أنظمة المتباينات؟ **من المهم التفكير في القيود عن حل أنظمة المتباينات الخطية لأنه عند تمثيل مسائل الحياة اليومية رياضيًا يجب عليك تذكر أنه بعض الحالات التي قد تكون حقيقية في المنطق الرياضي الخالص يمكن ألا تكون قابلة للحدوث في الحياة اليومية، مثل قيم سالبة أو كسور عشرية.**



b. **استخدام النموذج** مثّل بيانيًا نظام المتباينات التي تمثّل هذه الحالة. ما هي القيود التي توضع على الحل لجعله ممكنًا؟

نظرًا إلى أنه لا يمكن أن يوجد عدد سالب من الثلاجات وغسالات الأطباق، فإن كلا من x و y يجب أن يكونا أكبر من أو يساويا 0.

c. **التخمين** بناء على التمثيل البياني، متى تظن أن الربح يصل إلى أقصى حد على الأرجح؟ لماذا؟

سيكون من المرجح حدوث أكبر قيمة للربح عند إحدى نقاط التقاطع أو رؤوس منطقة الحل لأن هذا هو المكان الذي يحدث عنده أكبر عدد أو أقل عدد من الثلاجات وغسالات الأطباق في المنطقة.

d. **تفسير المسائل** اكتب معادلة للربح واستخدمها في تحديد عدد الثلاجات وغسالات الأطباق اللازمة لزيادة الربح لأقصى حد.

$P = 325x + 275y$

$(0, 0)$: $P = 325(0) + 275(0) =$ AED 0 $(0, 18)$: $P = 325(0) + 275(18) =$ AED 4950

$(14, 0)$: $P = 325(14) + 275(0) =$ AED 4550 $(5, 13)$: $P = 325(5) + 275(13) =$ AED 5200

سوف يزيد المصنع من أرباحه لأقصى درجة عند إنتاج وفحص 5 ثلاجات و13 غسالة أطباق.

تمرين

1. مثّل حل نظام المتباينات بيانيًا. وإذا أمكن، اكتب حل زوج مرتب في الربع الأول.

a. $\begin{cases} 2x - y \le 4 \\ 3x + 2y \ge -6 \end{cases}$ **الإجابة النموذجية: (2,1)**

b. $\begin{cases} 8y - 4x > 12 \\ x - 2y \ge 6 \end{cases}$ **لا يمكن (لا توجد حلول)**

2. **التفكير بطريقة تجريدية** أي نظام من أنظمة المتباينات يفي بالحل التالي؟

الإجابة النموذجية: نظام المتباينات الذي يفي بالحل هو $y \ge \frac{3}{4}x - 1$, $y \le -\frac{5}{6}x + 8$.

التدريس المتمايز

لمساعدة الطلاب الذي يعانون من صعوبة في فهم كيفية التظليل والكيفية التي يمكن أن يخبرهم بها التظليل أي علامة متباينة تم استخدامها، دعهم يعودون إلى الدرس الذي يتناول تمثيل المتباينات بيانيًا ومراجعة المفاهيم. اجعل الطلاب يكتبون التوافقات التي يلاحظونها عند استخدام علامات معينة لمتباينة. وكمهمة إضافية ممكنة، دع الطلاب يصنعون ملصقات تعبر عن القواعد المستخدمة في التظليل وتقديم أمثلة للتمثيلات البيانية باستخدام كل علامة متباينة. وضع الملصقات على الحائط كأداة دراسية ليراجعها جميع الطلاب أثناء العمل مع المتباينات.

3. **استخدام النموذج** لإنتاج كرسي هزاز صناعة يدوية، يحاج النجار إلى قضاء 30 ساعة في أعمال النجارة و 3 ساعات إضافية في الطلاء. ويمكن للنجار نفسه أن يصنع كرسيًا للمطبخ بتصميم أبسط خلال 24 ساعة، والطلاء يتطلب 3 ساعات إضافية. ولديه بحد أقصى 192 ساعة متاحة لأعمال النجارة و21 ساعة متاحة للطلاء خلال شهر. يباع الكرسي الهزاز مقابل AED 550، بينما يباع كرسي المطبخ مقابل AED 300. اكتب نظامًا للمتباينات لتمثيل هذا الموقف ومعادلة للربح، وأوجد عدد الكراسي الهزازة وكراسي المطبخ التي يجب أن يصنعها النجار لزيادة عائده إلى أقصى درجة لمدة شهر.

إذا كان x هو عدد الكراسي الهزازة التي يتم إنتاجها، و y هو عدد كراسي المطبخ، إذًا المتباينات هي $30x + 24y \le 192,\ 3x + 3y \le 21,\ 0 \le x,\ 0 \le y$. معادلة الربح هي $P = 550x + 300y$. تحدث الزيادة إما عند نقطة التقاطع، وإما عند رأس آخر من المنطقة. لحل النظام $30x + 24y = 192$ و $3x + 3y = 21$، يمكننا ضرب المعادلة الثانية في 8 وطرحها من المعادلة الأولى لحذف y: $(30x + 24y) - 8(3x + 3y) = 30x - 24x = 6x$، و $192 - 8(21) = 24$. إذًا، $6x = 24;\ x = 4$. بالتعويض عن x في المعادلة الثانية، نحصل على $3(4) + 3y = 21$، أو $3y = 9$. إذًا $y = 3$. الرؤوس الأخرى عند (0, 7) و(4, 0.6). والتعويض عن (4, 3) في معادلة الربح يعطينا AED 3100 = (3)300 + (4)550. والتعويض عن (0, 7) يعطينا AED 2100 = (7)300 + (0)550. والتعويض عن (4, 0.6) يعطينا AED 2200 = (0)300 + (6.4)550. إذًا فأقصى عائد هو AED 3100، عند صناعة 4 كراس هزازة و3 كراسي للمطبخ.

4. **التفكير النقدي** تجادل داليا أن نظام المتباينات قد يحتوي على ثلاثة أنواع فقط من الحلول: عدد لا نهائي، أو عدد نهائي، أو عدم وجود حلول فهل تتفق مع هذا؟ صف أي من تلك الحلول يتشابه عند تمثيله بيانيًا.

الإجابة النموذجية: نعم، أتفق مع داليا. النظام الذي به عدد لا نهائي من الحلول سيكون له منطقة مشتركة غير محددة وتتصل للأبد في اتجاه واحد على الأقل. والنظام الذي به عدد محدد من الحلول سيكون له منطقة مشتركة محددة من جميع الجهات، والنظام الذي ليس به حلول لن يكون له منطقة مشتركة.

5. **استخدام الأدوات** استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل أنظمة المتباينات التالية.
أعد قائمة بثلاثة أزواج مرتبة تفي بالنظام.

a. $\begin{cases} y \le 3x - 4 \\ 2x - 5y \ge 15 \end{cases}$

الإجابة النموذجية: $(-1, 0.5); (0, 1); (1, 1.5)$

b. $\begin{cases} 8y - 7x > 4 \\ 14x + 16y \le 6 \end{cases}$

الإجابة النموذجية: $(-2, 0); (-3, 1); (-5, -2)$

c. $\begin{cases} y \ge \frac{3}{4}|x + 1| \\ 5y - 3x < 6 \\ 2x - 3y > -8 \end{cases}$

الإجابة النموذجية: $(8, 0); (6, -12), (3, 5)$

6. **التفكير بطريقة تجريدية** يحل أحد الزملاء النظام $\begin{cases} y \le \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \\ 8x + 5y > 10 \\ 12x - 36y < -24 \end{cases}$ ويقول إن الحل يتألف من منطقتين مختلفتين. فهل تتفق؟ لماذا أو لماذا لا؟

لا؛ يجب أن يتألف الحل من منطقة تتداخل فيها جميع المتباينات، وليس مجرد متباينتين.

تمرين

التمارين 6–1 تتطلب من الطلاب تمثيل القيود بواسطة أنظمة متباينات وتفسير الحلول على أنها عملية أو غير عملية.

التمرين 1 يتطلب أن يقوم الطلاب بتمثيل حل نظام متباينات بيانيًا وتحديد نقطة في نطاق الحل. **التمرين 2** يتطلب أن يقوم الطلاب بكتابة نظام متباينات لمطابقة تمثيل بياني معطى. **التمرين 3** يتطلب أن يقوم الطلاب بحل مسألة برمجة خطية. **التمرينان 4 و 6** يتطلبان أن يشرح الطلاب استنتاجهم فيما يتعلق بأنواع حلول نظام متباينات. **التمرين 5** يتطلب أن يقوم الطلاب بحل أنظمة متباينات بحاسبة تمثيل بياني وإدراج الأزواج المطلوبة التي تحقق النظام.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	5
2	2
3	4
4	3
5	5
6	2

التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

يتطلب الدرس من الطلاب تمثيل موقف بشكل تجريدي باستخدام رموز جبرية أو تمثيلات بيانية. اشرح أن نطاق الحل يعني ببساطة أن جميع الأزواج المطلوبة التي تقع في النطاق هي حلول للنظام. وسيستحيل إدراج جميع الحلول حرفيًا، على الرغم من أنه يمكن إجراء هذا عند وضع السياق في الاعتبار (على سبيل المثال، نقاط الأعداد الصحيحة في نطاق الحل). إن إمكانية الوصول إلى حل منطقي من خلال ذلك المستوى المرتفع من التجريد هو جوهر **م.م.ر 2**.

تلميح تقني

عند تمثيل أنظمة المتباينات بيانيًا، ساعد الطلاب على التعرف على التظليل التي أنتجته حاسبتهم بالإضافة إلى اكتشاف حل مسائلهم. قد يحتاج الطلاب إلى مساعدة في تكبير الميزات أو تصغيرها.

1.3 ايجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: 1, 2, 4, 5, 6

المتطلبات الأساسية

- تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا
- تمثيل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

مثال 1

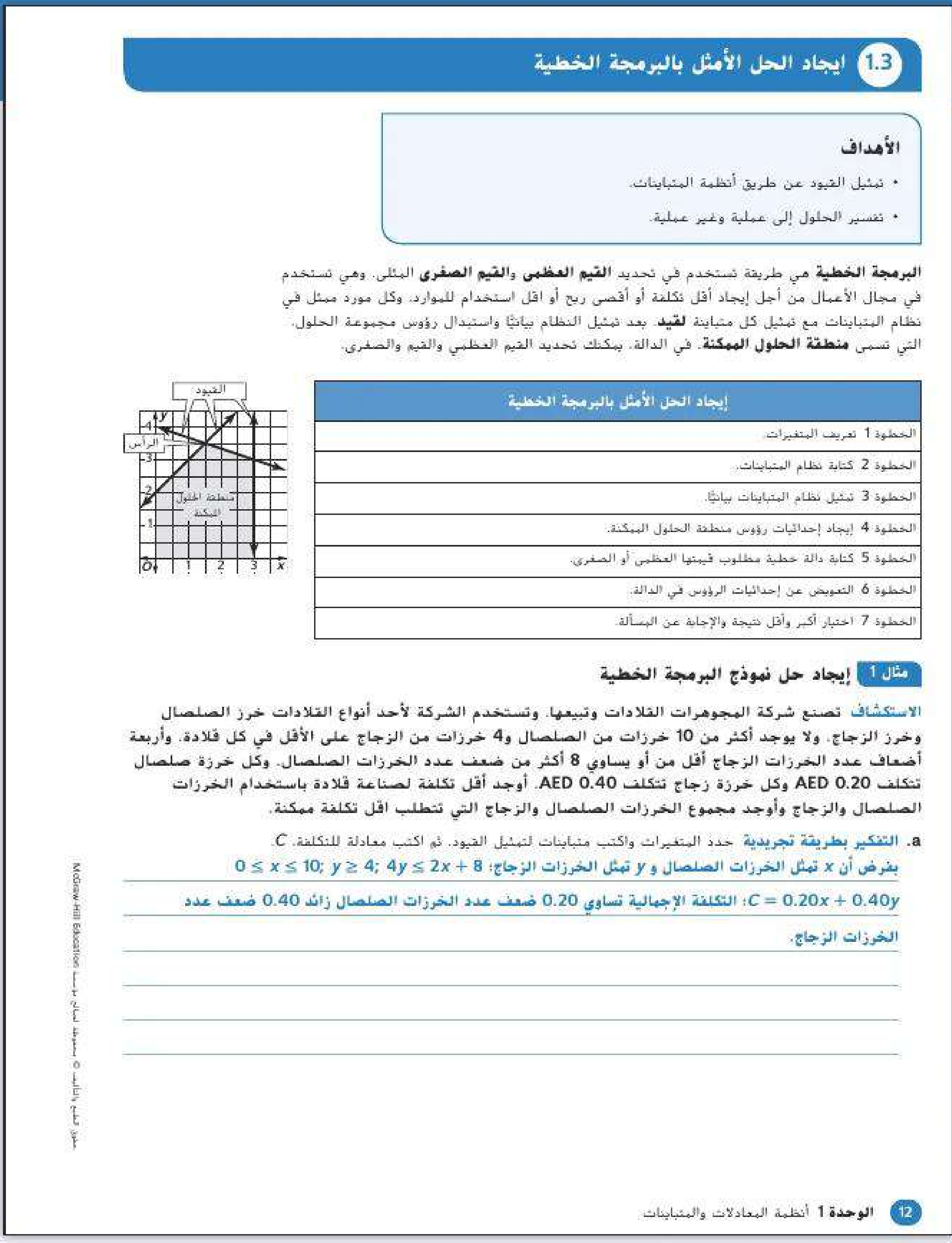
نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

في هذا الدرس، سيستخدم الطلاب عدة مهارات لحل المسائل. اشرح أهمية تحديد القيود وفهم معناها. يمكن أن تساعد حاسبة التمثيل البياني الطلاب على ملاحظة منطقة الحلول الممكنة. سيحاول العديد من الطلاب إيجاد نقاط التقاطع دون التحقق من دقتها.

الأسئلة الداعمة

- لا تنص المسألة على قيود $x \geq 0$ و $y \geq 0$. لماذا يُعد من المهم تحديد هذه القيود؟ **تحدد القيود منطقة الحلول الممكنة: وبدون هذه القيود فأنت تقوم بتضمين الأعداد السالبة في منطقة الحلول الممكنة والذي قد يعطيك بدوره إجابات غير عملية.**
- كيف يؤثر عدد القيود على التمثيل البياني؟ **يتغير شكل منطقة الحلول الممكنة.**


1.3 إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

الأهداف
- تمثيل القيود عن طريق أنظمة المتباينات.
- تفسير الحلول إلى عملية وغير عملية.

البرمجة الخطية هي طريقة تستخدم في تحديد **القيم العظمى والقيم الصغرى** المثلى. وهي تستخدم في مجال الأعمال من أجل إيجاد أقل تكلفة أو أقصى ربح أو اقل استخدام للموارد. وكل مورد ممثل في نظام المتباينات مع تمثيل كل متباينة **لقيد**. بعد تمثيل النظام بيانيًا واستبدال رؤوس مجموعة الحلول. التي تسمى **منطقة الحلول الممكنة**. في الدالة، يمكنك تحديد القيم العظمى والقيم والصغرى.

إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية
الخطوة 1 تعريف المتغيرات.
الخطوة 2 كتابة نظام المتباينات.
الخطوة 3 تمثيل نظام المتباينات بيانيًا.
الخطوة 4 إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة.
الخطوة 5 كتابة دالة خطية مطلوب قيمتها العظمى أو الصغرى.
الخطوة 6 التعويض عن إحداثيات الرؤوس في الدالة.
الخطوة 7 اختيار أكبر وأقل نتيجة والإجابة عن المسألة.

مثال 1 **إيجاد حل نموذج البرمجة الخطية**

الاستكشاف تصنع شركة المجوهرات القلادات وتبيعها. وتستخدم الشركة لأحد أنواع القلادات خرز الصلصال وخرز الزجاج. ولا يوجد أكثر من 10 خرزات من الصلصال و4 خرزات من الزجاج على الأقل في كل قلادة. وأربعة أضعاف عدد الخرزات الزجاج أقل من أو يساوي 8 أكثر من ضعف عدد الخرزات الصلصال. وكل خرزة صلصال تتكلف AED 0.20 وكل خرزة زجاج تتكلف AED 0.40. أوجد أقل تكلفة لصناعة قلادة باستخدام الخرزات الصلصال والزجاج وأوجد مجموع الخرزات الصلصال والزجاج التي تتطلب اقل تكلفة ممكنة.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** حدد المتغيرات واكتب متباينات لتمثيل القيود. ثم اكتب معادلة للتكلفة. C.

بفرض أن x تمثل الخرزات الصلصال و y تمثل الخرزات الزجاج؛ $0 \leq x \leq 10;\ y \geq 4;\ 4y \leq 2x + 8$

$C = 0.20x + 0.40y$؛ التكلفة الإجمالية تساوي 0.20 ضعف عدد الخرزات الصلصال زائد 0.40 ضعف عدد الخرزات الزجاج.

12 **الوحدة 1** أنظمة المعادلات والمتباينات

معلومات أساسية رياضية

البرمجة الخطية هي عملية أخذ متباينات خطية متنوعة تتعلق بموقف معين وإيجاد أفضل قيمة يمكن الحصول عليها بموجب تلك الشروط. سيكون المثال النموذجي هو أخذ القيود الخاصة بالمواد والعمل ثم تحديد أفضل مستويات إنتاج لأقصى ربح بموجب تلك الشروط. في الحياة اليومية، تكون البرمجة الخطية جزءًا من مجال مهم جدًا من الرياضيات يدعى أساليب البحث عن الحل الأمثل. يتم استخدام مجال الدراسة هذا كل يوم في تنظيم وجمع الموارد. يمكن أن تكون لأنظمة الحياة اليومية هذه العشرات أو المئات من المتغيرات أو المزيد.

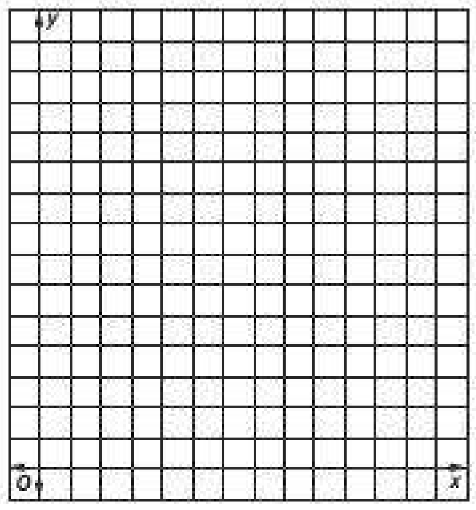
مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 4

في هذا المثال، يتعين على الطلاب تمثيل معادلة ربح وخسارة. ناقش كيفية تمثيلها. وسيعملون كذلك مع أعداد كبيرة. عند إجراء تمثيل بياني، احرص على أن يضع الطلاب مقياس التمثيل البياني في اعتبارهم. يجب أن يتعامل الطلاب بدقة مع التمثيلات البيانية وتظليل المقاطع المتقاطعة. قم بإجراء مناقشة حول ما تمثله جميع نقاط التقاطع وسبب أهمية الحصول على هذه المعلومة في مجال الأعمال.

الأسئلة الداعمة

- لا يوجد أي قيود لـــ $x \geq 0$ أو $y \geq 0$. لماذا لم يكن هذا جزءًا من القيود؟ **تنص المسألة على أن الطلب المتوقع يبلغ على الأقل 2500 للهواتف العادية و 7000 للهواتف الذكية. ويعني هذا أن الشركة لن تصنع أقل من هذا، لذا يجب أن يوضح القيد هذا.**
- إذا تم تغيير عقد الشحن لينص على أنه "لن يتم شحن أكثر من 10,000 هواتف" فكيف سيغير ذلك المسألة؟ **سيتعين تغيير قيد $x + y \geq 10{,}000$ إلى $x + y \leq 10{,}000$. وسيؤدي هذا إلى تغيير نتائج المسألة لأن منطقة الحلول الممكنة ستتغير.**



b. **استخدام الأدوات** مثّل القيود بيانيًا. هل توجد منطقة محاطة بجميع القيود؟ إذا كان الجواب بنعم، فصفها.
نعم؛ المساحة المحدودة هي منطقة مثلثة الشكل في الربع الأول، وتتضمن المستقيمات الحدودية الثلاثة من المنطقة.

c. **تفسير المسائل** أوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة، وتحقق من صحتها.
(4, 4) و (10, 4) و (10, 7)؛ للتحقق، استخدم طريقة التعويض لإيجاد نقاط التقاطع من المستقيمات. $4y = 2x + 8$
و$x = 10$: $4y = 2(10) + 8 \rightarrow y = 7$ ← النقطة (10, 7)؛ $4y = 2x + 8$
و$y = 4$: $4(4) = 2x + 8 \rightarrow x = 4$ ← النقطة (4, 4)؛ $x = 10$ و $y = 4$ عند النقطة (10, 4).

d. **استخدام النموذج** استخدم رؤوس منطقة الحلول الممكنة لإيجاد عدد الخرزات الصلصال والخرزات الزجاج التي تتطلب أقل تكلفة ممكنة.
عوّض بـــ (4, 4): $C = 0.20x + 0.40y$ تنتج AED 2.40، (10, 4) تنتج AED 3.60، و(10, 7) تنتج AED 4.80.
أقل تكلفة ممكنة ستكون AED 2.40 عند النقطة (4, 4) التي تمثل 4 خرزات صلصال و4 خرزات زجاج.

e. **استخدام النموذج** افرض أن كل قلادة فيها عدد من الخرزات يتراوح ما بين 10 و12 خرزة. صف كيف يمكنك تعديل نظام القيود وصف تغيرات التمثيل البياني لمنطقة الحلول الممكنة.
سأتضمن القيد الإضافي $10 \leq x + y \leq 12$، الذي يساوي المتباينتين $y \geq -x + 10$ و$y \leq -x + 12$. ضم هذه النقاط في التمثيل البياني سيحدد منطقة الحلول الممكنة في قسم رباعي من المثلث بين $y = -x + 10$ و $y = -x + 12$.

مثال 2 الزيادة لأقصى حد باستخدام البرمجة الخطية

تنتج شركة لإنتاج الهواتف المحمولة هواتف عادية وهواتف ذكية. تشير التوقعات على المدى البعيد إلى طلب ما لا يقل عن 2500 هاتف عادي و7000 هاتف ذكي كل يوم. ونظرًا إلى محدودية القدرة الإنتاجية، فلا يمكن صنع أكثر من 4000 هاتف عادي و9500 هاتف ذكي كل يوم. لكنه للوفاء بعقد الشحن، يجب شحن إجمالي 10,000 هاتف على الأقل كل يوم. فإذا كانت مبيعات كل هاتف عادي تنتج ربحًا يعادل AED 2 وكل هاتف ذكي ينتج ربحًا يعادل AED 5 . فما عدد الهواتف التي يجب صنعها كل يوم من كل نوع من أجل زيادة الأرباح الصافية لأقصى درجة؟

a. **تفسير المسائل** حدد المتغير واكتب المتباينات التي تمثل القيود، وعيّن الدالة الخطية التي تمثل الأرباح الصافية.
افرض أن x تمثل عدد الهواتف العادية التي يتم إنتاجها يوميًا، و y تمثل عدد الهواتف الذكية التي يتم إنتاجها يوميًا.
مثّل القيود بالمتباينات، $2500 \leq x \leq 4000$؛ $7000 \leq y \leq 9500$، و $x + y \geq 10{,}000$. ومثّل الأرباح الصافية بالمعادلة $P = 2x + 5y$.

1.3 إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية 13

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. يكون الطلاب المتفوقون رياضيًا قادرين على تحديد كميات مهمة في موقف عملي وتخطيط العلاقات بينها باستخدام وسائل مثل التمثيلات البيانية. ويمكنهم تحليل هذا العلاقات رياضيًا للتوصل لاستنتاجات. في البرمجة الخطية يجب على الطلاب أخذ مسألة من الحياة اليومية وتغييرها إلى نموذج رياضي. بفهم أن القيود تحدد الحل. يتم إعطاء الطلاب فرصة لتحليل الرؤوس وإدراك أنه يوجد أكثر من إجابة واحدة، ولكن يجب عليهم إيجاد الحل الذي سيحقق مسألة الحياة اليومية.

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 4

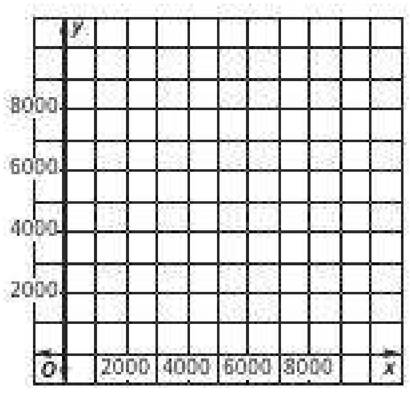
في هذا المثال سيواجه الطلاب منطقة حلول ممكنة غير محدودة. قم بإجراء مناقشة حول ما يعنيه هذا فيما يتعلق بالحلول. عند إجراء تمثيل بياني، يمكن أن يكتب الطلاب معادلات الحدود في صيغة الميل والمقطع أو استخدام نقطتي التقاطع مع المحور x والمحور y. تُعد القدرة على تحديد أسهل طريقة لتمثيل مستقيم بيانيًا تمرينًا جيدًا. لا يتم إيجاد نقطة التقاطع بسهولة عن طريق النظر إلى التمثيل البياني. اجعل الطلاب يستخدمون التعويض أو الحذف لتحديد نقطة التقاطع الدقيقة. ويمكنهم مشاركة الطريقة التي استخدموها والسبب وراء ذلك.

الأسئلة الداعمة

- إحدى نقاط التقاطع تكون كسر عشري. هل يكون من المنطقي الحصول على كسر عشري؟ **نعم. تقوم حديقة الحيوانات بخلط أنواع من الأطعمة لذا من الممكن الحصول على كسور عشرية لتحقيق جرامات البروتين والدهون اللازمة.**
- إذا تغير احتياج حديقة الحيوانات، ما المتغيرات التي سيلزم تغييرها إن وجدت لتوضيح التغيير؟ **تحدد المتباينتان $15x + 20y \geq 60$ و $10x + 5y \geq 30$ احتياجات حديقة الحيوانات.**

b. **استخدام النموذج** أوجد رؤوس منطقة الحلول الممكنة على التمثيل البياني.
الرؤوس الثلاثة المكونة بالمستقيمات الأفقة والرأسية هي (2500, 9500) و (4000, 9500) و (4000, 7000).
وهناك رأسان آخران مكونان بالمستقيم المائل. الرأس الأول عند $x = 2500$، إذًا $2500 + y$:$x + y = 10.000$
$y = 7500$:$10.000 =$. والثاني عند $y = 7000$، إذًا $x = 3000$:$x + 7000 = 10.000$:$x + y = 10.000$.
إذًا الرأسان الآخران هما (2500, 7500) و(3000, 7000).

c. **استخدام النموذج** مثل القيود بيانيًا. ما عدد الهواتف التي يجب صنعها من كل نوع لزيادة الأرباح إلى أقصى درجة؟ متى تصل الشركة إلى تحقيق أقل قيمة ممكنة من الربح؟



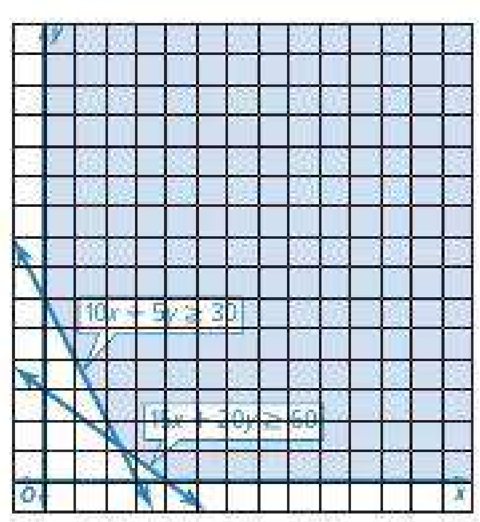
لزيادة الأرباح لأقصى حد، يجب صناعة 4000 هاتف عادي و9500 هاتف ذكي لتحقيق ربح AED 55.500. وعند (3000, 7000) يكون الربح عند أقل قيمة له، AED 41.000.

مثال 3 المنطقة الممكنة غير المحدودة

تخلط إحدى حدائق الحيوان نوعين من الطعام ليأكلها الحيوانات. وكل وجبة يجب أن تحتوي على الأقل 60 جرامًا من البروتين و30 جرامًا من الدهون. والطعام المعتاد يحتوي على 15 جرامًا من البروتين و 10 جرامات من الدهون ويتكلف 80 فلسًا لكل وحدة. كما يحتوي Nature's Best على 20 جرامًا من البروتين و 5 جرامات من الدهون وتتكلف 50 فلسًا لكل وحدة. فما عدد الأطباق التي يجب صناعتها من كل نوع لتقليل تكلفة حديقة الحيوان إلى أقل حد.

a. **تفسير المسائل** حدد المتغيرات واكتب المتباينات التي تمثل القيود. حدد الدالة الخطية التي يجب خفضها لأقل درجة.
بفرض أن x تمثل عدد وحدات الطعام المعتاد، و y تمثل عدد وحدات Nature's Best.وتمثل القيود بالمتباينات.
$x \geq 0,\ y \geq 0$ (يجب أن يكون عدد الوحدات المشتراة أكبر من أو يساوي الصفر)، $15x + 20y \geq 60$ (يجب أن يحتوي الطعام على 60 جرامًا من البروتين على الأقل)، و$10x + 5y \geq 30$ (يجب أن يحتوي الطعام على 30 جرامًا من الدهون على الأقل). تمثل تكلفة الطعام بالعلاقة $C = 0.80x + 0.50y$.

b. **استخدام النموذج** مثّل القيود بيانيًا. وأوجد عدد الوجبات التي يجب صنعها من كل نوع لتقليل التكلفة إلى أقل حد. ماذا تمثل المنطقة غير المحدودة؟



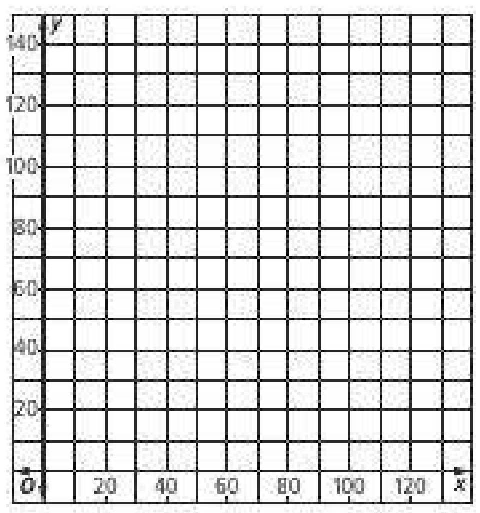
$C = 0.80x + 0.50y$, $0.80(0) + 0.5(6) = \text{AED } 3$,
$0.80(2.4) + 0.5(1.2) = \text{AED } 2.52$, $0.80(4) + 0.5(0) = \text{AED } 3.20$؛
لتقليل التكاليف إلى أقل قيمة، يجب على حديقة الحيوان أن تستخدم 2.4 جزءًا من الطعام المعتاد و1.2 جزءًا من Nature's Best. والمنطقة غير المحددة تمثل الكمية اللانهائية من توافيق نوعي الطعام.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**، يكون الطلاب المتفوقون رياضيًا قادرين على تجريد أحد المواقف وتمثيله بالرموز ومعالجة رموز التمثيل. مع البرمجة الخطية يجب على الطلاب النظر إلى مسألة لفظية وتحويلها إلى موقف تجريدي. ويجب عليهم تحديد حدود العالم التجريدي الذي يعالجونه عن طريق إجراء عمليات وتمثيل بياني للحصول على الحل المطلوب. عندئذ يجب على الطلاب ترجمة المعلومات مرة أخرى إلى حل من الحياة اليومية.

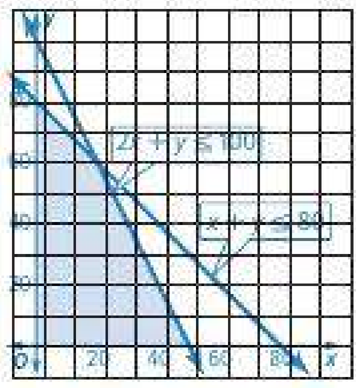
تمرين

1. **التفكير بطريقة تجريدية** يبيع فريق لكرة البيسبول سراويل قصيرة وطويلة كوسيلة لجمع التبرعات. وهم يريدون بيع ما لا يقل عن 20 لكن لا يزيد عن 100 سروال قصير وما لا يقل عن 20 لكن لا يزيد عن 80 سروال طويل. وعدد السراويل القصيرة التي يمكنهم الإنفاق على شرائها أقل من أو يساوي 60 أقل من ضعف عدد السراويل الطويلة. فإذا كان كل سروال قصير يتكلف AED 6 وكل سروال طويل يتكلف AED 14، فأوجد عدد السراويل القصيرة والطويلة التي يجب عليهم شراؤها لتقليل التكلفة إلى أقل حد ممكن.



x تمثل السراويل القصيرة، y تمثل السراويل الطويلة؛
$20 \le x \le 100$، $20 \le y \le 80$، $x \le 2y - 60$؛ $C = 6x + 14y$ ؛
$(20, 80)$، $(20, 40)$، $(100, 80)$؛ يجب أن يشتروا 20 سروالاً قصيرًا
و40 سروالاً طويلاً لتقليل التكلفة إلى أقل قيمة.

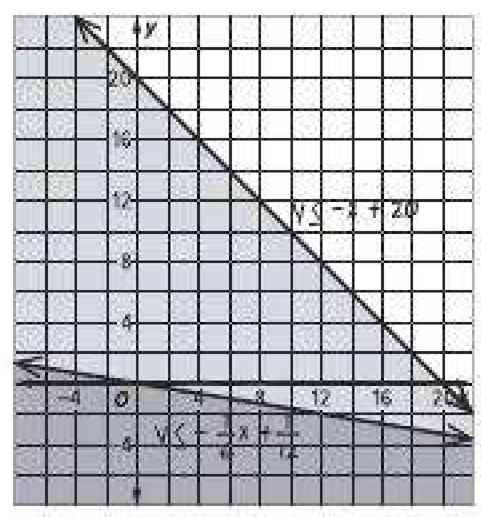
2. **استخدام النموذج** بإمكان أحد المزارعين أن يزرع قرابة 80 فدانًا من القمح والشعير. وبإمكانه أن يكسب AED 5000 على كل فدان يزرعه بالقمح و AED 3000 على كل فدان يزرعه بالشعير. كما أن استخدامه للمبيدات الحشرية الضرورية محدود بفعل اللوائح إلى 100 جالون من إجمالي 80 فدانًا. والقمح يتطلب 2 جالون من القمح لكل فدان يزرع في حين يتطلب الشعير فقط 1 جالون لكل فدان. فما أقصى قيمة ممكنة للربح يمكنه تحقيقها؟



x تمثل القمح، y تمثل الشعير؛ $x + y \le 80$، $x \ge 0$، $y \ge 0$،
$2x + 1y \le 100$؛ $R = 5000x + 3000y$؛ $(0,0)$، $(0, 80)$، $(20, 60)$، $(50, 0)$؛
يجب على المزارع أن يزرع 20 فدانًا من القمح و60 فدانًا من الشعير لكي يزيد الربح إلى أقصى قيمة وهي AED 280.000.

3. **التواصل بدقة** صمم ماهر تمثيلاً بيانيًا لإيجاد منطقة الحلول الممكنة للمسألة التالية. حلل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كان عمله صحيحًا. وعلل إجابتك.

يتألف اختبار نصف العام لمادة اللغة الإنجليزية من إجابات قصيرة وأسئلة مقال. وكل إجابة سؤال يتطلب إجابة قصيرة قيمته 5 نقاط وكل سؤال مقال قيمته 15 نقطة. يمكنك اختيار ما يصل إلى20 سؤالاً من أي نوع لكي تجيبه. والأمر يتطلب دقيقتين للإجابة عن كل سؤال له إجابة قصيرة و12 دقيقة للإجابة عن كل سؤال مقال. فإذا كانت أمامك ساعة واحدة لاستكمال الاختبار وبفرض أنك أجبت عن كل الأسئلة إجابة صحيحة. فما عدد الأسئلة من كل نوع التي يجب عليك إجابتها لكي تكسب أعلى عدد من النقاط؟



نسي ماهر القيود $x \ge 0$ و $y \ge 0$، ن لأنه لا يوجد عدد سالب من الأسئلة. وإضافة إلى ذلك، القيد $y \le -\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}$ غير صحيح. كان على ماهر أن يستخدم $2x + 12y \le 1$ للقيد. تقول المسألة إن أمامك ساعة واحدة للخضوع للاختبار، كان يجب تغييرها إلى 60 دقيقة لأن بقية الأوقات مذكورة بالدقائق. وكان عليه استخدام $2x + 12y \le 60$، أو $y \le -\frac{1}{6}x + 5$.

تمرين

التمارين 3–1 تتطلب أن يقوم الطلاب بتمثيل القيود بواسطة أنظمة متباينات.

التمرينان 1 و 2 يتطلبان أن يقوم الطلاب بحل مسألة بحث عن الحل الأمثل تتعلق بالبرمجة الخطية. **التمرين 3** يتطلب أن يقوم الطلاب بتوضيح القيود الناقصة من نظام معطى لجعل التمثيل البياني للنظام منطقيًا.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	2
2	4
3	6

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **م.م.ر 6 (مراعاة الدقة)**، يحاول الطلاب المتفوقون رياضيًا المشاركة بدقة مع بعضهم البعض. في **التمرين 3**، يتم إعطاء الطلاب فرصة لفحص عمل طالب آخر لملاحظة الأخطاء التي تم ارتكبها. ويجب عليهم استخدام تعريفات ومصطلحات رياضية لتوضيح الأخطاء وكيفية تصحيحها. سيكونون قادرين على تحديد أن الدقائق المستخدمة في المسألة لذا يجب أن تكون جميع المصطلحات التي تمثل الوقت بالدقائق كذلك. وينبغي أن يكون الطلاب قادرين على مشاركة أهمية القيود الناقصة في المسألة.

1.4 أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 3, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- حل المعادلات الخطية
- حل أنظمة المعادلات بمتغيرين

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

راجع كيفية صياغة تعبير خطي من وصف لفظي. تناقش في تعريف المتغيرات لتكون بمثابة *أول* شيء يقوم به الشخص عند صياغة نظام معادلات. ثم قم بصياغة النظام.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يعد هذا النظام مرشحًا جيدًا للحل عن طريق التعويض؟ **اثنان من المعادلات لها المعامل 1 للمتغيرات، مما يجعل من السهل الحل لإيجاد قيمة المتغير والتعويض في المعادلة الثالثة.**
- كيف ستتحقق من حلك؟ **تأكد أن الحل يطابق المعلومات المقدمة، على سبيل المثال، أن العدد الإجمالي للوحدات هو 76.**

1.4 أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات

الأهداف

- تمثيل مسائل من الحياة اليومية باستخدام أنظمة المعادلات الخطية بثلاثة متغيرات.
- تحديد ما إن كان حل نظام المعادلات الخطية ذات المتغيرات الثلاثة صالحًا أم غير صالح في سياق الموقف.

يمكن أن يكون لأنظمة المعادلات ذات المتغيرات الثلاثة حل واحد أو عدد لا نهائي من الحلول أ قد لا يكون لها حل على الإطلاق. ويكون حل النظام ذي المتغيرات الثلاثة عبارة عن مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (x, y, z).

عند حل المسائل التي تتضمن ثلاثة متغيرات، ابدأ أولاً بتحديد المتغيرات وما تمثله. ثم اكتب المعادلات التي تربط بين المتغيرات مستخدمًا المعطيات بالمسألة. ثم أوجد حل النظام. وأخيرًا فسر الحل في سياق المسألة.

مثال 1 كتابة نظام المعادلات وإيجاد حله

الاستكشاف تأتي لعبة فيديو جديدة في ثلاثة إصدارات: الإصدار القياسي والإصدار الذهبي والإصدار الخاص. قبل الضرائب، كانت تكلفة الإصدار القياسي AED 50 وتكلفة الإصدار الذهبي AED 75 وتكلفة الإصدار الخاص AED 125. وسيكون لدى أحد المتاجر 76 نسخة من الألعاب متاحة للبيع. وسيكون عدد وحدات الإصدارات الخاصة المتاحة أقل من عدد وحدات الإصدار الذهبي، وسيزيد عدد وحدات الإصدار القياسي بمقدار عشرين عن عدد وحدات الإصدار الخاص. وسيكون إجمالي تكلفة الوحدات البالغ عددها 76 هو AED 5625.

a. تفسير المسائل حدد العدد الذي سيكون متاحًا من كل إصدار. وضّح الخطوات واكتب الحل هنا.

17 من الإصدار الخاص و22 من الذهبي و37 من القياسي؛ الإجابة النموذجية: x = عدد وحدات الإصدار الخاص،

و y = عدد وحدات الإصدار الذهبي و z = عدد وحدات الإصدار القياسي. نظام المعادلات هو:

$x = y - 5$		$y = x + 5$
$z = x + 20$	أو يكافئ:	$z = x + 20$
$125x + 75y + 50z = 5625$		$125x + 75y + 50z = 5625$

عوّض بالمتغير $x + 5$ عن المتغير y و$x + 20$ عن المتغير z في المعادلة الثالثة لتحصل على

$125x + 75(x + 5) + 50(x + 20) = 5625$. أوجد الحل بإيجاد قيمة $x: x = 17$. عوّض عن قيمة x في المعادلتين

الأولتين. $y = 22$ و $z = 37$. إذًا، يوجد 17 من الإصدار الخاص و22 من الذهبي و37 من القياسي متاحة وقت إطلاق المنتج.

معلومات أساسية في الرياضيات

يعتمد هذا الدرس على المواد التي تعلمها الطلاب في الدرس 3.1 عن أنظمة المعادلات في متغيرين. يعرف الطلاب كيفية حل مثل هذه الأنظمة وكيفية تمثيل نماذج الحالات المطبقة التي تنطوي على متغيرين باستخدامها. في هذا الدرس، ينظر الطلاب في أنظمة المعادلات في ثلاثة متغيرات ويقومون بتطبيق إستراتيجيات مماثلة لصياغة مثل هذه الأنظمة عندما ينطوي الأمر على ثلاثة متغيرات.

سيقدم هذا الدرس للطلاب سياقات مختلفة يمكن تمثيل نماذجها باستخدام أنظمة من ثلاث معادلات.

b. بناء الفرضيات يزعم موظف بالمتجر أنه إذا أصبحت التكلفة الإجمالية لعدد الوحدات المتاحة الضعف، فسيكون هناك ضعف عدد الوحدات من كل إصدار من الإصدارات الثلاثة متاح من اللعبة. ويفترض أن عدد الوحدات المتاحة من الإصدار الخاص سيكون أقل من عدد وحدات الإصدار الذهبي بخمسة وسيزيد عدد وحدات الإصدار الذهبي عن عدد وحدات الإصدار الخاص بمقدار عشرين. فهل استنتاجه صحيح؟ اشرح لم أو لم لا.

تظل أول معادلتين بالنظام بلا تغيير ولكن ستكون المعادلة الأخيرة $125x + 75y + 50z = 11,250$. وبالتعويض بأول تعبيرين في هذه المعادلة ثم أوجد الحل بإيجاد القيمة x، والتي ينتج $x = 39.5$ والتي لا تبلغ ضعف 17. أيضًا، لا يمكن أن يكون هناك نصف لعبة. إذًا فلا بد أن يكون هناك خطأ في استنتاجه.

مثال 2 الأماكن المحجوزة في موقف سيارات

يحجز موقف سيارات 80 مكانًا لأنواع معينة من السيارات: السيارات الرياضية متعددة الأغراض والسيارات العائلية الصغيرة والسيارات التي تعمل بالكهرباء فقط. ويبلغ عدد الأماكن المحجوزة للسيارات العائلية الصغيرة ضعف عدد الأماكن المحجوزة للسيارات الرياضية متعددة الأغراض، ويزيد عدد الأماكن المحجوزة للسيارات التي تعمل بالكهرباء فقط عن عدد السيارات الرياضية متعددة الأغراض بمقدار 20.

a. التواصل بدقة حدد عدد الأماكن المحجوزة لكل نوع من المركبات. واشرح كيف توصلت لذلك.

x = عدد أماكن السيارات الرياضية متعددة الأغراض، وy = عدد أماكن السيارات العائلية الصغيرة، وz = عدد الأماكن السيارات التي تعمل بالكهرباء فقط. النظام هو:

$$x + y + z = 80$$
$$z = 20 + x$$
$$y = 2x$$

لحل هذا النظام، ابدأ بالتعويض عن التعبيرين في المعادلة الأولى للحصول على المعادلة $x + 2x + 20 + x = 80$. للحل بإيجاد قيمة x ينتج $x = 15$. عوّض بهذه القيمة في المعادلتين الأخيرتين للحصول على $y = 30$ و $z = 35$. إذًا، يوجد 15 مكانًا للسيارات الرياضية متعددة الأغراض و30 مكانًا للسيارات العائلية الرياضية و35 مكانًا للسيارات التي تعمل بالكهرباء فقط.

b. التواصل بدقة يتذكر ماهر أن الأنظمة ذات المعادلتين الخطيتين يمكن حلها بثلاث طرق: التعويض والاختزال والتمثيل البياني. ويريد حل هذا النظام باستخدام أكبر عدد ممكن من الطرق للتأكد من إجابته. أي من الطرق الثلاث يمكن تطبيقها؟ وأيها تم استخدامها في **الجزء a**؟ استخدم الاحتمالات الأخرى لحل النظام والتأكد من الإجابة.

استخدم الجزء a التعويض. ويمكننا أيضًا استخدام الاختزال. وللقيام بذلك، سنطرح كل من المعادلة الثانية والثالثة من الأولى. ويمنحنا هذا: $(x + y + z) - (z) - (y) = (80) - (20 + x) - (2x)$، والتي تبسّط $x = 60 - 3x$. وبالحل بإيجاد قيمة x، نحصل على $x = 15$. يمكننا التعويض عن x ثانية في المعادلين الثانية والثالثة كما في الجزء a للحصول على $y = 30$ و$z = 35$. ولا يمكننا استخدام التمثيل البياني بنفس الطريقة التي قمنا بها في نظام المعادلتين لأننا لا نعرف سوى كيفية التمثيل البياني للمعادلات ذات المتغيرين، وهذه الأنظمة بها ثلاثة متغيرات.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في الممارسة م.م.ر 2. يلزم أن يقوم الطلاب *بالفصل عن السياق*. أي أنْ تفصلَ موقفًا مُعطى وتمثله بطريقة رمزية، بالإضافة إلى *ربط الإجابات بالسياق* والانتباه إلى دلالة الكميات، وليس مجرد حسابها فقط.

المثال 1a والمثال 2a والمثال 3 تجعل الطلاب تستخلص المعادلات من مختلف السياقات المطبقة. ثم، بمجرد حل النظم، يجب على الطلاب تفسير الحلول في *السياق*.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 6

التأكيد على أهمية تحديد المتغيرات لتمثيل كل نوع من أنواع المركبات. قد يفضل بعض الطلاب استخدام المتغيرات التي ترتبط بسهولة أكبر بأنواع المركبات، على سبيل المثال، s و c و e، بدلًا من x و y و z.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك تحديد حل تقريبي للنظام؟ **يمكنني اختيار قيمة من أجل x، على سبيل المثال 10، ومن ثم التعويض في المعادلات. إذا لم يحل ذلك المعادلات، فيمكنني اختيار قيمة أخرى لـ x.**
- لماذا اخترت هذه الطريقة لحل النظام؟ **الإجابة النموذجية: استخدمت التعويض لأن اثنتين من المعادلات لديها اثنان من المتغيرات من حيث المتغير الآخر.**

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

ناقش كيفية استخراج المعادلات من البيانات المجدولة. وبمجرد صياغة النظام، اذكر أنه غالبًا ما يكون من الأفضل التخلص من الكسور من جميع المعادلات عن طريق ضرب كل معادلة في المقام المشترك الأصغر لجميع الكسور التي تأتي ضمنه. ويؤدي ذلك إلى نظام مكافئ. اسأل الطلاب *لماذا* هذا هو الحال.

الأسئلة الداعمة

- ما سبب كون النتائج في **الجزء b** غير مفيدة لباهر؟ **ليس هناك حل للنظام، لذلك باهر لا يمكنه تحديد أسعار كل من منصات البوفيه.**
- ما سبب كون النتائج في **الجزء c** غير مفيدة لباهر؟ **الحل الذي تم وصفه في الجزء c له العديد من الحلول بشكل لا نهائي. لذلك مرة أخرى باهر لا يمكنه تحديد الأسعار لكل رطل، ولكن لسبب مختلف عن الجزء b.**

الأخطاء الشائعة

- قد يواجه الطلاب صعوبة في استخدام اللغة والتمكن من ترجمة العبارات الشائعة إلى تعابير رياضية.
- كثيرًا ما يتجاهل الطلاب استخدام المعادلات الثلاثة عند حل أنظمة المعادلات الثلاثة. تأكد من التأكيد على أنه يجب استخدام جميع المعادلات الثلاث لضمان أن الحل النهائي يفي بالفعل بجميع *المعادلات* الثلاثة.
- غالبًا ما يتجاهل الطلاب تفسير حل النظام في السياق المطبق الأصلي.

مثال 3 **كم يكلف الطعام؟**

تذهب كل من جميلة وسناء وداليا إلى الكافتيريا لشراء الغداء. ويتم تقسيم الطعام إلى ثلاث مناطق بوفيه مختلفة. إحداها مخصصة للخضراوات والأخرى للمعكرونة والثالثة للحلوى الشهية. ولكل من هذه المناطق الثلاث سعر مختلف لكل رطل. ويملأ العملاء العلب بما يرغبون به من كل من هذه المناطق ثم يدفعون ثمن العلب عند مكتب الدفع. وفيما يلي الكميات التي أخذتها كل واحدة منهن من كل فئة والأثمان التي دفعنها.

	خضراوات	معكرونة	حلوى	السعر الإجمالي
جميلة		$\frac{1}{2}$ رطل	$\frac{1}{4}$ رطل	AED 7.00
سناء	$\frac{1}{2}$ رطل	$\frac{1}{4}$ رطل		AED 8.00
داليا	$\frac{1}{4}$ رطل	1 رطل	$\frac{1}{4}$ رطل	AED 12.50

a. **تفسير المسائل** حدد تكلفة كل رطل من كل نوع من أنواع الطعام المختلفة. استخدم الاختزال لحل النظام واكتب الحل هنا.

x = سعر الرطل بمنطقة الخضروات، وy = سعر الرطل بمنطقة المعكرونة، و z = سعر الرطل بمنطقة الحلوى الشهية. النظام هو:

$\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 7.00$ $2y + z = 28$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 8.00$ $2x + y = 32$

$\frac{1}{4}x + y + \frac{1}{4}z = 12.50$ أو $x + 4y + z = 50$

اطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثالثة، لتحصل على $x + 2y = 22$.

اضرب في 2 لتحصل على $2x + 4y = 44$ ثم استخدم الاختزال ثانية واطرح المعادلة $2x + y = 32$ من المعادلة الجديدة لتحصل على $3y = 12$. إذًا $y = 4$ وبالتعويض $z = 20$ و $x = 14$. إذًا، فإن تكلفة الخضراوات 14 AED/lb والمعكرونة 4 AED/lb والحلوى 20 AED/lb.

b. **تقييم مدى الصحة** يوجد بوفيه مماثل بكافتيريا أخرى. ويمثل براء السعر لكل رطل بكل محطة باستخدام النظام

$$\begin{cases} 2y + z = 25 \\ 2x + y = 34 \\ 2x + 3y + z = 56 \end{cases}$$

أوجد حل النظام وقيّم ما إن كان نظام براء منطقيًا في الموقف أم لا. فسّر إجابتك.

ينتج عن طرح المعادلة الثالثة من المعادلة الثانية $2y + z = 22$. باستخدام الاختزال ثانية مع المعادلة الأولى ينتج المعادلة الخاطئة $0 = 3$. ونظرًا لأنه لا يوجد حل للنظام، لا بد وأن براء قد ارتكب خطأ في كتابة النظام.

c. **تقييم مدى الصحة** يعتقد براء أن هناك خطأ ما في النظام الذي كتبه. ويعتقد أنه ينبغي أن تكون المعادلة الأولى $2y + z = 22$. أوجد حل النظام وحدد إن كان النظام الجديد الذي كتبه براء منطقيًا أم لا. فسّر إجابتك.

ينتج عن طرح المعادلة الثانية من المعادلة الثالثة $2y + z = 22$. الآن تطابقت معادلتين مما يعني وجود معادلتين فقط بثلاثة متغيرات. ويوجد عدد لا نهائي من الحلول لهذا النظام. وبالتالي لم يتوصل براء للنظام الصحيح بعد.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 1 تطلب من الطلاب فهم طبيعة المشاكل والمثابرة في حلها. في جميع الأمثلة والتمارين، يجب على الطلاب تحديد ثلاث متغيرات محط اهتمام في سياق مطبق وصياغة المعادلات المتعلقة بهذه المتغيرات ثم حل الأنظمة باستخدام وسائل جبرية. يجب على الطلاب بعد ذلك تفسير نتائجهم لمعرفة ما إذا كان الجواب منطقيًا في السياق.

تمرين

1. **التخطيط للحل** يقدم بائع تخفيضا على إكسسوارات حوض السباحة ويعرض مجموعة العروض التالية لتشجيع العملاء على الشراء.

عرض المجموعة المتكاملة	السعر قبل ضريبة مبيعات 6%
1 طوافة و2 مرشحات كلور	AED 220
1 مرشح كلور و 2 مقاعد تمدد كبيرة	AED 245
1 طوافة و 4 مقاعد تمدد كبيرة	AED 315

بناء على هذه الأسعار، إذا كان لديك AED 200، فهل يمكنك شراء 1 مرشح كلور و1 طوافة و1 مقعد تمدد كبير بعد تطبيق ضريبة المبيعات؟ اكتب الحل هنا

لا؛ لنفترض أن x = تكلفة طوافة وy = تكلفة مرشح كلور وz = تكلفة مقعد تمدد كبير. إذًا، $x + 2y = 220, y + 2z = 245, x + 4z = 315$؛ بحل المعادلة الأولى بإيجاد قيمة y والثالثة بإيجاد قيمة z نحصل على $y = \frac{1}{2}(220 - x) = 110 - \frac{1}{2}x, z = \frac{1}{4}(315 - x) = \frac{315}{4} - \frac{1}{4}x$. بالتعويض لإيجاد قيمة $x = 22.50, y = 98.75$ و$z = 73.125$. تبلغ تكلفة شراء واحد من كل منتج قبل تطبيق ضريبة المبيعات AED 194.38. وتبلغ ضريبة المبيعات AED 11.66 والإجمالي AED 206.04 وهو ما يزيد عن المبلغ AED 200.

2. **التخطيط للحل** يتاح ثلاثة أنواع من التذاكر وهي لمقاعد الأوركسترا ومقاعد الطابق المتوسط ومقاعد الشرفة. وتزيد تكلفة تذكرة الأوركسترا مبلغ AED 2 عن تذكرة الطابق المتوسط. بينما تزيد تكلفة الطابق المتوسط بمبلغ AED 1 عن تذاكر الشرفة. ويقل ضعف تكلفة تذكرة الأوركسترا بمبلغ AED 1 عن 3 أضعاف تكلفة تذكرة الشرفة. حدد سعر كل نوع من أنواع التذاكر.

افترض أن x = تكلفة تذكرة الأوركسترا وy = تكلفة تذكرة الطابق المتوسط وz = تكلفة تذكرة الشرفة؛ $x = y + 2, y = z + 1, 2x = 3z - 1$. إذًا حل النظام هو $x = 10$ و$y = 8$ و $z = 7$. إذًا تبلغ تكلفة التذاكر AED 10 وAED 8 وAED 7 على التوالي.

3. **استخدام البنية** عدد مكون من 3 أرقام تقل قيمته بمقدار 198 عند عكس أرقامه. ويزيد رقم العشرات عن رقم المئات بمقدار 2 ويبلغ مجموع الأرقام معًا 15. اكتب النظام ثم أوجد حله لتوجد العدد. وهل الحل وحيد؟ فسّر ذلك.

$x = 5, y = 7, z = 3$؛ افترض أن أرقام المئات والعشرات والآحاد هم x و y و z على التوالي. $100x + 10y + z = 100z + 10y + x + 198$ تبسّط إلى $x = z + 2$. يزيد رقم العشرات عن عدد المئات بمقدار 2: $y = x + 2$. باستخدام $x = z + 2$ و$y = x + 2$ و $x + y + z = 15$ والتبسيط لإيجاد $x = 5$ و$y = 7$ و$z = 3$. الحل فريد لأنه لا يوجد سوى مجموعة واحدة من الأرقام التي تحقق نظام المعادلات.

تمرين

التمارين 3–1 تتطلب من الطلاب تمثيل القيود كنظام للمعادلات وحل النظام وتفسير الحلول أو تقييمها.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1–2	1
3	7

تلميح تقني

في حين أن معظم الطلاب على الأرجح لن يكون لديهم حاسبات تمثيل بياني تمتلك القدرة على تقديم تمثيلات بيانية ثلاثية الأبعاد، فهم لا يزالون يستخدمون الآلة الحاسبة لمساعدتهم في إيجاد حل نظام المعادلات الثلاثة.

وجه الطلاب لاختيار متغير للإقصاء في زوجين من المعادلات في النظام. سينتج عن ذلك نظام معادلتين في متغيرين. ثم، اطلب منهم حل كل واحدة من هذه المعادلات لنفس المتغير الذي سيتعاملون معه على أنه "y" أثناء تمثيل الخطوط بيانيًا باستخدام الآلة الحاسبة. ستقدم نقطة التقاطع بين هذه الخطوط قيم المتغيرين.

تخطيط المطعم

سيستخدم الطلاب معلومات حول التكلفة والأرباح، جنبًا إلى جنب مع البرمجة الخطية، لتحديد كيفية إنتاج الحد الأقصى للربح.

المعايير

معايير الممارسة في الرياضيات: الوحدة 1 مهمة تقويم الأداء تعزز الممارسات في الرياضيات **م.م.ر 1**، و **م.م.ر 2**، و **م.م.ر 4**.

بداية سريعة

عندما يطلب منهم إنشاء نظام متباينات، وخاصةً في الحالات التي قد لا تكون فيها العلاقات والهدف النهائي واضحًا بسهولة، قد يشعر الطلاب بالعجز أمام الزوايا المتعددة الممكنة للنهج. قد يساعد ما يلي الطلاب في البدء:

شجع الطلاب على تحديد ما هي المتغيرات في هذه الحالة، بما يتعارض مع *القيود*. **شرائح اللحم وشطائر البرجر هي متغيرات. جميع المعلومات تقدم قيودًا.**

يمكن للطلاب تمثيل كل متباينة بيانيًا كمعادلة لتحديد الحدود، ثم تظليل الجزء المناسب من التمثيل البياني كما هو محدد من قبل المتباينة الفعلية.

مهمة تقويم الأداء

تخطيط المطعم

قدّم حلاً واضحا للمسألة، وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.

تهانينا! أنت الآن رئيس طهاة مطعم كوخ الشواء الشهي. وتكون كل جمعة ليلة الاحتفاء باللحم البقري حيث تباع شرائح اللحم البقري والبرجر فقط في العشاء. وفي أي ليلة، يستطيع المطعم أن يقدم وجبات لعدد 300 شخص بحد أقصى. وتبلغ تكلفة كل برجر AED 1 وتكلفة كل شريحة لحم AED 5. ويحصل المطعم على صافي ربح AED 5 من كل وجبة عشاء من شريحة لحم وAED 3 لكل وجبة عشاء من برجر. ولديك ميزانية للحم AED 1100 لكل جمعة. ما توافيق وجبات شرائح اللحم والبرجر التي يمكنك إعدادها لتحقيق أقصى ربح؟

الجزء A

اكتب نظام متباينات لتمثيل الأعداد المحتملة من وجبات البرجر وشرائح اللحم كل جمعة. حدد دالة ربح كل وجبة.

20 الوحدة 1 أنظمة المعادلات والمتباينات

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

مهمة تقويم الأداء هذه تمت محاذاتها بدقة مع **م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**، بالإضافة إلى **م.م.ر 4 (نماذج الرياضيات)**. يتم تزويد الطلاب في البداية بكمية كبيرة من المعلومات ويجب تحويل كل ذلك إلى علاقات منطقية ومرتبة. يمكن للعديد من الطلاب تحويل عبارة واحدة "الكمية *x* هي ضعف الكمية *y*" إلى معادلة. على الرغم من ذلك، تمثل *الكمية* الصافية من المعلومات المتاحة تحديًا لبعض الطلاب، ويجب عليهم البدء حيث **م.م.ر 1** تحدد أن ذلك يتم من خلال "البحث عن نقاط دخول لحل". كما تطلب أيضًا المسألة من الطلاب "تحديد الكميات المهمة في حالة عملية ورسم خريطة لعلاقاتهم باستخدام أدوات مثل الرسوم البيانية والجداول ثنائية الاتجاه والتمثيلات البيانية والمخططات التسلسلية والصيغ" **(م.م.ر 4)**. في هذه الحالة، تكون التمثيلات البيانية هي الأداء الرئيسي.

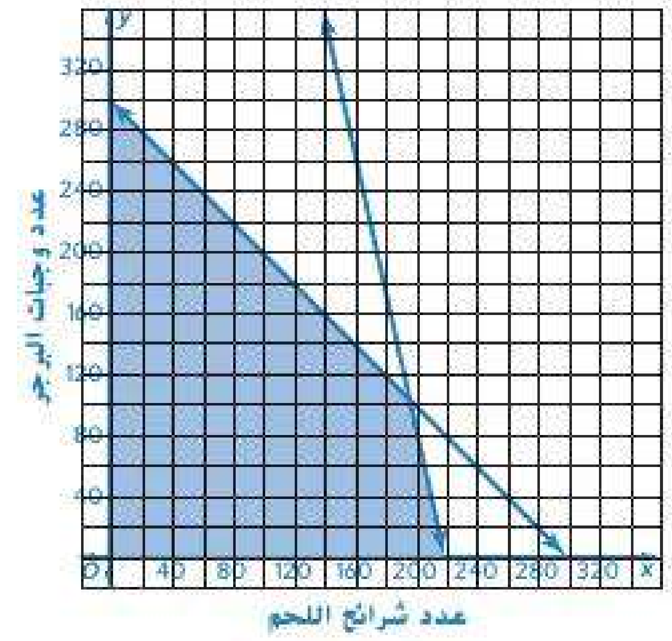
نصيحة للتدريس

م.م.ر 5

الشبكة المقدمة في **الجزء B** ليس بها أي محاور مميزة. يجب على الطلاب رسم المحاور بطريقة تناسب الوضع بأفضل درجة. للتأكيد على الاستخدام السليم للأدوات مثل التمثيلات البيانية، اطلب من الطلاب العمل على المعادلات في صيغة الميل والمقطع ورسم مسودة تقريبية من التمثيل البياني. من الناحية المثالية، سوف يدرك الطلاب أنه من الضروري فقط لإظهار الربع الأول على التمثيل البياني الخاص بهم. يعتبر القيدان المضمنان، $x \geq 0$ و $y \geq 0$، مهمان للإشارة إلى أن الكميات لا يمكن أن تكون سلبية. بالإضافة إلى ذلك، سوف يحتاج الطلاب إلى اتخاذ قرار على المقياس الخاص بهم.

الجزء B

باستخدام الشبكة المبينة، مثّل نظام المتباينات بيانيًا وحدد رؤوس منطقة الحلول الممكنة. تأكد من تسمية المحاور الإحداثية وتعيين المقاييس.



الجزء C

حدد عدد وجبات شرائح اللحم والبرجر والتي ستنتج أقصى ربح ممكن بليلة الاحتفال بلحم البقر.

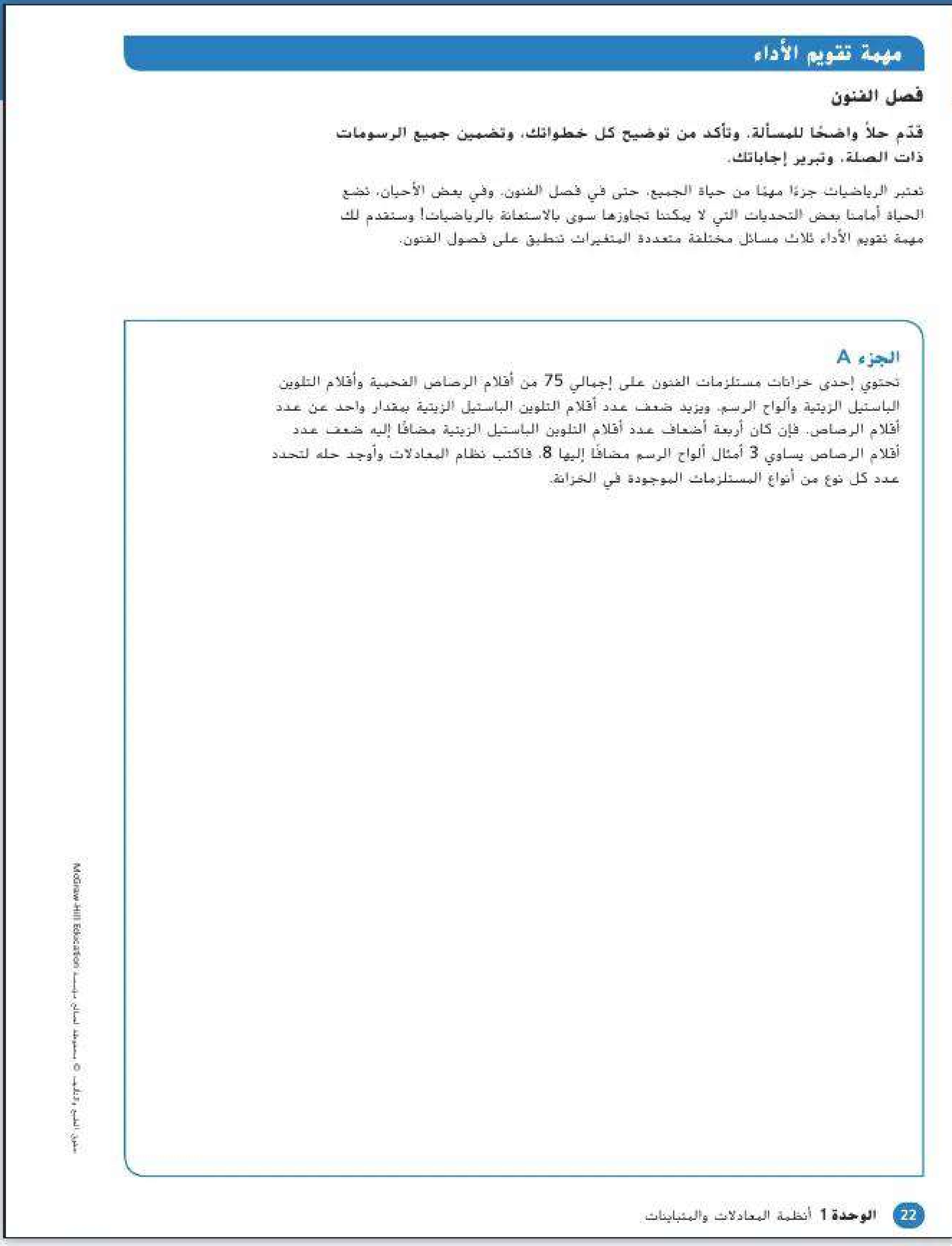
حدد مبلغ أقصى ربح ممكن.

الجزء D

في أحد الأسابيع، قدم مورد المطعم مقدارًا من اللحم يكفي فقط 140 وجبة من البرجر. فهل سيؤثر ذلك على أقصى ربح ممكن؟ فسّر إجابتك.

معايير رصد الدرجات

الجزء	النقاط القصوى	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	افترض أن x هي عدد شرائح اللحم وy هي عدد شطائر البرجر. المتباينات هي $x + y \leq 300$ و $5x + y \leq \$1100$ و $x \geq 0$ و $y \geq 0$. دالة الربح هي $P = 5x + 3y$.
B	4	راجع دليل الطالب التفاعلي للتمثيل البياني. ينبغي أن يكون في التمثيل البياني مساحة ذات صلة مرتبطة ومظللة. ينبغي أن تتضمن القيود المضمنة $x \geq 0$ و $y \geq 0$، حيث تقيد التمثيل البياني للربع الأول. الرؤوس هي (0 ,0) و (300 ,0) و (0 ,220) و (100 ,200).
C	2	رؤوس المنطقة المحدودة هي نقاط الحد الأقصى والحد الأدنى من الأرباح المحتملة. من الواضح أن النقطة (0 ,0) لم ينتج عنها أي ربح. النقاط المتبقية التي يتم التحقق منها هي (300 ,0) و (0 ,220) و (100 ,200). الأرباح لتلك النقاط الثلاث هي، على التوالي، P = AED 900 و P = AED 1100 و P = AED 1300. سيجني باسل حد أقصى من الأرباح بقيمة AED 1300 إذا قدم 200 شريحة لحم و 100 شطيرة برجر.
D	2	يقدم هذا التغيير قيد إضافي يؤدي إلى المتباينة $y \leq 140$. إذا كانت هذه المتباينة مدرجة في النظام، تصبح رؤوس منطقة الحلول الممكنة (140 ,0) و (140 ,160) و (0 ,220) و (100 ,200). لا يزال يتم تحقيق أقصى قدر من الأرباح من خلال تقديم 200 عشاء من شرائح اللحم و 100 من شطائر البرجر.
الإجمالي	10	


مهمة تقويم الأداء

فصل الفنون

قدّم حلاً واضحًا للمسألة، وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.

تعتبر الرياضيات جزءًا مهمًا من حياة الجميع، حتى في فصل الفنون. وفي بعض الأحيان، تضع الحياة أمامنا بعض التحديات التي لا يمكننا تجاوزها سوى بالاستعانة بالرياضيات! وستقدم لك مهمة تقويم الأداء ثلاث مسائل مختلفة متعددة المتغيرات تنطبق على فصول الفنون.

الجزء A

تحتوي إحدى خزانات مستلزمات الفنون على إجمالي 75 من أقلام الرصاص الفحمية وأقلام التلوين الباستيل الزيتية وألواح الرسم. ويزيد ضعف عدد أقلام التلوين الباستيل الزيتية بمقدار واحد عن عدد أقلام الرصاص. فإن كان أربعة أضعاف عدد أقلام التلوين الباستيل الزيتية مضافًا إليه ضعف عدد أقلام الرصاص يساوي 3 أمثال ألواح الرسم مضافًا إليها 8، فاكتب نظام المعادلات وأوجد حله لتحدد عدد كل نوع من أنواع المستلزمات الموجودة في الخزانة.

صف الفن

سيقوم الطلاب باستخدام نظام المعادلات والتعويض أو الإقصاء لحل المسائل المتعلقة بالفن.

المعايير

معايير الممارسة الرياضية: الوحدة 3 مهمة تقويم الأداء تدعم الممارسات في الرياضيات **م.م.ر 1**، و **م.م.ر 2**، و **م.م.ر 5**، و **م.م.ر 6**.

بداية سريعة

قد يتوتر الطلاب من طول وتفاصيل **الجزء A**. نقاط البدء التالية قد تكون مفيدة:

- ما هي القيم التي تحاول إيجادها؟
  هذه هي القيم التي سنقوم بتعيين المتغيرات لها. عدد الأقلام الرصاص وعدد أقلام التلوين الباستيل الزيتية وعدد من لوحات الرسم.
- ما هو عدد الأقلام الرصاص وأقلام التلوين الباستيل الزيتية ولوحات الرسم؟ **75**
- ما المعادلة التي ستمثل هذه المعلومات؟

ساعد الطلاب على إعداد المعادلات حسب الحاجة. قد تحتاج إلى اقتراح إعادة كتابة كل من المعادلات بحيث تكون جميع المتغيرات على نفس الجانب من كل معادلة. قد يكون من الأسهل أن نرى كيف أن حل نظام المعادلات الثلاثة في 3 متغيرات هو الأفضل.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتماشى مهمة تقويم الأداء بصورةٍ وثيقةٍ مع **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. في كل جزء، سوف يحتاج الطلاب للتبديل بين نهج يقوم على الرياضيات البحتة ونهج يستند إلى الرياضيات من الحياة اليومية في متناول اليد. الأسئلة في هذه المهمة تتطلب من الطلاب الربط بالسياق من أجل إعداد أنظمة المعادلات على أساس كل سيناريو بشكل صحيح. يقوم الطلاب بالفصل عن السياق بينما يتلاعبون بالمعادلات لحل المتغيرات. ثم يعودون إلى نهج الربط بالسياق عند تقرير ما إذا كانت الإجابات منطقية ولتحديد الوحدات الصحيحة لكل سيناريو.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 5

توفر مهمة تقويم الأداء هذه مثالًا لتطبيق **م.م.ر 5 (استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية)**. سوف يحتاج الطلاب إلى استخدام العديد من الطرق المختلفة ليكونوا قادرين على فهم المسائل فيما يختص بالمفاهيم في جميع الأجزاء الثلاثة. قد يشمل هذا رسم الرسوم التخطيطية أو الجداول، أو محاولة استخدام مسائل بأعداد أبسط. سوف يقرأ بعض الطلاب المسائل ويتصورون المعادلات على الفور. وقد يتعرقل البعض من وفرة المعلومات. أدوات المفاهيم هي مفتاح النجاح في هذه المهمة.

الأخطاء الشائعة

في **الجزء B**، يمكن للطلاب تبديل المتغيرات عن طريق الخطأ عند إعداد المعادلة الثانية، $w = \frac{2}{3}\ell$. اطلب منهم كتابة العبارة "العرض هو ثلثا الطول"، ومن ثم ترجم مباشرةً من اللغة الإنجليزية إلى الرياضيات. "العرض" يترجم إلى "w" و"هو" يترجم إلى "=" و"ثلثا الطول" تترجم إلى $\frac{2}{3}\ell$.

الجزء B

طُلب منك في أحد واجبات الرسم صنع إطار من مادة من اختيارك. ولديك شريط من المعدن المجدول طوله 60 in. وستعمل على ثنيه على شكل مستطيل. وتود أن يكون عرض المستطيل يساوي $\frac{2}{3}$ من طوله. اكتب نظام معادلات وأوجد حله لتحدد أبعاد المستطيل التي تحقق هذا الشرط.

الجزء C

تود أن تمزج خليطًا من الطلاء بمقدار 2 gal. ويجب أن تكون نسبة الطلاء الأبيض إلى الطلاء الأزرق 5:3. ويجب أن يكون مقدار الطلاء الأحمر في المزيج نصف مقدار الطلاء الأبيض والطلاء الأزرق معًا. اكتب نظام معادلات وأوجد حله لتحدد مقدار كل نوع من أنواع الطلاء الذي سيستخدم في الخليط.

معايير رصد الدرجات

الجزء	النقاط القصوى	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	3	افترض أن p هو عدد أقلام الرصاص الفحمية و c هو عدد أقلام التلوين الباستيل الزيتية وs هو عدد ألواح الرسم. توجد 3 معادلات يمكن كتابتها بالمعلومات المقدمة: $p + c + s = 75$، $2c = p + 1$، $4c + 2p = 3s + 8$. هذه المعادلات الثلاثة يمكن حلها: $p = 27$ و $c = 14$ و $s = 34$.
B	3	افترض أن ℓ هي طول المستطيل وw هي عرضه. تمثل المعادلتان $2\ell + 2w = 60$ و $w = \frac{2}{3}\ell$ نموذج الحالة. حل النظام يعطي طول 18 بوصة وعرض 12 بوصة.
C	4	المعادلات التي يمكنها تمثيل هذا السيناريو هي $b + r + w = 2$، و $w = \frac{3}{5}b$، و $r = \frac{1}{2}(w + b)$. حل النظام يؤدي إلى $\frac{2}{3}$ جالون من الطلاء الأحمر و $\frac{1}{2}$ جالون من الطلاء الأبيض و $\frac{5}{6}$ جالون من الطلاء الأزرق.
الإجمالي	10	

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يجيبون على **العنصر 4** إجابة خاطئة في الأغلب لم يتذكروا اعتبار حقيقة أن b و m يجب أن يكونا عددين صحيحين غير سالبين. يوجد لدى نظام المعادلات حل، ولكن أهداف أسامة غير ممكنة. ويظهر حل نظام المعادلات أن أسامة سوف يحتاج إلى شراء عدد سلبي من الأفلام، وهذا لا معنى له.

إذا لم يحدد الطلاب عدد القلائد والأساور بشكل صحيح في **العنصر 5**، فقد يحتاجون إلى دعم في تنظيم المعلومات. اجعلهم يصنعون جدولًا مع صف لكل رأس من المنطقة الممكنة. ينبغي عليهم كتابة دالة الهدف في رأس العمود، وتقييم تلك الدالة لكل رأس، وإكمال الجدول بقيم الربح.

الطلاب الذين يجيبون عن **العنصر 6** بشكل غير صحيح قد يحتاجون إلى مراجعة مميزات حاسبة التمثيل البياني الخاصة بهم. أظهر لهم كيفية إدخال وتمثيل الدالتين بيانيًا في وقت واحد. ثم أظهر لهم كيفية التكبير إلى نقطة التقاطع.

تدريب على الاختبار المعياري

1. يحتوي أحد اختبارات الرياضيات على أسئلة الاختيار من متعدد وأسئلة الإجابة الموسعة. وقد حصلت مروة على إجمالي درجات 87 منها 43 لأسئلة الاختيار من متعدد. بينما حصلت آمنة على إجمالي درجات أقل، ولكنها حصلت على درجات أكثر من مروة في أسئلة الاختيار من متعدد. فإذا كان المتغير x يمثل النقاط التي تم الحصول عليها في أسئلة الاختيار من متعدد والمتغير y التي تم الحصول عليها من أسئلة الإجابة الموسعة. فأي من أنظمة المتباينات التالية يمثل الدرجات المحتملة التي حصلت عليها آمنة في كل نوع من نوعي الأسئلة؟

$\begin{cases} x < 43 \\ x + y > 87 \end{cases}$ $\begin{cases} y < 87 \\ y - x < 43 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 43 \\ x + y < 87 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 43 \\ x + 87 > y \end{cases}$

2. استخدم أي طريقة لحل نظام المعادلات الخطية التالية.

$$\begin{cases} y = -2x - 7 \\ 3x + 2y = -9 \end{cases}$$

حل هذا النظام هو

$(\boxed{-5}, \boxed{3})$.

3. اشترت كل من عائشة وتقى وإيمان وجبات خفيفة. ويوضح الجدول التالي المقدار الذي اشترت كل منهن من كل منتج وإجمالي التكلفة التي أنفقتها.

	عائشة	تقى	إيمان
طبق التاكو	2	1	2
الزبادي	1	0	2
العصائر	1	2	0
التكلفة الإجمالية (AED)	10.00	8.50	9.00

أدخل السعر الإجمالي لكل منتج.

تاكو: $\boxed{2.50}$ AED

زبادي: $\boxed{2.00}$ AED

عصير: $\boxed{3.00}$ AED

4. يريد أسامة شراء إجمالي 10 أفلام وكتب بأحد خصومات التصفيات. فإذا كان سعر الكتاب AED 5 وكل فيلم AED 7 ويريد أسامة إنفاق مبلغ AED 45. ويمثل نظام المعادلات التالي عدد الكتب والأفلام التي ينبغي عليه شراؤها حيث p وm عددان صحيحان غير سالبين.

$$\begin{cases} b + m = 10 \\ 5b + 7m = 45 \end{cases}$$

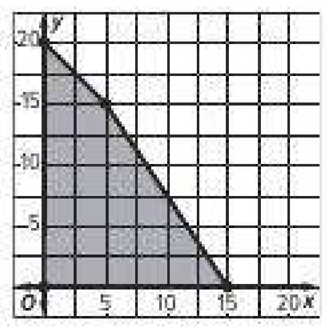
أي من الخيارات التالية يصف بالشكل الأمثل النظام وإمكانية تحقيق أهداف أسامة؟

حل واحد، حل ممكن

حل واحد، ليس حلاً ممكنا

حلول عديدة، حلول ممكنة

5. تصنع لمياء قلادات وأساور للبيع. ويوضح التمثيل البياني أدناه منطقة الحلول الممكنة للعدد الذي يمكنها صنعه من كل منهما، حيث يمثل x عدد القلادات ويمثل y عدد الأساور.



ويبلغ الربح الذي تحصل عليه AED 10 من كل أسورة وAED 12 من كل قلادة. وتود زيادة ربحها لأقصى حد ممكن والذي يتم تمثيله بالدالة $\boxed{P(x, y) = 12x + 10y}$. وتحتاج إلى إيجاد قيمة الدالة عند الرؤوس $\boxed{(0, 0)}$ و $\boxed{(0, 20)}$ و $\boxed{(15, 0)}$ و $\boxed{(5, 15)}$. وبناء على ذلك، ينبغي عليها صنع $\boxed{5}$ القلادات $\boxed{15}$ والأساور.

6. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتقدير إلى أقرب عشرة من الحل للنظام التالي.

$$\begin{cases} y = 3.3714x - 2.936 \\ y = 12.0582 - 5.727x \end{cases}$$

$(\boxed{1.6}, \boxed{2.6})$

إستراتيجية خوض الاختبار

نظرًا لكون خيارات الإجابة في **العنصر 1** متشابهة، فإن كتابة نظام متباينات تتوافق مع نقاط آمنة الممكنة قبل النظر في خيارات الإجابة ستكون إستراتيجية جيدة للطلاب. وبهذه الطريقة، يمكنهم مقارنة نظامهم بالخيارات والعثور على النظام المطابق.

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يجيبون **العنصر 7a** بشكل غير صحيح قد تكون لديهم صعوبة في كتابة معادلات للوصف اللفظي. شجعهم على اختبار كل معادلة مع الأعمار التي تلبي شرط معين لمعرفة ما إذا كانت المعادلات مستوفاة.

الطلاب الذين يمثلون المتباينات بيانيًا في **العنصر 8** بشكل غير صحيح قد لا يكونون يختبرون المتباينة لتحديد أي جانب سيظللون. راجع كيفية استخدام نقطة اختبار، مثل (0 ,0)، من أجل تحديد الجانب المناسب لتظليله.

التوجيهات

العنصر 7

[4] يتم تقديم النظام الصحيح (قبول معادلات مكافئة) ويتم تمثيل المعادلات بيانيًا بشكل صحيح والإجابة تشير إلى أن الحل هو نقطة تقاطع، ويتم تقديم حلولاً صحيحة وتفسيرًا

[3] النظام غير صحيح، لكن النظام المقدم قد تم تمثيله بيانيًا بشكل صحيح، و**الجزء c** صحيح ونقطة التقاطع الظاهرة في التمثيل البياني محددة في **الجزء d** أو يتم تقديم نظام صحيح، لكن يوجد خطأ في **الجزء b** أو **c** أو **d**

[2] جزءان من الأربعة أجزاء صحيحان.

[1] جزء من الأربعة أجزاء صحيح.

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

الفقرة 9

[2] يتم إعطاء النظام الصحيح ويتم إعطاء الحل والتفسير الصحيح

[1] النظام غير صحيح، لكن تم تقديم حل صحيح للنظام

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

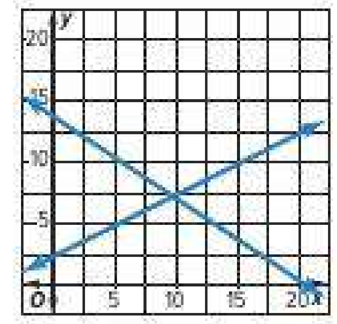
---

7. يقل عُمْر أنور بمقدار 4 سنوات عن ضعف عُمْر صديقه داود. ويساوي مجموع ضعف عُمْر أنور وثلاثة أضعاف عُمْر داود 41.

a. إذا كان x هو عُمْر أنور وy هو عُمْر داود، فما نظام المعادلات الذي يمثل أعمارهما؟

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ 2x + 3y = 41 \end{cases}$$

b. مثّل النظام بيانيًا.



c. كيف يمكنك تحديد الحل من التمثيل البياني؟

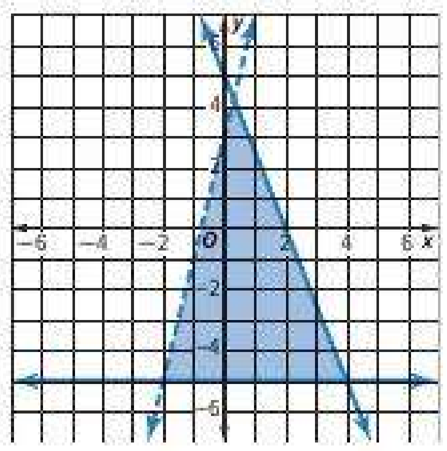
الحل هو نقطة تقاطع المستقيمات.

d. ما حل هذا النظام؟ اشرح ما يعنيه الحل في سياق المسألة.

(10, 7)؛ يبلغ أنور 10 أعوام وداود 7 أعوام.

8. مثّل حل النظام التالي بيانيًا.

$$\begin{cases} y < 4x + 3 \\ 5x + 2y \le 10 \\ y \ge -5 \end{cases}$$



9. يبيع نادي التزلج بالمدرسة قبعات وقفازات للتزلج عليها شعر المدرسة لجمع أموال التبرعات. ولصنع هذه المنتجات، دفع النادي AED 120 رسوم خدمات بالإضافة إلى AED 3.50 لكل قبعة و AED 4.75 لكل قفاز. وقد باعوا القبعة مقابل AED 6 والقفاز مقابل AED 8. فإذا دفعوا AED 814.50 في صنع المنتجات وحققوا AED 1180 من المبيعات، فكم عدد ما باعوه من كل منتج؟ اشرح استنتاجك.

98 قبعة و 74 قفازًا؛ ويكون التعبير الذي يمثل إجمالي التكلفة الخاصة بصنع المنتجات هو $120 + 3.50h + 4.75g$ a والتعبير الذي يمثل إجمالي المبيعات هو $6h + 8g$. إذًا نظام المعادلات هو $120 + 3.50h + 4.75g = 814.50$ و $6h + 8g = 1180$ وحله هو، $h = 98$ و $g = 74$.

إستراتيجية خوض الاختبار

ذكر الطلاب أنه عندما يطلب منهم شرح استنتاجهم، يجب أن يكون استنتاجهم واضحًا وكاملاً. بالنسبة **للعنصر 9**، اجعلهم يعيدون قراءة إجاباتهم كما لو كانوا يقرؤون إجابة شخص آخر. اطلب منهم أن يسألوا أنفسهم إذا كانوا مقتنعين بإجاباتهم الخاصة. إن لم يكن الأمر كذلك، اجعلهم يعيدون الكتابة بحيث تكون الإجابة واضحة ومقنعة.

استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* مع كتاب *الرياضيات للصف 10 المتقدم*.

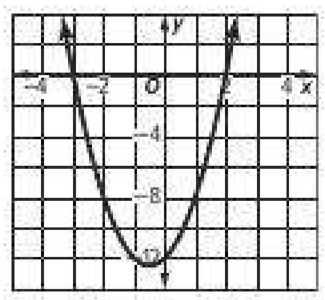
درس دليل الطالب التفاعلي	الرياضيات للصف 10 المتقدم
2.1	الدرس 1-2
2.2	الدرس 2-2
2.3	الدرس 3-2
2.4	الدرس 4-2
2.6	الدرس 6-2
2.7	الدرس 7-2

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

يعرض السؤال التمهيدي الخاص بالدرس 2.1 الطلاب على **م.م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. يمكن للطلاب تقييم الدالة للقيم المتنوعة لـــ x. شجعهم على البحث عن التماثل في التمثيل البياني واستخدامه. وينبغي على الطلاب ملاحظة تناقص قيم الدالة بتزايد قيم x، حتى تبدأ القيم في التزايد. يمكنك تكوين مجموعات ثنائية من الطلاب وتعيين طالب واحد في كل ثنائي لتقييم الدالة لقيم الأعداد الصحيحة لـــ x الأقل من 1.5 والطالب الآخر لقيم الأعداد الصحيحة لـــ x الأكبر من 1.5. اجعل الطلاب يقارنون قيمهم ثم يوفقون بينها لتمثيل الدالة بيانيًا.

2 الدوال والعلاقات التربيعية

الهدف الأساسي من الوحدة تعرّف على ما ستستكشفه في هذه الوحدة. وأجب على الأسئلة التمهيدية. وعندما تنتهي من كل درس، راجع هذه الصفحات للتحقق من إجابتك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 2.1: تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا	
بالنسبة لدالة تمثل علاقة بين كميتين، فسّر السمات الأساسية للتمثيلات البيانية والجداول من حيث الكميات. وقم بعمل رسوم بيانية توضح السمات الأساسية مع تقديم وصف لفظي للعلاقة.	يشتمل التمثيل البياني للدالة $y = 2x^2 + 4x + 3$ على رأس عند $(-1, 1)$. فهل هذه الرأس تعتبر قيمة عظمى أم صغرى؟ فسر كيف توصلّت إلى ذلك. **قيمة صغرى؛ حيث إن $a > 0$، فإن القطع المكافئ مفتوح لأعلى.**
الدرس 2.2: حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني	
أوجد حل المعادلات التربيعية عن طريق التحقق (على سبيل المثال، للمعادلة $x^2 = 49$) وأخذ الجذور التربيعية وإكمال المربع والقانون العام والتحليل الى العوامل، بما يتناسب مع الصيغة الأولية للمعادلة. تعرّف متى تقدم القانون العام حلولاً مركبة واكتب هذه الحلول في الصورة $a \pm bi$ للعددين الحقيقيين a و b. مثّل الدوال التربيعية والخطية بيانيًا ووضح المقاطع والقيمة العظمى والصغرى.	استخدم التمثيل البياني للدالة $y = 2x^2 + 2x - 12$ الموضح أدناه، لحل المعادلة ذات الصلة $2x^2 + 2x - 12 = 0$. مع تبرير الحل.  **$x = -3$ أو $x = 2$؛ يعتبر المقطع x من التمثيل البياني حلول المعادلة ذات الصلة.**
الدرس 2.3: حل المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل	
استخدم عمليات التحليل إلى العوامل وإكمال المربع في الدالة التربيعية لتوضيح الأصفار والقيم القصوى وتناظر التمثيل البياني وتفسير ما سبق بدلالة السياق. تكوين معادلات ومتباينات بمتغير واحد ثم استخدمها في حل المسائل. استخدم بنية التعبير لتحديد طرق إعادة كتابته.	إذا كان $-3(2x + 5)(x - 4) = 0$. فلماذا $-\frac{5}{2}$ و 4 هما الجذران الوحيدان لهذه المعادلة؟ ولماذا -3 ليس جذرًا؟ **يكون للمعادلة الجذرين المعطيين نظرًا لأنهما القيمتان الوحيدتان اللذان يحققان المعادلة عند التعويض بهما عن x. والتعويض بالعدد -3 عن المتغير x لا يجعل الطرف الأيسر من المعادلة مساويًا للعدد 0.**

السؤال التمهيدي	الدروس المستفادة
	الدرس 2.4: الأعداد المركبة
هل الجذر التربيعي لعدد سالب عبارة عن عدد حقيقي؟ فسّر ذلك. **لا، ليس عددًا حقيقيًا، فلا يوجد عدد حقيقي يكون عددًا سالبًا عند ضربه في نفسه.** هل يمكن اعتبار أي عدد حقيقي a عدد مركب أيضًا؟ **نعم؛ يمكن كتابته في الصيغة $a + 0 \cdot i$.**	إذا علمت أن هناك عدد مركب i حيث $i^2 = -1$ وأن لكل عدد مركب الصيغة $a + bi$ a وb عددان حقيقيان. استخدم العلاقة $i^2 = -1$ وخواص التبديل والتجميع والتوزيع في جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها.
	الدرس 2.6: القانون العام والمميِّز
لماذا يكون للمعادلة التربيعية حلولاً مركبة إذا كان المميز أقل من 0؟ **إذا كان المميز أقل من 0، ستتضمن الحلول الجذر التربيعي لعدد سالب ما يعني أنها أعداد مركبة.**	أوجد حل المعادلات التربيعية بالمعاملات الحقيقية التي تتضمن حلولاً مركبة. بالنسبة لدالة تمثل علاقة بين كميتين، فسّر الميزات الأساسية للتمثيلات البيانية والجداول بدلالة الكميات، وارسم تمثيلات بيانية توضح الميزات الأساسية مع تقديم وصف لفظي للعلاقة. كوّن معادلات ومتباينات بمتغير واحد ثم استخدمها في حل المسائل. **يتناول أيضًا:** A.CED.4, A.APR.4
	الدرس 2.7: تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية
تقع الرأس $f(x) = x^2$ عند $(0, 0)$. فما إحداثيات الرأس $g(x) = (x - 2)^2 + 5$؟ **$(2, 5)$** ما معادلة الدالة $g(x)$ التي يزاح تمثيلها البياني 3 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أسفل من التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$؟ **$g(x) = (x + 3)^2 - 4$**	حدد تأثير استبدال $f(x)$ بـــ $f(x) + k$، و$k\,f(x)$، و$f(kx)$، و$f(x + k)$ بقيم معينة لـــ k (سواء موجبة أو سالبة) على التمثيل البياني؛ وإيجاد قيمة k بالنظر إلى التمثيلات البيانية المقدمة. والتجربة في الحالات وتوضيح تفسير للتأثيرات على التمثيل البياني باستخدام التكنولوجيا. واعمل على إدراج التعرف على الدوال الزوجية والفردية من تمثيلاتها البيانية وتعابيرها الجبرية. **يتناول أيضًا:** F.IF.8a

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

يمكن أن يمثل السؤال التمهيدي للدرس 2.4 فرصة لاستكشاف **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. شجع الطلاب على إثبات أن القيم المعطاة هي جذور المعادلة قبل محاولة شرح سبب عدم وجود أي جذور أخرى وسبب أن -3 بشكل خاص ليست جذرًا. بعد إثبات الطلاب أن القيم المعطاة هي جذور للمعادلة، اسألهم ماذا سيعني أن يكون للمعادلة جذر آخر. وينبغي أن يجيبوا بأنه يتعين أن تكون هناك قيمة أخرى تجعل الطرف الأيسر للمعادلة مساويًا لـــ 0 عند التعويض عن x. ناقش سبب أن هذا غير ممكن، بما أنه تم إعطاء القيم التي تجعل كل من العوامل الخطية مساوية لـــ 0 قبل ذلك.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

يمكن أن يمثل السؤال التمهيدي للدرس 2.6 فرصة لاستكشاف **م.م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. ينبغي على الطلاب تقديم تفسير يركز على ما يحدث بعد تقييم المميز. بما أن العملية التالية هي أخذ الجذر التربيعي، فستحدد قيمة المميز عدد ونوع حلول معادلة تربيعية. ذكرهم بأنه لا يوجد لأي جزء آخر من الصيغة التربيعية أي تأثير على عدد أو نوع حلول المعادلة التربيعية.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 7

المتطلبات الأساسية

- تمثيل الدوال بيانيًا
- تحديد المجال والمدى للدالة

مثال 1

م.م.ر 2

نصيحة للتدريس

ناقش آثار الجاذبية على جسم ما تم إطلاقه/رميه/ضربه في الهواء. عادةً، سيرتفع الجسم لفترة من الزمن، ولكن سحب الجاذبية سيتسبب في سقوط الجسم في النهاية عائدًا صوب الأرض. اشرح أن الحد التربيعي في دالة حركة مقذوف يمثل التسارع الناتج عن الجاذبية، وأن الحد الخطي يمثل السرعة المتجهة الصاعدة المبدئية، وأن الحد الثابت يمثل الارتفاع المبدئي للجسم فوق الأرض. إذا تم إطلاق الجسم على مستوى الأرض، فإذًا سيكون الحد الثابت هو صفر.

2.1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

الأهداف

- تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.
- تفسير السمات الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال التربيعية.

الصيغة العامة لدالة تربيعية هي $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$. يُسمى التمثيل البياني لدالة تربيعية **القطع المكافئ**؛ ويحتوي على فرعين متطابقين يتقاطعان عند رأس الزاوية. كما يُعرّف التمثيل البياني **بمحور تماثله**، وهو مستقيم رأسي يمر عبر رأس زاوية التمثيل البياني.

المفهوم الأساسي **الرسم البياني للدالة التربيعية**

الدالة التربيعية للتمثيل البياني $f(x) = ax^2 + bx + c$ تتسم بما يلي.

يتقاطع التمثيل البياني مع المحور y عند النقطة $(0, -c)$.

معادلة محور التماثل هي $x = -\frac{b}{2a}$.

الإحداثي x لرأس الزاوية هو $x = -\frac{b}{2a}$ والإحداثي y هو $f(-\frac{b}{2a})$.

مثال 1 **التمثيل البياني لدالة تربيعية**

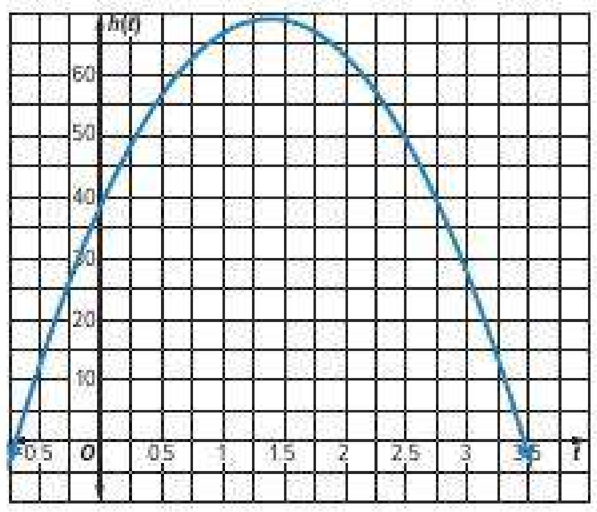
الاستكشاف **يتم إطلاق نموذج صاروخ من منصة. يمكن تقدير ارتفاع الصاروخ بعد t ثوانٍ بالتقريب بالمعادلة $h(t) = -16t^2 + 48t + 28$، حيث يتم قياس $h(t)$ بالأقدام.**

a. **استخدام البنية** كيف يمكنك استخدام التناظر للتوصل إلى إحداثيات النقاط الأخرى على التمثيل البياني؟ استخدم أسلوبك لإكمال الجدول. اشرح السبب في أن هذا ينجح من حيث سياق المسألة.

t	0	1	1.5	2	3
$h(t)$	28	60	64	60	28

القطع المكافئ مناظر لمحور التماثل. بتحديد النقاط باستخدام المسافة الأفقية نفسها من محور التماثل. يجب أن تكون الإحداثيات y هي نفسها. يصل الصاروخ إلى أي ارتفاع معين بمجرد أن يبدأ في طريق الصعود ويصله مرة أخرى في طريق النزول.

b. **التفكير بطريقة كميّة** قم ببناء تمثيل بياني لـ $h(t)$ واستخدمه للتوصل إلى مجال الدالة لهذا الموقف.



يتم إطلاق الصاروخ في $t = 0$ ثانية ويصل إلى الأرض في $t = 3.5$ ثانية. ولهذا فالمجال هو $\{t \mid 0 \leq t \leq 3.5\}$

c. **التفكير بطريقة تجريدية** حدد قيمة $h(0)$ واشرح معناه من حيث التمثيل البياني الوظيفي وسياق المسألة.

قيمة $h(0) = 28$ قدمًا. هذا هو تقاطع y في التمثيل البياني. وهذا يمثل ارتفاع الصاروخ عند الإطلاق، وهو ارتفاع المنصة التي تم إطلاقه منها.

معلومات أساسية في الرياضيات

يمكن إيجاد دلائل استكشاف النماذج التربيعية في ألواح طينية يعود تاريخها إلى حوالي 1600 قبل الميلاد. حتى في ذلك الوقت البعيد، كانت توجد العديد من التطبيقات العملية لهذه المعادلات، مثل قياس مساحة قطعة الأرض وحجم المحاصيل الزراعية. وخلال الـــ 3000 آلاف عام التالية، عُدلت الصيغ الجبرية العامة وقُننت، وكُيفت لاحتساب الأعداد السالبة وما تلاها من الأعداد المركبة.

من شأن دراسة الدوال التربيعية أن تمكّن الطلاب من التقدم بسلاسة إلى الدوال كثيرة الحدود. الطلاب الذين يتقدمون لاستكشاف القطوع المخروطية، أو يدرسون حساب التفاضل والتكامل أو الفيزياء، سيرون مواد إضافية مستندة إلى دراسة الدوال التربيعية وخواصها.

المثال 1 (تابع)

الأسئلة الداعمة

- من **الجزء a**، في رأيك ما العلاقة بين محور التماثل ومحاور x؟
  يقع محور التماثل في المنتصف بين محاور x.
- ما الفرق بين الرأس ومحور التماثل؟
  الأول هو نقطة لها الإحداثيات (x, y) والآخر هو مستقيم له المعادلة $x = k$.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

اطلب من الطلاب التفكير في الأزواج المختلفة من الأعداد التي لها المجموع ذاته. اطلب منهم حساب ناتج ضرب هذه الأعداد. وينبغي أن يلاحظوا أن نواتج الضرب المختلفة يمكن الحصول عليها. وعندما تكون الأرقام أقرب في القيمة، يصبح ناتج الضرب أكبر.

على سبيل المثال، مع مجموع 12:

$(0)(12) = 0$

$(1)(11) = 11$

$(2)(10) = 20$

$(3)(9) = 27$

$(4)(8) = 32$

$(5)(7) = 35$

$(6)(6) = 36$

$(7)(5) = 35$

$(8)(4) = 32$

$(9)(3) = 27$

$(10)(2) = 20$

$(11)(1) = 11$

$(12)(0) = 0$

يمكن أن يساعد ذلك الطلاب على تصور التمثيل البياني لقطع مكافئ منفتح لأسفل. وكلما تحرك القطع المكافئ صوب الرأس من كل جانب، سيزداد ارتفاع التمثيل البياني صوب القيمة العظمى.

---

d. التخطيط للحل ما الزمن الذي يبدأ فيه الصاروخ في السقوط نحو الأرض؟ ما ارتفاع الصاروخ في ذلك الزمن؟

$t = 1.5$ s; 64 ft؛ أوجد معادلة محور التماثل: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{48}{32} = 1.5$، عوّض هذه القيمة في الدالة للتوصل إلى $f(1.5) = 64$ قدمًا.

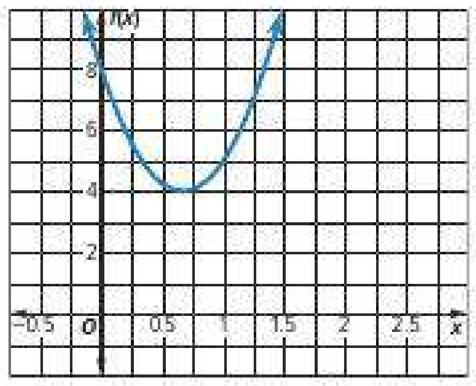
المفهوم الأساسي **القيمة العظمى والصغرى**

ضع في الاعتبار الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$.

عندما تكون $a > 0$، فإن التمثيل البياني للدالة يفتح **إلى الأعلى** ويحتوي على **قيمة صغرى**.

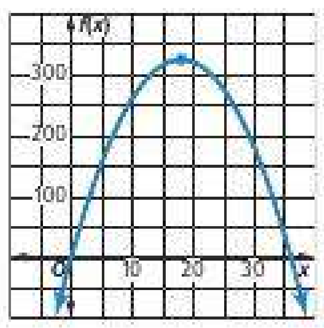
عندما تكون $a < 0$، فإن التمثيل البياني للدالة يفتح **إلى الأسفل** ويحتوي على **قيمة عظمى**.

مثال 2 **القيمتان العظمى والصغرى**



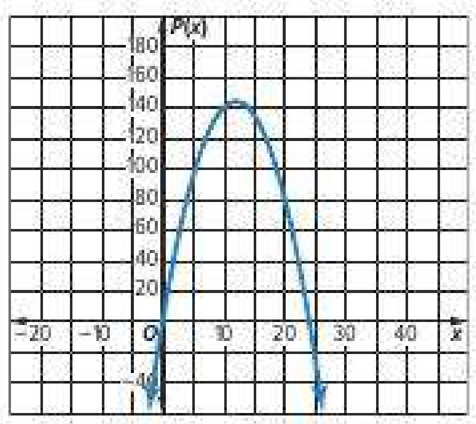
a. التخطيط للحل حدد القيمة العظمى أو الصغرى لـ $f(x) = 9x^2 - 12x + 8$. كيف يمكنك استخدام تمثيل بياني لتأكيد نتيجتك؟

يوضح التمثيل البياني أن القيمة الصغرى هي 4. يتأكد هذا بالتوصل إلى محور التماثل، $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{3}$، ورأس الزاوية $(\frac{2}{3}, 4)$.



b. التفكير بطريقة تجريدية جد عددين مجموعهما 36 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن. اكتب الحل هنا.

18 و 18؛ إذا كانت x و $36 - x$ هما العددان، فحاصل الضرب هو $P(x) = 36x - x^2$. محور التماثل هو $18 = -\frac{b}{2a} = x$ و $x = 18 - 36$.



c. بناء الفرضيات ما أقل حاصل ضرب ممكن لعددين مجموعهما 24؟ استخدم تمثيلاً بيانيًا لشرح استنتاجك.

لا يوجد حد أدنى. إذا كانت x و $24 - x$ هما العددان، فحاصل الضرب هو $P(x) = 24x - x^2$؛ تحتوي الدالة على قيمة عظمى لكنها لا تحتوي على قيمة صغرى.

مجال الدالة التربيعية هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية. مدى الدالة التربيعية هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو تساويها أو مجموعة كل الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو تساويها. إلا أن كلاً من المجال والمدى قد يحتاجان إلى تقييد في سياق تطبيق تمثيلي.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

يطلب **م.م.ر 2** من الطلاب كلاً من تجريد حالة معطاة وفهم سياق التمثيلات الرياضية التي يستخدمونها لتحليل الحالة. في **المثال 1** يجب على الطلاب ربط المعادلة والتمثيل البياني بتفسيرات من الحياة اليومية لارتفاع المقذوف.

يحتاج الطلاب إلى أن يكونوا قادرين على تفسير $h(0)$ كارتفاع الجسم في وقت إطلاقه، وأن يدركوا أن رأس القطع المكافئ هو الارتفاع الأقصى الذي بلغه المقذوف. ويجب أن يفسروا أيضًا أن المعادلة والتمثيل البياني هما تمثيلان لارتفاع المقذوف ولا يظهران المسار الفعلي الذي اتخذه المقذوف.

المثال 2 (تابع)

الأسئلة الداعمة

- أين ينبغي أن تنظر في الدالة لتحديد الاتجاه التي سينفتح القطع المكافئ إليه؟ **علامة a في الحد ax^2 تشير إلى ما إذا كان التمثيل البياني ينفتح لأعلى أم لأسفل.**
- إذا كانت الأسئلة تطلب إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى، فما مكون الرأس الذي تسأل عنه؟ **تطلب الأسئلة الإحداثي y للرأس.**
- هل يمكن أن تكون للقطع المكافئ قيمتان عظمى وصغرى؟ **لا، القطع المكافئ إما أن تكون له قيمة عظمى أو صغرى، ولكن ليس الاثنان معًا.**

مثال 3

نصيحة للتدريس
م.م.ر 2

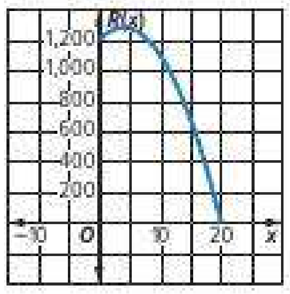
ناقش كيف يمكن تمثيل ناتج ضرب لكميتين مرتبطتين، بحيث تتزايد إحداهما خطيًا مع تناقص الأخرى خطيًا، بدالة تربيعية. وكذلك، أوضح أنه بسبب أن إحدى الكميتين متناقصة، سيكون التمثيل البياني لهذه الدالة قطعًا مكافئًا مفتوحًا لأسفل، ولذا سيكون لناتج الضرب قيمة عظمى.

الأسئلة الداعمة

- ماذا يحدث للطلب مع ارتفاع أسعار التذاكر؟ **سيهتم أناس أقل بالدخول إلى السينما عندما تكون الأسعار أعلى، لذا سينخفض الطلب.**
- إذا كان انخفاض سعر التذكرة يعني زيادة الزبائن، فلم لا نستمر في خفض السعر؟ **رغم أن عدد الزبائن سوف يزيد، فإن كل واحد فيهم سيدفع ثمنًا أقل، وسينعكس ذلك عادةً على الزيادة في حجم المشاهدين.**

مثال 3 **زيادة العائد للحد الأقصى**

تبيع السينما المحلية في ليالي أيام الجمعة في العادة 200 تذكرة بسعر AED 6.00 للتذكرة. يقدّر المدير أنه مع كل زيادة بمقدار AED 0.50 في سعر التذكرة، سيقل عدد الذاهبين إلى السينما بمقدار 10 أشخاص.



a. التفكير بطريقة تجريدية اكتب دالة مع تمثيلها البياني لتمثيل العائد المتوقع وحدد مجال الدالة في الموقف. اكتب الحل هنا.

إذا كانت x = عدد الزيادات في السعر، فالعائد هو $R(x) = -5x^2 + 40x + 1200$. بما أن السعر يتغير والعائد لن يكون سالبًا، فالمجال هو $\{x \mid 0 \le x \le 20\}$.

b. بناء الفرضيات ما السعر الذي ينبغي أن يضعه المدير للتذكرة لكي يرفع العائد؟ ما أقصى عائد ممكن؟ برر استنتاجك.

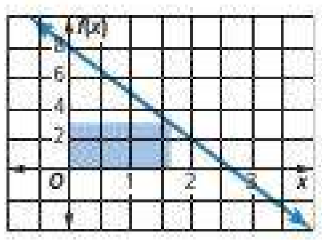
يوضح التمثيل البياني أن القيمة العظمى للعائد تحدث عندما $x = 4$، وهو ما يقابل سعر التذكرة AED 6.00 + 4(AED 0.50) أو AED 8.00. أقصى عائد هو $P(4)$ = AED 1280.00.

c. تفسير المسائل اشرح السبب في أن التمثيل البياني ينخفض من $x = 4$ إلى $x = 20$، وفسّر معنى التقاطع x في التمثيل البياني.

مع استمرار الزيادات في السعر، سينخفض الطلب على التذاكر. يشير التقاطع x إلى سعر مرتفع جدًا؛ ولذلك سيأتي أشخاص أقل إلى السينما.

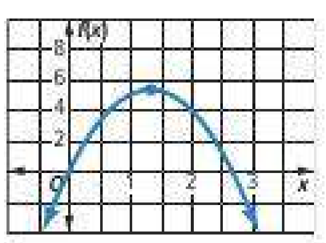
تمرين

1. **استخدام النماذج** يريد مصمم جرافيك أن يعرف أبعاد المستطيل ذي المساحة الأكبر الذي يقع ضمن المنطقة التي يحيط بها المحور x، والمحور y، والمستقيم $3x + y = 8$.



a. ارسم رسمًا تخطيطيًا للمستطيل على شبكة الإحداثيات.

b. اكتب دالة للمستطيل ذي المساحة الأكبر ومثّلها بيانيًا. ما أبعاد المستطيل التي تغطي أكبر مساحة ممكنة؟



ما مساحة $A = (x)(-3x + 8) = -3x^2 + 8x$. يوضح التمثيل البياني أن هذا يحدث عندما تكون $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{3}$. الأبعاد هي $\frac{4}{3}$ و 4.

أخطاء شائعة

قد يخلط الطلاب بين إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما، وإيجاد القيمة x التي تنتج القيمة العظمى أو الصغرى. يتعين أن يقرأ الطلاب بعناية لفهم المطلوب منهم حسابه بالضبط.

قد يتوصل الطلاب إلى استنتاج خاطئ أن الدوال التي تحتوي على قيمة x^2 موجبة يجب أن تكون لها قيمة عظمى، وأن الدوال التي تحتوي على قيمة $-x^2$ سالبة يجب أن تكون لها قيمة صغرى. اشرح أن علامة المعامل ترتبط باتجاه القطع المكافئ، وأن انفتاح القطع المكافئ في الاتجاه الموجب سيكون له قيمة صغرى، والعكس صحيح.

الممارسة

في **التمرينين 1** و **2** يجب على الطلاب إنشاء دالة تربيعية لتمثيل مساحة مستطيل. ثم تحليل التمثيل البياني للدالة لإيجاد أقصى مساحة ممكنة.

في **التمرين 3** يجب على الطلاب عقد مقارنة بين دالتين تربيعيتين، حيث تكون إحداهما ممثلة في معادلة والأخرى في تمثيل بياني وذلك من أجل تحديد أيهما لها قيمة عظمى أكبر.

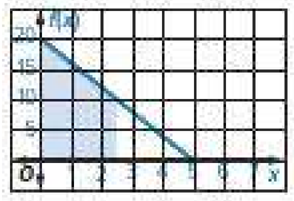
بعد إنشاء الدالة لتمثيل الحالة في التمرين 4، يجب على الطلاب تحديد رأس الدالة، حيث إنه يمثل إنشاء مجال لأقصى مساحة ممكنة.

يطلب **التمرين 5** من الطلاب إيجاد القيمة العظمى لدالة تربيعية.

عرض المعايير

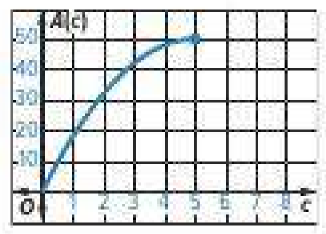
تمرين	م.م.ر
1	4
2	1, 2
3	3
4	2
5	1

.2 التفكير بطريقة تجريدية اكتب دالة ومثّلها بيانيًا لتمثيل المساحة بين المحور x والمستقيم $y = -4x + 20$، من $x = 0$ إلى $x = c$.



.a ارسم رسمًا تخطيطيًا واكتب دالة تمثل هذه المساحة. ما المجال؟

المساحة هي مجموع مساحات مستطيل ومثلث. مساحة المستطيل هي $-4c^2 + 20c$ ومساحة المثلث هي $2c^2$. إجمالي المساحة هو $A(c) = -2c^2 + 20c$. المجال هو $\{c \mid 0 \le c \le 5\}$.



.b ما قيمة c التي ترفع المساحة؟ ما المساحة القصوى؟ كيف يؤكد تمثيل بياني للدالة على إجابتك؟

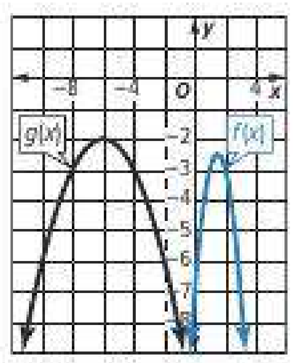
تحدث أقصى مساحة عندما تكون $c = -\frac{b}{2a}$، أو 5. الحد الأقصى هو 50.

يوضح التمثيل البياني الحد الأقصى البالغ 50 عند $c = 5$.

.c تفسير المسائل استخدم تمثيلك البياني في **الجزء a** لتشرح السبب في أن إجابتك في **الجزء b** منطقية في هذا السياق.

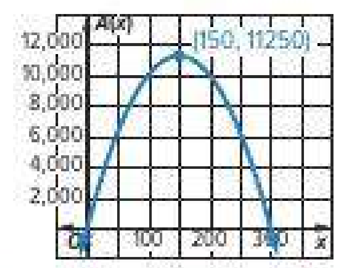
يجب أن تصل المساحة إلى الحد الأقصى عندما تكون المساحة المحاطة بالمحور x والمستقيم $y = -4x + 20$، من $x = 0$ إلى $x = c$ مملوءة تمامًا. بما أن تقاطع x في $y = -4x + 20$ هو $x = 5$، يجب أن تصل المساحة إلى أقصى مدى عندما تكون $x = 5$.

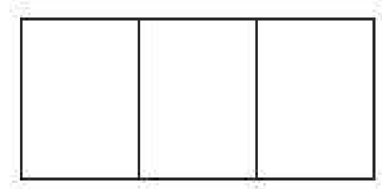
.3 بناء الفرضيات ما الدالة التي تحتوي على قيمة عظمى أكبر: $f(x) = -2x^2 + 6x - 7$ أو الدالة المعروضة في التمثيل البياني الذي على اليمين؟ اشرح استنتاجك باستخدام التمثيل البياني.



مثّل بيانيًا $f(x)$ على المستوى الإحداثي نفسه وقارن؛ $g(x)$ ذات القيمة العظمى الأكبر.

.4 التفكير بطريقة تجريدية يملك أحد المزارعين 600 m من السور لإحاطة حقل وتقسيمه إلى ثلاثة أقسام. ما مساحة أكبر حقل يمكن إحاطته؟ اشرح استنتاجك باستخدام التمثيل البياني.





إذا كانت x = طول الحقل، والمساحة هي $A = x(150 - \frac{1}{2}x) = 150x - \frac{1}{2}x^2$. يوضح التمثيل البياني أن المساحة القصوى تبلغ $11{,}250\ m^2$ عندما تكون $x = -\frac{b}{2a}$، أو 150.

.5 تفسير المسائل يتم تمثيل الارتفاع بالأقدام لصخرة تم إلقاؤها في الهواء بالدالة $f(t) = -16t^2 + 58t + 6$. حدد أقصى ارتفاع للصخرة.

حوالي 58.6 ft؛ معادلة محور التماثل هي $t = \frac{-58}{2(-16)} = \frac{29}{16}$. أقصى ارتفاع هو $f\left(\frac{29}{16}\right) \approx 58.6$ ft.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

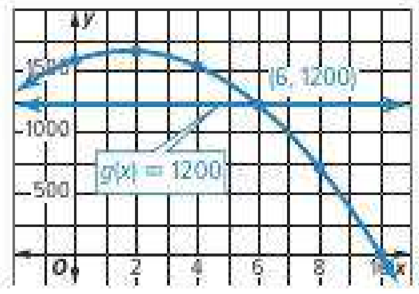
يستلزم المعيار **م.م.ر 3** أن يكون الطلاب قادرين على استخلاص تخمينات وتوفير تبريرات لدعم استنتاجهم. في **المثال 3b**، يجب على الطلاب دراسة الدالة التربيعية وتحديد كيف ترتبط بسعر التذكرة والإيراد الناتج.

ويتعين أن يفهم الطلاب أن رأس التمثيل البياني يشير إلى أقصى إيراد ممكن، وأن يجدوا سعر التذكرة الفعلي الذي يتناسب مع هذه القيمة. ويجب عليهم بعد ذلك توفير الدعم الرياضي لاستنتاجهم.

b. تفسير المسائل وضع موظفو الكتاب السنوي عائدًا مستهدفًا يبلغ AED 1200 للبيع الصيفي. اكتب معادلة يمكن استخدامها لتحديد عدد التخفيضات بمقدار AED 3 في السعر والتي سيحتاج الموظفون إلى فرضها للوصول إلى هذا الهدف. ما نوع هذه المعادلة؟ اشرح استنتاجك.

$1200 = (52 + 8x)(30 - 3x)$ أو $-24x^2 + 84x + 1560 = 1200$. هذه معادلة تربيعية. مضروب الحدين $-3x$ و $8x$ هو $-24x^2$، ولذلك فهي معادلة كثيرة الحدود من الدرجة 2، أي أنها تربيعية.

c. التواصل بدقة مثّل الدالة بيانيًا $y = R(x)$ على المستوى الإحداثي. مثّل بيانيًا الدالة $y = f(x) = 12$ على المستوى الإحداثي نفسه. اكتب الدوال ونقطة تقاطعها الموجبة. فسّر نقطة التقاطع في سياق المسألة في **الجزء b**. أدرج سعر بيع الكتاب السنوي في سياق تفسيرك.



سيحتاج موظفو الكتاب السنوي إلى تخفيض السعر 6 مرات لكي يحققوا عائدًا يبلغ AED 1200، وهو ما يمثل انخفاضًا بمقدار AED 3(6) = AED 18. إذن سيبلغ سعر البيع AED 12.

d. استخدام النماذج يجب أن تدفع المدرسة لشركة النشر d دولار عن كل كتاب سنوي. ما قيم d وما الموقف الذي يصبح فيه سعر البيع المأخوذ من **الجزء c** غير منطقي؟ اشرح استنتاجك.

إذا كانت المدرسة تريد أن تحقق ربحًا على مبيعات الكتاب السنوي، فإن سعر البيع AED 12 غير منطقي عندما تزيد d على 12 أو تساويها. إذا كانت $d = 12$، تحقق المدرسة ربحًا وإذا كانت $d < 12$، تخسر المدرسة مبلغًا على كل كتاب سنوي يتم بيعه أثناء البيع الصيفي.

المفهوم الأساسي ارتفاع متذوف

الارتفاع $h(t)$ لجسم بعد t ثوانٍ من إسقاطه في خط مستقيم أو قذفه لأعلى في خط مستقيم هو

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0,$$

حيث g هو التسارع بسبب الجاذبية، v_0 هي السرعة الابتدائية للجسم و h_0 هو الارتفاع الابتدائي.

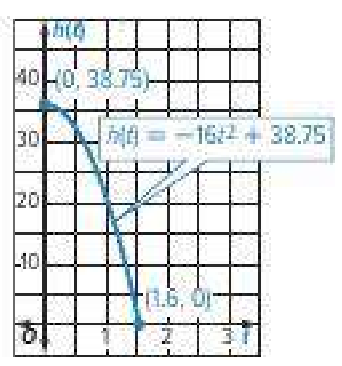
مثال 2 استخدام التقنية لحل معادلة تربيعية

الاستكشاف يمارس إسماعيل التسلق ويصل إلى جزء منحدر من الممر الممتد بطول حافة جرف. لكي يهبط بأمان أكبر، يلقي حقيبة ظهره الثقيلة من فوق حافة الجرف لكي تهبط على جزء أكثر انخفاضًا من الممر على ارتفاع أقل بمقدار 38.75 قدم.

a. استخدام النماذج اكتب دالة تربيعية يمكن استخدامها لتحديد مقدار الزمن t الذي ستستغرقه حقيبة الظهر لتهبط على الممر أسفل الجرف بعد أن يلقيها إسماعيل.

$h(t) = -16t^2 + 38.75$

b. استخدام الأدوات مثّل الدالة بيانيًا باستخدام حاسبة تمثيل بياني أو أداة تمثيل بياني أخرى. ارسم التمثيل البياني على شبكة الإحداثيات. اكتب التقاطعين x و y والمحورين والدالة.



مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر 4

اسأل الطلاب أي من مكونات دالة ارتفاع المقذوف العامة تكون مقدمة في الحالة. وقد يشعرون بالحيرة لعدم استخدام الدالة "بأكملها"؛ فذكّرهم بأنهم يستخدمون بالفعل كل حد في الدالة مع كون قيمة v_0 معينة لتساوي 0.

الأسئلة الداعمة

- كيف سيكون شكل التمثيل البياني على شاشة الحاسبة الآلية؟ **سيكون نصف قطع مكافئ مع الارتفاع المبدئي الذي يشير إليه الرأس.**
- ماذا سيختلف بشأن شكل التمثيل البياني إذا رُميت حقيبة الظهر من على حافة المنحدر؟ هل ستهبط للأرض قبل هبوطها أم بعده عند إسقاطها؟ **إذا رُميت حقيبة الظهر للأعلى قليلاً، فسيكون للتمثيل البياني رأس أو قيمة عظمى تقع في مكان ما على يمين مكانه الحالي. لأن حد السرعة المتجهة سيكون مشمولاً، وسوف يضيف ذلك قيمة موجبة إلى الارتفاع، لذا ستهبط حقيبة الظهر في وقت ما بعد هبوطها عند إسقاطها.**

التأكيد على معايير الممارسات في الرياضيات

خلال هذا الدرس، احرص على أن يراعي الطلاب الدقة (م.م.ر 6). شجّع الطلاب على كتابة وذكر القيم الصحيحة للمتغيرات المستقلة والتابعة. باستخدام x و y فقط عندما تكون المتغيرات مستخدمة فعليًا في مثال. وذكّر الطلاب باستمرار بتسمية إجاباتهم بالوحدات الصحيحة، عندما يكون ذلك ملائمًا.

يتعين أن ينتبه الطلاب أيضًا عند تمثيل الدوال والحلول بيانيًا. حثّهم على تسمية نقاط التقاطع، وتسمية التمثيلات البيانية بدوالها، والإشارة إلى المقياس.

أخطاء شائعة

في **التمرين 1**، مطلوب من الطلاب وصف ما يجب إتمامه في حالة أصبح عدد زيادات الإيجار المطلوبة لتوليد إيراد قيمته AED10,000، عددًا ليس كليًا في نهاية الأمر. قد يفترض بعض الطلاب أنه يجب عليهم التقريب لأقرب عدد كلي ولكن لأن التمثيل البياني يأخذ شكل القطع المكافئ، فإن قيم الدالة ترتفع ثم تبدأ في الانخفاض عند نقطة ما. ويجب على الطلاب لذلك تحديد أنه يجب عليهم التحقق من العدد الكلي الذي يقربونه من أجل التأكد أن العدد لا يوصل إلى إيراد أقل من AED10,000.

c. **استخدام النماذج** ما معنى التقاطعين x و y في سياق المسألة؟ اشرح إجابتك.

التقاطع x يقدم الحل لأن حقيبة الظهر ستصل إلى الأرض عندما يكون ارتفاعها فوق الأرض صفرًا. يحدث هذا عند (1.56, 0)، وإذًا تستغرق حقيبة الظهر حوالي 1.6 ثانية لتصل إلى الأرض. التقاطع y هو رأس زاوية التمثيل البياني ويمثل الارتفاع المبدئي لحقيبة الظهر وهو 38.75 ft.

تمرين

1. تقوم مالكة منشأة تخزين بسعة 120 وحدة بتحليل سجلاتها وتتوصل إلى أنها عندما تفرض مبلغ AED 55 في الشهر، فسيتم تأجير كل وحدات التخزين لديها. مع كل زيادة بقيمة AED 5 في الشهر، تتوقع خلو وحدتين. افترض أن x تمثل عدد الزيادات بمقدار AED 5 فوق AED 55.

   a. **تخطيط الحل** اكتب تعبيرًا من حيث x يصف عدد الوحدات التي سيتم تأجيرها بعد x زيادات بقيمة AED 5. اكتب تعبيرًا ثانيًا من حيث x يصف مقدار إيجار كل وحدة بالدولارات بعد x زيادات بمقدار AED 5. ثم اكتب دالة تربيعية تمثل $R(x)$، العائد الشهري بالدولار الذي يستطيع المالك أن يتوقع تحقيقه بعد x زيادات بقيمة AED 5.

   عدد الوحدات المستأجرة: $120 - 3x$؛ قيمة إيجار الوحدة: $55 + 5x$

   $R(x) = (120 - 2x)(55 + 5x) = -10x^2 + 490x + 6600$

   b. **التواصل بدقة** تريد المالكة أن تحدد عدد الزيادات في الإيجار بمقدار AED 5 والتي ينبغي أن تنفذها لكي تحقق عائدًا شهريًا يبلغ AED 10,000. اشرح كيف يمكن استخدام التمثيلات البيانية لدالتين لتحديد عدد الزيادات. في إطار شرحك، صف الدوال الدقيقة التي سيتم تمثيلها بيانيًا على المستوى الإحداثي، وجزء التمثيل البياني الذي يمكنك استخدامه لتحديد ما إذا كان العائد AED 10,000 قابلاً للتحقق. ما الذي ستفعله إذا كان الحل ليس عددًا كليًا؟

   التمثيلات البيانية لـ $R(x) = -10x^2 + 490x + 6600$ و $f(x) = 10,000$. بما أن الحد التربيعي سالب، فإن $R(x)$ يحتوي على قيمة عظمى تقع عند رأس زاوية التمثيل البياني. إذا كانت هذه القيمة العظمى أكبر من أو تساوي AED 10,000، فإن تحقيق ذلك المبلغ كعائد ممكن. يتحدد عدد التخفيضات المطلوبة بموجب قيمة x لنقطة تقاطع التمثيلات البيانية في التربيع الأول. إذا لم تكن تلك القيمة عددًا كليًا، ينبغي تقريبها لأي قيمة x تعطي أقرب قيمة إلى AED 10,000 سواء كانت أكبر من مبلغ AED 10,000 أو تساويه.

التدريس المتمايز

قد يظن الطلاب أن الجسمين سيهبطان بالتسارع ذاته إذا كان أحدهما أثقل من الآخر. لإظهار أن هذه هي الحالة، اطلب من الطلاب إسقاط جسمين لهما الكثافة والشكل ذاته (لحساب مقاومة الهواء) من الارتفاع نفسه. على سبيل المثال، يمكن إسقاط حجر في الوقت نفسه مع كتاب، أو إسقاط قلم رصاص في الوقت نفسه مع عصا قياس.

اطلب من الطلاب ملاحظة الوقت الذي يستغرقه كل جسم للارتطام بالأرض عن طريق الملاحظة بالعين واستخدام ساعات إيقاف مختلفة لتوقيت سقوط كل جسم. ناقش الظاهرة وذكّر الطلاب بأن قوة الجاذبية عبارة عن قيمة ثابتة عند النقاط القريبة من سطح الأرض.

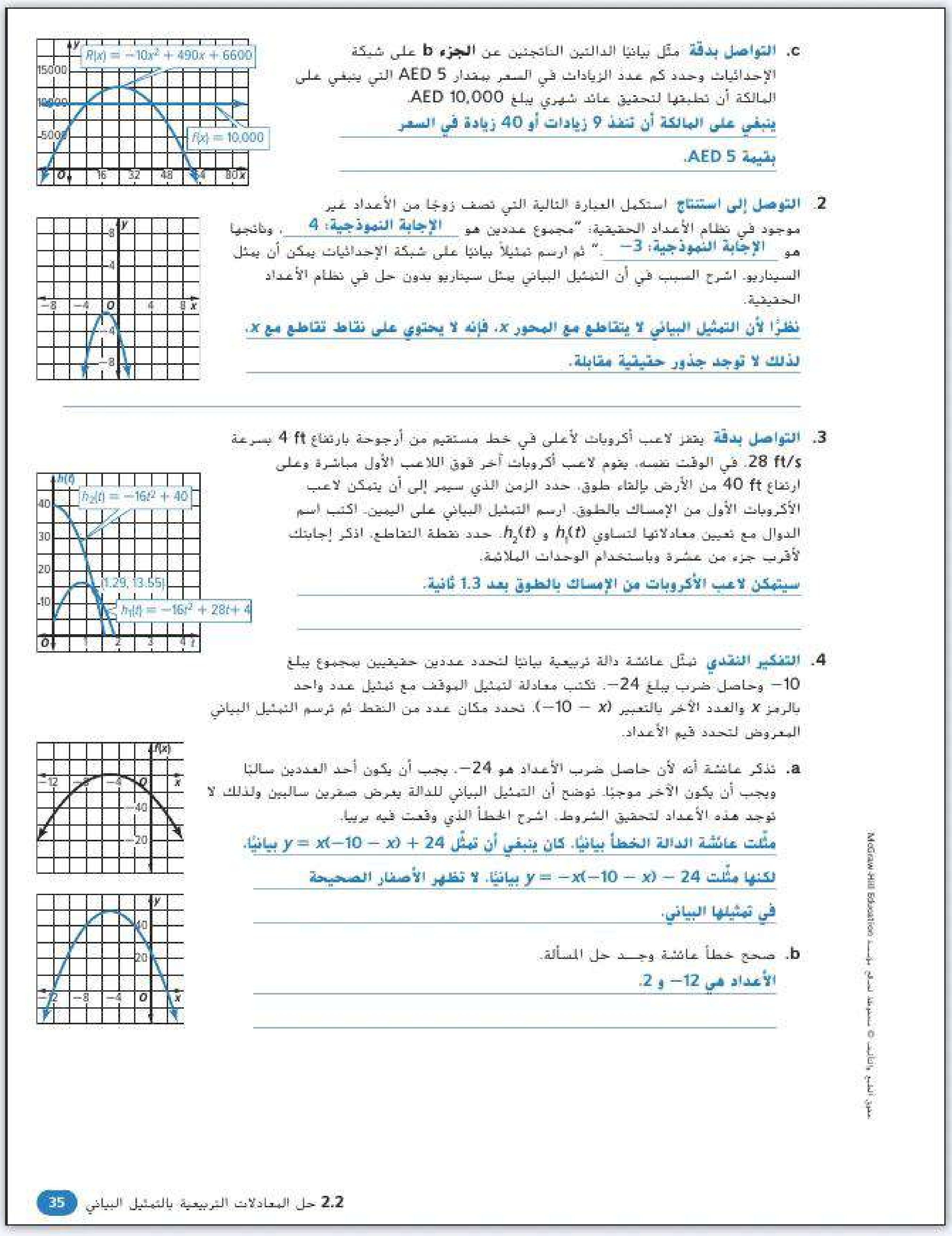
الممارسة

التمارين 3–1 تطلب من الطلاب كتابة دالة أو أكثر وتمثيلها بيانيًا للتعبير عن حالات من الحياة اليومية ومن ثم تفسير سمات التمثيلات البيانية مثل نقاط التقاطع أو الأصفار.

التمرين 4 يطلب من الطلاب تصحيح خطأ في حل لمسألة عن طريق التمثيل البياني لدالة تربيعية وتحديد أصفارها.

عرض المعايير

م.م.ر	تمرين
1, 6	1
3	2
6	3
3	4



c. التواصل بدقة مثّل بيانيًا الدالتين الناتجتين عن **الجزء b** على شبكة الإحداثيات وحدد كم عدد الزيادات في السعر بمقدار AED 5 التي ينبغي على المالكة أن تطبقها لتحقيق عائد شهري يبلغ AED 10,000.

ينبغي على المالكة أن تنفذ 9 زيادات أو 40 زيادة في السعر بقيمة AED 5.

2. التوصل إلى استنتاج استكمل العبارة التالية التي تصف زوجًا من الأعداد غير موجود في نظام الأعداد الحقيقية: "مجموع عددين هو الإجابة النموذجية: 4، وناتجها هو الإجابة النموذجية: −3." ثم ارسم تمثيلاً بيانيًا على شبكة الإحداثيات يمكن أن يمثل السيناريو. اشرح السبب في أن التمثيل البياني يمثل سيناريو بدون حل في نظام الأعداد الحقيقية.

نظرًا لأن التمثيل البياني لا يتقاطع مع المحور x، فإنه لا يحتوي على نقاط تقاطع مع x. لذلك لا توجد جذور حقيقية مقابلة.

3. التواصل بدقة يقفز لاعب أكروبات لأعلى في خط مستقيم من أرجوحة بارتفاع 4 ft بسرعة 28 ft/s. في الوقت نفسه، يقوم لاعب أكروبات آخر فوق اللاعب الأول مباشرة وعلى ارتفاع 40 ft من الأرض بإلقاء طوق. حدد الزمن الذي سيمر إلى أن يتمكن لاعب الأكروبات الأول من الإمساك بالطوق. ارسم التمثيل البياني على اليمين. اكتب اسم الدوال مع تعيين معادلاتها لتساوي $h_1(t)$ و $h_2(t)$. حدد نقطة التقاطع. اذكر إجابتك لأقرب جزء من عشرة وباستخدام الوحدات الملائمة.

سيتمكن لاعب الأكروبات من الإمساك بالطوق بعد 1.3 ثانية.

4. التفكير النقدي تمثّل عائشة دالة تربيعية بيانيًا لتحدد عددين حقيقيين بمجموع يبلغ −10 وحاصل ضرب يبلغ −24. تكتب معادلة لتمثيل الموقف مع تمثيل عدد واحد بالرمز x والعدد الآخر بالتعبير $(-10 - x)$. تحدد مكان عدد من النقط ثم ترسم التمثيل البياني المعروض لتحدد قيم الأعداد.

a. تذكر عائشة أنه لأن حاصل ضرب الأعداد هو −24، يجب أن يكون أحد العددين سالبًا ويجب أن يكون الآخر موجبًا. توضح أن التمثيل البياني للدالة يعرض صفرين سالبين ولذلك لا توجد هذه الأعداد لتحقيق الشروط. اشرح الخطأ الذي وقعت فيه برأيك.

مثّلت عائشة الدالة الخطأ بيانيًا. كان ينبغي أن تمثّل $y = x(-10 - x) + 24$ بيانيًا. لكنها مثّلت $y = -x(-10 - x) - 24$ بيانيًا. لا تظهر الأصفار الصحيحة في تمثيلها البياني.

b. صحح خطأ عائشة وجد حل المسألة.

الأعداد هي −12 و 2.

أخطاء شائعة

في **التمرين 2**، قد يختار الطلاب مجموعًا عشوائيًا سالبًا وناتج ضرب عشوائيًا موجبًا من دون التحقق مما إذا كان السيناريو يؤدي إلى حل. وقد ينسى الطلاب أن ناتج ضرب عددين سالبين يكون موجبًا ولذلك قد يعتقدون أن أي زوج يستوفي الوصف لن يكون له حل. شجّع الطلاب على التحقق من قيم المجموع وناتج الضرب الخاصة بهم وبزملائهم قبل اختتام الحل للتأكد من أنها لا تؤدي إلى حل بالأعداد الحقيقية.

في **التمرين 3**، قد يفترض الطلاب أنه بسبب قفز البهلوان على منصة القفز لأعلى، ينبغي أن يكون التمثيل البياني الذي يظهر ارتفاع البهلوان عموديًا تمامًا. لذلك، قد يختلط الأمر على الطلاب عندما يرون أن التمثيل البياني على شكل قطعًا مكافئًا؛ لذا ذكّرهم بأن التمثيل البياني يصف الارتفاع وليس الوضع.

2.3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل العوامل

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- تطبيق خاصية الضرب في الصفر
- تحليل عوامل كثيرات التربيعية التربيعية في متغير واحد

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

راجع خصائص الإسطوانة وصيغة إيجاد حجمها. اسأل الطلاب كيف يمكنهم حساب حجم الإسطوانة مجوفة بسمك معين. وضح أنه يمكنهم إيجاد الفرق بين حجمي إسطوانتين، واحدة تمثل الحجم الخارجي والأخرى تمثل الحجم الداخلي.

الأسئلة الداعمة

- ما هو حجم الإسطوانة بنصف قطر r وارتفاع h؟ **$V = \pi r^2 h$.**
- ما هي عادةً أول خطوة في تحليل معادلة تربيعية إلى عوامل؟ **انظر إذا كان يمكنك إيجاد عامل مشترك لجميع الحدود. فقد تؤدي قسمة جانبي المعادلة على هذا العامل المشترك إلى تيسير تحديد كيفية تحليل الحدود المتبقية إلى عوامل.**

2.3 حل المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل

الأهداف

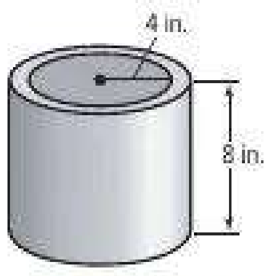
- حل المعادلات التربيعية بطريقة التحليل إلى العوامل
- تحليل الدوال التربيعية إلى العوامل لتحديد القيم الأساسية وتفسير هذه القيم في سياق مواقف المسائل.

تستخدم خاصية ناتج الضرب الصفري لحل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

المفهوم الأساسي **خاصية ناتج الضرب الصفري**

لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان ناتج ضرب $ab = 0$، فهما ليسا $a = 0$ أو $b = 0$.

مثال 1 **حلّ المعادلات بالتحليل إلى العوامل**



الاستكشاف **شركة تصنّع مكون إسطوانات مفرّغة مفتوحة من أحد طرفيها. وتتمتع جميعها بالسمك والأبعاد الموحدة والمبينة. ولتصنيع كل إسطوانة يتطلب الأمر 42π in³ من المادة الخام.**

a. **التفكير بطريقة تجريدية** اكتب دالة للتعبير عن حجم المادة اللازمة لتصنيع كل إسطوانة.

افترض أن x = سمك الإسطوانة. وأن الإسطوانة الخارجية حجمها $V_1 = \pi(4 + x)^2(8)$ والإسطوانة الداخلية حجمها $V_2 = \pi(4)^2(8 - x)$. سيكون حجم المكون $V = V_1 - V_2$ أو $V = \pi(8x^2 + 80x)$.

b. **التفكير بطريقة كميّة** اكتب معادلة يمكنك حلها لإيجاد السمك المطلوب للمكوّن.

$\pi(8x^2 + 80x) = 42\pi$ p	حجم المكون
$8x^2 + 80x = 42$	اقسم كل طرف على π

c. **استخدم البنية** جـد حل المعادلة التي كتبتها في **الجزء b**. وما الخاصية التي استخدمتها؟

حلل إلى العوامل $8x^2 + 80x - 42 = 2(2x + 21)(2x - 1) = 0$. السمك المنشود هو $\frac{1}{2}$ in ؛ خاصية ناتج الضرب الصفري

d. **التفكير بطريقة كميّة** يريد أحد العملاء شراء إسطوانة تتلاءم مع أنبوبة بقطر داخلي 8.5 in. فهل ستصلح الإسطوانة القياسية التي تصنعها الشركة لهذا العميل؟ اشرح استنتاجك.

لا؛ يمكن استخدام السمك الذي تم إيجاده في الجزء c للتوصل إلى أن القطر الإجمالي للإسطوانة هو $2(4 + x) = 9$ in، وهو أكبر بكثير من احتياجات العميل.

e. **تفسير المسائل** إذا قررت الشركة صنع إسطوانة مصممة حسب الطلب للعميل المذكور في **الجزء d**، فما مقدار المادة الذي سيستخدم في تكوينها؟ اشرح استنتاجك.

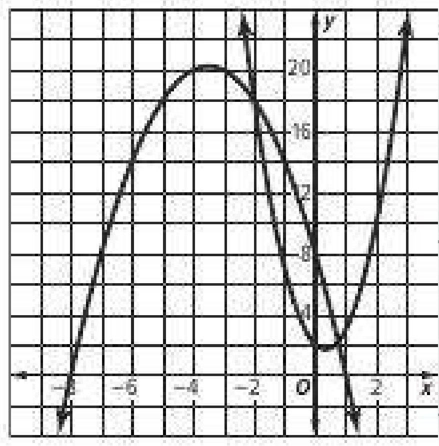
20.5π in³ أو أقل؛ لصنع إسطوانة ملائمة تمامًا، يجب أن يكون نصف قطر الإسطوانة 4.25 in. ويعني هذا أنه لا بد أن يكون السمك $x = 0.25$ in. بالتعويض بذلك في دالة حجم المادة المطلوبة، $V = \pi(8(0.25)^2 + 80(0.25)) = 20.5\pi$ in³.

معلومات أساسية في الرياضيات

في هذا الدرس، يقوم الطلاب بتطبيق أساليب التحليل إلى عوامل المستفادة من الجبر 1 لدراسة المعادلات التربيعية، ومراقبة التطبيقات العملية لهذه الأساليب. الآن يمكن أن يؤدي التحليل إلى عوامل إلى استنتاجات حول مسار الأشياء أو العلاقات بين التكلفة والسعر والإيرادات.

وسوف يستمر الطلاب في استخدام أساليب التحليل إلى عوامل في الوحدات والدورات اللاحقة. وهذه هي إحدى المهارات الجبرية الأساسية التي تعتبر ضرورية للنجاح في دراسة حساب التفاضل والتكامل.

مثال 2 استخدم التحليل إلى العوامل لإيجاد نقاط التقاطع



تم تقديم التمثيلات البيانية للدالة $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ و $g(x) = -x^2 - 7x + 8$. حدد نقاط التي يتقاطع فيها التمثيل البياني.

a. **تفسير المسائل** إذا كانت قيمة x يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان، فما الذي ينبغي أن يكون صحيحًا عن $f(x)$ و $g(x)$ عند هذه النقطة؟

$f(x) = g(x)$

b. **التفكير بطريقة كميّة** اكتب معادلة يُمكن استخدامها للحل بإيجاد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

$4x^2 + 5x - 6 = 0$؛ استخدم $f(x) = g(x)$ وعوّض لتحصل على $3x^2 - 2x + 2 = -x^2 - 7x + 8$ أو $4x^2 + 5x - 6 = 0$.

c. **استخدام البنية** جـد حل المعادلة في **الجزء b** واستخدم التعويض لتحديد النقاط التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

حلل المعادلة إلى العوامل للحصول على $(4x - 3)(x + 2) = 0$ إذًا $x = \frac{3}{4}$ و $x = -2$ هما الحلان. عوّض بهذه القيم في $f(x)$ أو $g(x)$ للحصول على النقاط $(\frac{3}{4}, \frac{35}{16})$ و $(-2, 18)$.

مثال 3 ضع المعادلات وحلّ باستخدام التحليل إلى العوامل

يحتوي صندوق على قاعدة قياسها 3 in في 5 in، وارتفاع 11 in. ويؤدي زيادة كل بعد من أبعاد القاعدة بنفس المقدار إلى زيادة حجم الصندوق بمقدار $528\ in^3$.

a. **تفسير المسائل** باستخدام x لتمثيل المقدار الذي زاد به كل بعد من أبعاد القاعدة، حدد الأبعاد الجديدة للصندوق واكتب تعبيرًا لتمثيل حجم الصندوق.

الأبعاد الجديدة هي $x + 3$ in في $x + 5$ in في 11 in. ويتم تمثيل الحجم بالتعبير $11(x + 3)(x + 5)$.

b. **التفكير بطريقة كميّة** جـد الحجم الأصلي للصندوق والحجم بعد زيادة القاعدة، واكتب معادلة يمكن استخدامها لإيجاد المقدار الذي زادت به أبعاد القاعدة.

الحجم الأصلي هو $3 \times 5 \times 11 = 165\ in^3$ و $165 + 528 = 693\ in^3$ بعد الزيادة.

استخدم المعادلة $11(x + 3)(x + 5) = 693$.

c. **استخدام البنية** جـد حل المعادلة في **الجزء b** وفسر الحلول في سياق المسألة.

اقسم كل طرف من طرفي المعادلة على 11 لتحصل على $(x + 3)(x + 5) = 63$, $x^2 + 8x + 15 = 63$، إذًا $x^2 + 8x - 48 = 0$, $(x + 12)(x - 4) = 0$. إذًا $x = -12$ أو $x = 4$. $x = -12$ ليست منطقية في سياق المسألة. ويعني الحل $x = 4$ أن كل بعد من أبعاد القاعدة زاد بمقدار 4 in.

d. **التفكير بطريقة كمية** ما أبعاد الصندوق بعد الزيادة؟ وتحقق أنها تشكل حجمًا يزي بمقدار 528 بوصة مكعبة عن حجم الصندوق الأصلي.

7 in في 9 in في 11 in؛ للتحقق، $7 \times 9 \times 11 = 693$ والتي تزيد بمقدار 528 عن 165.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة) يتطلب من الطلاب التفكير بطريقة تجريدية وتمثيل حالة رمزية ثم التلاعب بالرموز لإيجاد الحلول. ويجب عليهم أيضًا تفسير تلك الحلول في سياق الحالة.

في **المثال 1**، يجب على الطلاب تحديد كيفية التعبير عن حجم إسطوانة مجوفة. يجب أن يدركوا أن متغيرًا يمكن أن يمثل سمك الإسطوانة، وبعد ذلك يجب أن يستخدموا المعلومات المعطاة لكتابة تعبيرات عن أبعاد الإسطوانة بأكملها والجزء المجوف من الإسطوانة. بعد ذلك يجب أن يستخدموا كمية من المواد لإنشاء وحل المعادلة، مفسرين حلهم بمثابة سمك الإسطوانة.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر 1

ناقش الحلول لنظام المعادلات التربيعية. في السابق، استكشف الطلاب نظام معادلات خطية. أساليب حل نظام المعادلات التربيعية مختلفة. ويمكن أيضًا أن يكون هناك أكثر من نقطة تقاطع واحدة لدوال فريدة، لأن التمثيلات البيانية منحنية وليست خطوطًا مستقيمة.

الأسئلة الداعمة

- ما هي العلاقة بين عملية التحليل إلى عوامل وعملية التوزيع؟ **إنها عمليات عكسية لبعضها البعض. واحدة سوف تعكس تأثير الأخرى.**
- ما هو الحل المقابل للعامل $(x + 2)$؟ **$x = -2$**
- ما هو العامل المقابل للحل $x = \frac{3}{4}$؟ **$(4x - 3)$ أو $(x - \frac{3}{4})$**
- ما هي القيم التي تشكل مجموعة الحل لنظام معادلات؟ **حل نظام المعادلات هو الحل المشترك لجميع المعادلات في النظام.**

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

ذكر الطلاب بأنه عند تغيير أحد أبعاد شكل ما، يجب عليهم مراعاة ما إذا كان البعد يتزايد أو يقل وكيفية التعبير عن القياس الجديد.

الأسئلة الداعمة

- هل القيم السالبة لـ x لها أي معنى في سياق المسألة؟ **قد تدل القيم السالبة لـ x على تناقص في الأبعاد لكن لا يمكن تناقص الأبعاد بأكثر من 3 بوصات.**
- كيف يمكنك كتابة تعبير عن البعد الذي يزيد عندما لا تعرف مقدار زيادته؟ **افترض أن المتغير يساوي مقدار الزيادة.**

تمرين

1. طُلب من كريمة حل المعادلة $9x^2 - 12x = 5$.

a. **استخدام البنية** كيف يمكنك إعادة كتابة المعادلة بحيث يمكنك استخدام خاصية ناتج الضرب الصفري؟ ثم حلل التعبير إلى العوامل.
اطرح 5 من كل طرف من الطرفين ثم حلل إلى العوامل للحصول على $(3x - 5)(3x + 1) = 0$.

b. **التواصل بدقة** اشرح كيف يمكن استخدام هذه المعادلة الجديدة لتحديد القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x) = 9x^2 - 12x - 5$ وإيجاد هذه القيمة.
حلل كل عامل بحيث يساوي 0 وجد الحل بإيجاد قيم الجذرين، $x = -\frac{5}{3}$ و $x = \frac{1}{3}$. وتكون هذه الجذور على نفس البعد من محور التماثل والذي يجب أن يكون متوسط الجذور أو $x = \frac{2}{3}$. عوض في الدالة لإيجاد $f(\frac{2}{3}) = -9$ وهي القيمة الصغرى.

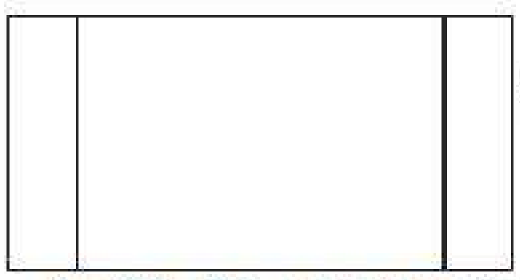
2. **التخطيط للحل** بعد إطلاق الصاروخ لأعلى مباشرة في الهواء، تم تقدير ارتفاعه بالدالة $h(t) = -16t^2 + 88t + 168$، حيث تم قياس h بالقدم وقياس t بالثواني. كم عدد الثواني التي سيصطدم بعدها الصاروخ بالأرض بعد الإطلاق؟ اكتب الحل هنا
بمستوى الأرض: $h(t) = 0$. $-8(2t + 3)(t - 7) = 0$. إذًا، نظرًا لأنه لا بد أن يكون الزمن قيمة موجبة، فإن $t = 7$ s.

3. **التخطيط للحل** كيف يمكنك إيجاد إن كان $f(x) = 2x^2 - x + 1$ و $g(x) = 2x + 6$ يتقاطعان؟ وإن كان الأمر كذلك، فأين يتقاطعان؟ كيف يمكنك التحقق من إجابتك؟
(2.5, 11) و (4 ,1−)؛ قم بمساواة المعادلات وأعد كتابة المعادلة بحيث يساوي أحد طرفيها الصفر وحلل $2x^2 - 3x - 5 = 0$ إلى العوامل وحل بإيجاد قيمة x ثم عوض عنها في إحدى المعادلات لإيجاد قيم y المقابلة. تحقق من صحة القيم إما بالتعويض بالقيم في المعادلتين أو بالتمثيل البياني.

4. **التخطيط للحل** جد المعادلة التربيعية ذات الجذرين $\frac{2}{7}$ و $-\frac{5}{2}$. اكتب الإجابة في الصيغة القياسية بمعامل الأعداد الصحيحة. اكتب الحل هنا
العاملان هما $(7x - 2)$ و $(2x + 5)$ والمعادلة هي $(7x - 2)(2x + 5) = 0$ أو $14x^2 + 31x - 10 = 0$.

5. **التفكير بطريقة كمية** يبلغ مجموع أحد الأعداد ومثلي معكوسه الضربي $\frac{11}{3}$. جد القيم المحتملة للعدد. اكتب الحل هنا.
$x + \frac{2}{x} = \frac{11}{3} \rightarrow 3x^2 + 6 = 11x \rightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0 \rightarrow (3x - 2)(x - 3) = 0$؛ إذًا $x = 3$ أو $x = \frac{2}{3}$.

6. **التفكير بطريقة تجريدية** صممت نافذة بحيث كانت نسبة ارتفاعها إلى عرضها 2:1. وتتكون من لوح نافذة في المنتصف مع لوحين متطابقين أصغر حجمًا على الجانبين. ويبلغ عرض كل لوح من اللوحين الأصغر 18 in. إذا كانت مساحة لوح منتصف النافذة $44\ ft^2$. فما أبعاد النافذة بأكملها؟



افترض أن x = الارتفاع و$2x$ = العرض و$2x - 3$ = عرض لوح المنتصف؛ مساحة لوح المنتصف هي $A = 2x^2 - 3x$.
إذًا $2x^2 - 3x = 44$ أو $(2x - 11)(x + 4) = 0$. إذًا $x = 5.5$. أبعاد النافذة بأكملها هي 11 ft في 5.5 ft.

الأخطاء الشائعة

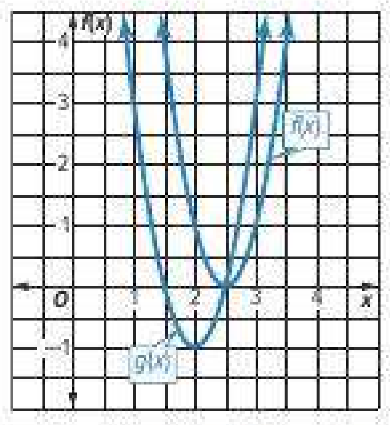
قد يخفق الطلاب في ملاحظة وجود عامل مشترك في المعادلة التربيعية، وهذا قد يؤدي بهم إلى كتابة حل غير صحيح. وقد ينسوا أيضًا تحديد المعادلة التربيعية لتساوي صفر قبل أن يحاولوا تحليله إلى وجود عوامل. وهذا يؤدي إلى عوامل غير صحيحة، ويكون هذا أكبر أهمية في الحالة التي لا تنطبق فيها خاصية ناتج الضرب الصفري.

7. **التعليق على طريقة الاستنتاج** حل كل من شادي وأيمن المعادلتين $2x^2 + 15x + 18 = 0$ وقد تم توضيح حليهما هنا. حدد أي الطالبين على حق، إن كان أحدهما على حق. فسّر استنتاجك.

أيمن	شادي
$2x^2 + 15x + 18 = 0$	$2x^2 + 15x + 18 = 0$
$2x^2 + 12x + 3x + 18 = 0$	$2x^2 + 4x + 9x + 18 = 0$
$2x(x + 6) + 3(x + 6) = 0$	$2x(x + 2) + 9(x + 2) = 0$
$(2x + 3)(x + 6) = 0$	$(2x + 9)(x + 2) = 0$
$x = -\frac{3}{2}, x = -6$	$x = -\frac{9}{2}, x = -2$

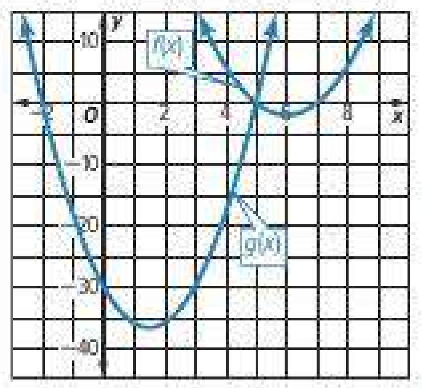
أيمن هو من على صواب. في السطر الثاني، اختار شادي العوامل 36 والتي لا يمكن أن تجمع لتبلغ 15. ويمكن دراسة التمثيل البياني للدالة للتحقق من أنها تمر بالفعل من المحور الأفقي x عند $x = -\frac{2}{3}$ و $x = -6$.

8. **التواصل بدقة** اشرح الفروق بين جذور $f(x) = 4x^2 - 20x + 25$ و $g(x) = 4x^2 - 16x + 15$. ناقش عدد الجذور باستخدام التمثيل البياني لتوضيح حلك.



للدالة $f(x)$ جذر متكرر عند $x = \frac{5}{2}$ ، بينما للدالة $g(x)$ جذرين عند $x = \frac{5}{2}$ و $x = \frac{3}{2}$. وستكون الدالة التربيعية ذات الجذر المتكرر الحقيقي مماسة للمحور الأفقي x بينما ستتقاطع الدالة ذات الجذرين المميزين الحقيقيين مع المحور في نقطتين. ويوضح ذلك بالتمثيل البياني.

9. **وضع فرضية** جد جذور كل من الدوال التالية. $f(x) = 2x^2 - 24x + 70$ و $g(x) = 3x^2 - 9x - 30$. ما الذي يمثله الحل المشترك فيما يتعلق بالتمثيلات البيانية للدوال $f(x)$ و $g(x)$؟ مثّل الدوال بيانيًا لتبرير الاستنتاج.



بعد قسمة العوامل المشتركة، تتحلل المعادلة إلى العوامل $(x - 7)(x - 5) = 0$ و $(x - 5)(x + 2) = 0$. والحل المشترك $x = 5$، هو نقطة تقاطع الإحداثي x مع التمثيلات البيانية.

10. **التفكير بطريقة تجريدية** تتضمن أسرة منير ثلاثة أطفال وهم جمال وإسراء ومريم. وتبلغ أعمارهم الحالية أعداد صحيحة فردية متتالية. ويزيد ضعف ناتج ضرب عمر الطفلين الأكبر والأصغر بمقدار 10 عن 16 ضعف عمر الطفلة الوسطى. اكتب معادلة تمثل المعطيات وجد حلها. ما أعمار الأطفال الثلاثة؟

7, 9, 11؛ لنفترض أن الأعمار هي x و $x + 2$ و $x + 4$. $(2)(x)(x + 4) = 16(x + 2) + 10$. ويتم تبسيط ذلك إلى $2(x - 7)(x + 3) = 0$. إذًا، $x = 7$ أو -3. في سياق الأعمار، -3 ليست منطقية. إذًا فالحل الوحيد هو 7. عوّض عن $x = 7$ في $x + 2$ و $x + 4$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 3 يتطلب من الطلاب دراسة الاستنتاج والحجج المقدمة من الآخرين. وإيجاد أي عيوب في هذا الاستنتاج. يجب أن يكونوا قادرين على دراسة العمل الجبري وتحديد الأخطاء، ثم تحليل تلك الأخطاء واقتراح التصحيحات اللازمة.

في **التمرين 4**، يجب على الطلاب نقد عمل شخص آخر لتحديد الأخطاء التي ارتكبت. يجب عليهم تحديد الأخطاء وتصحيحها وشرح الخطوات الصحيحة التي تؤدي إلى الحل.

تمرين

في **التمارين 1–3**، الطلاب مطالبون بحل معادلات تربيعية.

في **التمرين 4**، يقدم الطلاب جذور المعادلة التربيعية ويطلب منهم الحل بترتيب عكسي لكتابة معادلة بتلك الجذور.

في **التمرينين 5 و 6**، يجب على الطلاب كتابة معادلة تربيعية لحالة معينة ثم حل المعادلة.

في **التمرينان 7** يجب على الطلاب حل معادلة تربيعية بالتحليل إلى عوامل. في عملية نقد الحل المقدم.

التمارين 8 و 9 يتطلبان من الطلاب إعادة كتابة التعبيرات التربيعية لتحديد الجذور.

التمرين 10 يتطلب من الطلاب كتابة المعادلة وحلها.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	6–7
2	1
3	1
4	1
5–6	2
7	3
8	6
9	3
10	2

2.4 الأعداد المركبة

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
2, 3, 4, 5, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- استخدام خواص الجذر التربيعي
- استخدام خواص الأسس

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

يطلب هذا المثال من الطلاب توضيح فهمهم للتعاريف الواردة في بداية الدرس. ذكّر الطلاب أنه بحكم التعريف، فإن $\sqrt{4}$ هو الجذر التربيعي الموجب أو الأساسي لـ 4، ولذا فإن $\sqrt{4} = 2$.

الأسئلة الداعمة

- متى يكون $\sqrt{b}$ عددًا حقيقيًا؟
  عندما تكون b عددًا حقيقيًا بحيث تكون $b \geq 0$.
- ما الأرقام التي يمكنك تربيعها للحصول على 36؟ وما علاقتها بـ $\sqrt{36}$؟
  6 و -6؛ $\sqrt{36} = 6$

2.4 الأعداد المركبة

الأهداف

- فهم مفاهيم الأعداد التخيلية والأعداد المركبة
- استخدام الخصائص الحسابية لإجراء العمليات بالأعداد المركبة

البحث عن حلول لمعادلات مثل $x^2 + 1 = 0$ قاد علماء الرياضية إلى اكتشاف الأعداد التخلية. وتعرّف **الوحدة التخيلية i** بالقاعدة $i^2 = -1$. والعدد i هو الجذر التربيعي الرئيسي للعدد -1؛ أي $i = \sqrt{-1}$.

الأعداد التخيلية البحتة هي الجذور التربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. ولأي عدد حقيقي موجب b، $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{-1}$ أو bi.

مثال 1 نواتج ضرب الأعداد التخيلية البحتة

a. **التعليق على طريقة الاستنتاج** من خواص الجذور التربيعي أن $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ شريطة أن يكون $b > 0$ و $a > 0$. تحقق من الخاصية باستخدام $a = 4$ و $b = 9$. كرر العملية مع $a = -4$ و $b = -9$ ثم كررها ثانية مع $a = -9$ و $b = 4$. هل تظل الخاصية صحيحة عندما يكون كل من a و b عددين سالبين أو أحدهما سالب والآخر موجب؟

$\sqrt{4} = 2$ و $\sqrt{9} = 3$ و $\sqrt{36} = 6$. حيث إن $2 \times 3 = 6$، يعني ذلك أن $\sqrt{4} \times \sqrt{36} = \sqrt{9}$ إذًا فالخاصية مدعومة. $\sqrt{-4} = 2i$ و $\sqrt{-9} = 3i$ و $\sqrt{36} = 6$. حيث إن $-6 = 6i^2 = 3i \times 2i$، فالخاصية ليست صحيحة مع الأعداد الحقيقية السالبة. $\sqrt{-9} = 3i$ و $\sqrt{4} = 2$ و $\sqrt{-36} = 6i$. حيث إن $2 \times 3i = 6i$ تكون الخاصية صحيحة في هذه الحالة إذا كان $a < 0$ و $b > 0$.

b. **التخمين** فكر في نتائج **الجزء a** وخمن قيمة $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ للعددين الحقيقيين a و b عندما يكون $a < 0$ و $b < 0$.

تبين نتائج الجزء a أنه عندما تكون $a < 0$ و $b < 0$، $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$. تخمين: ناتج ضرب $\sqrt{b} \times \sqrt{a}$ عدد حقيقي سالب.

إن العدد الحقيقي والعدد التخيلي البحت ليسا بحدين متشابهين ولا يمكن الجمع بينهما في حد واحد. بل بدلاً من ذلك، يمكن كتابة التعبير الذي يحتوي على عدد حقيقي وعدد تخيلي في صورة عدد مركب.

المفهوم الأساسي الأعداد المركبة

العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته في الصورة $a + bi$، حيث a و b هما عددان حقيقيان و i هو **الوحدة التخيلية**. ونشير إلى a على أنه الجزء الحقيقي من العدد المركب ونشير إلى b على أنه الجزء التخيلي.

معلومات أساسية في الرياضيات

يرجع الفضل إلى عالم الرياضيات رينيه ديكارت في إدخال مصطلح "عدد تخيلي" عام 1637. وكان القصد منه هو التقليل من أهميته، ولكن ابتداء من القرن الثامن عشر بدأت الأعداد المركبة تلقى استخدامًا وقبولًا أوسع.

وتساعد دراسة الأعداد المركبة الطلاب على الاستعداد للمادة في الوحدة 4. وفي هذه الوحدة، ستتيح لهم إيجاد حلول لأي معادلة من الدرجة الثانية.

وهناك العديد من التطبيقات الأخرى التي تقع خارج نطاق هذا المقرر. وبعض الموضوعات التي تستخدم الأعداد المركبة هي تحليل الدوائر الكهربائية، وتمثيل المجالات الكهرومغناطيسية، فضلًا عن دراسة موجات الضوء وديناميكيات السوائل.

تتحقق خواص التبديل والتجميع في الضرب مع الأعداد المركبة، أي أن $a + bi = bi + a$. ولجمع أو طرح الأعداد المركبة، اجمع أو اطرح الأجزاء الحقيقية واجمع واطرح الأجزاء التخيلية. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

يتساوى عددان مركبان فقط في حالة تساوي الأجزاء الحقيقية لهما وتساوي الأجزاء التخيلية لهما. أي أن، $a + bi = c + di$ إذا كانت $a = c$ و $b = d$.

مثال 2 جمع الأعداد المركبة وطرحها

a. التخمين بسّط $(5 + 2i\sqrt{3}) + (-5 - 2i\sqrt{3})$. في الأعداد الحقيقية، يكون مجموع الأعداد المقابلة a و $-a$ يساوي صفرًا. هل تظهر علاقة مشابهة مع الأعداد المركبة؟ ما مقابل العدد $a + bi$؟

$(5 + 2i\sqrt{3}) + (-5 - 2i\sqrt{3}) = [5 + (-5)] + [2\sqrt{3} + (-2\sqrt{3})]i = 0$. يبدو أن هذه الأعداد المركبة معاكسة لبعضها البعض، ومعكوس $a + bi$ هو $-(a + bi) = -a - bi$.

b. التفكير بطريقة كمية يتم إجراء عملية طرح الأعداد المركبة بنفس طريقة طرح الأعداد الحقيقية. ولطرح عدد مركب من عدد مركب آخر، اجمع معكوس العدد المركب الذي يتم طرحه. بسّط $(4 + 2i) - (3 - 4i)$. ما مقابل $(3 - 4i)$؟ اكتب الحل هنا.

مقابل $(3 - 4i)$ هو $-3 + 4i$. $(4 + 2i) - (3 - 4i) = (4 + 2i) + (-3 + 4i) = (4 + (-3)) + (2 + 4)i = 1 + 6i$

c. التفكير بطريقة تجريدية ما مجموع $a + bi$ و$a - bi$؟ وماذا عن مجموع $a + bi$ و $-a + bi$؟ هل الأعداد المركب مقابلة لبعضها البعض؟ وإذا لم يكن الأمر كذلك، فهل هناك أي أمر فريد يتعلق بمجموعهم؟

مجموع $a + bi$ و$a - bi$ هو $2a$. وهذا المجموع عبارة عن عدد حقيقي. ومجموع $a + bi$ و$-a + bi$ هو $2bi$. وهذا المجموع عبارة عن عدد تخيلي بحت. وفي كل حالة، ليست أزواج الأعداد المركبة أعدادًا متعاكسة، ولكن مجموعها ليس بعدد حقيقي ولا عدد تخيلي بحت.

تتحقق خاصية التوزيع في الضرب للأعداد المركبة. ولضرب الأعداد المركبة، طبّق خاصية التوزيع ثم استبدل أي i^2 بالعدد -1.

مثال 3 ضرب الأعداد المركبة

a. التفكير بطريقة كميّة أكمل لترى ناتج الضرب ثم برر كل خطوة.

	$(1 - 2.3i)(-3 + 2i) =$
خاصية التوزيع	$1(-3 + 2i) - \boxed{2.3i(-3 + 2i)} =$
اضرب.	$-3 + 2i + \boxed{6.9i - 4.6i^2} =$
عوّض بالعدد -1 عن i^2	$-3 + 2i + 6.9i + 4.6 =$
اجمع الأجزاء الحقيقية والتخيلية.	$\boxed{1.6 + 8.9i}$

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تستلزم **م.م.ر 3** قيام الطلاب بتخمينات وبناء تقدم منطقي لاستكشاف الحقيقة من تخميناتهم. وفي العديد من الأمثلة، يطلب من الطلاب رسم استنتاجات عامة حول خصائص الأعداد الحقيقية المتعلقة بعمليات الأعداد المركبة.

في **المثال 1b**، يأخذ الطلاب خاصية للجذور التربيعية للأرقام الموجبة، ويحددون إذا ما كانت الخاصية صحيحة للجذور مربعة للأرقام السالبة. وفي **المثال 2a**، يخمن الطلاب ما إذا كانت الخاصية العكسية للجمع للأعداد الحقيقية موجودة في شكل مماثل للأزواج من الأعداد المركبة. ويعتمد هذا الفهم على استخدام خاصية التوزيع: $-(a + b) = -a - b$.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

ينبغي أن يعلم الطلاب أن العدد المقابل للعدد الحقيقي a هو $-a$. وعند إيجاد العدد المقابل لمجموع أو فرق، فمن الضروري استخدام الأقواس أو توزيع علامة الطرح على التعبير بأكمله. وتأكد أن الطلاب لا يكتبون العدد المقابل لـ $a + bi$ في صورة $-a + bi$.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يساوي مجموع الأعداد المقابلة صفرًا؟ **العدد المقابل لـ b هو $-b$، و $0 = (-b) + b$؛ فالأعداد المقابلة هي معكوسات جمعية لبعضها البعض.**
- هل يمكن للعمليات على أعداد لها أجزاء تخيلية إنتاج أعداد بدون أجزاء تخيلية؟ نعم، فمن الممكن أن يتم إلغاء الأجزاء التخيلية خلال عمليات الجمع أو الطرح.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

اطلب من الطلاب تنفيذ رسم تخطيطي يوضح كيف ترتبط الأعداد المركبة بأعداد تخيلية بحتة وحقيقية. ويمكنهم وضع مثال لكل نوع من الأعداد في الرسم التخطيطي.

الأسئلة الداعمة

- ما طريقة فويل؟ **فويل هي وسيلة تذكير لتذكر عملية ضرب زوج ذي حدين. وهي تمثل الحدين الأولين والخارجيين والداخليين والأخيرين.**
- ما المفترض أن يحدث إذا كانت طريقة فويل تنتج حدًا يحتوي على i^2؟ **التعويض بـ -1 لأي حالة من i^2.**

تلميح تقني

باستخدام حاسبة التمثيل البياني أو برنامج هندسي، يمكن للطلاب توسيع فهمهم للأعداد المركبة وتعلم كيفية تمثيلها بيانيًا كنقاط في المستوى المركب. ويتيح لهم هذا استكشاف الجمع والطرح والضرب بمعنى هندسي.

فعلى سبيل المثال، فإن ضرب عدد مركب في i سيتسبب في دوران النقطة 90 درجة عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، في حين أن الضرب في $-i$ سيتسبب في دوران النقطة 90 درجة في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. بالإضافة إلى ذلك، فإن ضرب الأعداد المركبة في ki أو $-ki$ سيجمع بين الدوران وتغير الأبعاد/التمدد.

أخطاء شائعة

يمكن أن يرتبك الطلاب حول العلاقة بين الأعداد التخيلية البحتة والحقيقية. فالعدد الحقيقي هو أي عدد منطقي أو غير منطقي. والعدد التخيلي البحت هو عدد له الصيغة bi، حيث b هو أي عدد حقيقي وi هو وحدة تخيلية. ويمكن كتابة العدد المركب بالصيغة $a + bi$، حيث يكون a و b من الأعداد الحقيقية.

تحتوي مجموعة الأعداد المركبة على كل من مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد التخيلية البحتة. فكر في استخدام مخطط فن للمساعدة في توضيح الفئات المختلفة للأعداد.

b. **استخدام البنية** يطلق على العددين $a + bi$ و $a - bi$ **مرافقين مركبين** لبعضهما البعض. ما الذي يمكنك ملاحظته بشأن ناتج ضرب زوج من المرافقات المركبة؟ هل يمكنك التفكير في مصطلح جيد لهذا القانون. تذكر أن $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ هو الفرق بين مربعي القانون.

يكون ناتج ضرب مرافقين مركبين عدد حقيقي، ويكون قانون ناتج الضرب هو $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$، وقد يطلق على هذا القانون "مجموع مربعين".

تمرين

الحساب بدقة أجر كل عملية حسابية. اكتب الحل هنا.

1. $(1.7 + 3.3i) + (-2.6 - 3.8i)$

$(1.7 + 3.3i) + (-2.6 - 3.8i) = (1.7 + (-2.6)) + (3.3 + (-3.8))i = -0.9 - 0.5i$

2. $(1.7 + 3.3i) - (-2.6 - 3.8i)$

$(1.7 + 3.3i) + (2.6 + 3.8i) = (1.7 + 2.6) + (3.3 + 3.8)i = 4.3 + 7.1i$

3. $(7 + 3i)(-2 - i)$

$(7 + 3i)(-2 - i) = -14 - 7i - 6i - 3i^2 = -14 - 13i - 3(-1) = -14 - 13i + 3 = -11 - 13i$

4. $(7 + 3i)(7 - 3i)$

$(7 + 3i)(7 - 3i) = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$

الحساب بدقة جد العددين الصحيحين a و b بحيث تصبح المعادلة صحيحة.

5. $(4 - i\sqrt{3})(3 + bi) = 6 - 11i\sqrt{3}$

يُبسط الجانب الأيسر إلى $(12 + b\sqrt{3}) + (4b - 3\sqrt{3})i$ وبذلك يكون $b = -2\sqrt{3}$.

6. $\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i\right) - 3(a + bi) = 1 + 3i$

يُبسط الجانب الأيسر إلى $(\frac{5}{2} - 3a) + (\frac{3}{2} - 3b)i$ وبذلك يكون $a = \frac{1}{2}$ و $b = -\frac{1}{2}$.

7. $(9 + i)(a + bi) = 82$

يكون ناتج الضرب عددًا حقيقيًا؛ وبالتالي $a = 9$ و $b = -1$.

8. $(a - i\sqrt{2})(4 - i\sqrt{2}) = 10 + bi$

يُبسط الطرف الأيسر إلى $4a - 2 + (-4\sqrt{2} - a\sqrt{2})i$ وبذلك يكون a $a = 3$ و $b = -7\sqrt{2}$.

9. يقول كمال "يمكن أن يكون العدد حقيقيًا مركبًا". بينما يزعم ليث أن هذا غير محتمل.

a. **التعليق على الاستنتاج** من منها على صواب؟ اشرح استنتاجك.

كمال؛ نظرًا لأن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة، فإن العدد الحقيقي هو عدد مركب. فعلى سبيل المثال، الأعداد الحقيقية مثل $-\frac{1}{2}$ يمكن التعبير عنها في صورة عدد مركب، مكتوبًا بالطريقة $5 + 0i$ أو $-\frac{1}{2} + 0i$.

b. غيّر كلمات كمال بحيث تصبح عبارة ليث صوابًا.

الإجابة النموذجية: "يمكن للعدد أن يكون حقيقيًا وتخيليًا بحتًا".

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **المثال 3a**، يجب على الطلاب ضرب عددين مركبين، إلى جانب تبرير كل خطوة في العملية. فاستخدام الخواص، مثل خاصية الارتباط والتبديل والتوزيع، هو عنصر أساسي في **م.م.ر 2**.

تتطلب **م.م.ر 7** قيام الطلاب بتحليل التعبيرات الجبرية وتمييز النمط أو البنية. وفي **المثال 3b**، يدرس الطلاب ناتج ضرب زوج من المرافقين المركبين، مع ملاحظة أن النتيجة هي عدد حقيقي ومن ثم وضع صيغة رياضية لناتج الضرب. وينبغي على الطلاب التعرف على البنية المماثلة للفرق بين المربعات من المعرفة السابقة بتحليل العوامل.

10. يمكنك إجراء العديد من العمليات الحسابية للأعداد المركبة باستخدام التكنولوجيا مثل حاسبة التمثيل البياني.

a. **استخدام الأدوات** استخدم التكنولوجيا لإيجاد القيم التالية. اكتب الإجابات في الصورة $a + bi$.

$(1 + i)^2$	-4	$(1 + i)^4$	$2i$
$(1 + i)^6$	16	$(1 + i)^8$	$-8i$
$(1 + i)^{10}$	-64	$(1 + i)^{12}$	$32i$

b. **التخمين** بناء على نتائجك، خمّن.
الإجابة النموذجية: التعبير $(1 + i)^n$ عدد حقيقي عندما يكون n من مضاعفات العدد 4.

c. **الحساب بدقة** جد ناتج ضرب $(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i)$ يدويًا. اكتب الحل هنا.
$(1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

d. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح كيف يمكنك استخدام النتيجة التي حصلت عليها في **الجزء c** لتحديد قيم $(1 + i)^4, (1 + i)^6, \ldots$
$(1 + i)^4 = (1 + i)^2(1 + i)^2$ عوّض $2i$ بـ $(1 + i)^2$. إذًا $(1 + i)^4 = (2i)(2i) = 4i^2 = -4$. لكل أس فردي متتالي، اضرب قيمة الأس السابق في $2i$ وبسّط.

11. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يقول تامر أن التعبير $8i(3 - 2i) - 24i$ لا يمثل عددًا حقيقيًا. فهل هو على صواب؟ فسّر استنتاجك.
تامر ليس على صواب. يمكن تبسيط التعبير باستخدام خواص الضرب والجمع للأعداد المركبة. وستكون النتيجة $24i - 16i^2 - 24i$، والتي تساوي 16. بالرغم من أن التعبير لا يحتوي على حدود تخيلية، يمكننا إيضاح أنه يمثل عددًا حقيقيًا.

12. **استخدام النماذج** تعمل دائرة كهربائية بالتيار المتردد. يساوي الجهد الكهربائي ناتج ضرب التيار والمقاومة ويمكن تمثيل هذه الكميات بالأعداد المركبة. لاحظ أن المهندسين يستخدمون j على أنها الوحدة التخيلية مع $j^2 = -1$. فإذا كانت دائرة تيار متردد جهدها الكهربائي يساوي $9 - 2j$ ومقاومتها $3 + 5j$ أوم. فما شدة تيارها؟ فسّر استنتاجك أو اكتب الحل هنا.
(إرشاد: مثّل التيار في الصورة $x + yj$ amps وجد قيم x و y.)
عوّض المعطيات، $9 - 2j = (x + yj)(3 + 5j)$. قم بتوسعة ناتج الضرب ثم استخدم $j^2 = -1$. إذًا $9 - 2j = 3x - 5y + (5x + 3y)j$. إذا كانت الأعداد المركبة متساوية، إذًا $3x - 5y = 9$ و $5x + 3y = -2$. جد حل نظام المعادلات بحيث تحصل على $x = \frac{1}{2}$ و $y = -\frac{3}{2}$. إذًا شدة تيار الدائرة يساوي $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j$ amps.

13. **استخدام البنية** يمكن كتابة أي عدد مركب في الصورة $a + bi$ حيث a وb عددان حقيقيان. جد العددين الحقيقيين a و b لكتابة $(4 - 2i)(2 + i) + 3i$ في الصورة $a + bi$.
$a = 10, b = 3; (4 - 2i)(2 + i) + 3i = 8 - 4i + 4i - 2i^2 + 3i = 8 - 2(-1) + 3i = 10 + 3i.$

تمرين

يتطلب التمرينان 1–8 و 10 من الطلاب إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة وكتابتها بالصيغة $a + bi$.

بينما يتطلب التمرينان 11 و 9 من الطلاب فهم العلاقة بين الأعداد المركبة ذات الجزء الحقيقي الذي يساوي 0 (أرقام تخيلية بحتة) وتلك التي لها جزء تخيلي يساوي 0 (الأعداد الحقيقية).

وفي **التمرين 12**، يجب على الطلاب حل مشكلة تتعلق بالتطبيق تتطلب منهم إجراء عملية ضرب الأعداد المركبة.

في **التمرين 13**، يجب على الطلاب جمع وضرب الأعداد المركبة.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1–8	6
9	3
10	2, 3, 5, 6
11	3
12	4
13	7

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تستلزم **م.م.ر 2** قيام الطلاب بفهم طبيعة الكميات والعلاقات. وفي **المثال 2c**، يلاحظ الطلاب أن مجموع بعض أزواج الأعداد المركبة يمكن أن تكون حقيقية، ولا تحتوي على مركّب تخيلي. على الرغم من أن الجزء التخيلي يختفي أثناء عملية الجمع، إلا أن الجزء الحقيقي لا يختفي. وهذا يسمح للطلاب بتحديد أن الأعداد ليست مقابلة حقًا لبعضها البعض. ومن خلال هذا، يكتسب الطلاب فهمًا لخواص الأعداد المركبة.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- تحليل ثلاثيات حدود المربع الكامل إلى عوامل
- إيجاد الجذور التربيعية للأعداد النسبية

مثال 1

م.م.ر 2

نصيحة للتدريس

ساعد الطلاب على إدراك أنه يوجد قيمتين محتملتين لــ b في **الجزء d** حيث لإيجاد b تأخذ الجذر التربيعي لــ c. الذي يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا، وتقسمه على 2.

الأسئلة الداعمة

- لماذا تُستخدَم القِطَع لإكمال نموذج المربع الكامل؟ **لأنها تمثل c، و c ثابت.**
- كيف يمكن تحويل التعبير $ax^2 + bx$، الذي فيه $a \neq 1$، إلى تعبير يكون فيه $a = 1$؟ **اقسم كلا الحدين على a.**

1.3 حل الدوال التربيعية من خلال إكمال المربع

الأهداف

- أكمل المربع لكتابة ثلاثيات حدود مربع كامل.
- أوجد حل المعادلة التربيعية بإكمال المربع.

يمكن حل العادلات التربيعية بالفحص وتحليل العوامل واستخدام التمثيل البياني. كما توجد طريقة أخرى لحل المعادلات التربيعية تسمى إكمال المربع. ولإكمال المربع، أضف الثابت c إلى التعبير $x^2 + bx$ لتكوين ثلاثي حدود مربع كامل $x^2 + bx + c$. ويعتبر فهم النموذج الهندسي الذي يصفه الجبر خطوة أولى هامة في إتقان هذه الطريقة.

مثال 1 **فهم إكمال المربع**

الاستكشاف **أوجد قيمة c التي تجعل $x^2 + bx + c$ مربعًا كاملاً.**

a. **التفكير بطريقة تجريدية** افترض أن $x^2 + bx + c$ مربعًا كاملاً. ما العلاقة بين b و c؟ هل هي العلاقة نفسها عند $a \neq 1$؟
فسّر إجابتك.
حيث إن $a = 1$ والحد الثلاثي مربعًا كاملاً، فإن $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$. لا تكون العلاقة هي نفسها عندما تكون $a \neq 1$. عندما تكون $a \neq 1$ و $a \neq 1$ و $c = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

b. **استخدام النماذج** كيف يمكنك استخدام قطع جبرية لإيجاد قيمة c التي تجعل $x^2 + 8x + c$ ثلاثي حدود مربع كامل. فسّر استنتاجك. ثم ارسم الترتيب أدناه.

x^2	x	x	x	x
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1

استخدمت قطعة x^2 واحدة وثماني قطع x. ورتبتهم بحيث يكون جانبي الشكل الذي سيكوّن المربع متطابقتين . ثم أضفت قطع واحدة حتى كوّنت مربعًا. واستخدمت 16 قطعة. إذًا $c = 16$. ثلاثي حدود المربع الكامل هو $x^2 + 8x + 16$.

c. **التفكير بطريقة كميّة** إذا كان b عددًا فرديًا. فما الذي يجب أن يكون صحيحًا دائمًا بشأن c؟
إذا كان b عددًا فرديًا، فإن $\frac{b}{2}$ ليست عددًا كليًا وبالتالي فإن $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ليس عددًا كليًا كذلك. إذًا عندما يكون b فرديًا، فإن c لا يكون عددًا كليًا.

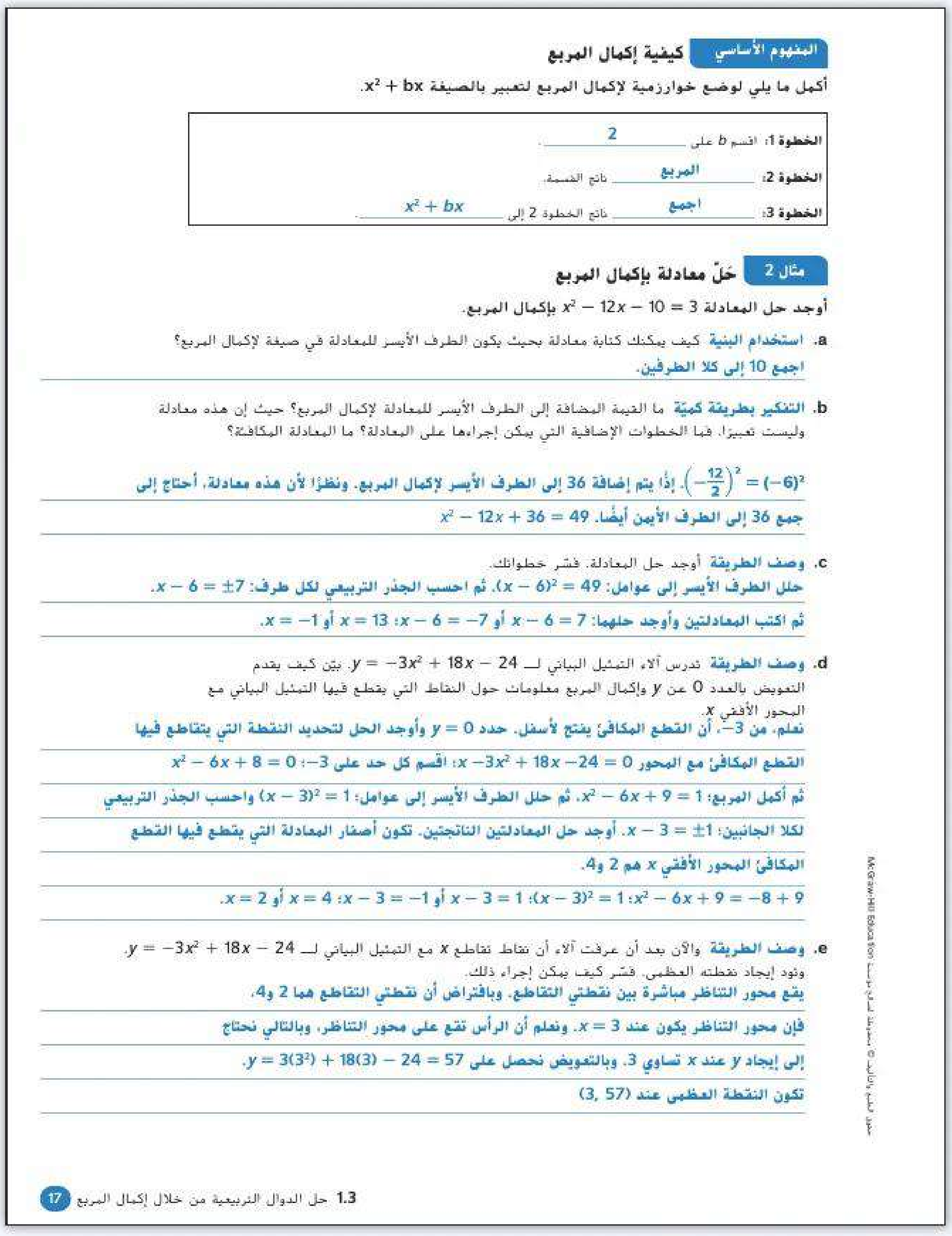
d. **التفكير بطريقة كميّة** أوجد قيم c و b التي تجعل كل حد تربيعي كامل.

$x^2 + 24x + c$	$c =$ **144**
$x^2 + 9x + c$	$c =$ **$\frac{81}{4}$**
$x^2 - \frac{1}{2}x + c$	$c =$ **$\frac{1}{16}$**

$x^2 - bx + 81$	$b =$ **-18 أو 18**
$x^2 + bx + \frac{25}{4}$	$b =$ **-5 أو 5**
$x^2 + bx + \frac{1}{9}$	$b =$ **$-\frac{2}{3}$ أو $\frac{2}{3}$**

معلومات أساسية في الرياضيات

حلل الطلاب ثلاثيات حدود المربع الكامل إلى عوامل وحلوا المعادلات التربيعية للصيغة $x^2 = a^2$ من خلال الفحص. سوف يجمع الطلاب هذه المهارات عند تعلم كيفية إكمال المربع. من المهم أن يتعلم الطلاب ويفهموا الخوارزمية لإكمال المربع.



المفهوم الأساسي **كيفية إكمال المربع**

أكمل ما يلي لوضع خوارزمية لإكمال المربع لتعبير بالصيغة $x^2 + bx$.

الخطوة 1: اقسم b على **2**.
الخطوة 2: **المربع** ناتج القسمة.
الخطوة 3: **اجمع** ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

مثال 2 **حَلّ معادلة بإكمال المربع**

أوجد حل المعادلة $x^2 - 12x - 10 = 3$ بإكمال المربع.

a. **استخدام البنية** كيف يمكنك كتابة معادلة بحيث يكون الطرف الأيسر للمعادلة في صيغة لإكمال المربع؟
اجمع 10 إلى كلا الطرفين.

b. **التفكير بطريقة كميّة** ما القيمة المضافة إلى الطرف الأيسر للمعادلة لإكمال المربع؟ حيث إن هذه معادلة وليست تعبيرًا. فما الخطوات الإضافية التي يمكن إجراؤها على المعادلة؟ ما المعادلة المكافئة؟
$\left(-\frac{12}{2}\right)^2 = (-6)^2$. إذًا يتم إضافة 36 إلى الطرف الأيسر لإكمال المربع. ونظرًا لأن هذه معادلة، أحتاج إلى جمع 36 إلى الطرف الأيمن أيضًا. $x^2 - 12x + 36 = 49$

c. **وصف الطريقة** أوجد حل المعادلة. فسّر خطواتك.
حلل الطرف الأيسر إلى عوامل: $(x - 6)^2 = 49$. ثم احسب الجذر التربيعي لكل طرف: $x - 6 = \pm 7$.
ثم اكتب المعادلتين وأوجد حلهما: $x - 6 = 7$ أو $x - 6 = -7$؛ $x = 13$ أو $x = -1$.

d. **وصف الطريقة** تدرس آلاء التمثيل البياني لـ $y = -3x^2 + 18x - 24$. بيّن كيف يقدم التعويض بالعدد 0 عن y وإكمال المربع معلومات حول النقاط التي يقطع فيها التمثيل البياني مع المحور الأفقي x.
نعلم، من -3، أن القطع المكافئ يفتح لأسفل. حدد $y = 0$ وأوجد الحل لتحديد النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع المحور x: $-3x^2 + 18x - 24 = 0$؛ اقسم كل حد على -3: $x^2 - 6x + 8 = 0$
ثم أكمل المربع: $x^2 - 6x + 9 = 1$. ثم حلل الطرف الأيسر إلى عوامل: $(x - 3)^2 = 1$ واحسب الجذر التربيعي لكلا الجانبين: $x - 3 = \pm 1$. أوجد حل المعادلتين الناتجتين. تكون أصفار المعادلة التي يتقطع فيها القطع المكافئ المحور الأفقي x هم 2 و4.
$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$؛ $(x - 3)^2 = 1$؛ $x - 3 = 1$ أو $x - 3 = -1$؛ $x = 4$ أو $x = 2$.

e. **وصف الطريقة** والآن بعد أن عرفت آلاء أن نقاط تقاطع x مع التمثيل البياني لـ $y = -3x^2 + 18x - 24$. وتود إيجاد نقطته العظمى. فسّر كيف يمكن إجراء ذلك.
يقع محور التناظر مباشرة بين نقطتي التقاطع. وبافتراض أن نقطتي التقاطع هما 2 و4،
فإن محور التناظر يكون عند $x = 3$. ونعلم أن الرأس تقع على محور التناظر، وبالتالي نحتاج إلى إيجاد y عند x تساوي 3. وبالتعويض نحصل على $y = 3(3^2) + 18(3) - 24 = 57$.
تكون النقطة العظمى عند (3, 57)

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7، 8

يوضح هذا المثال للطلاب كيفية إكمال المربع لحل معادلة تربيعية. اعتاد الطلاب رؤية المعادلات التربيعية المساوية للصفر. لذا فإضافة 10 إلى طرفي المعادلة كخطوةٍ أولى قد يكون مربكًا. أشرِ إلى أن الخطوة الأولى في إكمال المربع هي جعل أحد طرفي المعادلة في صورة $x^2 + bx$. بغض النظر عمّا وُضِعت المعادلة الأصلية مساويةً له.

الأسئلة الداعمة

- في **الجزء d**، لماذا يجب أن تكون الخطوة الأولى التي تتخذها آلاء هي قسمة الطرفين على -3؟ **يجب أن يكون معامل الحد المربع 1 لإكمال المربع.**
- كيف يمكنك التحقق من إجابتك؟ **التعويض عن الحلول في المعادلة الأصلية للتأكد من أن المعادلة عبارة صحيحة.**

التدريس المتمايز

قد يستفيد بعض الطلاب من استخدام القطع الجبرية لإكمال المربع عند حل المعادلات التربيعية بمُعامل الأعداد الصحيحة. اطلب من الطلاب استخدام نموذج المعادلات. ذكرهم بإضافة أو إزالة العدد نفسه من القطع من كل طرف من النموذج. إذا كان الطلاب بعد إكمال المربع في أحد الطرفين غير قادرين على صياغة مربع من القطع الموجودة في الطرف الآخر، فشجعهم على محاولة صياغة مربع والتقدير باستخدام أطوال الأطراف وبعد ذلك تأكيد تقديراتهم بالحاسبة.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

يحتوي نص المسألة على الكثير من المعلومات التي تحتاج إلى المعالجة والتنظيم. ناقش كل جزء من نص المسألة مع الطلاب وكيف يمكن استخدامها لحل المسألة. اسأل الطلاب عن عدد الأسهم التي تُستحَق بعد يومٍ واحد وبعد يومين. بحيث يكون لديهم فهمٌ لمعنى v و t.

الأسئلة الداعمة

- كيف كانت المسألة ستختلف إذا أحضرت السيدة لمياء سهمًا واحدًا فقط؟ **كنت سأظل بحاجةٍ إلى إكمال المربع لإيجاد عدد الأيام، ولكن إذا حسبتُ الربح أو الخسارة، لم أكن لأحتاج إلى ضرب قيمة السهم في 5.**
- هل تستطيع السيدة لمياء بيع سهمها بالخسارة؟ **لا، لأن الأيام الوحيدة التي بيع فيها السهم بالخسارة هي الأيام 1-4 وهي لم تبع السهم حتى يوم 6.**

مثال 3 **حلّ المسائل باستخدام إكمال المربع**

يمكن تمثيل قيمة حصة سهم بالمعادلة التربيعية $v = 4t^2 - 20t$، حيث تمثل t عدد الأيام بعد إدراج السهم. وقد اشترت السيدة لمياء 5 أسهم في اليوم السادس بعد إدراجها وبيعها عندما أصبح كل سهم بقيمة AED 144. فكم بلغ ربح السيدة لمياء أو خسارتها؟ كم عدد الأيام التي اقتنت فيها الأسهم؟

a. **التفكير بطريقة كميّة** أكمل المربع لإيجاد قيمة t عندما يكون $v =$ AED 144.

$4t^2 - 20t = 144; t^2 - 5t = 36; t^2 - 5t + \frac{25}{4} = 36 + \frac{25}{4}. \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$

احسب الجذر التربيعي ثم اكتب معادلتين: $t - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$ و $t - \frac{5}{2} = -\frac{13}{2}$. إذًا، $t = -4$ و $t = 9$.

b. **تفسير المسائل** فسّر النتائج من **الجزء a** لإيجاد عدد الأيام التي اقتنت فيها السيدة لمياء الأسهم.

حيث إن t تمثل عدد الأيام، فاستخدم الحل موجب القيمة. إذًا، فقد باعت الأسهم بعد 9 أيام من إدراجها واشترتها بعد 6 أيام من إدراجها. وقد اقتنت الأسهم لمدة 3 أيام.

c. **التخطيط للحل** ما المعلومات التي تحتاجها لتتمكن من إيجاد ربح السيدة لمياء أو خسارتها؟ أوجد قيمة الربح أو الخسارة.

أحتاج إلى إيجاد قيمة كل سهم عندما اشترت الأسهم: $v = 4(6)^2 - 20(6) = 24$. كان السعر الإجمالي الذي دفعته للأسهم البالغ عددها 5 هو AED24 أو AED120 وكان إجمالي السعر الذي دفعته للأسهم البالغ عددها 5 هو AED144 أو AED720. اطرح المبلغ الذي دفعته من المبلغ الذي اشترت به الأسهم: AED720 − AED120 أو AED600. إذا فقد حققت ربحًا بمبلغ 600AED.

d. **تفسير المسائل** أكمل المربع في المسألة الأصلية لإيجاد أدنى سعر للسهم. ما الذي يوضحه ذلك بشأن المعادلة.

$v = 4t^2 - 20t$. قم بالمساواة بالصفر: $0 = 4t^2 - 20t$ v. اقسم على 4: $0 = t^2 - 5t$. أكمل المربع: $\frac{25}{4} + t^2 - 5t = \frac{25}{4}$. حلل إلى عوامل: $\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ خذ الجذور التربيعية: $t - \frac{5}{2} = \pm\frac{5}{2}$. بالحل لإيجاد قيمة t نحصل على 0 و 5. ويقع محور التناظر $x = \frac{5}{2}$، ما يعني أنه بعد 2.5 يوم من البيع، وصل السهم إلى أعلى قيمة له. عوّض في المعادلة الأصلية للحصول على $v = 4(2.5)^2 - 20(2.5) = -25$. ونظرًا لأن الأسهم لا يمكن أن تكون سالبة، إذًا فالدالة غير صالحة لتوقع السعر قبل شراء السيدة لمياء للسهم.

تمرين

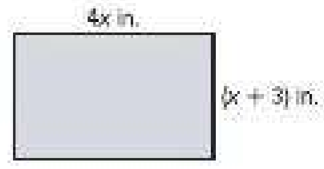
1. **التفكير بطريقة كميّة** أوجد قيمة q التي تجعل $0.5x^2 + 0.5qx + 72$ ثلاثي حد مربع كامل.
بيّن أن نفس قيمة q تجعل $4x^2 + 24x + 1.5q$ ثلاثي حد مربع كامل.

للتعبير الأول، $0.5x^2 + 0.5qx + 72 \rightarrow x^2 + qx + 144, \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 144$ أو $\frac{q}{2} = \pm 12$، إذًا $q = \pm 24$. للتعبير الثاني، $4x^2 + 24x + 1.5q \rightarrow x^2 + 6x + 0.375q$. إذًا، $0.375q = 9$ و $q = 24$. إذًا، لكل من التعبيرين $q = 24$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

سوف يتعين على الطلاب الاستفادة من **م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)** عند حل المسائل عن طريق إكمال المربع. يحتاج الطلاب إلى تجميع عددٍ من المهارات من بينها التعامل مع المربعات ثلاثية الحدود، ومعالجة المعادلات جبريًا، والتحليل إلى عوامل، وحساب الجذور التربيعية. من أجل حل هذه المسائل المتعددة الخطوات. بعد إكمال المربع، ستكون المعادلات عادةً بالصورة $(x + p)^2 = q$. وقيمة q قد تكون مربعًا كاملاً أو لا تكون. سوف يحتاج الطلاب إلى النظر فيما إذا كان من المناسب استخدام الحساب الذهني أو الحاسبة لإيجاد الجذر التربيعي لـــ q.

.2 التفكير بطريقة كمية اثبت أن مساحة المستطيل المبين هي 352 بوصة مربعة. وأوجد أبعاد المستطيل؟



$4x(x+3) = 352;\ 4x^2 + 12x = 352;\ x^2 + 3x = 88;\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 88 + \frac{9}{4};\ x + \frac{3}{2} = \pm\frac{19}{2}\ x = 8$؛

تساوي الأبعاد 32 في 11.

.3 بناء الفرضيات استخدم إكمال المربع لتبين أنه لا يمكن لعددين صحيحين موجبين وزوجيين متتاليين أن يكون حاصل ضربهما 27.

افترض أن أحد الأعداد الزوجية هو $2x$. إذًا سيكون العدد الزوجي المتتالي هو $2x + 2$.

$2x(2x+2) = 27$ و $4x^2 + 4x = 27$ و $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 7$ و $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{7}$، إذًا x ليس عددًا صحيحًا. إذًا، لا يوجد عددين صحيحين زوجيين موجبين ومتتاليين ناتج ضربهما 27.

.4 التفكير بطريقة تجريدية يريد جاسم كتابة حد ثلاثي يمكن حله بإكمال المربع ولا يمكن حله بالتحليل إلى عوامل. ويقع أحد حلول معادلته بين العددين 4 و 5.

.a اكتب معادلة محتملة.

الإجابة النموذجية: $4x^2 + 28x = 226$ أو $4x^2 + 28x - 226 = 0$

.b ما حلول المعادلة؟

الإجابة النموذجية: $\left(\frac{28}{2}\right)^2 = 4c$. $4x^2 + 28x + c = 226 + c$، إذًا $c = 49$

$4x^2 + 28x + 49 = 226 + 49$. $(2x+7)^2 = 275$. احسب الجذر التربيعي وأوجد حل المعادلتين الناتجتين:

$2x + 7 \approx 16.58;\ x \approx 4.79$. $2x + 7 \approx -16.58;\ x \approx -11.79$.

.c تقييم صحة الحل فسّر السبب الذي يجعل معادلتك تلبي معيار جاسم.

الإجابة النموذجية: $-904 = (-226)(4)$. لا توجد أزواج العوامل من مجموع -904 إلى 28. إذًا، فالمعادلة لا يمكن تحليلها إلى عوامل. ونظرًا لأن الحل الوحيد هو تقريبًا 4.79، فإن المعادلة لها حل واحد بين 4 و 5.

.5 استخدام البنية تستخدم المعادلة التربيعية $f(t) = -5000t^2 + 70000t + 5000$ لتمثيل عدد مبيعات منتج إحدى الشركات في عدد t سنوات منذ إطلاق المنتج.

.a أكمل المربع لإيجاد أصفار $f(t)$ وتفسير كل منهم في سياق المسألة.

$0 = -5000t^2 + 70000t + 5000$ و $-5000 = -5000t^2 + 70000t$. اقسم على -5000 لتحصل على $1 = t^2 - 14t$. $1 + \left(\frac{-14}{2}\right)^2 = t^2 - 14t + \left(\frac{-14}{2}\right)^2$, $50 = (t-7)^2$, $50 = (t-7)^2$. احسب الجذر التربيعي لكل طرف للحصول على $t = 7 - \sqrt{50}$ أو $t = 7 \pm \sqrt{50}$. الصفر $t = 7 + \sqrt{50}$ سالب وبالتالي ليس له معانٍ في السياق. ويدل الصفر الآخر على أنه بعد $7 \pm \sqrt{50}$ أو 14.1 عامًا تقريبًا، وصلت المبيعات إلى صفر.

.b استخدم الإجابة من **الجزء a** لإيجاد العدد الأكبر من مبيعات المنتج.

تكون الأصفار عند $t = 7 \pm \sqrt{50}$ وبالتالي يقع محور التماثل عند $7 = \frac{7 - \sqrt{50} + 7 + \sqrt{50}}{2} = t$.

وتقع القيمة العظمى على محور التماثل لذا بالتعويض، فإن القيمة العظمى لـ $f(t)$ هي $f(7) = 250000$.

كان العدد الأكبر للمبيعات يساوي 250,000.

أخطاء شائعة

عند إيجاد القيمة التي يجب إضافتها إلى كل طرف لمعادلة الصورة $ax^2 + bx = d$. قد لا يأخذ الطلاب قيمة a في الاعتبار. ذكّر الطلاب بأن معامل x^2 يجب أن يكون 1 من أجل استخدام الخوارزمية لإكمال المربع.

تمرين

في **التمرين 1**، يُطلَب من الطلاب استخدام طريقة إكمال المربع لتحويل المعادلات إلى الصيغة $(x - p)^2 = q$ من أجل إنشاء ثلاثيات حدود مربع كامل.

في **التمرين 2**، يستخدم الطلاب مرةً أخرى طريقة إكمال المربع لتحويل معادلة إلى الصورة $(x - p)^2 = q$. هذه المرة بالترتيب لحل مسألة من الحياة اليومية.

في **التمرين 3**، يُعطَى الطلاب فرصةً لاستخدام طريقة إكمال المربع لتحويل المعادلة إلى الصورة $(x - p)^2 = q$ من أجل اكتساب الفهم المطلوبة لإثبات التخمين.

في **التمرين 4**، سوف يكتب الطلاب معادلاتهم التربيعية الخاصة ويحلونها من خلال تحويلها إلى معادلات مكافئة للصورة $(x^2 - p)^2 = q$.

في **التمرين 5**، يكمل الطلاب مربع الدالة التربيعية لإيجاد وتفسير الأصفار ولتحديد القيمة العظمى للدالة.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1–2	2
3	3
4	2, 8
5	7

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: 1, 2, 3, 7

المتطلبات الأساسية

- حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل
- تبسيط التعابير التي تتضمن أعدادًا مركبة.

مثال 1

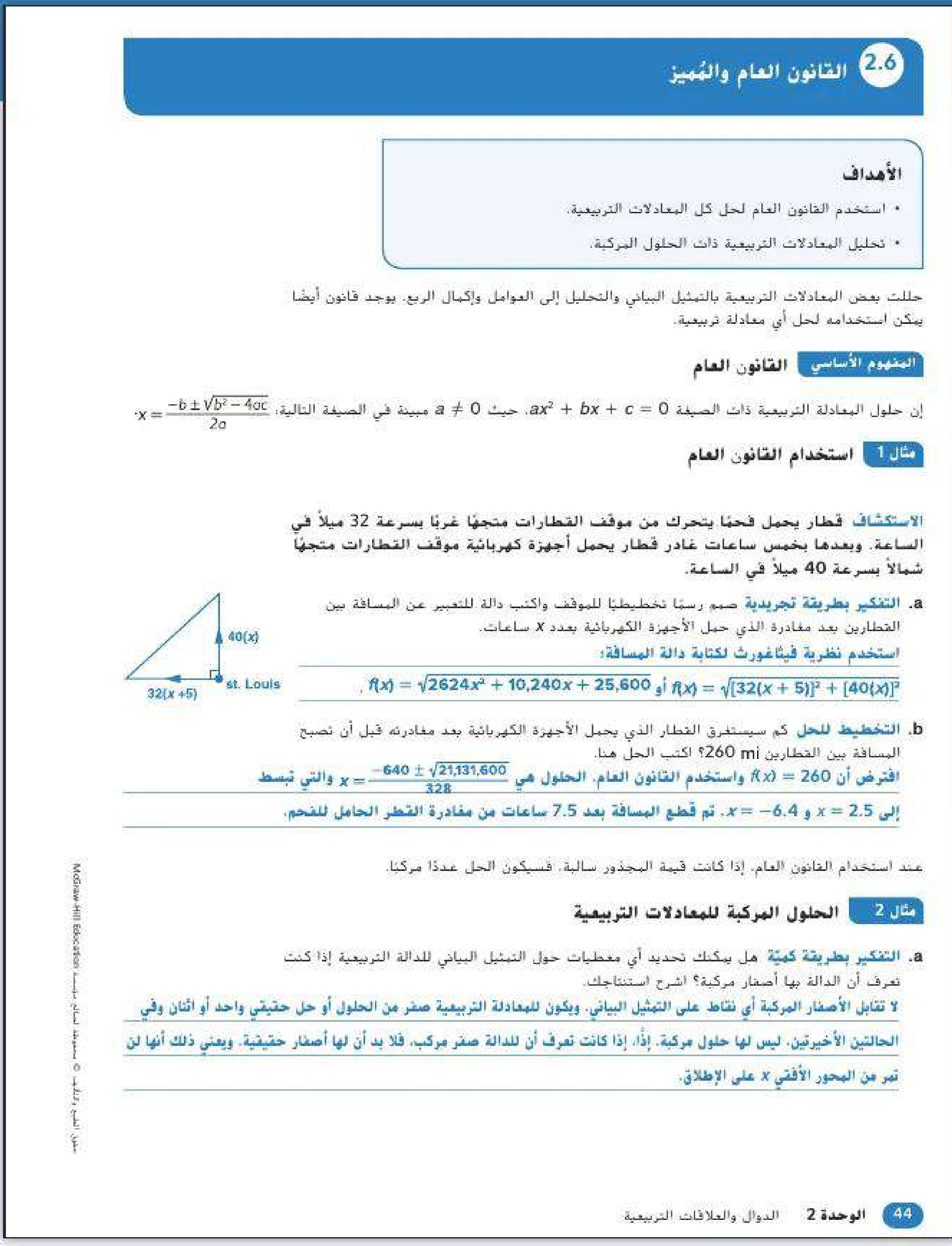
نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

اقترح أن يبدأ الطلاب بتنفيذ وتسمية رسم تخطيطي. اسأل الطلاب حول الصلة بين المسافة والمعدل والوقت. واقترح أنه يمكنهم استخدام تلك الصلة لكتابة تعبيرات عن المسافة المقطوعة.

الأسئلة الداعمة

- إذا كانت x تمثل الوقت منذ مغادرة قطار الأجهزة. فكم مضى من الوقت منذ مغادرة قطار الفحم؟ **يسير قطار الفحم منذ $x + 5$ ساعة.**
- ما مجال الدالة الذي يمثل المسافة بين القطارات؟ **يبدأ الوقت (عند 0) عند مغادرة العربة ولا يمكن أن يكون سالبًا.**
- كيف يمكنك التعبير عن المسافة التي يقطعها كل قطار **استخدم صيغة المسافة= المعدل × الوقت.**



2.6 القانون العام والمُميز

الأهداف

- استخدم القانون العام لحل كل المعادلات التربيعية.
- تحليل المعادلات التربيعية ذات الحلول المركبة.

حللت بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني والتحليل إلى العوامل وإكمال الربع. يوجد قانون أيضًا يمكن استخدامه لحل أي معادلة تربيعية.

المفهوم الأساسي القانون العام

إن حلول المعادلة التربيعية ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$ مبينة في الصيغة التالية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

مثال 1 استخدام القانون العام

الاستكشاف قطار يحمل فحمًا يتحرك من موقف القطارات متجهًا غربًا بسرعة 32 ميلاً في الساعة. وبعدها بخمس ساعات غادر قطار يحمل أجهزة كهربائية موقف القطارات متجهًا شمالاً بسرعة 40 ميلاً في الساعة.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** صمم رسمًا تخطيطيًا للموقف واكتب دالة للتعبير عن المسافة بين القطارين بعد مغادرة الذي حمل الأجهزة الكهربائية بعدد x ساعات.

استخدم نظرية فيثاغورث لكتابة دالة المسافة:

$f(x) = \sqrt{[32(x+5)]^2 + [40(x)]^2}$ أو $f(x) = \sqrt{2624x^2 + 10,240x + 25,600}$ ،

b. **التخطيط للحل** كم سيستغرق القطار الذي يحمل الأجهزة الكهربائية بعد مغادرته قبل أن تصبح المسافة بين القطارين 260 mi؟ اكتب الحل هنا.

افترض أن $f(x) = 260$ واستخدم القانون العام. الحلول هي $x = \frac{-640 \pm \sqrt{21,131,600}}{328}$ والتي تبسط إلى $x = 2.5$ و $x = -6.4$. تم قطع المسافة بعد 7.5 ساعات من مغادرة القطر الحامل للفحم.

عند استخدام القانون العام، إذا كانت قيمة المجذور سالبة، فسيكون الحل عددًا مركبًا.

مثال 2 الحلول المركبة للمعادلات التربيعية

a. **التفكير بطريقة كميّة** هل يمكنك تحديد أي معطيات حول التمثيل البياني للدالة التربيعية إذا كنت تعرف أن الدالة بها أصفار مركبة؟ اشرح استنتاجك.

لا تقابل الأصفار المركبة أي نقاط على التمثيل البياني. ويكون للمعادلة التربيعية صفر من الحلول أو حل حقيقي واحد أو اثنان وفي الحالتين الأخيرتين، ليس لها حلول مركبة. إذًا، إذا كانت تعرف أن للدالة صفر مركب، فلا بد أن لها أصفار حقيقية. ويعني ذلك أنها لن تمر من المحور الأفقي x على الإطلاق.

معلومات أساسية في الرياضيات

يحدد هذا الدرس طريقة تطور طرق حل المعادلات التربيعية. كانت أول طريقة هي التمثيل البياني، الذي يتصل بشكل جيد بفهم بصري للمعادلات التربيعية. ومع ذلك، سيقدم التمثيل البياني في بعض الأحيان حلولاً تقريبية في مجموعة الأعداد الحقيقية فقط. وكانت الطريقة التالية هي تحليل العوامل؛ لا تقدم هذه الطريقة حلولاً دقيقة، ولكن فقط عندما يكون التعبير التربيعي قابلاً لتحليله إلى عوامل. بعد ذلك، يتعلم الطلاب إيجاد الحل عن طريق إكمال المربع، وهو ما يمكن تطبيقه على أي معادلة تربيعية ولكن يتطلب عدد من الخطوات لاستخدامه. لإكمال المربع فائدة إضافية بتقديم حلول من الأعداد المركبة. وفي النهاية، تم اشتقاق الصيغة التربيعية عن طريق إكمال مربع شكل قياسي لمعادلة تربيعية، $ax^2 + bx + c = 0$. تكون هذه الطريقة ملائمة لإيجاد حل أي معادلة تربيعية في نظام الأعداد المركبة.

b. **التخمين** يبيع أحمد القبعات الصوفية إلى أصدقائه في المدرسة وقد حدد صيغة العائد الخاص به وهي $R(p) = -p^2 + 20p$، حيث R هو العائد بالدراهم و p هو سعر بيع قبعاته. ويود أن يربح AED 200 أثناء عامه الثاني في المدرسة الثانوية. هل يمكنه تحقيق هذا الهدف؟ استخدم القانون العام لشرح استنتاجك.

عوّض بالعائد المنشود للحصول على المعادلة $-p^2 + 20p - 200 = 0$. باستخدام القانون العام، $p = \frac{-20 \pm \sqrt{-400}}{2(-1)}$. حيث إن القيمة أسفل الجذر سالبة، للمعادلة حلان مركبان. وحيث إنه لا يوجد حلول حقيقية، لا يستطيع أحمد تحقيق هدفه.

c. **التخطيط للحل** ما حلول القانون العام التي وجدتها في **الجزء b**؟ كيف يمكنك إعادة كتابة معادلة صيغة العائد بالعائد المنشود، ألا وهو AED 200، في الصيغة المحللة إلى العوامل؟

القانون العام لمعادلة العائد هي $p = \frac{-20 \pm \sqrt{-400}}{2(-1)}$ والتي تبسط إلى $p = \frac{-20 \pm 20i}{-2}$ والتي تبسط إلى $10 \pm 10i$. إذًا، ستكون الصيغة المحللة من المعادلة هي $[p - (10 + 10i)][p - (10 - 10i)] = 0$.

يطلق على التعبير $b^2 - 4ac$، والذي يظهر تحت الجذر المميّز. ويمكن استخدام قيمة المميز لتحديد عدد ونوع جذور المعادلة التربيعية.

المفهوم الأساسي **المميز**

تُبيّن طبيعة حلول $ax^2 + bx + c = 0$ كما يلي:

إذا كان $b^2 - 4ac > 0$، فللمعادلة جذران حقيقيان مميزان.
إذا كان $b^2 - 4ac = 0$، فللمعادلة جذر حقيقي واحد.
إذا كان $b^2 - 4ac < 0$، فللمعادلة جذران مركبان.

مثال 3 **استخدام المميز**

a. **التخمين** بدون إيجاد جذور $f(x) = 7x^2 - 29x + 31$، حدد عدد نقاط التقاطع بين التمثيل البياني والمحور الأفقي x واشرح استنتاجك.

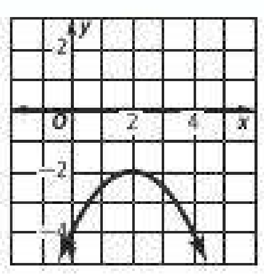
المميز $b^2 - 4ac = (-29)^2 - 4(7)(31) = -27$. المميز سالب، بالتالي فللمعادلة جذران مركبان ولا يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x.

b. **استخدام البنية** إذا كان $ax^2 + 9x + 1.5$ له جذران حقيقيان، فما احتمالات قيم a؟

المميز $b^2 - 4ac = 9^2 - 4(a)(1.5) = 81 - 6a$. للمعادلة جذران حقيقيان ما يعني أن $81 - 6a > 0$ أو $a < 13.5$.

c. **استخدام البنية** يُبين التمثيل البياني للدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$. ما قيمة c؟ ما القيود على a؟ اشرح استنتاجك.

$c = -4$؛ $-1 < a < 0$: التقاطع مع المحور الرأسي y هو -4، إذًا $c = -4$. ويكون محور التماثل هو $x = 2$، إذًا $-\frac{b}{2a} = 2$ أو $b = -4a$. علاوة على ذلك، $b^2 - 4ac < 0$، إذًا $(-4a)^2 - 4a(-4) < 0$ و $a^2 + a < 0$. حيث إن ناتج ضرب $a(a + 1) < 0$، فلا بد أن يكون أحد العوامل > 0 والآخر < 0. إذا كان $a + 1 < 0$ و $a > 0$ فسينشأ عن ذلك تناقضًا. وإذا كان $a < 0$ و $a + 1 > 0$، فإن $-1 < a < 0$.



التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **المثال 2b**، يطبق الطلاب **م.م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)** باستخدامهم دالة تربيعية تمثل الإيراد الذي يأمل الطالب أن يحققه عن طريق بيع القبعات الخاصة به.

بعد حل المعادلة التربيعية ذات الصلة، الخاضعة لقيود الموقف، يجب على الطلاب فهم كيفية تفسير الحلول المركبة. وهذا يؤدي إلى استنتاج أنه لا يمكن تحقيق مبلغ الإيراد المرغوب فيه وفقًا لصيغة الإيراد التي يستخدمها أحمد.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

اشرح الكيفية التي يتيح بها تفكيك مجموعة الأعداد المركبة حلولًا لجميع المعادلات التربيعية. ومع ذلك، إذا كانت المعادلة تمثل موقفًا من الحياة اليومية— فعلى الأرجح قد تشير الحلول المركبة إلى عدم وجود حل في ذلك السياق. عندما يحدث هذا، ينبغي على الطلاب التحقق دائمًا من القيم التي استخدموها والحسابات التي أجروها، للتأكد من عدم وجود حل لإحدى المسائل. في **المثال 2c**، قد يلزم تذكير الطلاب بكيفية أخذ الجذور الحقيقية التي تم إيجادها باستخدام الصيغة التربيعية واستخدامها لإعادة كتابة معادلة تربيعية في صيغة محللة إلى عوامل. وذكرهم بهذه العملية؛ ينبغي أن يتمكنوا عندئذ من ملاحظة كيفية كتابة صيغة محللة إلى عوامل لمعادلة تربيعية بجذور مركبة.

الأسئلة الداعمة

- هل يمكنك التحقق من دقة الحلول المركبة بواسطة التمثيل البياني؟ **لا، لا تقابل الحلول المركبة النقاط الموجودة على التمثيل البياني للدالة.**
- في **المثال 2b**، لاحظ أن المميز أقل من 0 واسأل ما قد يوضحه ذلك. **عندما يكون المجذور أقل من 0، تكون الحلول أعدادًا مركبة. في هذا السياق، قد يعني ذلك أن الإيراد المرغوب فيه يتعذر إيجاده.**

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

اشرح الكيفية التي يمكن بها استخدام المميز لتحليل معادلة تربيعية دون إيجاد الحلول بالفعل. يمكن للطلاب تحديد طبيعة الجذور بدلًا من القيم الفعلية لتلك الجذور.

الأسئلة الداعمة

- هل يمكن أن يخبرك المميز بقيم جذور المعادلة التربيعية؟ **لا، يمكن أن يخبرك المميز بنوع الجذور (حقيقة أم مركبة) الخاصة بالمعادلة.**
- هل يمكن أن يخبرك المميز ما إذا كانت جذور إحدى المعادلات التربيعية موجبة أم سالبة؟ **لا، يمكن أن يخبرك المميز بنوع الجذور (حقيقة أم مركبة) الخاصة بالمعادلة.**
- كيف يبدو التمثيل البياني لمعادلة تربيعية إذا كان $b^2 - 4ac = 0$؟ **سيتقاطع التمثيل البياني مع المحور x عند نقطة واحدة فقط، رأس القطع المكافئ. ويعني ذلك، أن التمثيل البياني سيكون مماسًا للمحور x.**
- في **المثال** 3c، ما الذي يخبرك به التمثيل البياني بشأن قيم a و b و c؟ **c هي نقطة التقاطع مع المحور y، لذا $c = -4$؛ يجب أن تكون a سالبة لأن التمثيل البياني يفتح لأسفل؛ يكون محور التماثل هو $x = 2$، لذا $-\frac{b}{2a} = 2$.**

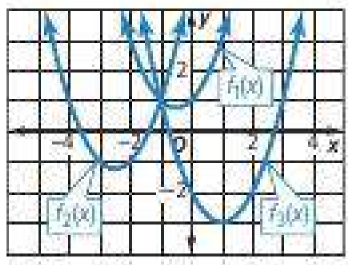
أخطاء شائعة

قد ينسى الطلاب أنه يجب أن تكون المعادلة التربيعية مجموعة مساوية لصفر. قبل أن يمكن تطبيق المعادلة التربيعية. وقد يغفلون عن هذه الخطوة عند تمثيل المواقف حيث يتم إعطاء قيمة للدالة. ولن تمنعهم هذه الخطوة من الحصول على حلول عددية، ولكنها ستقودهم إلى إجابات غير صحيحة.

تمرين

1. **استخدام البنية** استخدم القانون العام للتعبير عن جذور $f(x) = ax^2 + bx + c$ بدلالة a و c و h (الإحداثي x للرأس).
ابدأ بالمتغير $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. اقسم إلى كسرين وعوض بـ $h = -\frac{b}{2a}$ للحصول على $x = h \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. غير الحد الثاني إلى الجذر التربيعي للكسر وبسط إلى $x = h \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}}$. بسّط للحصول على $x = h \pm \sqrt{h^2 - \frac{c}{a}}$.

2. **بناء الفرضيات** أثبت أن $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ هو حل للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$.
عوّض للحصول على $a\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c = 0$، وزع للحصول على $\left(\frac{b^2 + 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + (b^2 - 4ac)}{4a}\right) + \left(\frac{-b^2 - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c = 0$، ثم استخدم مقامًا مشتركًا لـ $4a$ للحصول على $\frac{b^2 + 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + (b^2 - 4ac)}{4a} + \frac{-2b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{0}{4a}$ أو 0.



3. **التخطيط للحل** أنشئ تمثيلاً بيانيًا للدالة $f(x) = x^2 + nx + n$ باستخدام القيم العددية المختلفة للمتغير n. اشرح كيفية إيجاد قيم n التي لن يتقاطع فيها التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مع المحور الأفقي x. ثم جد مجموعة الحل.
التمثيلات البيانية النموذجية: $f_1(x)$: $n = 1$؛ $f_2(x)$: $n = 5$؛ $f_3(x)$: $n = -2$؛ لن تتقاطع التمثيلات البيانية مع المحور الأفقي x عندما تكون الجذور مركبة، والذي يقع عندما $n^2 - 4n < 0$ أو $(n)(n - 4) < 0$. مجموعة الحل هي $\{ n \mid 0 < n < 4 \}$.

4. **التخطيط للحل** بيّن كيفية إعادة كتابة مجموع مكعبات الصيغة في صورة ناتج ضرب ثلاث عوامل خطية.
مجموع مكعبات الصيغة هو $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. طبق القانون العام على العامل الثاني، إذًا تمت إعادة كتابة $a^2 - ab + b^2$ على صورة $[a - \frac{b}{2}(1 + i\sqrt{3})][a - \frac{b}{2}(1 - i\sqrt{3})]$. إذًا مجموع مكعبات الصيغة هو $a^3 + b^3 = (a + b)[a - \frac{b}{2}(1 + i\sqrt{3})][a - \frac{b}{2}(1 - i\sqrt{3})]$.

5. **التعليق على طريقة الاستنتاج** ترى جويرية أن "ناتج ضرب جذور المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + a = 0$ هو 1". استخدم القانون العام لإثبات صحة عبارتها أو عدم صحتها.
باستخدام القانون العام، الجذور هي $x = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(a)}}{2(a)} = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4a^2}}{2a}$. ويكون ناتج ضرب الجذران $\left(\frac{-b + \sqrt{(b)^2 - 4a^2}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}\right)$. يبسط ناتج الضرب إلى $\left(\frac{(-b)^2 - (b^2 - 4a^2)}{4a^2}\right)$. يؤدي تبسيط البسط إلى $\frac{b^2 - b^2 + 4a^2}{4a^2} = \frac{4a^2}{4a^2} = 1$. جويرية على صواب حول الجذور.

أخطاء شائعة

يمكن أن يرتكب الطلاب أي عدد من الأخطاء عند استخدام الصيغة التربيعية، من أخطاء في العلامات إلى تبسيط الكسور والتعابير غير النسبية بشكل غير صحيح. ويمكن أن ينسوا علامة السالب أمام أحد المعاملات أو الثابت. وقد لا يدركون أن 2a هي مقام الصيغة بأكملها وليست الحد الجذري فقط. ونظرًا للخطر الكبير لحدوث خطأ، قم بتعزيز الحاجة إلى التحقق من الإجابات في مقابل قيود وشروط المسألة. ذكر الطلاب بالعمل مع خانة عشرية أخرى أكثر من المطلوب بموجب الحل. وينبغي عليهم التقريب إلى الدقة المرغوب فيها كالخطوة الأخيرة فقط.

6. **التخطيط للحل** في لعبة مهرجانية، يضرب اللاعبون وسادة بمطرقة مطاطية كبيرة. ويطلق ذلك كرة لأعلى أنبوب مائل يبلغ طوله 20 ft لتصل إلى هدفها في القمة. وتقدم جائزة إذا بلغت الكرة الهدف. اشرح كيفية إيجاد السرعات الابتدائية (بالقدم في الثانية) الي ستحقق معها الكرة في الوصول إلى الهدف. ويتم تمثيل الارتفاع بالدالة $h(t) = -16t^2 + vt$، حيث v هي سرعة الابتداء.

افترض أن $h(t) = 20$؛ استخدم القانون العام: $t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4(16)(20)}}{32}$. تخفق الكرة في ضرب الهدف إذا كانت الحلول مركبة، عندما يكون $v^2 - 1280 < 0$. إذا كانت السرعة الابتدائية أقل من حوالي 35.8 قدمًا في الثانية لن تضرب الكرة الهدف.

7. **استخدام البنية** للمعادلة التربيعية $7x^2 + bx + 5 = 0$ جذران مركبان. ما القيم المحتملة للمتغير b؟ اكتب الحل هنا.

إذا كان للمعادلة جذران مركبان، فإن $b^2 - 4ac < 0$. بالتعويض بالقيم من المسألة، $b^2 - 4(7)(5) < 0$ أو $b^2 < 140$. مجموعة الحل هي $\{b \mid -\sqrt{140} < b < \sqrt{140}\}$.

8. **التخطيط للحل** صندوق على شكل متوازي مستطيلات له قاعدة مربعة وارتفاع يزيد عن 3 أمثال طول ضلع قاعدته بمقدار واحد. فإذا زادت أضلاع القاعدة بمقدار 2 in وزاد الارتفاع بمقدار 3 in، سيزيد حجم الصندوق بمقدار $531\ in^2$. ما أبعاد الصندوق الأصلي؟

5 in., 5 in., 16 in؛ لنفترض أن الأبعاد الأصلية هي x و x و $3x + 1$. والحجم الأصلي هو $V_1 = 3x^3 + x^2$. بعد الزيادة ستكون الأبعاد $x + 2$ و $x + 2$ و $3x + 4$. وسيكون الحجم الجديد $V_2 = 3x^3 + 16x^2 + 28x + 16$. $V_2 - V_1 = 531$، إذًا $15x^2 + 28x - 515 = 0$. باستخدام القانون العام، $x = -6.9$ و $x = 5$. وستكون الأبعاد الأصلية هي 5 in في 5 in في 16in .

9. **التخطيط للحل** ما جذور المعادلة التربيعية $x^2 + 2x + 5 = 0$؟ باستخدام هذه الجذور، اكتب المعادلة بالصيغة المحللة.

الجذور التي تم إيجادها باستخدام القانون العام، هي $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$ والتي تبسط إلى $-1 \pm 2i$. في الصيغة المحللة، ستكون المعادلة كما يلي $[x - (-1 + 2i)][x - (-1 - 2i)] = 0$ أو $(x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i) = 0$.

10. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يزعم رامي أن مجموع جذور المعادلة التربيعية يساوي دائمًا $\frac{-b}{a}$. فهل توافقه الرأي؟

نعم؛ جذرا $f(x) = ax^2 + bx + c$ هما $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. مجموع الجذور هو $\frac{-2b}{2a}$ أو $\frac{-b}{a}$.

11. **التفكير بطريقة كمية** افترض أن $f(x) = 3x^2 - kx + m$ حيث k و m عددان حقيقيان.

a. جــد جذور $f(x)$.

$3x^2 - kx + m = 0$. باستخدام القانون العام، $x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 12m}}{6}$.

b. بأي قيم k و m يكون للدالة $f(x)$ جذور مركبة؟

باستخدام المميز، $f(x)$ لها جذور مركبة لجميع القيم لكل من k و m بحيث $k^2 - 12m < 0$ أو $k^2 < 12m$.

2.6 القانون العام والمميز 47

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **التمارين 3 و 4 و 6 و 8**، يطبق الطلاب م.م.ر 1 **(فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)** باتخاذهم قرارًا بشأن كيفية إنشاء معادلة تربيعية لكل سياق.

يجب على الطلاب تحديد صيغة رياضية يمكن تمثيلها بدالة تربيعية قبل تطبيق مهارات من هذا الدرس لإيجاد الحل. سواء كان لإيجاد مساحة شكل هندسي أو السرعة الابتدائية لمقذوف. ويجب عليهم اتخاذ قرار بشأن كيفية تعيين أي متغيرات ثم كيفية تفسير الحلول في سياق المسألة.

تمرين

في **التمرين 1**، يستخدم الطلاب صيغة تربيعية للتعبير عن الجذور فيما يتعلق بـ a، و c، والإحداثي x للرأس.

في **التمرينين 2** و **5**، يوضح الطلاب أن الحلول المقدمة بواسطة الصيغة التربيعية التي تحقق الصيغة العامة للمعادلة التربيعية وتثبت وجود صلة بين الحلول.

في **التمرينين 3** و **7**، يحدد الطلاب القيم التي تنتج معادلة تربيعية بجذور مركبة.

في **التمارين 4 و 6 و 8 و 10 و 11**، يقوم الطلاب بحل مسائل تجريدية ومسائل من الحياة اليومية تتضمن معادلات تربيعية.

في **التمرين 9**، يكتب الطلاب الصيغة المحللة إلى عوامل لمعادلة تربيعية بجذور مركبة، تحقق **N.CN.8**.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	7
2	3
3	1
4	1
5	3
6	1
7	7
8	1
9	7
10	3
11	2

2.7 تحويل اتمثلات البيانية للدوال التربيعية

المعايير

معايير الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 4, 7

المتطلبات الأساسية

- التمثيل البياني للدوال
- تحويل التمثيلات البيانية للدوال
- استكمال المربع

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

يعد أحد الجوانب الصعبة في هذه العملية هو الحفاظ على دالة متوازنة عن طريق جمع وطرح نفس المقدار عند الانتهاء من المربع. ركز على مساعدة الطلاب على تحليل أي معاملات رئيسية إلى عوامل، ولكن أيضًا استخدم تلك المعاملات لتحقيق توازن الدالة بعد الانتهاء من المربع.

الأسئلة الداعمة

- لماذا لا تستمر دالة الإيرادات في الزيادة مع ارتفاع الأسعار؟ **بينما ترتفع الأسعار، يتم بيع عدد أقل من القمصان، مما يؤدي إلى انخفاض في الإيرادات.**
- إذا تم تغيير $-3(x^2 - 6x)$ إلى $-3(x^2 - 6x + 9)$ عند إكمال المربع. ما المبلغ الذي يجب إضافته أو طرحه للحفاظ على التعبير دون تغيير؟ **27**

2.7 تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

الأهداف

- إكمال المربع لكتابة الدوال بصيغة الرؤوس.
- تحليل آثار التحويلات على التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

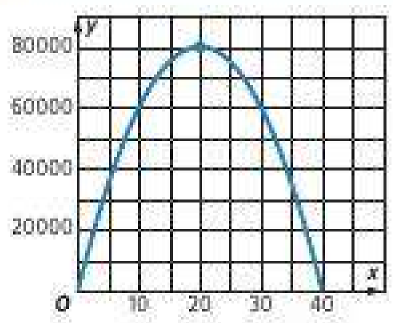
عند كتابة معادلة تربيعية في الصيغة القياسية، يمكنك إكمال المربع لإعادة كتابتها بصيغة الرؤوس. وتكون صيغة الرؤوس للمعادلة التربيعية $f(x) = a(x - h)^2 + k$. حيث (h, k) هي رأس القطع المكافئ، و $x = h$ هو محور التماثل وa تحدد شكل القطع المكافئ والاتجاه الذي يكون مفتوحا فيه. إذا لم يكن معامل الحد التربيعي ، تذكر أن تحلل معامل الحدود الخطية والتربيعية إلى العوامل قبل إكمال المربع.

مثال 1 زيادة العائد للحد الأقصى

الاستكشاف صممت شركة قميصًا جديدًا لخط إنتاج الملابس الرياضية. ولتحديد سعر التجزئة للقميص، تستخدم الشركة دالة عائد معرفة بـ $R(p) = 8000p - 200p^2$. حيث R هو العائد السنوي المتوقع و p هو سعر المبيعات وكلاهما بالدرهم.

a. **التفكير بطريقة كمية** استخدم أسلوب إكمال المربع لإعادة كتابة الدالة في صيغة الرؤوس.
أولاً، أعد ترتيب الحدود وحلل المعامل الرئيس إلى العوامل للحصول على $R(p) = -200(p^2 - 40p)$. ثم أكمل المربع للحصول على $R(p) = -200(p^2 - 40p + 400) + 80,000$. ويمكن إعادة كتابة ذلك في صيغة الرؤوس في الصورة $R(p) = -200(p - 20)^2 + 80,000$.

b. **التخطيط للحل** أنشئ تمثيلاً بيانيًا لدالة العائد ثم صفها.
الرأس عند النقطة$(20, 80,000)$ والقطع المكافئ مفتوح لأسفل لأن a



c. **استخدام النماذج** ما سعر التجزئة الذي ينبغي للشركة اختياره لزيادة عائدها المحتمل لأقصى حد ممكن؟ وبهذا السعر، كم عدد القمصان التي تستطيع الشكة توقع بيعها كل عام؟ اشرح استنتاجك.
يمثل ارتفاع التمثيل البياني مبلغ العائد الذي تتوقع الشركة اكتسابه كل عام. ويحدث أقصى مبلغ للعائد عند الرأس ويقابل الإحداثي x مبلغ بيع تجزئة يساوي AED 20. ويمثل الإحداثي y للرأس العائد المتوقع والبالغ AED 80,000. اقسم العائد الإجمالي على سعر القميص الواحد ومنه تتوقع الشركة بيع 4000 قميص كل عام.

معلومات أساسية في الرياضيات

يجمع هذا الدرس بين المعرفة التي حصل عليها الطلاب في الدروس السابقة. فقد تم تعريفهم على ترميز الدوال وبعض الملامح الرئيسية للتمثيلات البيانية: القيم الصغرى أو الكبرى وكذلك التقاطعات مع المحور x أو y. وقد درسوا أسلوب إكمال المربع، ويمكنهم استخدامه لكتابة العلاقات والعلاقات والدوال التربيعية في شكل حيث يمكن التعرف بسهولة على الرأس.

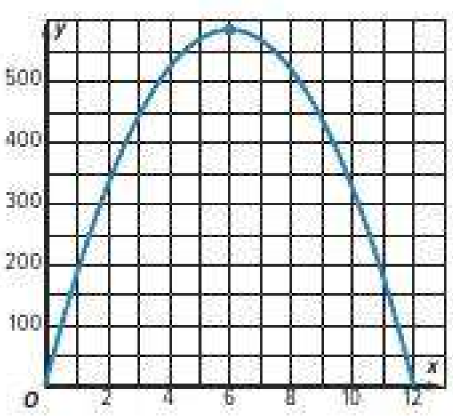
قد يميلون إلى استخدام هذه الأساليب نفسها في دراسة القطوع المخروطية الأخرى (الدائرة والقطع الناقص والقطع الزائد)، وذلك باستخدام إكمال المربع لتحديد مركز التمثيلات البيانية، على غرار إيجاد رأس القطع المكافئ.

d. التفكير بطريقة تجريدية فسر معنى التقاطعات في التمثيل البياني في سياق هذه المسألة.

يوجد تقاطع عند النقطة (0, 0) يقابل سعر بيع التجزئة البالغ AED 0 ولن يتم اعتباره جزءًا من مجال الدالة، لأن سعر التجزئة لا بد أن يكون أكبر من 0. ويقع تقاطع x آخر عند النقطة (40, 0) ويقابل سعر تجزئة يساوي AED 40. ويتوقع نموذج العائد أن يكون هذا السعر مرتفعًا للغاية مما سيؤدي إلى عدم بيع القمصان.

مثال 2 ارتفاع مقذوف

الاستكشاف في أحد المسابقات الشعبية والتي يطلق عليها مقذوف من قرع العسل، يتبارى المتسابقون في قذف قرع العسل باستخدام مقلاع فقط. افترض أن ارتفاع قرع العسل المقذوف ممثل بالدالة $h(t) = -16t^2 + 192t + 8$، حيث أن h مقاس بالقدم و t مقاس بالثواني.



a. التخطيط للحل أعد كتابة الدالة في صيغة الرؤوس. صف التمثيل البياني للدالة وارسمه.

حلل المعامل الرئيس إلى العوامل للحصول على $h(t) = -16(t^2 - 12t) + 8$. ثم أكمل المربع للحصول على $h(t) = -16(t^2 - 12t + 36) + 8 + 576$. يمكن إعادة كتابة هذه الدالة في صيغة الرأس في الصورة $h(t) = -16(t - 6)^2 + 584$. وتكون الرأس عند (6, 584) والقطع المكافئ مفتوح لأسفل لأن a سالبة.

b. استخدام النماذج ما أقصى ارتفاع وصله قرع العسل وما الزمن الذي استغرقه ذلك بعد الإطلاق؟ اشرح إجابتك.

تمثل قيم y في التمثيل البياني ارتفاع قرع العسل، وقد بلغ الارتفاع الأقصى 584 in. ويمثل الإحداثي x للرأس الزمن المنقضي عندما يصل قرع العسل إلى أقصى ارتفاع. زيحدث ذلك بعد 6 ثوان بعد إطلاقه في الهواء.

c. التفكير بطريقة تجريدية فسر معنى التقاطعات في التمثيل البياني في سياق هذه المسألة.

يوجد تقاطع y عند (0, 8) ويبين ذلك الارتفاع الذي تم إطلاق قرع العسل منه. أما تقاطع x إلى يسار المحور الرأسي y فيمكن تجاهله، نظرًا لأنه يقع خارج مجال الدالة (يبدأ الزمن عند صفر زمن الإطلاق). ويقابل التقاطع الآخر مع x الزمن المنقضي عندما يصطدم قرع العسل بالأرض.

d. التفكير بطريقة كمية أطلق مقلاع آخر في المسابقة قرع عسل بارتفاع تم تمثيله بالدالة $g(t) = -16t^2 + 200t + 5$. هل سيبلغ قرع العسل ارتفاعًا أعلى من قرع العسل الأول؟ أي من قرعي العسل قضى مدة أطول معلقًا في الهواء؟ اشرح إجابتك.

هذه الدالة المكتوبة في صيغة الرأس $g(t) = -16(t - 6.25)^2 + 630$. ويبلغ قرع العسل هذا ارتفاعًا مقداره 630 in، أعلى من من القرع الأول. ويتقاطع هذه القرع مع x عند (12.5, 0)، ما يعني أن القرع ظل في الهواء 12.5 ثانية بينما ظل الأول في الهواء 12 ثانية فقط.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 4

ناقش بعض النماذج التربيعية المختلفة واسأل الطلاب ما الذي يقاس على طول المحاور الأفقية والرأسية. ثم اسألهم أي من تلك القيم يساوي صفر عند التقاطعات المختلفة، وماذا يعني ذلك في سياق المسألة. اذكر أنه من الممكن أن تقع التقاطعات خارج نطاق أو مدى الدالة.

الأسئلة الداعمة

- هل التمثيل البياني من **الجزء b** يمثل المسار الفعلي لليقطين؟ **لا، التمثيل البياني هو قياس الارتفاع مقابل الوقت وليس الارتفاع مقابل المسافة الأفقية المقطوعة. ويمكن أيضًا تمثيل نموذج المسار الفعلي لليقطين بالقطع المكافئ، ولكن بمعاملات مختلفة.**
- هل يمكن تمثيل نموذج مسار المقذوفة بدالة تربيعية مع معامل رئيسي موجب؟ **لا، المقذوفة ترتفع ثم تسقط على الأرض مرة أخرى. يجب تمثيلها نموذجيًا باستخدام قطع مكافئ مع قيمة عظمى عند الرأس.**

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

م.م.ر 4 يطلب من الطلاب تمثيل نموذج الحالات الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل تلك العلاقات رياضيًا لاستخلاص النتائج.

في **المثال 1c**، يجب على الطلاب استخدام التمثيل البياني لنموذج إيرادات لتحديد السعر الأمثل لمنتج جديد.

يجب على الطلاب الرجوع إلى الإحداثي x للرأس، حيث يمثل هذا السعر الذي يجب على الشركة تحديده لزيادة إيراداتها.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

ناقش كيف يمكن استخدام نقطة واحدة أو أكثر على التمثيل البياني للدالة للعثور على قيم المعاملات والثوابت في معادلة الدالة. ذكرهم بأن المعادلة يجب أن تكون صحيحة لأي نقاط تقع على التمثيل البياني لها.

الأسئلة الداعمة

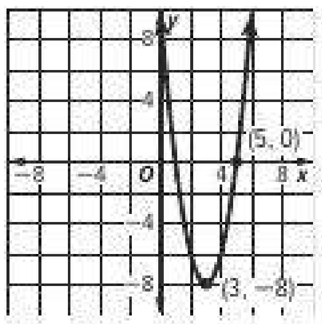
- مقارنةً بالتمثيل البياني للمعادلة $g(x) = x^2$. ما الاتجاه الذي تمت إليه إزاحة الدالة $f(x) = (x + 4)^2$؟ **تمت إزاحة التمثيل البياني للدالة 4 وحدات لليسار.**
- مقارنةً بالتمثيل البياني للمعادلة $g(x) = x^2$. ما الاتجاه الذي تمت إليه إزاحة الدالة $f(x) = x^2 + 4$؟ **تمت إزاحة التمثيل البياني للدالة 4 وحدات للأعلى.**
- مقارنةً بالتمثيل البياني للمعادلة $g(x) = x^2$. ما الاتجاه الذي تمت إليه إزاحة
- الدالة $f(x) = (x - 4)^2$؟ **تمت إزاحة التمثيل البياني للدالة 4 وحدات لليسار.**
- مقارنةً بالتمثيل البياني للمعادلة $g(x) = x^2$. ما الاتجاه الذي تمت إليه إزاحة الدالة $f(x) = x^2 - 4$؟ **تمت إزاحة التمثيل البياني للدالة 4 وحدات للأعلى.**

ملخص المفهوم **تحويلات الدوال التربيعية**

التمثيل البياني للدالة $f(x) = a(x - h)^2 + k$ يعرض التحويلات التالية:

الإزاحة الأفقية	h وحدات إلى **يمين** إذا كان **$h > 0$**، و h وحدات إلى **يسار** إذا كان **$h < 0$**.
الإزاحة الرأسية	k وحدات **إلى الأعلى** إذا كان **$k > 0$**، و k وحدات **إلى الأسفل** إذا كان **$k < 0$**.
الانعكاس	يفتح لأعلى إذا **$a < 0$**، و يفتح لأسفل إذا **$a > 0$**.
تغيير الأبعاد/التمدد	تمدد أفقي بعامل من **$\lvert a\rvert$**، عند $\lvert a\rvert >$ **1**، و ضغط أفقي بعامل من **$\lvert a\rvert$**، عند **0** $< \lvert a\rvert <$ **1**.

مثال 3 **تحويلات التمثيلات البيانية التربيعية**



a. **التخطيط للحل** جـد معادلة الدالة المبينة في التمثيل البياني باستخدام صيغة الرأس. اكتب الحل هنا

الرأس هي $(3, -8)$، إذًا فالدالة لها الصيغة $y = a(x - 3)^2 - 8$. عوض إحداثيات النقطة الأخرى و $0 = a(5 - 3)^2 - 8$ أو $a = 2$. إذًا فمعادلة التمثيل البياني هي $y = 2(x - 3)^2 - 8$.

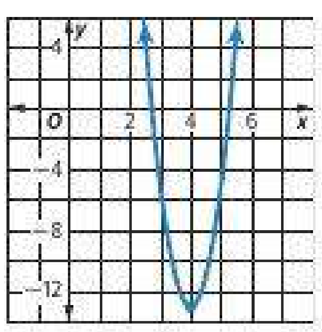
b. **التخطيط للحل** صف التحويلات اللازمة لإنشاء التمثيل البياني $g(x) = -3x^2 - 6x + 4$ من التمثيل البياني $f(x) = x^2$. اكتب الحل هنا.

حلل المعامل الرئيس إلى العوامل للحصول على $g(x) = -3(x^2 + 2x) + 4$. ثم أكمل المربع للحصول على $g(x) = -3(x^2 + 2x + 1) + 4 + 3$. وأخيرًا أعد كتابة الدالة في الصورة $g(x) = -3(x + 1)^2 + 7$. للحصول على التمثيل البياني من التمثيل البياني للدالة $f(x)$. قم بالتمديد رأسيًا بمعامل 3 ثم طبق الانعكاس بالمحور الأفقي x، ثم قم بالإزاحة وحدة لليسار و 7 وحدات لأعلى.

تمرين

1. **التخطيط للحل** اكتب الدالة $f(x) = 5x^2 + 25x + 13$ في صيغة الرأس وحدد إحداثيات الرأس. اكتب الحل هنا.

حلل المعامل الرئيس إلى العوامل للحصول على $f(x) = 5(x^2 + 5x) + 13$. ثم أكمل المربع للحصول على $f(x) = 5(x^2 + 5x + \frac{25}{4}) + 13 - \frac{125}{4}$ أو $f(x) = 5(x + \frac{5}{2})^2 - \frac{73}{4}$. الرأس هي $(-\frac{5}{2}, -\frac{73}{4})$.



2. **التخطيط للحل** مثّل الدالة $f(x) = 8x^2 - 64x + 115$ بيانيًا و اكتب الحل هنا.

حلل المعامل الرئيس إلى العوامل للحصول على $f(x) = 8(x^2 - 8x) + 115$. ثم أكمل المربع للحصول على $f(x) = 8(x^2 - 8x + 16) + 115 - 128$ أو $f(x) = 8(x - 4)^2 - 13$.

الأخطاء الشائعة

عند إكمال مربع دالة، قد يتعذر على الطلاب تحليل الحدود التربيعية والخطية بشكل صحيح، إذا كان المعامل الرئيسي لا يساوي 1. إذا قاموا باتخاذ القرار الصحيح لعامل، فيمكن أن يواجهوا صعوبة مع العلامات، وخاصةً إذا كان المعامل الرئيسي سالبًا.

قد ينسى الطلاب أن عليهم موازنة الدالة عن طريق إضافة أو طرح عكس المقدار الذي تم استخدامه لإكمال المربع. ويصبح هذا الأمر صعبًا بشكل خاص إذا تم تحليل معامل رئيسي إلى عوامل، لأن هذا يؤثر على المقدار المضاف لإكمال المربع.

3. حديقة محاطة بسور 60 ft ومقسمة إلى قطعتين وتمثل مساحتها بالدالة $A(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 30x$، حيث A هي المساحة بالقدم المربع.

a. **استخدام النماذج** أعد كتابة الدالة في صيغة الرأس وحدد أقصى مساحة ممكن للحديقة.
اكتب الحل هنا.
حلل المعامل الرئيس إلى العوامل للحصول على $A(x) = -\frac{3}{2}(x^2 - 20x)$، ثم أكمل المربع للحصول على $A(x) = -\frac{3}{2}(x^2 - 20x + 100) + 150$ أو $A(x) = -\frac{3}{2}(x - 10)^2 + 150$. الإحداثي y للرأس هو 150، وتمثل القيمة العظمى لدالة المساحة. إذًا فإن المساحة العظمى المحتملة للحديقة هي $150\ in^2$.

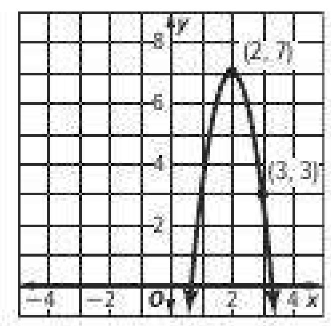
b. **استخدام البنية** اشرح العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $A(x)$ بالتمثيل البياني للمعادلة $y = x^2$. اشرح بدلالة التحويلات الضرورية لإنشاء التمثيل البياني للدالة $A(x)$ من التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2$.
طبّق الانعكاس عبر المحور الأفقي x وقم بالتمديد رأسيًا بعامل $\frac{3}{2}$ ثم الإزاحة 10 وحدات إلى اليمين و 150 وحدة لأعلى.

4. **بناء الفرضيات** تدرس جنات الدالتين الممثلتين وتذكر أن $g(x)$ قيمتها العظمى أكبر من القيمة العظمى للدالة $f(x)$. هل هي على صواب؟ اشرح لم أو لم لا.

$f(x)$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 10$

$g(x)$



حلل المعامل الرئيس للدالة $f(x)$ إلى العوامل للحصول على $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 12x) - 10$ ثم أكمل المربع للحصول على $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 6) + 8$ أو $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 12x + 36) - 10 + 18$. إذًا فالقيمة العظمى للدالة $f(x)$ هي 8. بالقراءة من التمثيل البياني، فإن القيمة العظمى للدالة $g(x)$ هي 7. إذًا، جنات ليست على صواب. فالدالة $f(x)$ قيمتها العظمى أكبر.

5. **التخطيط للحل** صف التحويلات اللازمة لإنشاء التمثيل البياني $g(x) = -x^2 - 10x + 294$ من التمثيل البياني $f(x) = x2$. اكتب الحل هنا.
أكمل المربع $g(x)$ للحصول على $g(x) = (x^2 - 10x + 25) + 29 - 25$ أو $g(x) = (x - 5)^2 + 4$. حلل المعامل الرئيس للدالة $f(x)$ إلى العوامل للحصول على $f(x) = -2(x^2 + 6x) - 19$، ثم أكمل المربع للحصول على $f(x) = -2(x^2 + 6x + 9) - 19 + 18$ أو $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$. ولإنشاء التمثيل البياني للدالة $g(x)$، يجب ضغط التمثيل البياني للدالة $f(x)$ رأسيًا بمعامل $\frac{1}{2}$ وانعكاسه بالمحور الأفقي x ثم إزاحته 8 وحدات إلى اليمين و 5 وحدات إلى أعلى.

تمرين

في **التمارين 1** و **2**، يكمل الطلاب مربع العلاقات والعلاقات والدوال التربيعية، من أجل تحليلها وتمثيلها بيانيًا.

في **التمرين 3**، يجب على الطلاب تحليل دالة تمثل نموذج من واقع الحياة اليومية، وتفسير خصائص التمثيل البياني في سياق الوضع، ثم شرح العلاقة بين التمثيل البياني والتمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$.

في **التمرين 4**، يجب على الطلاب إكمال المربع للحصول على شكل الرأس لمعادلة تربيعية معينة لمقارنة خصائصه مقابل خصائص دالة تم توفير التمثيل البياني لها.

في **التمرين 5**، يجب على الطلاب تحديد التحولات الموجودة في دالتين، لتحديد كيفية تخطيط تمثيل بياني لواحدة على الأخرى.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1–2	1
3	4, 7
4	3
5	1

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 3 يتطلب من الطلاب تحديد العيوب ونقد الاستنتاج أو استخلاصات الآخرين. في **التمرين 4**، يجب على الطلاب تحليل استنتاج قدمه شخص آخر وتحديد كيف يمكن تأكيد أو رفض هذه العبارة.

يجب أن تكون قادرة على تقديم أدلة تدعم أو تتناقض مع فكرة أن دالة واحدة لها قيمة عظمى أكبر من الأخرى. يتم عرض الدوال في أشكال مختلفة، ويتعين على الطلاب أن يقرروا كيف يمكنهم التعامل مع المعلومات لرسم استنتاجاتهم حول الدوال. من خلال إكمال المربع على الدالة الأولى، يمكنهم إجراء مقارنة سريعة للدوال ورفض الحجة التي قدمت لهم.

التحدث عن القطوع المكافئة

سوف يستخدم الطلاب المعرفة بالقطوع المكافئة لاستكشاف أحد النماذج ووضع توقعات.

المعايير

معايير الممارسة في الرياضيات: تعزز مهمة تقويم الأداء بالوحدة 2 الممارسات في الرضيات **م.م.ر 1، و م.م.ر 2، و م.م.ر 6.**

بداية سريعة

تعرّف الطلاب أولاً على البؤرة والدليل للقطع المكافئ في الهندسة، وسوف يتناولون هذا الموضوع مرة أخرى لاحقًا في هذا البرنامج الدراسي. في غضون ذلك، راجع معنى مصطلحي "البؤرة" و"الدليل"، وأعد رسمًا تخطيطيًا بسيطًا. يستطيع الطلاب استخدام حقيقة أن رأس القطع المكافئ للمعادلة المعطاة يقع عند (0 ,0)، وكذلك المعلومات المقدمة في بداية هذه المهمة، لإيجاد بؤرة المعادلة المعطاة. اطلب من الطلاب تسمية إحداثيات البؤرة وقيمة a لهذا القطع المكافئ.

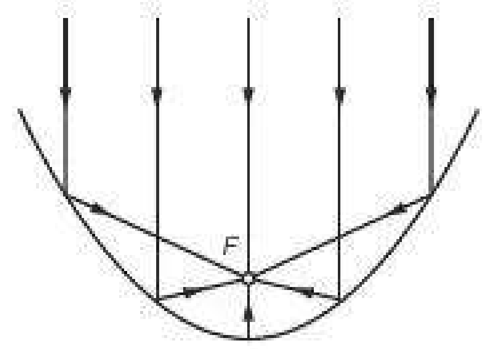
مهمة تقويم الأداء

التحدث عن القطوع المكافئة

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وعلّل إجاباتك.

يكون القطع المكافئ عبارة عن مجموعة كافة النقاط في المستوى الإحداثي التي تقع على نفس المسافة من نقطة معينة وتسمى هذه النقطة البؤرة ومستقيم معين يعرف بالدليل. بافتراض قطع مكافئ ممثل بمعادلة في الصورة $y = ax^2$، فإن إحداثيات المركز هي $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$.

تُشكّل أطباق العاكس المكافئ من خلال "تدوير" قطع كافئ حول محور تماثله لصنع طبق. وتتميز الأطباق بميزة فريدة ألا وهي أن أي أمواج يلتقطها الطبق توازي محور تماثله ومنعكسة عبر بؤرة المكافئ (النقطة F في الرسم التخطيطي أدناه). على نحو مماثل، تنشأ الأمواج عند البؤرة وتنعكس خارج الطبق موازية لمحور تماثله. وتستخدم الأطباق العاكسة لكافة الإشارات بمجموعة كبيرة من الاستعمالات. أما الطبق المعروف بالطبق الصوتي الهامس فيركز على الأمواج الصوتية ويضخمها لأي أذن تقف في البؤرة.



مقطع عرضي للتفاعل بين الأمواج القادمة وعاكس مكافئ:

الجزء A

المقطع العرضي هو مركز أحد هذه الأطباق ويوجد في لوس أنجلوس بكاليفورنيا ويمكن تمثيل بالمعادلة $y = 0.1x^2$، حيث كل من x و y بالقدم. كم يبعد المركز عن رأس الطبق؟

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع **م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. توجد أجزاء من المهمة، بالأخص **الجزء B**، التي توجّه الطلاب أو لا توجههم على الإطلاق للبدء بمفهوم بسيط (القطع المكافئ)، وترجمته إلى سياق لا يُنظر إليه في أغلب الأحوال بأنه تعبئة للقطع المكافئ داخل صندوق حرفيًا. اطلب من الطلاب رسم ما قد يبدو عليه العاكس الذي له شكل القطع المكافئ عندما يكون بداخل صندوق من كل زاوية، وإيجاد العلاقة بين أبعاد الصندوق وخواص القطع المكافئ.

الجزء B

إذا كان للطبق الصوتي الهامس الموجود في **الجزء A** قطر دائري قدره 6 ft، برأس عند (0, 0)، حدد أبعاد أصغر صندوق مستطيل الشكل يمكن تخزينه إذ كان وجه الطبق لأسفل. (لاحظ أن سمك جدران الصندوق 0.5 ft.)

الجزء C

يتم وضع اثنين من الأطباق الصوتية الهامسة قبالة بعضهما البعض دائمًا بحيث يستطيع شخص الهمس عند نقطة بؤرة أحد الأطباق ويستطيع شخص آخر سماعه عند نقطة بؤرة الطبق الآخر. إذا تم وضع طبق ثان بنفس الحجم مواجهًا للطبق الموجود في **جزء A**، فحدد المعادلة التي تمثل الطبق الثاني إذا كانت المسافة بين البؤرتين تساوي 28 ft.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

هناك جزء مهم من حل **الجزء B** يتمثل في إدراك أن الطبق موجّه لأسفل مباشرة. لذا الدائرة التي يبلغ قطرها 6 أقدام ينبغي استيعابها داخل قاعدة الصندوق. إذًا، يتعين أن يكون الصندوق عميقًا بما يكفي لاحتواء ارتفاع الطبق.

- عند الضرورة، اطلب من الطلاب محاولة وصف هذه المسافة بدلالة القطع المكافئ. ما قطر القطع المكافئ؟ ما قيم x على التمثيل البياني التي تتوافق مع هذا العرض؟ **6 أقدام؛ ±3**
- ذكّر الطلاب باستخدام سُمك جدران الصندوق عند حساب الأبعاد الخارجية للصندوق.

أخطاء شائعة

في **الجزء C**، قد يتجاهل الطلاب جعل المعامل الرئيسي لديهم سالبًا بحيث يواجه الطبق العاكس الآخر.

معايير رصد الدرجات

الجزء	النقاط العظمى	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	a يساوي 0.1، وهذا يعني أن $\frac{1}{4a} = 2.5$. إذًا، البؤرة تبتعد بمقدار 2.5 قدم عن رأس القطع المكافئ.
B	4	أول بعدين يساويان 6 ft في 6 ft، استنادًا إلى القطر. ونحصل على عمق الصندوق بالحل عندما يكون $x = \pm 3$. بما أن العمق هو مسافة النقطة عند $x = \pm 3$ إلى المحور x، يُمكننا إيجاد هذه المسافة عن طريق الإحداثي y: $y = 0.1(3^2) = 0.9$ ft. إذًا، الأبعاد الداخلية هي 6 ft في 6 ft في 0.9 ft. وبما أن جدران الصندوق سمكها 0.5 بوصة، فينبغي أن يكون الصندوق 6 ft 1 in في 6 ft 1 in في 11.8 بوصة طولاً.
C	4	تبعد البؤرة بمقدار 2.5 ft عن رأس القطع المكافئ، مع احتساب هذا من الطرف الآخر، نحصل على 5 ft + 28 ft = 33 ft بين رأسي القطع المكافئ. المعامل الرئيسي في المعادلة الثانية الذي يجب أيضًا أن يكون سالبًا. لذلك، $y = -0.1x^2 + 33$.
الإجمالي	10	

حمام سباحة الفناء الخلفي

سوف يستخدم الطلاب المعرفة بتركيب الدوال لتمثيل تعبير تربيعي باستخدام وسائل تعليمية يدوية لتحديد النقطة العظمى.

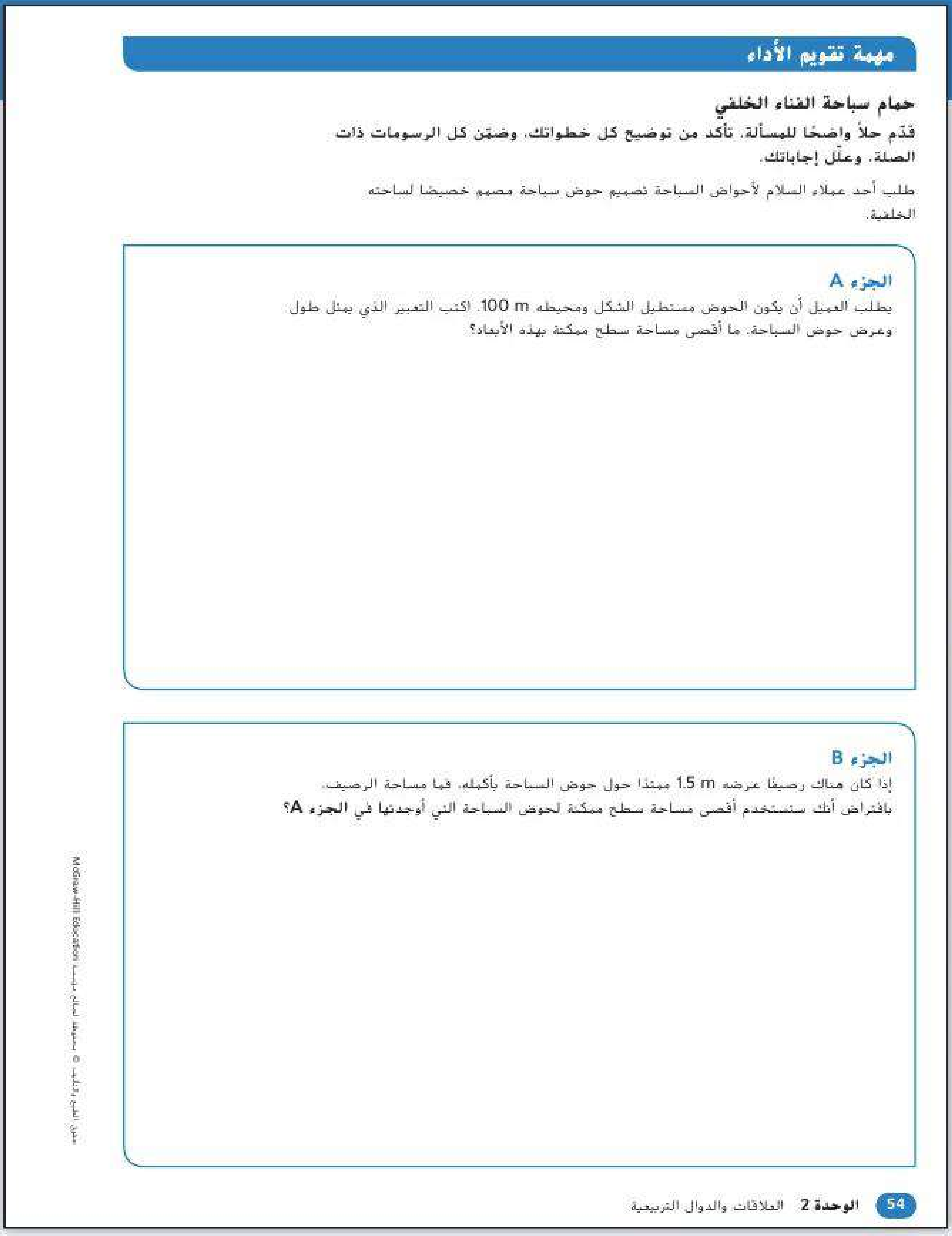
المعايير

معايير الممارسة الرياضية: تدعم مهمة تقويم الأداء الوحدة 2 الممارسات في **الرياضيات م.م.ر 1، و م.م.ر 2، و م.م.ر 4، و م.م.ر 5.**

بداية سريعة

في **الجزء A**، يحتاج الطلاب إلى كتابة معادلة تربيعية، وإدراك أن رأس التمثيل البياني لهذه المعادلة سوف يقدم الحل. اطرح السؤالين التاليين:

- ما نوع القطع المكافئ الذي له نقطة عظمى؟ هل يمكنك توضيح ما إذا كان هذا هو النوع الصحيح؟ **القطع المكافئ الذي تكون فتحته لأسفل (مع معامل رئيسي أدنى من 0) سيكون له نقطة عظمى. ضرب البعدين لإعطاء تعبير للمساحة ينبغي أن يوضح ذلك جيدًا.**
- كيف نحدد القيمة العظمى للقطع المكافئ، إن كانت لديه قيمة عظمى؟ **إذا كانت فتحة القطع المكافئ لأسفل، فالقيمة العظمى هي الإحداثي y لرأس القطع المكافئ، ويمكن إيجادها عن طريق التمثيل البياني أو استخدام التكنولوجيا أو التعويض عن الإحداثي x لرأس القطع المكافئ، $x = -\frac{b}{2a}$ ، في المعادلة والحل لإيجاد قيمة y.**


مهمة تقويم الأداء

حمام سباحة الفناء الخلفي

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وعلّل إجاباتك.

طلب أحد عملاء السلام لأحواض السباحة تصميم حوض سباحة مصمم خصيصًا لساحته الخلفية.

الجزء A

يطلب العميل أن يكون الحوض مستطيل الشكل ومحيطه 100 m. اكتب التعبير الذي يمثل طول وعرض حوض السباحة. ما أقصى مساحة سطح ممكنة بهذه الأبعاد؟

الجزء B

إذا كان هناك رصيفًا عرضه 1.5 m ممتدًا حول حوض السباحة بأكمله، فما مساحة الرصيف، بافتراض أنك ستستخدم أقصى مساحة سطح ممكنة لحوض السباحة التي أوجدتها في **الجزء A**؟

54 **الوحدة 2** العلاقات والدوال التربيعية

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. من أجل إكمال كل جزء من أجزاء هذه المهمة، سيحتاج الطلاب إلى إنشاء معادلات ذات صلة وتمثيلها بالوسائل التعليمية اليدوية في إطار الرياضيات "البحتة"، ثم التحقق ما إذا كانت إجاباتهم صحيحة. سيحتاج الطلاب إلى تطبيق مهارات الاستنتاج من أجل كتابة تعبيرات لأبعاد حمام السباحة بدلالة القطر الثابت المُعطى ومتغير من اختيارهم. قد يختبر **الجزء C** حدسهم، حيث قد لا يعتقد الطلاب في البداية أن مساحة المنصة لا تعتمد على قيمة x، ولكن الاستدلال السليم سيثبت صحة ذلك.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 5

سيواجه الطلاب صعوبة في تصور التمثيل البياني من المعادلة التربيعية المستخدمة. إذا كان الأمر كذلك، فيمكن أن يستخدم الطلاب برنامج تمثيل بياني أو حاسبة التمثيل البياني أو عمل رسم تقريبي للمعادلة التربيعية لرؤية التمثيل البياني للقطع المكافئ.

أخطاء شائعة

في **الجزء A**، قد يجد بعض الطلاب أصفار المعادلة التربيعية بدلاً من رأسها.

في **الجزء B**، قد ينسى الطلاب إضافة 1.5 إلى كل من الطول والعرض.

في **الجزء C**، قد يجد الطلاب صعوبة في إيجاد مساحة المنصة عن طريق عمل 4 مستطيلات بحيث يكون عرض كل مستطيل منها يساوي 1.5 m.

الفرق بين **الجزء C والجزء D** هو أنه بدلاً من إضافة 2(1.5) أو 3 إلى الطول والعرض، سيحتاج الطلاب إلى إضافة 2q إلى الطول والعرض.

الجزء C

بين أن الرصيف الذي يبلغ عرضه 1.5 m ستكون مساحته دائمًا 159 m بغض النظر عن قيمة x، باستخدام تعابير الطول والعرض المقدمة في **الجزء A**.

الجزء D

اكتب معادلة تمثل مساحة الرصيف A بدلالة عرضه q. استخدم تعابير الطول والعرض المقدمة في **الجزء A**.

معايير رصد الدرجات

الجزء	النقاط العظمى	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	4	البعدان هما x و 50 − x؛ $A = 50x - x^2$ والتي لها قيمة عظمى عند $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{-2} = 25$. أقصى مساحة للسطح هي $25^2 = 625\ m^2$.
B	4	ستكون مساحة حمام السباحة 25 m في 25 m (باستخدام التعبيرات المستمدة من **الجزء A**). بإضافة 1.5 إلى كل طرف، ستبلغ المنصة وحمام السباحة معًا 28 m في 28 m مع مساحة $784\ m^2$. بطرح مساحة حمام السباحة، سنحصل على مساحة المنصة، وهي $159\ m^2$.
C	4	المنصة في أي تصميم لحمامات السباحة ستكون لها المساحة $(x + 3)(50 - x + 3) - [x(50 - x)] = (x + 3)(53 - x) - [50x - x^2] = [159 + 50x - x^2] - 50x + x^2 = 159$ مترًا مربعة.
D	8	$A = (\ell + 2q)(w + 2q) - \ell w = (50 - x + 2q)(x + 2q) - x(50 - x) = 50x - x^2 + 100q + 4q^2 - (50x - x^2) = 100q + 4q^2$.
الإجمالي	20	

تشخيص الأخطاء

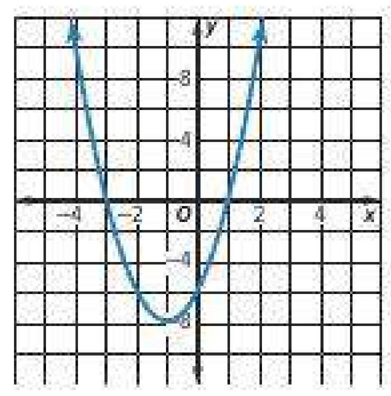
إذا أجاب الطلاب عن **العنصر 6** بشكل غير صحيح، فمن المحتمل أنهم على غير دراية بطريقة إنشاء نظام من ثلاث معادلات باستخدام ثلاثة مجاهيل لإيجاد معادلة تربيعية مع إعطاء ثلاث نقاط. راجع هذه العملية معهم.

الطلاب الذين يجيبون بشكل خاطئ على **العنصر 7**، من المحتمل أنهم لا يبسطون التعابير الجذرية بشكل صحيح. راجع مع الطلاب أن $\sqrt{28} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$.

الطلاب الذين يحددون معادلة واحدة فقط في **العنصر 8** قد لا يكونون مدركين أن المعادلات يمكن كتابتها بصيغ مختلفة. حثهم على تبسيط كل معادلة كخيار مُعطى لتحديد دوال مكافئة.

تدريب على الاختبار المعياري

1. مثّل الدالة $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ بيانيًا.



أكمل ما يلي:

التقاطع مع المحور الرأسي y: $\boxed{-6}$

التقاطع مع المحور الأفقي x: $\boxed{1}$ و $\boxed{-3}$

القيمة الصغرى $\boxed{-8}$ تقع عند نقطة $\boxed{(-1, -8)}$.

التمثيل البياني متماثل بالنسبة للمستقيم $\boxed{x = -1}$.

المجال: $\boxed{-\infty < x < \infty}$

2. في صيغة الحل، الدالة $f(x) = 3x^2 + 10x + 8$ هي $\boxed{f(x) = (3x + 4)(x + 2)}$. وبالتالي تكون أصفار الدالة هي $\boxed{x = -\frac{4}{3}}$ و $\boxed{x = -2}$.

3. استخدم القانون العام لحل $5x^2 - x + 1 = 0$.

$x = \boxed{\frac{1}{10} \pm \frac{\sqrt{19}}{10} i}$

4. التعبير $49x^2 - 121$ هو الفارق من $\boxed{\text{المربعات}}$. وبالتالي فالدالة $h(x) = 49x^2 - 121$ يمكن تحليلها إلى العوامل في صورة $\boxed{(h(x) = (7x + 11)(7x - 11}$. والأصفار هي $\boxed{-\frac{11}{7}}$ و $\boxed{\frac{11}{7}}$.

5. حل بإيجاد قيمة x.

$-5x^2 + 7 = -4$

$x = \boxed{\pm\frac{\sqrt{55}}{5}}$

6. تمر الدالة التربيعية $g(x)$ بالنقاط $(0, 27)$ و $(4, 3)$ و $(-2, 51)$. اكتب الدالة $g(x)$ في صيغة الرأس.

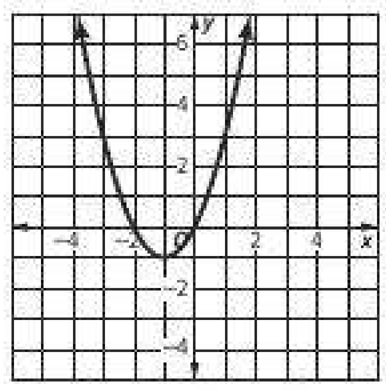
$\boxed{g(x) = (x - 5)^2 + 2}$

7. استخدم القانون العام لحل

$3x^2 + 4x - 1 = 0$.

$x = \boxed{\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}}$

8. أي من المعادلات التالية تصف الدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



$f(x) = x^2 + 2x$	$f(x) = (x - 2)^2$
$f(x) = (x - 1)^2 + 1$	$f(x) = x(x + 2)$
$f(x) = x^2 - 2x$	$f(x) = (x + 1)^2 - 1$

9. ما مجموعة حل المعادلة $3x^2 - 12x + 5 = 0$؟

$2\sqrt{\frac{21}{3}}$	-4
$\boxed{4}$	$-2\sqrt{\frac{21}{3}}$

إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة **للعنصر 1**، قد يرغب الطلاب في تعبئة المربعات السفلية وفقًا للدالة، ثم استخدام هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا. شجّع الطلاب على التحليل إلى عوامل لإيجاد الأصفار. واستخدام ما يعرفونه عن التماثل لإيجاد الرأس.

10. قارن كل دالة بالدالة $f(x) = x^2$. وبين عدد الوحدات التي تحركها التمثل البياني لأعلى أو أسفل أو إلى اليسار أو إلى اليمين من الدالة $f(x)$. إذا طُبق الانعكاس على التمثيل البيان، فبيّن محور الانعكاس.

الدالة	إزاحة إلى أعلى	إزاحة إلى أسفل	إزاحة إلى اليسار	إزاحة إلى اليمين	محور الانعكاس
$g(x) = (x + 2)^2 - 3$		3	2		
$h(x) = -3x^2 + 12$	12				المحور الأفقي x
$j(x) = -(x - 1)^2$				1	المحور الأفقي x

11. ما قيمة c التي تجعل $x^2 + \frac{1}{3}x + c$ ثلاثي حدود تربيعي كامل؟ اكتب الحل هنا.

$\frac{1}{36}$ أكمل المربع بجمع $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. حيث إن $b = \frac{1}{3}$ فإن $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

12. حدد العمود الذي يصف صفر (أصفار) كل دالة على النحو الأفضل.

الدالة	المميز	صفران حقيقيان	صفر حقيقي واحد	صفران مركبان
$f(x) = 9x^2 - 30x + 25$	0		✓	
$f(x) = x^2 + 6x + 11$	8−	✓		
$f(x) = 0.5x^2 - 2x - 9$	22			✓

13. يقف بلال في المدرجات على ارتفاع 8 ft من ملعب كرة القدم ويركل كرة بسرعة ابتدائية موجهة قدرها 28 ft/s. وتمثل المعادلة $h(t) = -16t^2 + 28t + 8$ ارتفاع من الكرة إلى الملعب بعد t ثوان من ركلها.

a. ما المعادلة التي يمكنك حلها لإيجاد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تلامس الأرض؟ فسّر إجابتك.

$-16t^2 + 28t + 8 = 0$؛ تُمثل الأرض بالمستقيم $y = 0$. بالجمع بين هذه الدوال ستحصل على الزمن عندما تلامس الكرة الأرض.

b. أوجد حل المعادلة من **الجزء b** بالتحليل إلى العوامل. اكتب الحل هنا. هل حلولك منطقية بالنسبة لسياق لمسألة؟

$-4(4t + 1)(t - 2) = 0$. إذًا $t = -\frac{1}{4}$ أو $t = 2$. حيث إن t تمثل الزمن، فجميع الحلول السالبة ليست منطقية في هذا السياق. إذًا تلامس الكرة الأرض بعد ثانيتين.

14. ادرس الدالة $f(x) = 2x^2 + 4x + 17$.

a. حول الدالة إلى صيغة الرأس وعيّن الرأس.

$f(x) = 2(x + 1)^2 + 15; (-1, 15)$

b. هل الرأس قيمة عظمى أم صغرى؟ اشرح كيف علمت.

الصغرى؛ حيث إن قيمة a هي 2، وهي موجبة. إذًا فالقطع المكافئ مفتوح لأعلى.

c. قارن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ بالتمثيل البياني للدالة $g(x) = x^2$.

تمت إزاحة التمثيل البياني $f(x)$ وحدة لليسار و15 وحدة لأعلى من التمثيل البياني $g(x)$ وتمديده رأسيًا بمعامل 2.

إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة **للعنصر 14a**، يتعين أن يتحقق الطلاب من إجاباتهم عن طريق توسعة المعادلة وتبسيطها بصيغة رأس القطع المكافئ للتحقق من أنها مكافئة للدالة المعطاة. كذلك، يمكنهم التحقق للتأكد أن النقطة المحددة كرأس تحقق المعادلة المعطاة.

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يحددون أن الدالة الأولى في **العنصر 9** تُزاح إلى اليمين، فهم يفسرون الصيغة $(x - h)$ بشكل غير صحيح. راجع أمثلة مع الطلاب لتوضيح أنه متى كان $h < 0$، تصبح المعادلة $(x + h)$، ويُزاح التمثيل البياني إلى اليسار.

التوجيهات

العنصر 11

[2] إجابة صحيحة والحل موضح
[1] إجابة صحيحة، لكن الحل غير كامل
[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

العنصر 13

[4] معادلة صحيحة ويتضمن الشرح أن 0 هو مستوى الأرض؛ والتحليل إلى عوامل صحيح، وإجابة واحدة محددة أنها غير صحيحة حسب السياق
[3] معادلة صحيحة لكن الشرح غير كامل، أو التحليل إلى عوامل صحيح لكن لا يوجد شرح يفيد بأن أحد الحلول غير متوافق مع السياق
[2] خطأ في التحليل إلى عوامل أو كلا الشرحين غير كاملين
[1] مكون واحد من الإجابات أو الشروحات غير صحيح
[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

الجزء 14

[4] المعادلة والرأس صحيحان؛ و الرأس محدد بأنه قيمة صغرى والشرح صحيح؛ والمقارنة صحيحة للتمثيلين البيانيين
[3] أربعة من خمسة مكونات
[2] ثلاثة من خمسة مكونات
[1] واحد أو اثنان من خمسة مكونات
[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

استخدام دليل الطالب التفاعلي

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* (ISG) مع كتاب *الرياضيات للصف 10 المتقدم*.

درس دليل الطالب التفاعلي	*الرياضيات للصف 10 المتقدم*
3.1	الدرس 1-3
3.2	الدرس 2-3
3.3	الدرس 3-3
3.4	الدرس 4-3
3.5	الدرس 5-3
3.6	الدرس 6-3
3.7	الدرس 7-3

م. م. ر 7

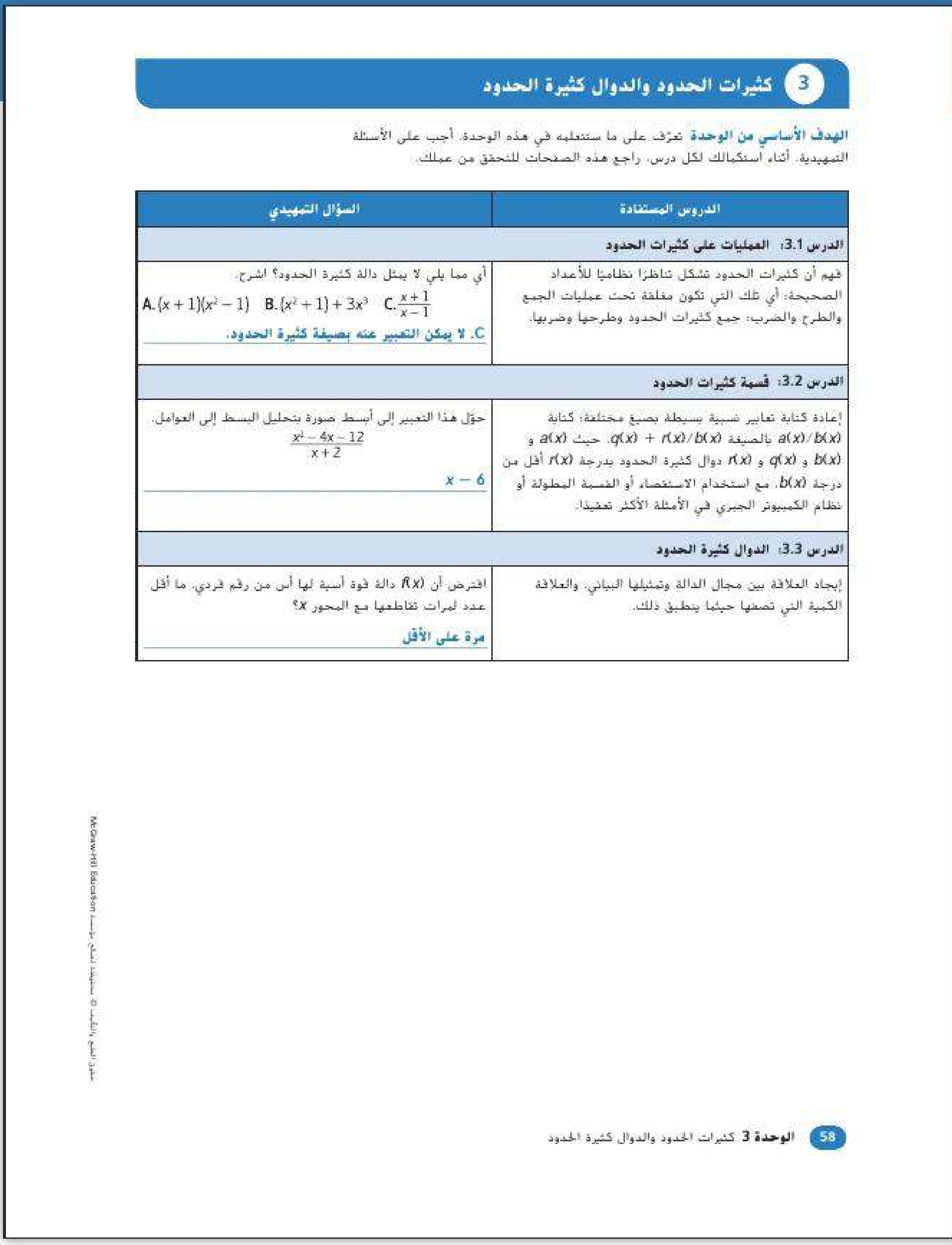
نصيحة للتدريس

يقدم السؤال التمهيدي للدرس 3.1 إلى الطلاب **م. م. ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. ابدأ بالنظر إلى صيغة كثيرة الحدود:

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} \cdots a_1X + a_0$$

رغم عدم شمول أي تعبير من التعابير لهذه الصيغة الصريحة، فإن التعبير الخاص بـ A يمكن تفكيكه ليصبح بهذه الصيغة، في حين يمكن إعادة ترتيب B ليصبح في هذه الصيغة. أما العنصر C، من ناحيةٍ أخرى، فلا يمكن كتابته بصيغة كثيرة حدود.

ينبغي أن يكون هذا كافيًا لتخفيض التعبير C إلى كثيرة حدود. ويمكن في توسعة أن تشير إلى أن هذا مثالاً على تعبير نسبي مكوّن من النسبة بين تعبيرين كثيري الحدود.

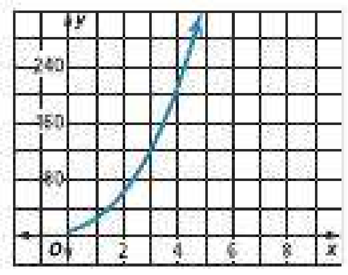


3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

الهدف الأساسي من الوحدة تعرّف على ما ستتعلمه في هذه الوحدة. أجب على الأسئلة التمهيدية. أثناء استكمالك لكل درس، راجع هذه الصفحات للتحقق من عملك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 3.1: العمليات على كثيرات الحدود	
فهم أن كثيرات الحدود تشكل تناظرًا نظاميًا للأعداد الصحيحة؛ أي تلك التي تكون مغلقة تحت عمليات الجمع والطرح والضرب؛ جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها.	أي مما يلي لا يمثل دالة كثيرة الحدود؟ اشرح. A. $(x+1)(x^2-1)$ B. $(x^2+1)+3x^3$ C. $\frac{x+1}{x-1}$ **C. لا يمكن التعبير عنه بصيغة كثيرة الحدود.**
الدرس 3.2: قسمة كثيرات الحدود	
إعادة كتابة تعابير نسبية بسيطة بصيغ مختلفة؛ كتابة $a(x)/b(x)$ بالصيغة $q(x) + r(x)/b(x)$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ دوال كثيرة الحدود بدرجة $r(x)$ أقل من درجة $b(x)$، مع استخدام الاستقصاء، أو القسمة المطولة أو نظام الكمبيوتر الجبري في الأمثلة الأكثر تعقيدًا.	حوّل هذا التعبير إلى أبسط صورة بتحليل البسط إلى العوامل. $\frac{x^2-4x-12}{x+2}$ **$x-6$**
الدرس 3.3: الدوال كثيرة الحدود	
إيجاد العلاقة بين مجال الدالة وتمثيلها البياني، والعلاقة الكمية التي تصفها حيثما ينطبق ذلك.	افترض أن $f(x)$ دالة قوة أسية لها أس من رقم فردي. ما أقل عدد لمرات تقاطعها مع المحور x؟ **مرة على الأقل**

58 الوحدة 3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

السؤال التمهيدي	الدروس المستفادة
	الدرس 3.4: تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود
مكعب طول ضلعه x من الوحدات زادت أطوال أضلاعه بمقدار وحدة ووحدتين و 3 وحدات على التوالي. اكتب الدالة التكعيبية الملائمة لحجم المجسم ومثّلها بيانيًا. $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ 	تكوين معادلات ذات متغيرين أو أكثر لتمثيل العلاقات بين الكميات، ومثّل هذه المعادلات بيانيًا على المحاور الإحداثية مع مراعاة التسميات والمقاييس. بالنسبة لدالة تمثل علاقة بين كميتين، تفسير السمات الأساسية للتمثيلات البيانية والجداول من حيث الكميات، ووضع تمثيلات بيانية توضح السمات الأساسية مع تقديم وصف لفظي للعلاقة. تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا، وتحديد الأصفار عندما يتوفر تحليل عوامل مناسب، وبيان السلوك الطرفي.
	الدرس 3.5: حل معادلات كثيرة الحدود
افترض أن قطعًا مكافئًا يتقاطع مع المحور x عند 3 و 5. حدد الشكل العام للقطع المكافئ الذي يحقق تلك الشروط. $y = a(x - 3)(x - 5)$، للعدد الحقيقي a	شرح السبب في كون إحداثيات x للنقاط التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان للمعادلتين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ تمثل حلولاً للمعادلة $f(x) = g(x)$؛ إيجاد الحلول التقريبية، على سبيل المثال، عن طريق استخدام التكنولوجيا لتمثيل الدوال بيانيًا أو عمل جداول قيم أو إيجاد التقريبات المتتابعة.
	الدرس 3.6: نظريتا الباقي والعامل
افترض أن x عامل عدد صحيح للعدد الصحيح y. هل $y \div x$ عدد صحيح؟ اشرح. نعم، اكتب $y = ax$، للعدد الصحيح a. يعني هذا $\frac{y}{x} = a$، وهو عدد صحيح.	تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا، وتحديد الأصفار عندما يتوفر تحليل مناسب إلى العوامل، وبيان السلوك الطرفي.
	الدرس 3.7: الجذور والأصفار
افترض أن $f(x)$ دالة تربيعية تتقاطع مع المحور x مرة واحدة. صف الدالة. إنها دالة ثنائية الحدود مرفوعة إلى القوة الرابعة وتتقاطع مع المحور x مرة واحدة.	بالنسبة لدالة تمثل علاقة بين كميتين، تفسير السمات الأساسية للتمثيلات البيانية والجداول من حيث الكميات، ووضع رسوم بيانية توضح السمات الأساسية مع تقديم وصف لفظي للعلاقة.

نصيحة للتدريس

م. م. ر 5

يمكن للسؤال التمهيدي للدرس 3.6 أن يمثل فرصةً لاستكشاف **م. م. ر 5 (استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية)**. ذكّر الطلاب بأنهم قد يحتاجون إلى تعديل إعدادات النافذة على حاسبتهم للحصول على إجابة منطقية عن المعلومات المعطاة. فعلى سبيل المثال، الدالة المعطاة ليس لها حد أقصى، إلا إذا تم تقييد المجال، كما هو مذكور في السؤال.

نصيحة للتدريس

م. م. ر 8

يمكن للسؤال التمهيدي للدرس 3.7 أن يمثل فرصة لاستكشاف **م. م. ر 8 (البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)**. ابدأ بعرض الدالة التربيعية الأكثر وضوحًا التي فيها التقاطعان 3 و 5 مع المحور الأفقي x:

$$y = (x - 3)(x - 5)$$

اعرض صيغًا متنوعة عن هذه الصيغة من خلال إضافة معاملات مختلفة إلى ناتج ضرب حدود ذات الحدين. اطلب من الطلاب إيجاد صيغ أخرى. ثم اطلب منهم تعميم هذه الصيغة، حتى يصلوا إلى الصيغة (للعدد الحقيقي a):

$$y = a(x - 3)(x - 5)$$

3.1 العمليات على كثيرات الحدود

الأهداف

- إدراك أن الجمع والطرح والضرب للدوال كثيرة الحدود عمليات مغلقة.
- جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها.

الدالة أحادية الحد هي عدد أو متغير أو ناتج ضرب عدد مع متغير أو أكثر والدالة كثيرة الحدود هي دالة أحادية الحد أو أو مجموع دوال أحادية الحد. **درجة الدالة كثيرة الحدود** هي أكبر درجة لأي حد في الدالة كثيرة الحدود. **لتبسيط** دالة كثيرة الحدود، يجب إعادة كتابتها بدون أقواس أو أسس سالبة. يتحقق هذا عن طريق إجراء العمليات الموضحة وتجميع الحدود المتشابهة.

مثال 1 **جمع الدوال كثيرة الحدود وطرحها**

الاستكشاف استخدم الدالتين كثيرتي الحدود $f(x) = -8x^4 + 6x^2 - x + 2$ و $g(x) = 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1$ للإجابة على الأسئلة.

a. **تفسير المسائل** أوجد قيمة $f(x) + g(x)$ و $f(x) - g(x)$. وبسّطها ثم حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة كثيرة الحدود. إذا كان يمثل دالة كثيرة الحدود، فاذكر درجة الدالة كثيرة الحدود.

$f(x) + g(x) = (-8x^4 + 6x^2 - x + 2) + (8x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1)$

$= -2x^3 + 10x^2 + 2x + 1$; 3rd

$f(x) - g(x) = (-8x^4 + 6x^2 - x + 2) - (8x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1)$

$= -16x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 3$; 4th

b. **التخمين** ضع تخمينًا بخصوص درجة مجموع دالتين كثيرتي الحدود أو الفارق بينهما. اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: درجة المجموع أو الفارق تقل عن أو تساوي درجة الدالة كثيرة الحدود التي تحتوي على الدرجة الأكبر. من خلال الإلغاء فقط تكون درجة المجموع أو الفارق أقل من درجة كثيرة الحدود ذات الدرجة الأكبر. على سبيل المثال، مجموع $2x^2 - 3$ و $-2x^2$ هو 3. درجة كل دالة كثيرة الحدود هي اثنان ودرجة المجموع هي واحد.

c. **بناء الفرضيات** تكون المجموعة مغلقة في عملية معينة إذا كانت نتيجة العملية على أي عنصرين في المجموعة تقع داخل المجموعة أيضًا. فهل مجموعة الدوال كثيرة الحدود مغلقة تحت الجمع والطرح؟ علّل إجابتك.

نعم؛ الإجابة النموذجية: عند جمع/طرح دوال كثيرة الحدود، تقوم بتجميع الحدود المتشابهة. يتم جمع المعاملات الحقيقية لدالة واحدة كثيرة الحدود أو طرحها من المعاملات الحقيقية للدالة الأخرى كثيرة الحدود مما ينتج عنه معاملات حقيقية جديدة. الأسس لا تتغير عند جمع/طرح الدوال كثيرة الحدود مما يعني أنها تبقى أعدادًا كلية. بما أن المجموع أو الفرق في الدوال كثيرة الحدود له معاملات حقيقية وأسس من أعداد كلية، إذًا فهو دالة كثيرة الحدود.

60 **الوحدة 3** كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

المعايير

المعايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- تطبيق خواص الأسس
- إجراء العمليات باستخدام أحاديات الحدود

مثال 1

م.م.ر 1

نصيحة للتدريس

عند جمع أو طرح كثيرات الحدود، فإنه يتم جمع أو طرح معاملات كل حدٍ متشابه. وبالنسبة **للجزأين b** و **c**، فهذه الحقيقة تصف سبب عدم ظهور أي أسس جديدة.

الأسئلة الداعمة

- إذا تم جمع أو طرح كثيرتي حدود في حين كانت إحداهما فقط بها حد من الدرجة الثانية، فهل كثيرة الحدود الناتجة سيكون فيها حد من الدرجةالثانية؟ **نعم. إذا كان هناك حد واحد فقط من الدرجة الثانية في المجموع أو الفرق، فلن تكون هناك احتمالية للإلغاء.**
- إذا تم جمع أو طرح كثيرتي حدود في حين كانت كلٌ منهما بها حد من الدرجةالثانية، فهل كثيرة الحدود الناتجة سيكون بها حد من الدرجة الثانية ؟ **يتوقف هذا على الإلغاء.**

معلومات أساسية رياضية

كان قدماء المصريين والبابليون أول جماعة من البشر عُرِف عنها استخدام كثيرات الحدود. وفي القرن السابع عشر ، قدّم رينيه ديكارت قاعدة الإشارات، والتي تُستخدم لتحديد عدد الجذور الموجبة لكثيرة حدود معطاة. وبنهاية القرن الثامن عشر، أثبت كارل فريدريش غاوس نظرية الجبر الأساسية، والتي تربط درجة كثيرة الحدود بعدد جذور كثيرة الحدود تلك ذاتها.

وجعلت هذه النظريات والخواص من كثيرات الحدود مفيدة للغاية في الحياة اليومية، مثل استخدامها في بناء الجسور أو القناطر.

المثال 1 (يُتبع)

- هل مسائل الأمثلة المأخوذة من **الجزء c** كافية لإثبات أن كثيرات الحدود تكون مغلقة تحت الجمع والطرح؟ **لا. رغم أن الإجابات عن مسائل الأمثلة هي كثيرات الحدود، فلا يمكنك استخدام مثال لإثبات أن العبارة صحيحة بالنسبة لكل المسائل التي تشتمل على المفهوم نفسه. ولكنك تستطيع استخدام مثال، يُعرف باسم المثال المضاد، لدحض عبارة.**
- إذا نتج ثابت عن مجموع كثيرتي حدود أو الفرق بينهما. فهل هذا الثابت يكون كثيرة حدود؟ **نعم. لأن الثابت عبارة عن كثيرة حدود بدرجة 0. (مثال: $5 = 5x^0$)**

مثال 2

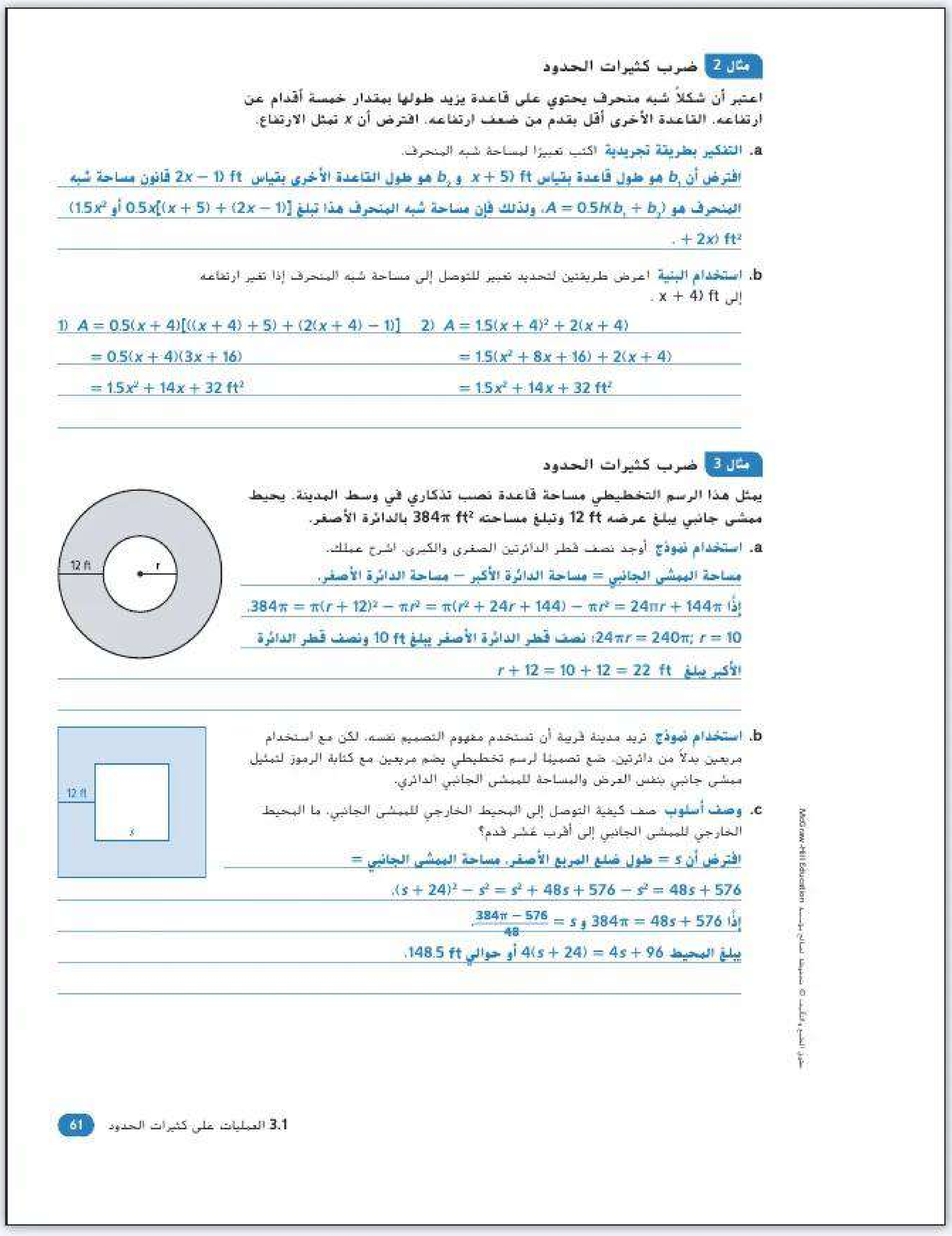
نصيحة للتدريس

م. م. ر 1

أثناء عمل الطلاب على ضرب أمثلة كثيرات الحدود، اطلب منهم ملاحظة الخواص والطرق متكررة الاستخدام. فعليهم البدء في معرفة أنه يتم استخدام خاصية التوزيع ومهارة جمع الحدود المتشابهة على نحوٍ منتظم.

الأسئلة الداعمة

- ما درجة كل كثيرة من كثيرات الحدود التي يتم الحصول عليها في 2a وفي 2b؟ هل هذا منطقي؟ لمَ أو لمَ لا؟ **درجة كثيرات الحدود التي يتم الحصول عليها في 2a وفي 2b هي 2. نعم، هذا منطقي لأنه يتم قياس المساحة بالوحدات المربعة.**
- ما خاصية الأسس التي استُخدمت في حل هذه التعابير؟ **ناتج ضرب القوى الأسية**



مثال 2 ضرب كثيرات الحدود

اعتبر أن شكلاً شبه منحرف يحتوي على قاعدة يزيد طولها بمقدار خمسة أقدام عن ارتفاعه. القاعدة الأخرى أقل بقدم من ضعف ارتفاعه. افترض أن x تمثل الارتفاع.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** اكتب تعبيرًا لمساحة شبه المنحرف.

افترض أن b_1 هو طول قاعدة بقياس $(x + 5)$ ft و b_2 هو طول القاعدة الأخرى بقياس $(2x - 1)$ ft قانون مساحة شبه المنحرف هو $A = 0.5h(b_1 + b_2)$. ولذلك فإن مساحة شبه المنحرف هذا تبلغ $0.5x[(x + 5) + (2x - 1)]$ أو $(1.5x^2 + 2x)$ ft².

b. **استخدام البنية** اعرض طريقتين لتحديد تعبير للتوصل إلى مساحة شبه المنحرف إذا تغير ارتفاعه إلى $(x + 4)$ ft.

1) $A = 0.5(x + 4)[((x + 4) + 5) + (2(x + 4) - 1)]$
$= 0.5(x + 4)(3x + 16)$
$= 1.5x^2 + 14x + 32$ ft²

2) $A = 1.5(x + 4)^2 + 2(x + 4)$
$= 1.5(x^2 + 8x + 16) + 2(x + 4)$
$= 1.5x^2 + 14x + 32$ ft²

مثال 3 ضرب كثيرات الحدود

يمثل هذا الرسم التخطيطي مساحة قاعدة نصب تذكاري في وسط المدينة. يحيط ممشى جانبي يبلغ عرضه 12 ft وتبلغ مساحته 384π ft² بالدائرة الأصغر.

12 ft
r

a. **استخدام نموذج** أوجد نصف قطر الدائرتين الصغرى والكبرى. اشرح عملك.

مساحة الممشى الجانبي = مساحة الدائرة الأكبر − مساحة الدائرة الأصغر.
إذًا $24\pi r + 144\pi = \pi(r^2 + 24r + 144) - \pi r^2 = \pi(r + 12)^2 - \pi r^2 = 384\pi$.
$24\pi r = 240\pi;\ r = 10$؛ نصف قطر الدائرة الأصغر يبلغ 10 ft ونصف قطر الدائرة الأكبر يبلغ $r + 12 = 10 + 12 = 22$ ft

b. **استخدام نموذج** تريد مدينة قريبة أن تستخدم مفهوم التصميم نفسه. لكن مع استخدام مربعين بدلاً من دائرتين. ضع تصميمًا لرسم تخطيطي يضم مربعين مع كتابة الرموز لتمثيل ممشى جانبي بنفس العرض والمساحة للممشى الجانبي الدائري.

12 ft
s

c. **وصف أسلوب** صف كيفية التوصل إلى المحيط الخارجي للممشى الجانبي. ما المحيط الخارجي للممشى الجانبي إلى أقرب عشر قدم؟

افترض أن s = طول ضلع المربع الأصغر. مساحة الممشى الجانبي = $48s + 576 = s^2 + 48s + 576 - s^2 = (s + 24)^2 - s^2$.
إذًا $384\pi = 48s + 576$ و $s = \frac{384\pi - 576}{48}$.
يبلغ المحيط $4(s + 24) = 4s + 96$ أو حوالي 148.5 ft.

التدريس المتمايز

عند اضطرار الطلاب إلى جمع أو طرح كثيرات الحدود، فقد يجد الطلاب أنه من الأسهل تبسيط هذه التعابير عن طريق المحاذاة بين كثيرات الحدود بشكلٍ رأسي.

على سبيل المثال،

$$\begin{array}{rrrrrr} & -8x^4 & +0x^3 & +6x^2 & -x & +2 \\ + & 8x^4 & -2x^3 & +4x^2 & +3x & -1 \\ \hline & 0x^4 & -2x^3 & +10x^2 & +2x & +1 \end{array}$$

ذكّر الطلاب باستخدام العناصر النائبة الصفرية في كثيرات الحدود التي ليس لها حد معين للمساعدة في المحاذاة بينها.

مثال 3

نصيحة للتدريس م. م. ر 4

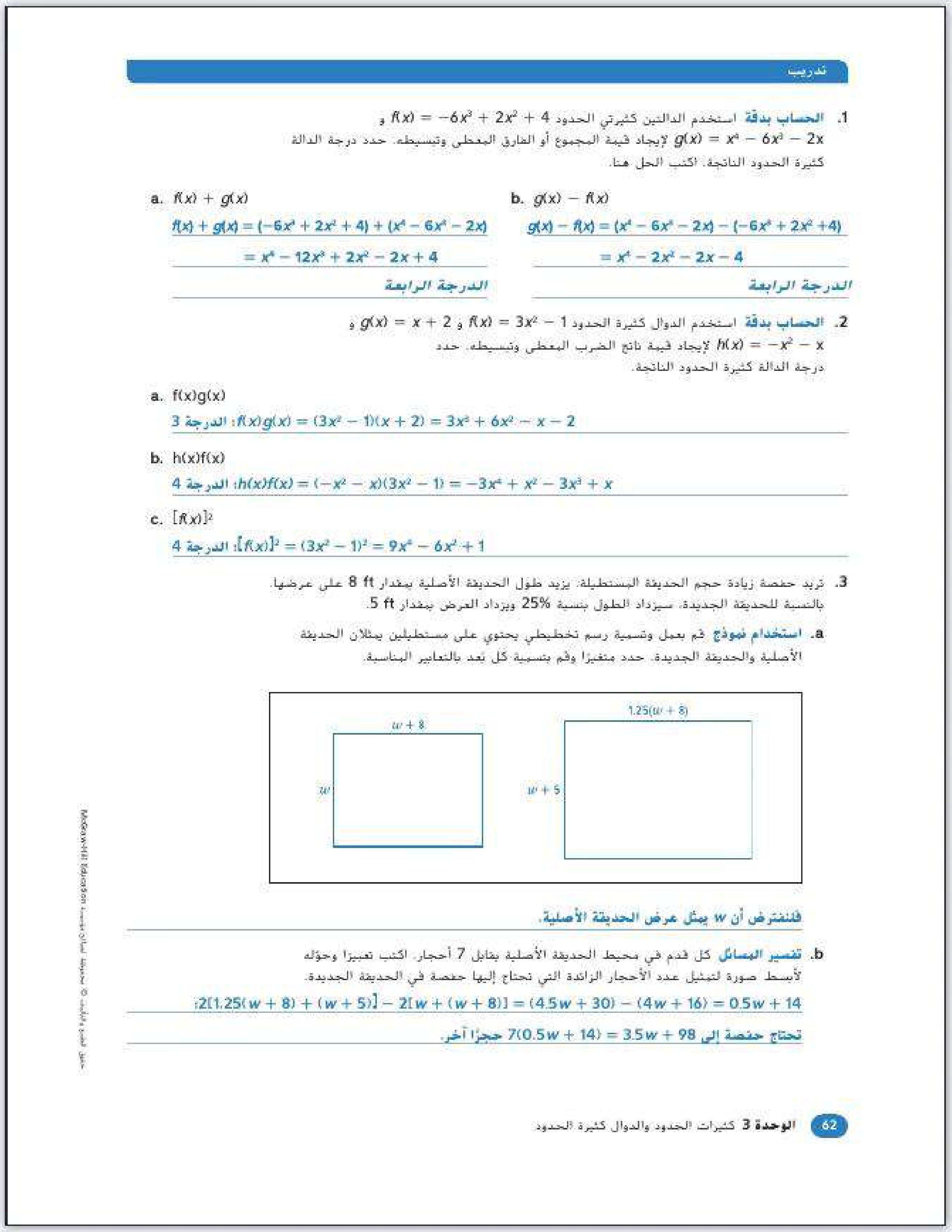
بينما يعمل الطلاب على هذه المسألة، ساعدهم على فهم أهمية رسم الرسوم التخطيطية بحيث يتمكنون من ملاحظة العلاقات وتحديد التعابير وحل المسائل أو تفسيرها بسهولة.

الأسئلة الداعمة

- في **الجزء a**، صِف المنطقة التي مساحتها 384π قدمًا مربعًا بدلالة الرسم التخطيطي. **وهذه المنطقة هي المساحة الواقعة خارج الدائرة الصغيرة، ولكن داخل الدائرة الكبيرة.**
- في **الجزء c**، إذا افترضت أن s يمثل طول ضلع المربع الصغير، فما التعبير الذي يمثل طول ضلع المربع الأكبر؟ $s + 24$

تلميح تقني

بما أنه لدى الكثير من الطلاب حاسبات تسمح لهم باستخدام الحروف، فقد يشعر بعضهم أن بوسعهم كتابة التعابير كثيرة الحدود في الحاسبة للحصول على الإجابة عن المسائل المطروحة وسيسألون عن سبب إظهار الحاسبة رسالة خطأ لهم. ذكِّر الطلاب أن الحاسبة لا تستطيع جمع الأعداد أو طرحها أو ضربها أو قسمتها إلا إذا كانت حاسباتهم مزودة خصيصًا ببرنامج الجبر الذي يسمح بإجراء مثل هذه الأنواع من الحسابات.



تدريب

1. **الحساب بدقة** استخدم الدالتين كثيرتي الحدود $f(x) = -6x^3 + 2x^2 + 4$ و $g(x) = x^4 - 6x^3 - 2x$ لإيجاد قيمة المجموع أو الفارق المعطى وتبسيطه. حدد درجة الدالة كثيرة الحدود الناتجة. اكتب الحل هنا.

a. $f(x) + g(x)$

$f(x) + g(x) = (-6x^3 + 2x^2 + 4) + (x^4 - 6x^3 - 2x)$

$= x^4 - 12x^3 + 2x^2 - 2x + 4$

الدرجة الرابعة

b. $g(x) - f(x)$

$g(x) - f(x) = (x^4 - 6x^3 - 2x) - (-6x^3 + 2x^2 + 4)$

$= x^4 - 2x^2 - 2x - 4$

الدرجة الرابعة

2. **الحساب بدقة** استخدم الدوال كثيرة الحدود $f(x) = 3x^2 - 1$ و $g(x) = x + 2$ و $h(x) = -x^2 - x$ لإيجاد قيمة ناتج الضرب المعطى وتبسيطه. حدد درجة الدالة كثيرة الحدود الناتجة.

a. $f(x)g(x)$

$f(x)g(x) = (3x^2 - 1)(x + 2) = 3x^3 + 6x^2 - x - 2$؛ الدرجة 3

b. $h(x)f(x)$

$h(x)f(x) = (-x^2 - x)(3x^2 - 1) = -3x^4 + x^2 - 3x^3 + x$؛ الدرجة 4

c. $[f(x)]^2$

$[f(x)]^2 = (3x^2 - 1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$؛ الدرجة 4

3. تريد حفصة زيادة حجم الحديقة المستطيلة. يزيد طول الحديقة الأصلية بمقدار 8 ft على عرضها. بالنسبة للحديقة الجديدة، سيزداد الطول بنسبة 25% ويزداد العرض بمقدار 5 ft.

a. **استخدام نموذج** قم بعمل وتسمية رسم تخطيطي يحتوي على مستطيلين يمثلان الحديقة الأصلية والحديقة الجديدة. حدد متغيرًا وقم بتسمية كل بُعد بالتعابير المناسبة.

$w + 8$

w

$1.25(w + 8)$

$w + 5$

فلنفترض أن w يمثل عرض الحديقة الأصلية.

b. **تفسير المسائل** كل قدم في محيط الحديقة الأصلية يقابل 7 أحجار. اكتب تعبيرًا وحوّله لأبسط صورة لتمثيل عدد الأحجار الزائدة التي تحتاج إليها حفصة في الحديقة الجديدة.

$2[1.25(w + 8) + (w + 5)] - 2[w + (w + 8)] = (4.5w + 30) - (4w + 16) = 0.5w + 14$؛

تحتاج حفصة إلى $7(0.5w + 14) = 3.5w + 98$ حجرًا آخر.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

62 الوحدة 3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 8 (البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك) تشجع الطلاب على البحث عن التوافق في حل المسائل، بما في ذلك تحديد الحسابات المتكررة. وينتشر هذا في الدرس، خاصةً عند استخدام نماذج المساحة لكتابة التعابير كثيرة الحدود وتحويلها لأبسط صورة. في **المثال 3c**، ينبغي على الطلاب أن يكونوا قادرين على استخدام الاستنتاج نفسه من **الجزء a** للوصول إلى تعبير مشابه للمساحة خارج المربع الصغير، ولكن في الوقت نفسه داخل المربع الكبير.

c. **الحساب بدقة** اكتب تعبيرًا وحوّله لأبسط صورة للزيادة في مساحة الحديقة. أوجد عدد الأقدام المربعة التي زادت على مساحة الحديقة إذا كان العرض الأصلي للحديقة 10 ft.

$1.25(w+8)(w+5) - w(w+8) = 1.25w^2 + 16.25w + 50 - w^2 - 8w = 0.25w^2 + 8.25w + 50$؛

إذا كان $w = 10$ أقدام، فإن مساحة الحديقة زادت بمقدار $0.25(10)^2 + 8.25(10) + 50$ أو $157.5\ ft^2$.

4. **بناء الفرضيات** بالنظر إلى أن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان كثيرتا الحدود. فهل ناتج الضرب دالة كثيرة الحدود دائمًا؟ اشرح سبب الصحة أو الخطأ.

نعم؛ الإجابة النموذجية: لكي تكون $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي الحدود، يجب أن تحتويا على معاملات حقيقية وأسس من أعداد كلية. الأعداد الحقيقية والأعداد الكلية مغلقة في الجمع والضرب. إذًا عند ضرب $f(x)$ و $g(x)$، يتم ضرب معاملات كل حد مما يعطي معاملات حقيقية جديدة ويتم جمع أسس كل حد مما ينتج أسسًا جديدة بأعداد كلية. بموجب تعريف الدوال كثيرة الحدود، يُعتبر ناتج ضرب الدوال كثيرة الحدود دالة كثيرة الحدود لأن المعاملات حقيقية والأسس أعداد كلية.

5. **استخدام البنية** توصل في المربع إلى ناتج ضرب $3x^2 - 4x + 1$ و $x^2 + 5x + 6$ باستخدام التخطيط الرأسي.

$$\begin{array}{r}
3x^2 - 4x + 1 \\
x^2 + 5x + 6 \\
\hline
18x^2 - 24x + 6 \\
15x^3 - 20x^2 + 5x \quad \\
3x^4 - 4x^3 + x^2 \qquad\quad \\
\hline
3x^4 + 11x^3 - x^2 - 19x + 6
\end{array}$$

6. **التخمين** استخدم النتيجة التي توصلت إليها لوضع تخمينات بشأن ناتج ضرب دالة كثيرة الحدود بها m من الحدود في دالة كثيرة الحدود بها n من الحدود. علّل تخمينك.

a. كم عدد مرات ضرب الحدين؟

$m \cdot n$؛ يتم ضرب كل حد من إحدى الدالتين كثيرتي الحدود في كل حد في الدالة الأخرى مرة واحدة.

b. ما العدد الأقل للحدود في ناتج الضرب المحوّل لأبسط صورة؟

2؛ قد يؤدي جمع الحدود المتشابهة إلى المجموع 0؛ لكن الحدين الأول والأخير متفردان.

7. **التفكير بطريقة تجريدية** استكمل الجدول الذي يوضح إغلاق المجموعات المعروضة بكتابة نعم أو كتابة لا وتقديم مثال عكسي. يمكنك افتراض أنه بما أن القسمة على صفر غير معرّفة، فإنه لا يؤثر على الإغلاق.

	الجمع والطرح	الضرب	القسمة
أعداد صحيحة	نعم	نعم	لا؛ $3 \div 2 = 1.5$
أعداد نسبية	نعم	نعم	نعم
كثيرات الحدود	نعم	نعم	لا؛ $\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتيح **م. م. ر 3** للطلاب استخدام الاستنتاج لبناء الفرضيات والتخمين والتعليق على فرضيات الآخرين. وهذا المعيار يتطلب أن يتناقل الطلاب أفكارهم عن طريق استخدام التعريفات والخواص الثابتة والمعلومات المعطاة.

في **المثال 1c** و **التمرين 4**، يستخدم الطلاب معرفتهم بشأن الأعداد الحقيقية المغلقة والأعداد الكلية لإثبات أن كثيرات الحدود مغلقة تحت الجمع والطرح والضرب، وذلك حسب تعريف كثيرة الحدود.

يُعد هذا وقتًا مناسبًا لجعل الطلاب يفكرون فيما إذا كانت الخواص الأخرى، مثل خاصية التجميع في الجمع أو خاصية التبديل في الضرب، تنطبق على مجموعة كثيرات الحدود.

تمرين

في **التمرينين 1** و **2**، يجمع الطلاب كثيرات الحدود ويطرحونها ويضربونها.

التمرين 3 يسمح للطلاب بضرب كثيرات الحدود في سياق من الحياة اليومية.

في **التمرين 4**، يستكشف الطلاب إغلاق مجموعة من كثيرات الحدود تحت الضرب.

التمرين 5 يطلب من الطلاب إيجاد ناتج ضرب كثيرتي حدود باستخدام بنية التخطيط الرأسي.

في **التمرين 6**، يُطلب من الطلاب التفكير في عملية ضرب كثيرات الحدود.

التمرين 7 يمثل ملخصًا لخواص الإغلاق في كثيرات الحدود.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1–2	6
3	1, 4, 6
4	3
5	7
6	3
7	2

أخطاء شائعة

انتبه للطلاب الذين يجمعون الأسس أثناء جمع أو طرح كثيرات الحدود، وكذلك للطلاب الذين يضربون الأسس أثناء ضرب كثيرات الحدود.

المعايير

معايير الممارسة الرياضية:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- قسمة أحاديات الحد
- قسمة كثيرات الحدود باستخدام أحاديات الحد

مثال 1

نصيحة للتدريس

م. م. ر 7,8

اطلب من الطلاب التركيز على بنية ثلاثيات الحدود وهم يجرون عملية تحليل عوامل ثلاثيات الحدود عن طريق الفحص. اربط القسمة الجبرية بالقسمة الرقمية.

الأسئلة الداعمة

- هل يمكن للباقي أن يظل له حدّ بمتغير؟ **نعم، طالما كانت درجة $d(x)$ أكبر من درجة الباقي، $r(x)$.**
- تنص خوارزمية القسمة على أن درجة $r(x)$ ينبغي أن تكون أقل من درجة $d(x)$. فمع ماذا يتوافق هذا في القسمة المطولة الرقمية؟ **في القسمة المطولة الرقمية، ينبغي أن يحتوي الباقي على أقل من المقسوم عليه.**

3.2 قسمة كثيرات الحدود

الأهداف

- قسمة الدوال كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطولة.

خوارزمية القسمة: إذا كانت $f(x)$ و $d(x) \neq 0$ دالتان كثيرتا الحدود، وكانت درجة $d(x)$ أقل من أو تساوي درجة $f(x)$، إذًا يوجد دالتان متفردتان كثيرتا الحدود هما $q(x)$ و $r(x)$ بحيث تكون

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

لاحظ أن درجة $r(x)$ تقل عن درجة $d(x)$. في الحالات الخاصة التي تكون فيها $r(x) = 0$، تُعتبر $d(x)$ عاملاً في $f(x)$.

مثال 1 باستخدام خوارزمية القسمة

الاستكشاف أعد كتابة $\frac{x^2+2x-5}{x-2}$ بالصيغة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$.

a. **استخدام البنية** ما قيمة c ودالة $q(x)$ اللتين ستجعلان المعادلة $x^2 + 2x + c = (x - 2) \cdot q(x)$ حقيقية؟ اشرح استنتاجك.

$c = -8,\ q(x) = x + 4$؛ لأن $x^2 + 2x + c$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة 2 والمعامل x^2 يبلغ 1، ويجب أن تكون $q(x)$ بالصيغة $(x + d)$. في $x^2 + 2x + c = (x - 2)(x + d)$، يجب أن تساوي $-2x + xd$ الرقم $2x$ و $-2 + d = 2$. إذًا $d = 4$. إذا كانت $x^2 + 2x + c = (x - 2)(x + 4)$، فإن $c = -8$.

b. **استخدام البنية** كيف يمكنك كتابة $\frac{x^2+2x-5}{x-2}$ بالصيغة $q(x) + \frac{r}{x-2}$ حيث $q(x)$ دالة ثنائية الحدود و r ثابت؟ بسّط استنتاجك وبرّره.

أعد كتابة $x^2 + 2x - 5$ بالصيغة $(x^2 + 2x - 8) + 3$، ثم $\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)} + \frac{3}{(x-2)} = (x+4) + \frac{3}{(x-2)}$؛

$$\frac{x^2+2x-5}{x-2} = \frac{x^2+2x-8}{x-2} + \frac{3}{(x-2)} = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)} + \frac{3}{(x-2)}$$

c. **تقييم المنطقية** كيف يمكنك التحقق من أن التعبير الذي كتبته في **الجزء** b يكافئ $\frac{x^2+2x-5}{x-2}$؟ تحقق من إجابتك من **الجزء** b.

للتحقق من حل مسألة قسمة، اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه واجمع الباقي $(x + 4)(x - 2) + 3 = x^2 + 2x - 5$. إذًا الإجابة في الجزء b صحيحة.

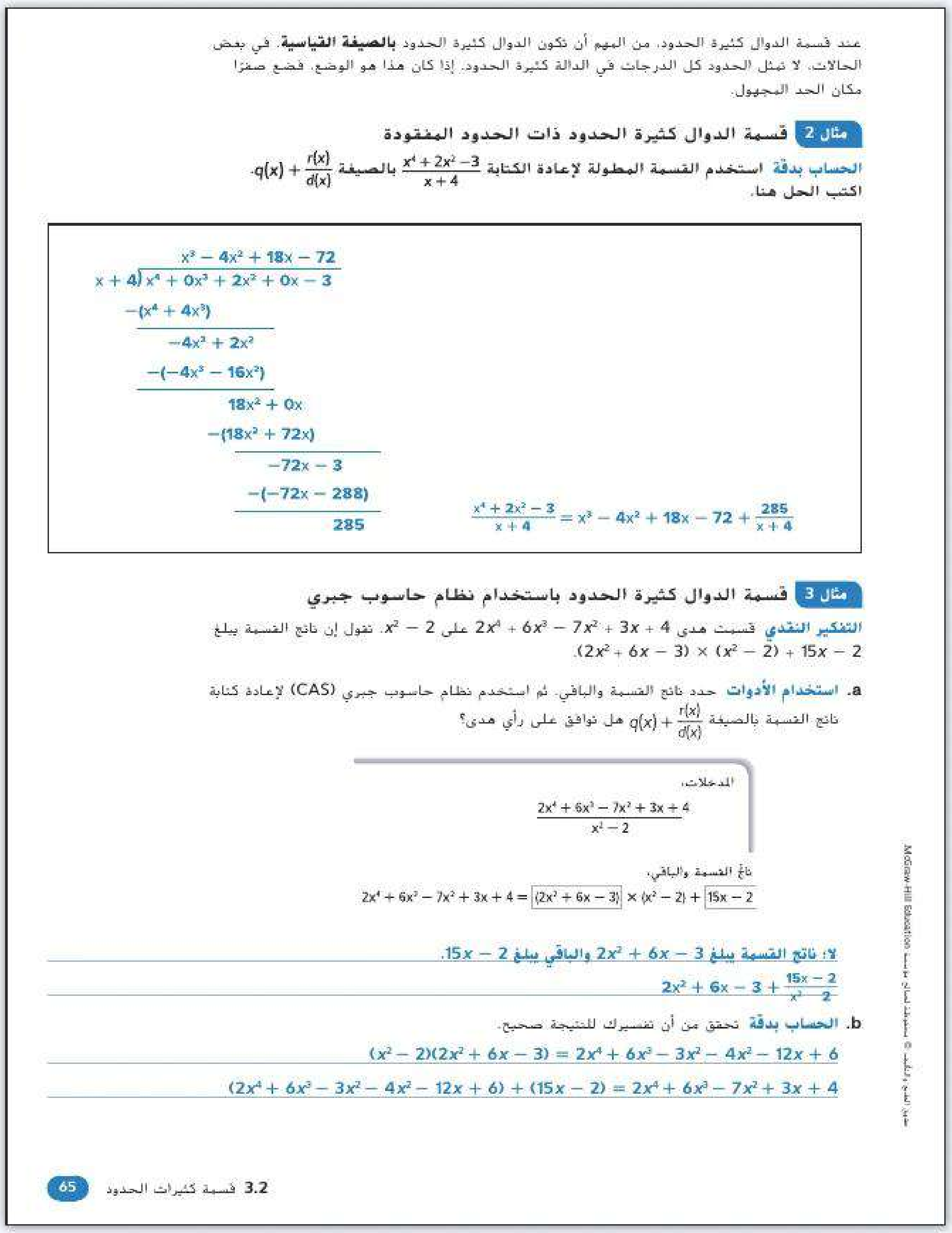
d. **استخدام البنية** تستخدم القسمة الجبرية المطولة نفس العملية التي تستخدمها القسمة العددية المطولة. املأ الخطوات المفقودة في القسمة المطولة لإيجاد $\frac{x^3+x^2-3x+1}{x-1}$.

$$\begin{array}{r}
x^2 + \boxed{1} - \boxed{2x} \\
x-1\overline{)\,x^3+x^2-3x+1} \\
-(x^3-x^2) \\
\hline
2x^2-3x \\
-\left(\boxed{2x^2-2x}\right) \\
\hline
-x+1 \\
-\left(\boxed{-x+1}\right) \\
\hline
0
\end{array}$$

64 **الوحدة 3** كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

معلومات أساسية رياضية

تعمل كثيرات الحدود كأداة مهمة في علومٍ كثيرة. فعلماء الفيزياء الفلكية يستخدمون كثيرات الحدود لحساب سرعة نجم وبعده عن جسمٍ آخر في الفضاء. وقد يستخدم علماء الحاسوب الحاسبات العلمية أو أنظمة حاسوبية جبرية للعمل مع كثيرات حدود أكثر تعقيدًا. وتستخدم الشركات والأعمال التجارية كثيرات الحدود لحساب مدفوعات الرهون العقارية المستقبلية إلى أرصدة الرهون العقارية الحالية. ويعتمد الرياضيون على أنواع كثيرة من سلاسل كثيرات الحدود.


عند قسمة الدوال كثيرة الحدود، من المهم أن تكون الدوال كثيرة الحدود **بالصيغة القياسية**. في بعض الحالات، لا تمثل الحدود كل الدرجات في الدالة كثيرة الحدود. إذا كان هذا هو الوضع، فضع صفرًا مكان الحد المجهول.

مثال 2 **قسمة الدوال كثيرة الحدود ذات الحدود المفقودة**

الحساب بدقة استخدم القسمة المطولة لإعادة الكتابة $\frac{x^4+2x^2-3}{x+4}$ بالصيغة $q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$.
اكتب الحل هنا.

$$\begin{array}{r} x^3-4x^2+18x-72 \\ x+4\overline{)\,x^4+0x^3+2x^2+0x-3} \\ -(x^4+4x^3) \\ \hline -4x^3+2x^2 \\ -(-4x^3-16x^2) \\ \hline 18x^2+0x \\ -(18x^2+72x) \\ \hline -72x-3 \\ -(-72x-288) \\ \hline 285 \end{array}$$

$$\frac{x^4+2x^2-3}{x+4}=x^3-4x^2+18x-72+\frac{285}{x+4}$$

مثال 3 **قسمة الدوال كثيرة الحدود باستخدام نظام حاسوب جبري**

التفكير النقدي قسمت هدى $2x^4+6x^3-7x^2+3x+4$ على x^2-2. تقول إن ناتج القسمة يبلغ $(2x^2+6x-3)\times(x^2-2)+15x-2$.

a. **استخدام الأدوات** حدد ناتج القسمة والباقي. ثم استخدم نظام حاسوب جبري (CAS) لإعادة كتابة ناتج القسمة بالصيغة $q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$ هل توافق على رأي هدى؟

المدخلات:

$$\frac{2x^4+6x^3-7x^2+3x+4}{x^2-2}$$

ناتج القسمة والباقي:

$$2x^4+6x^3-7x^2+3x+4=\boxed{(2x^2+6x-3)}\times(x^2-2)+\boxed{15x-2}$$

لا؛ ناتج القسمة يبلغ $2x^2+6x-3$ والباقي يبلغ $15x-2$.

$$2x^2+6x-3+\frac{15x-2}{x^2-2}$$

b. **الحساب بدقة** تحقق من أن تفسيرك للنتيجة صحيح.

$$(x^2-2)(2x^2+6x-3)=2x^4+6x^3-3x^2-4x^2-12x+6$$

$$(2x^4+6x^3-3x^2-4x^2-12x+6)+(15x-2)=2x^4+6x^3-7x^2+3x+4$$

65 **3.2** قسمة كثيرات الحدود

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **م. م. ر 6 (مراعاة الدقة)**، يحسب الطلاب بدقة وكفاءة، معبرين عن الإجابات الرقمية بدرجة من الدقة مناسبة لسياق المسألة. وعند قسمة كثيرات الحدود، يلزم التحلي بالدقة والمنهجية. وينبغي على الطلاب فهم ما معنى أن درجة $d(x)$ يجب أن تكون أقل من أو يساوي $f(x)$ من أجل إجراء القسمة. وتُطبق قواعد الأسس هنا وكذلك جمع كثيرات الحدود وطرحها.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م. م. ر 6

للحساب بدقة، من المفيد للطلاب أن يحاذوا بين الحدود من الدرجة نفسها. ويجب ملاحظة التوازي بين العملية الخاصة بالقسمة الحسابية المطولة والقسمة المطولة مع كثيرات الحدود: (1) قسمة، (2) ضرب، (3) طرح، (4) إنزال العدد؛ ثم تكرار العملية.

الأسئلة الداعمة

- هل يمكنك إعادة كتابة $\frac{x^2+2x-5}{x-2}$ باستخدام تحليل العوامل والتبسيط؟ **لا؛ فالبسط لا يمكن تحليل عوامله.**
- ما الخاصية الواجب عليك استخدامها للتحقق من أن ناتج القسمة صحيح؟ **تُستخدم خاصية التوزيع عند ضرب $d(x)$ وناتج القسمة.**
- ما خواصّ الأسس التي تستخدمها في القسمة المطولة لكثيرات الحدود؟ **خاصية ناتج الضرب وناتج القسمة للأسس؛ جمع الأسس الخاصة بالأساس نفسه عندما تضرب وتطرح أسس هذا الأساس نفسه عندما تُجري القسمة.**

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م. ر 3, 5, 6

في **المثال 3**، لاحظ أن استخدام نظام CAS يمكن أن يكون بسيطًا، ولكن قد تحتاج النتيجة إلى التفسير أو إعادة الكتابة بصيغة مختلفة.

الأسئلة الداعمة

- هل يجب أن يكون معامل $d(x)$ الرئيسي واحدًا للقسمة؟ **لا. فينبغي أن يكون صحيحًا فقط حقيقة أنه يجب أن تكون درجة $d(x)$ أقل من أو تساوي درجة $f(x)$. وهذا موضح في إحدى مسائل التمرين.**
- ما الفرق بين تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل وقسمتها؟ **ليست كل كثيرات الحدود قابلة للتحليل إلى العوامل. وعند قسمة كثيرات الحدود، فإنه إذا كان الباقي صفرًا، فهذا يعني أنها كانت قابلةً للتحليل إلى العوامل. ويكون المقسوم عليه وناتج القسمة عاملين. وإذا لم يكن الباقي صفرًا، فحينها لا يكون المقسوم عليه عاملاً للمقسوم.**

مثال 4

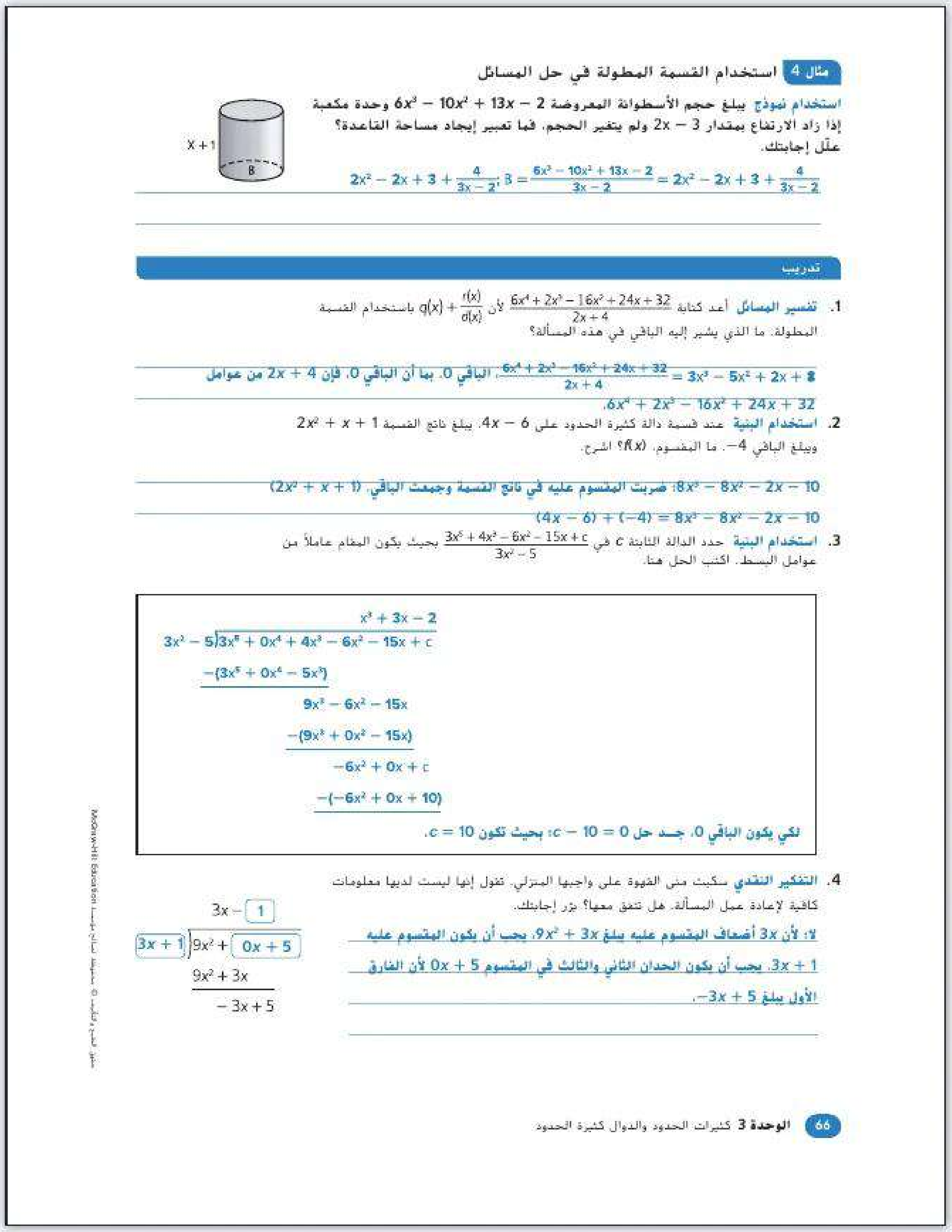
نصيحة للتدريس

م.م. ر 6

قد يعرف بعض الطلاب حجم الأسطوانة من ناحية الارتفاع ونصف القطر ويحاولون الحل لإيجاد قيمة نصف القطر بدلاً من إيجاد قيمة القاعدة. تنبَّه للطلاب الذين قد يقسمون على $x + 1$ أو $2x - 3$ بدلاً من القسمة على المجموع، $3x - 2$.

الأسئلة الداعمة

- كيف ترتبط مساحة القاعدة بحجم الأسطوانة؟ **مساحة القاعدة مضروبة في الارتفاع تساوي حجم الأسطوانة.**
- هل سيكون هناك أي اختلاف في المسألة إذا استُخدم منشور مستطيل بدلاً من الأسطوانة؟ **لا. في هذه الحالة، حجم كل منهما هو مساحة القاعدة مضروبةً في الارتفاع.**



مثال 4 استخدام القسمة المطولة في حل المسائل

استخدام نموذج يبلغ حجم الأسطوانة المعروضة $6x^3 - 10x^2 + 13x - 2$ وحدة مكعبة إذا زاد الارتفاع بمقدار $2x - 3$ ولم يتغير الحجم، فما تعبير إيجاد مساحة القاعدة؟ علّل إجابتك.

$2x^2 - 2x + 3 + \frac{4}{3x-2}$; $B = \frac{6x^3 - 10x^2 + 13x - 2}{3x - 2} = 2x^2 - 2x + 3 + \frac{4}{3x-2}$

تدريب

1. **تفسير المسائل** أعد كتابة $\frac{6x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 24x + 32}{2x + 4}$ لأن $q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ باستخدام القسمة المطولة. ما الذي يشير إليه الباقي في هذه المسألة؟

$\frac{6x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 24x + 32}{2x + 4} = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8$، الباقي 0. بما أن الباقي 0، فإن $2x + 4$ من عوامل $6x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 24x + 32$.

2. **استخدام البنية** عند قسمة دالة كثيرة الحدود على $4x - 6$، يبلغ ناتج القسمة $2x^2 + x + 1$ ويبلغ الباقي -4. ما المقسوم، $f(x)$؟ اشرح.

$8x^3 - 8x^2 - 2x - 10$؛ ضربت المقسوم عليه في ناتج القسمة وجمعت الباقي. $(2x^2 + x + 1)(4x - 6) + (-4) = 8x^3 - 8x^2 - 2x - 10$

3. **استخدام البنية** حدد الدالة الثابتة c في $\frac{3x^5 + 4x^3 - 6x^2 - 15x + c}{3x^2 - 5}$ بحيث يكون المقام عاملاً من عوامل البسط. اكتب الحل هنا.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x - 2 \\ 3x^2 - 5 \overline{)3x^5 + 0x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 15x + c} \\ -(3x^5 + 0x^4 - 5x^3) \\ 9x^3 - 6x^2 - 15x \\ -(9x^3 + 0x^2 - 15x) \\ -6x^2 + 0x + c \\ -(-6x^2 + 0x + 10) \end{array}$$

لكي يكون الباقي 0، جد حل $c - 10 = 0$؛ بحيث تكون $c = 10$.

4. **التفكير النقدي** سكبت منى القهوة على واجبها المنزلي. تقول إنها ليست لديها معلومات كافية لإعادة عمل المسألة. هل تتفق معها؟ برّر إجابتك.

$$\begin{array}{r} 3x - \boxed{1} \\ \boxed{3x + 1}\overline{)9x^2 + \boxed{0x + 5}} \\ 9x^2 + 3x \\ \hline -3x + 5 \end{array}$$

لا؛ لأن $3x$ أضعاف المقسوم عليه يبلغ $9x^2 + 3x$، يجب أن يكون المقسوم عليه $3x + 1$. يجب أن يكون الحدان الثاني والثالث في المقسوم $0x + 5$ لأن الفارق الأول يبلغ $-3x + 5$.

66 الوحدة 3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

تلميح تقني

يمكن للطلاب اتباع هذه الخطوات لاستخدام تقنية Ti-Nspire كنظام جبري حاسوبي (CAS) لقسمة كثيرات الحدود.

الخطوة 1: أضف صفحة حاسبة جديدة.

الخطوة 2: من القائمة، حدد Algebra (الجبر)، ثم Polynomial Tools (أدوات كثيرة الحدود)، ثم Quotient Polynomial (ناتج قسمة كثيرة الحدود).

الخطوة 3: اكتب المقسوم وفاصلة والمقسوم عليه.

الخطوة 4: استخدم الخيار Remainder of Polynomial (الباقي من كثيرة الحدود) من Algebra (الجبر) في القائمة Polynomial Tools (أدوات كثيرة الحدود) لتحديد الباقي. ثم اكتب المقسوم وفاصلة والمقسوم عليه.

5. **إيجاد نمط** أعد كتابة $\frac{x^4+2x^2+x-2}{2x+3}$ بالصيغة $q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$ باستخدام القسمة المطولة.

a. أعاد إبراهيم كتابة التعبير النسبي بالصيغة: $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{7}{8}x+\frac{28}{42}-\frac{\frac{95}{102}}{2x+3}$.
بدون استخدام ورقة وقلم، أخبره صديقه أنه وقع في خطأ. هل تتفق؟ إذا كنت تتفق، فما الخطأ الذي وقع فيه إبراهيم؟

ينبغي أن يكون المعامل الأساسي في ناتج القسمة $\frac{1}{2}$ وليس $\frac{1}{4}$. قسمة المعامل الرئيس للمقسوم على المعامل الرئيسي للمقسوم عليه ستعطيك المعامل الرئيس لناتج القسمة.

b. كيف يمكنك استخدام نمط لتحديد ما إذا كان المعامل الرئيسي في ناتج قسمة خطأ؟

اقسم المعامل الرئيسي للمقسوم على المعامل الرئيسي للمقسوم عليه وقارن هذه النتيجة بالمعامل الرئيس لناتج القسمة. إذا كانا مختلفين، فالمعامل الرئيس لناتج القسمة غير صحيح.

c. بسّط $\frac{x^4+2x^2+x-2}{2x+4}$.

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 3x - \frac{11}{2} \\
2x+4\,\overline{)\,x^4 + 0x^3 + 2x^2 + x - 2} \\
\underline{x^4 + 2x^3} \\
-2x^3 + 2x^2 \\
\underline{-2x^3 - 4x^2} \\
6x^2 + x \\
\underline{6x^2 + 12x} \\
-11x - 2 \\
\underline{-11x - 22} \\
20
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 3x - \frac{11}{2} + \frac{20}{2x+4}$.

6. **التفكير بطريقة تجريدية** باعتبار أن $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ افترض أنك تعرف أن $q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$.
هل يمكن تحديد $f(x)$؟ استخدم مثالاً لتوضيح إجابتك.

نعم؛ المقسوم عليه هو $d(x)$. إذاً $f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. الإجابة النموذجية: على سبيل المثال، إذا كانت $q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} = x - 2 + \frac{3}{x-1}$، فإن المقسوم عليه هو $x - 1$ و $f(x) = (x-1)(x-2) + 3$، أو $x^2 - 3x + 5$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات تعد الممارستان م. م. ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكمية) و م. م. ر 8 (البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك) على حد سواء ضرورتين للنجاح في قسمة كثيرات الحدود. شدد على ضرورة أن يسأل الطلاب أنفسهم بعد كل خطوة من عملية القسمة المطولة عما إذا كانت النتيجة منطقية. فهذا يمكنه مساعدتهم في اكتشاف الأخطاء التي قد يقعون فيها. ويجب أن يلاحظ الأطباء الأنماط ويستخدمونها للحكم على صحة نتائجهم.

تمرين

في **التمارين 3–1**، يُطلب من الطلاب العمل من خلال عملية تغيير صيغة التعبير النسبي.

لحل **التمارين 6–4**، ينبغي على الطلاب التعرف على الأنماط في إعادة كتابة التعابير النسبية.

في **التمرين 7**، يحلّ الطلاب مسألة في أثناء العمل مع التعابير النسبية خلال عملية الحل.

التمرين 8 يتطلب أن يعلّق الطلاب على طريقة استنتاج الآخرين بشأن طريقة إعادة كتابة التعابير النسبية.

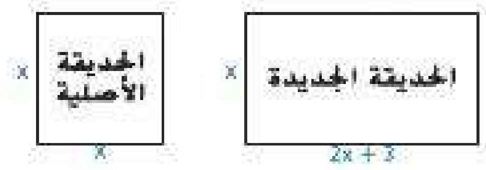
في **التمرين 9**، يستخدم الطلاب نظام CAS لإعادة كتابة تعبير نسبي وتفسير النتائج.

لحل **التمرين 10**، يجب على الطلاب إعادة كتابة تعبير نسبي باستخدام القسمة المطولة.

تناول المعايير

تمرين	م. م. ر
1	1
2–3	7
4	3
5	7
6	2
7	4
8	3
9	2, 4, 5, 7, 8
10	7

7. **استخدام نموذج** يمتلك مالك حديقة مربعة. سيكون للحديقة الجديدة نفس العرض ولكن الطول يزيد بمقدار 3 أقدام على ضعف عرض الحديقة الأصلية.



a. ضع تعريفًا لمتغير واكتب على كل ضلع في الرسومات التخطيطية تعبيرًا لطولها.

افترض أن x = ضلعًا في الحديقة الأصلية. راجع المكتوب على الأضلاع في الرسومات التخطيطية.

b. اكتب معدلاً يمثل النسبة المئوية للزيادة في مساحة الحديقة. استخدم قسمة كثيرة الحدود لإعادة كتابة التعبير.

مساحة المربع تبلغ x^2. مساحة التصميم الجديد تبلغ $2x^2 + 3x$. النسبة المئوية للزيادة في مساحة الحديقة الجديدة تبلغ $100 \times \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2}\right)$. باستخدام القسمة المطولة وتحويل نتائج المعدل لأبسط صورة في $\frac{100 + 300}{x}$.

c. استخدم التعبير الذي وضعته في **الجزء b** لتحديد النسبة المئوية للزيادة في المساحة إذا كانت مساحة الحديقة الأصلية تبلغ 12 قدمًا. راجع إجابتك.

قم بالتعويض برقم 12 بدلاً من x في التعبير $100 + \frac{300}{x}$ وجد القيمة لتحديد أن النسبة المئوية للزيادة تبلغ $125 = 100 + \frac{300}{12}$ أو 125%. باستخدام 12 ft كطول ضلع في المربع الأصلي، تبلغ المساحة $144\ ft^2$. ستبلغ مساحة التصميم الجديد $(2(12) + 3)\ (12) = 324\ ft^2$. تبلغ النسبة المئوية للزيادة $1.25 = \frac{180}{144} = \frac{324 - 144}{144}$ أو 125%.

8. **التفكير النقدي** تقدم سعاد مزاعم بشأن درجات الدوال كثيرة الحدود في $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$. هل تتفق مع كل مزاعمها؟ برِّر إجابتك واذكر أمثلة.

a. يجب أن تقل درجة $d(x)$ عن درجة $f(x)$.

لا؛ فقد تتساوى الدرجتان $f(x)$ و $d(x)$. على سبيل المثال، $\frac{3x^2 + 6}{x^2} = 3 + \frac{6}{x^2}$.

b. يجب أن تقل درجة $r(x)$ بمقدار 1 على الأقل عن درجة $d(x)$.

نعم؛ إذا كانت الدرجة $r(x)$ أكبر من أو تساوي الدرجة $d(x)$، فإن التعبير $\frac{r(x)}{d(x)}$ يمكن تحويله لأبسط صورة. على سبيل المثال، إذا كانت $\frac{r(x)}{d(x)} = \frac{8x + 1}{x}$، فإن $8x + 1$ تقبل القسمة على x للحصول على $8 + \frac{1}{x}$.

c. يجب أن تبلغ درجة $q(x)$ مقدار درجة $f(x)$ مطروحًا منها درجة $d(x)$.

نعم؛ لأن $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$، درجة $\frac{f(x)}{d(x)}$ يجب أن تساوي درجة $q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$. تقل درجة $r(x)$ عن درجة $d(x)$ وإذًا درجة $q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ تساوي درجة $q(x)$. يعني هذا أن درجة $\frac{f(x)}{d(x)}$ تساوي درجة $q(x)$، ودرجة $\frac{f(x)}{d(x)}$ هي درجة $f(x)$ مطروحًا منها درجة $d(x)$. على سبيل المثال، في $\frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3} = 2x + \frac{-6x - 1}{x^2 + 3}$، تبلغ درجة $q(x)$ مقدار درجة $f(x)$ مطروحًا منها درجة $d(x)$.

أخطاء شائعة

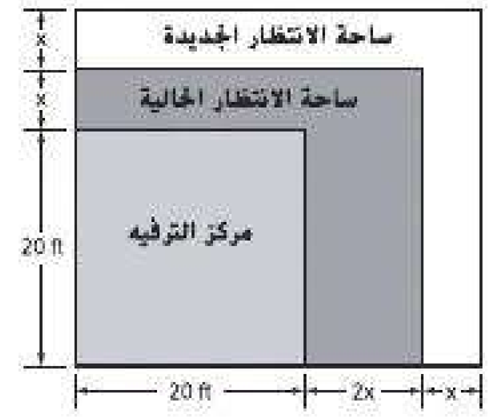
ثمة خطأٌ شائع عند طرح كثيرات الحدود، كما في **التمرين 5**، وهو طرح الأسس بالإضافة إلى المعاملات. ويجب على الطلاب فهم أنه لجمع الحدود المتشابهة، ينبغي أن يتم جمع أو طرح المعاملات فقط؛ وتظل الدرجة هي نفسها.

حين يقوم الطلاب بخطوة الطرح في قسمة مطولة، فإنهم ينسون أن الطرح ينطبق على جميع الحدود، وليس الحد الأول فحسب.

التدريس المتمايز

لمساعدة الطلاب الذين قد يواجهون صعوبة في المحاذاة بين الحدود المتشابهة، اقترح عليهم استخدام ورقة تمثيل بياني أو قلب ورقة دفتر مُسطرة على الجانب. شدد على خطوة ملء الحدود المجهولة بالأصفار للمساعدة في الجهد المبذول لمحاذاة الحدود المتشابهة. وقد يجد بعض الطلاب من المفيد الإبقاء على نماذج العمليات التي بها أحاديات حدود متاحة كتذكير يمكنهم الرجوع إليه عند الحاجة.

9. استخدام نموذج تحتاج ساحة انتظار السيارات في مركز ترفيه في إحدى المدن إلى تكبيرها. يعترض مسؤول تخطيط المدينة أن الزيادة في طول الساحة وعرضها ستبلغ x أقدام.



a. استخدام الأدوات اكتب دوال مساحة ساحة الانتظار الحالية ومساحة ساحة الانتظار الجديدة. استخدم CAS لكتابة معادلة بالصيغة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ لمقارنة مساحة ساحة الانتظار الجديدة بمساحة ساحة الانتظار الحالية.

ساحة الانتظار الحالية $= (x + 20)(2x + 20) - 400 = 2x^2 + 60x$؛ ساحة الانتظار الجديدة $= (2x + 20)(3x + 20) - 400 = 6x^2 + 100x$. بموجب CAS، $\frac{6x^2 + 100x}{2x^2 + 60x} = 3 + \frac{-80x}{2x^2 + 60x}$.

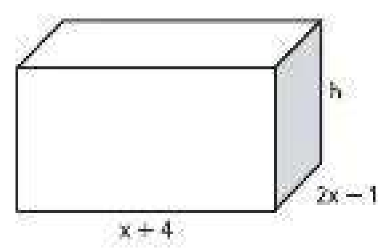
b. التفكير بطريقة كمية هل يمكن زيادة حجم مساحة الانتظار ثلاثة أضعاف حسب هذه الخطة؟ اشرح.

لا؛ لأن x تمثل قياسًا والباقي يمثل كمية سالبة. يعني هذا أن مساحة ساحة الانتظار الجديدة بالمقارنة بمساحة ساحة الانتظار الحالية ستقل عن ثلاثة أضعاف.

c. وصف طريقة افترض أن مسؤول تخطيط المدينة يريد أن يعرف كيف ستؤثر الزيادة في ساحة الانتظار على مساحة المنشأة بالكامل والتي تضم مركز الترفيه وساحة الانتظار معًا. اشرح أسلوبًا لحل هذه المسألة.

اكتب تعبيرًا لمجموع مساحات مركز الاستجمام وساحة الانتظار الجديدة وتعبيرًا لمجموع مساحات مركز الاستجمام وساحة الانتظار الحالية. اقسم تعبير مساحة المنشأة الجديدة على تعبير المنشأة الحالية.

10. استخدام البنية صندوق يبلغ طوله $x + 4$، ويبلغ عرضه $2x - 1$، وارتفاعه h. إذا كان حجم الصندوق يبلغ $2x^3 + x^2 - 25x + 12$، فجد تعبيرًا للارتفاع h بدلالة x، ثم بسّطه.

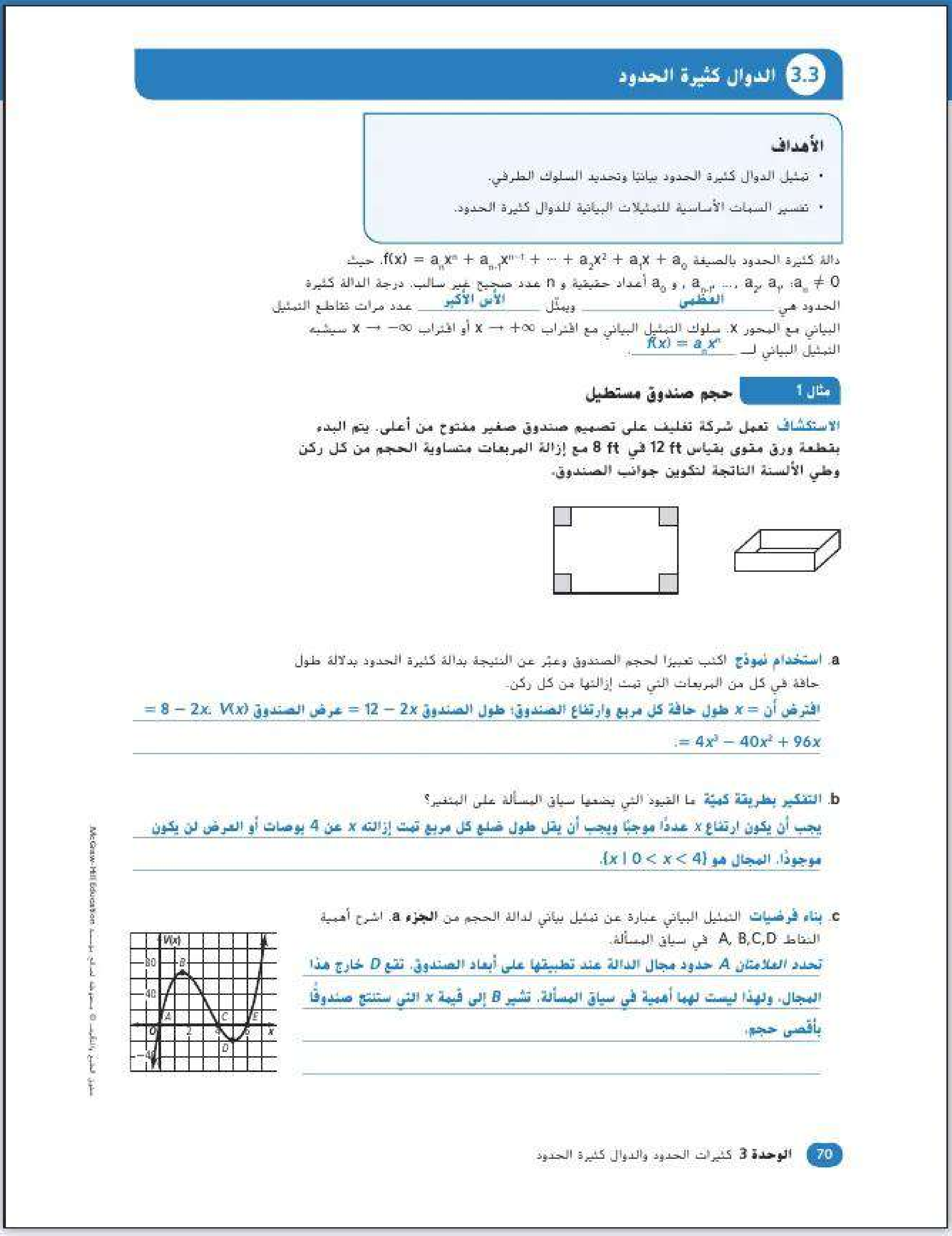


$h = x - 3$؛ حجم الصندوق هو V = (الطول) · (العرض) · (الارتفاع) وإذًا $2x^3 + x^2 - 25x + 12 = (x + 4)(2x - 1)h$.

إذًا $h = \frac{2x^3 + x^2 - 25x + 12}{(x + 4)(2x - 1)} = \frac{2x^3 + x^2 - 25x + 12}{2x^2 + 7x - 4}$،

باستخدام القسمة المطولة، $h = x - 3$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات م. م. ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها) تنص على أنه ينبغي على الطلاب التفكير في المسائل المماثلة وتجربة حالات خاصة وصيغ أبسط من المسألة الأصلية حتى يكتسبوا رؤية تجاه حلها. وعند قسمة كثيرات الحدود، يمكن للطلاب ملاحظة أن نفس الخطوات الإجرائية تُتبع كما في قسمة الأعداد الكلية. ويمكن للطلاب أيضًا مقارنة كيفية إعادة كتابة كثيرات الحدود بنفس طريقة كتابة الأعداد الكسرية. ويمكن للطلاب التحقق من صحة الإجابات باتباع الخطوات نفسها المتبعة في تغيير عدد كسري إلى كسر معتل.


3.3 الدوال كثيرة الحدود

الأهداف

- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا وتحديد السلوك الطرفي.
- تفسير السمات الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود.

دالة كثيرة الحدود بالصيغة $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث $a_n \neq 0$؛ a_1، a_2، ...، a_{n-1}، و a_0 أعداد حقيقية و n عدد صحيح غير سالب. درجة الدالة كثيرة الحدود هي ___العظمى___ ويمثّل ___الأس الأكبر___ عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع المحور x. سلوك التمثيل البياني مع اقتراب $x \to +\infty$ أو اقتراب $x \to -\infty$ سيشبه التمثيل البياني لـ ___$f(x) = a_nx^n$___.

مثال 1 **حجم صندوق مستطيل**

الاستكشاف تعمل شركة تغليف على تصميم صندوق صغير مفتوح من أعلى. يتم البدء بقطعة ورق مقوى بقياس 12 ft في 8 ft مع إزالة المربعات متساوية الحجم من كل ركن وطي الألسنة الناتجة لتكوين جوانب الصندوق.

a. **استخدام نموذج** اكتب تعبيرًا لحجم الصندوق وعبّر عن النتيجة بدالة كثيرة الحدود بدلالة طول حافة في كل من المربعات التي تمت إزالتها من كل ركن.

افترض أن x = طول حافة كل مربع وارتفاع الصندوق؛ طول الصندوق $12 - 2x$ = عرض الصندوق $8 - 2x$. $V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 96x$.

b. **التفكير بطريقة كمية** ما القيود التي يضعها سياق المسألة على المتغير؟

يجب أن يكون ارتفاع x عددًا موجبًا ويجب أن يقل طول ضلع كل مربع تمت إزالته x عن 4 بوصات أو العرض لن يكون موجودًا. المجال هو $\{x \mid 0 < x < 4\}$.

c. **بناء فرضيات** التمثيل البياني عبارة عن تمثيل بياني لدالة الحجم من **الجزء a**. اشرح أهمية النقاط A, B,C,D في سياق المسألة.

تحدد العلامتان A حدود مجال الدالة عند تطبيقها على أبعاد الصندوق. تقع D خارج هذا المجال، ولهذا ليست لهما أهمية في سياق المسألة. تشير B إلى قيمة x التي ستنتج صندوقًا بأقصى حجم.

McGraw-Hill Education

70 الوحدة 3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 5, 7

المتطلبات الأساسية

- تمثيل الدوال الخطية بيانيًا
- تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

مثال 1

نصيحة للتدريس

م. م. ر 4

ناقش كيف يمكن استخدام دالة لتمثيل موقف من الحياة اليومية. ولكن في الوقت نفسه قد ينطبق جزء فقط من التمثيل البياني على شروط المسألة. وقد يكون من الضروري أحيانًا تقييد المجال وفحص جزء فقط من التمثيل البياني كله.

الأسئلة الداعمة

- إذا تم اقتطاع مربعات بحجمٍ متساوٍ من كل ركن من الورق المقوى، فما أبعاد قاعدة الصندوق؟ **$(2x - 12)$ و $(2x - 8)$**
- ما حجم المربع الأكبر الذي يمكن اقتطاعه من الأركان الأربعة للورق المقوى؟ **ينبغي أن يكون طول ضلع المربع أقل من 4 بوصات.**

معلومات أساسية رياضية

فيما سبق درس الطلاب التمثيلات البيانية وخواص الدوال التربيعية. وهي عبارة عن دوال كثيرة الحدود من الدرجة 2. والآن حان وقت قيامهم بتحليل الدوال كثيرة الحدود ذات الدرجات الأعلى وتفسيرها. والمهارات التي سيكتسبونها هنا ستكون أساسية في حساب التفاضل والتكامل عند ربط الدوال من درجات مختلفة عن طريق التفاضل والتكامل.

يمكن استخدام الدوال كثيرة الحدود كأداة لتحليل الدوال الأخرى. فعلى سبيل المثال، يمكن استخدامها لتمثيل وتقريب متسلسلات لا نهائية. وهذه موضوعات متقدمة من حساب التفاضل والتكامل وتفوق نطاق هذا المنهج.

مثال 2 السلوك الطرفي للتمثيلات البيانية كثيرة الحدود

a. **التفكير بطريقة كمية** فكّر في الدالة $f(x) = -5x^4 + 9x^3 + 7$. حدد الدرجة والسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود. هل السلوك الطرفي متطابق مع السلوك الطرفي للدالة $g(x) = 5x^4 + 9x^3 + 7$؟

السلوك الطرفي هو: $f(x) \to -\infty$ مع اقتراب $x \to +\infty$ $(x) \to -\infty$ مع اقتراب $x \to -\infty$. بما أن $g(x)$ من الدرجة نفسها ولها معامل رئيسي موجب، فإن لها السلوك الطرفي المقابل.

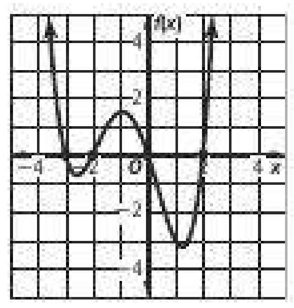
b. **التفكير بطريقة كمية** إذا كانت $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6x + 2$، فحدد $f(x - 2)$. عبّر عن النتيجة بالصيغة القياسية. كيف تقارن بين السلوك الطرفي للدالة $f(x - 2)$ وللدالة $f(x)$؟ اشرح.

$f(x - 2) = 3(x - 2)^3 + 4(x - 2)^2 - 6(x - 2) + 2 = 3x^3 - 14x^2 + 14x + 6$؛ التمثيل البياني للدالة $f(x - 2)$ يمثل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ بعد إزاحته وحدتين إلى اليمين. إذًا الدوال متطابقة في السلوك الطرفي.

c. **استخدام البنية** إذا كانت $f(x) = 6x^3 - x^2 - 12x - 5$، فصف السلوك الطرفي للدالة $f(-x)$.

$f(-x) = 6(-x)^3 + (-x)^2 - 12(-x) - 5 = -6x^3 + x^2 + 12x - 5$. السلوك الطرفي هو: $f(-x) \to -\infty$ عندما تقترب $x \to +\infty$ واقتراب $f(-x) \to +\infty$ عندما تقترب $x \to -\infty$.

مثال 3 أصفار التمثيلات البيانية كثيرة الحدود



a. **استخدام البنية** حدد عدد الأصفار الحقيقية للدالة المعروضة في التمثيل البياني. هل الدالة فردية أم زوجية؟ اشرح كيف تعرف.

يتقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x 4 مرات، ولهذا فالدالة تحتوي على 4 أصفار حقيقية. بما أن $f(x) \to +\infty$ عندما تقترب $x \to +\infty$ وعندما تقترب $x \to -\infty$، الدالة زوجية.

b. **بناء الفرضيات** هل يجب أن يتقاطع التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود مع المحور x لكي يتواجد صفر حقيقي؟ اشرح استنتاجك.

لا. يمكن أن يتماس التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود مع المنحنى عند نقطة التقاطع. هذا مثال على صفر متكرر لدالة كثيرة الحدود.

c. **بناء الفرضيات** هل يمكن أن يتقاطع التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة مع المحور x مرتين؟ هل يمكن أن يتقاطع أربع مرات؟ اشرح استنتاجك.

يمكن أن يتقاطع التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة مع المحور x مرتين إذا كانت الدالة تضم صفرًا مكررًا. لكن التمثيل البياني الذي يتقاطع مع المحور x أربع مرات يمثل على الأقل دالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة. يؤدي كل تقاطع مع المحور x إلى رفع الدرجة بمقدار واحد على الأقل. يشير التمثيل البياني الذي يتماس مع المحور x إلى أن الدرجة ستزيد بمقدار 2.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

الممارسة م. م. ر 4 تتطلب أن يتمكن الطلاب من تطبيق الرياضيات التي يعرفونها على مسائل في الحياة اليومية. وفي **المثال 1a**، يُطلب من الطلاب أخذ تصميم تصنيع وتمثيله في صورة دال كثيرة الحدود.

وينبغي عليهم المرور بخطوات عدة لإنتاج النموذج الصحيح. وعليهم تصور تكوين صندوق ثلاثي الأبعاد من قطعة واحدة من الورق المقوى، وإيجاد صيغة لحجم الصندوق. ثم ينبغي عليهم معالجة ذلك التعبير لاكتشاف دالة كثيرة الحدود في صيغة معيارية. ولاحقًا يواجهون في المثال تمثيلاً بيانيًا للدالة، حيث يمكنهم ربطه بكلٍ من القيود على المجال وبتصميم يمكنه زيادة حجم الصندوق لحده الأقصى.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م. م. ر 7

ناقش السبب في أنه من الضروري فقط فحص الحد ذي الدرجة الأعلى من أجل إدراك السلوك الطرفي للدالة. ويمكنك شرح كيفية مقارنة كل من x^4 و x^3 من حيث الحجم عندما يكون $x = 100,000$.

الأسئلة الداعمة

- ما تأثير استبدال x بـ $x - 2$؟ **يزاح التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليمين.**
- ما تأثير استبدال x بـ $-x$؟ **ينعكس التمثيل البياني في المحور الرأسي y.**

مثال 3

نصيحة للتدريس
م. م. ر 3

اطلب من الطلاب تحديد ورسم دوال تربيعية بها 0 أو 1 أو 2 من الأصفار. اربط عدد الأصفار الحقيقية بالصيغة مُحلَّلة العوامل للدالة التربيعية عن طريق التمثيل البياني لدوال مثل $y = x^2 + 1$، $y = (x - 1)^2$ و $y = (x - 1)(x + 1)$.

الأسئلة الداعمة

- إذا كان التمثيل البياني لدالة تربيعية متماسًا مع المحور الأفقي x، فكم عدد الأصفار الحقيقية التي بها؟ **بها صفر مزدوج، وصفر واحد يتم عدّه مرتين عند التفكير في عدد الأصفار الحقيقية.**
- هل من الممكن تحديد الدرجة من خلال النظر إلى التمثيل البياني؟ **لا. عدد التقاطعات مع المحور الأفقي x أو عدد الانحناءات التي يصنعها التمثيل البياني ليس من الضروري أن تشير إلى درجة الدالة.**

تلميح تقني

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني أو برنامج حاسوبي لمساعدة الطلاب على تصور التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود، إلى جانب مساعدتهم على التحقق من دقة حلولهم.

تدريب

1. **التخطيط لحل** بالنسبة للدالة المحددة، حدد درجة الدالة كثيرة الحدود وصف السلوك الطرفي.

a. $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7$

الدرجة 4. السلوك الطرفي هو: $f(x) \to +\infty$ عندما $(x) \to +\infty$ $x \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$.

b. $g(x) = 4x - x^2$

الدرجة هي 2. السلوك الطرفي هو: $g(x) \to -\infty$ عندما $(x) \to -\infty$ $x \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$.

c. $h(x) = 1 - x^3 + x$

الدرجة هي 3. السلوك الطرفي هو: $h(x) \to -\infty$ عندما $(x) \to +\infty$ $x \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$.

2. **بناء الفرضيات** اشرح السبب في أن الدالة كثيرة الحدود بدرجة فردية يجب أن تحتوي على صفر حقيقي واحد على الأقل.

بالنسبة لدالة كثيرة الحدود بدرجة فردية، $f(x) \to +\infty$ عند طرف في التمثيل البياني $(x) \to -\infty$ عند الطرف الآخر.

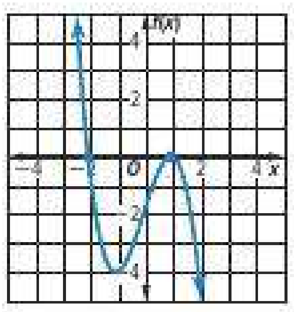
التوصيل بين هذين الطرفين بتمثيل بياني متصل سيعني عبور المحور x عند نقطة ما. تمثل تلك النقطة صفرًا حقيقيًا.

3. **التفكير بطريقة كمية** إذا كانت $f(x) = ax^3 - bx^2 + x$، فحدد $f(1 - x)$. عبّر عن النتيجة بالصيغة القياسية. كيف تقارن سلوك $f(1 - x)$ الطرفي مع $f(x)$؟

$f(1 - x) = a(1 - x)^3 - b(1 - x)^2 + (1 - x)$. إذًا $f(1 - x) = -ax^3 + (3a - b)x^2 + (-3a + 2b - 1)x + (a - b + 1)$. تحتوي الدالة $f(1 - x)$ على المعامل الرئيسي المقابل الذي يمثل انعكاسًا في المحور y. إذًا فله السلوك الطرفي المقابل.

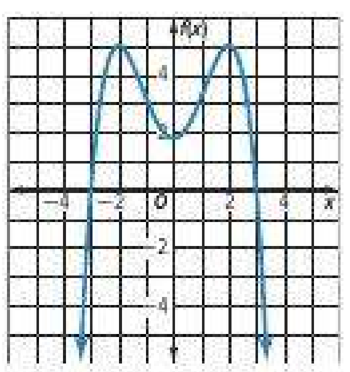
4. **استخدام البنية** ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة كثيرة الحدود بالخصائص التالية: الدرجة = 3، الأصفار الحقيقية = 3، الأصفار الحقيقية المميزة = 2، $f(x) \to +\infty$ مع اقتراب $x \to -\infty$.

الإجابة النموذجية:



5. **استخدام البنية** ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة كثيرة الحدود بالخصائص التالية: الدرجة = 4، الأصفار الحقيقية = 2، الأصفار الحقيقية المميزة = 2، المعامل الرئيس السالب.

الإجابة النموذجية:



أخطاء شائعة

قد يخلط الطلاب بين مفهومي الدرجة وعدد الأصفار الحقيقية. وقد يخفقون في إدراك أن درجة دالة كثيرة الحدود يمكن أن تكون أكبر من عدد الأصفار الحقيقية، رغم أنهم رأوا هذا بالفعل عند دراستهم الدوال التربيعية. كما قد يخلطون بين قيم x وقيم الدالة عند مناقشة السلوك الطرفي لدالة كثيرة الحدود. أو قد يخلطون بين العلامات في الدالة وتمثيلات اللانهاية الموجبة والسالبة.

تمرين

في **التمرين 3–1** و**التمرين 6**، ينبغي أن يفسر الطلاب المعلومات المعطاة بشأن دالة ما لتحديد سمات رئيسية معينة في تمثيلها البياني.

في **التمرينين 5–4**، يمثل الطلاب بيانيًا دوال كثيرة الحدود ويبينون السلوك الطرفي. ويجب عليهم أيضًا ربط السمات التي أُعطيت لهم مع معرفة بنية التمثيل البياني.

في **التمرين 7**، يجب على الطلاب تحديد مجال دالة وسلوكها الطرفي.

التمرين 8 يطلب من الطلاب تحديد عدة سمات تظهر على التمثيل البياني لدالة، بما فيها تحديد الأصفار من صيغة الدالة ذات العوامل المُحلَّلة.

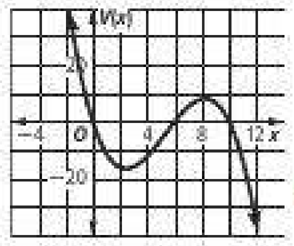
في **التمرين 9**، يستخدم الطلاب حاسبة للتحقق من الأصفار وتحديد الفترات المهمة في مجال دالة نموذجية.

تناول المعايير

تمرين	م. م. ر
1	1
2	3
3	2
4-5	7
6	3
7	3
8	7
9	5

6. **التفكير النقدي** تقول خلود إن السلوكين الطرفيين للدالتين $g(x) = -3x^4 + 15x^3 - 12x^2 + 3x + 20$ $(x) = -3x^4 - 16x - 1$ متطابقان تمامًا. هل هي على صواب؟ اشرح سبب الصواب أو الخطأ.

نعم؛ يتحدد السلوك الطرفي حسب إشارة المعامل الرئيسي ودرجة الدالة. وهما متطابقان بالنسبة إلى (x) $g(x)$. عندما $x \to +\infty$, $(x) \to -\infty$ وعندما $x \to -\infty$, $(x) \to -\infty$ لكلتا الدالتين.

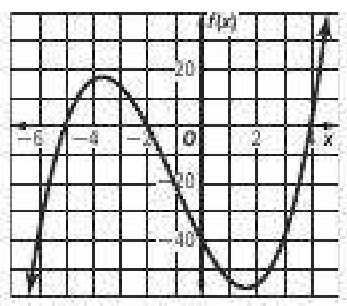


7. **التفكير النقدي** ترسم جمانة دالة بيانيًا لتمثيل حجم صندوق بالأضلاع x، و $6 - x$، و $10 - x$. وتدرك أن التمثيل البياني سيتقاطع مع x عند 0 و 6 و 10. هل تمثيلها البياني صحيح؟ اشرح استنتاجك.

لا؛ بالنظر إلى السياق، يجب أن يكون المجال $\{x \mid 0 < x < 6\}$، مما يعني أن الدالة يجب أن تحتوي على قيمة موجبة في هذه الفترة. يوضح تمثيلها البياني حجمًا سالبًا على $\{0 < x < 6\}$. السلوك الطرفي غير صحيح. الحد الرئيسي هو x^3. عندما $x \to +\infty$, $V(x) \to +\infty$ وعندما $x \to -\infty$, $(x) \to -\infty$. يوضح تمثيلها البياني السلوك المقابل.

8. **استخدام البنية** فكّر في الدالة $f(x) = -(3 - x)(4 - x)^2$. حدد درجة الدالة كثيرة الحدود وأي أصفار لها.

الدالة بالصيغة القياسية هي $f(x) = x^3 - 11x^2 + 40x - 48$. إذًا الدرجة هي 3. بما أن صيغة التحليل إلى العوامل $f(x)$ مذكورة، إذًا فالأصفار هي 3 و 4.



9. **استخدام الأدوات** تستخدم إحدى الشركات الدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 - 18x - 40$ لتمثيل التغير في كفاءة جهاز بناء على موضعه باستخدام مجال $[-6, 4]$. يظهر بالصورة التمثيل البياني للدالة $f(x)$.

a. يبدو أن التمثيل البياني يعرض تقاطعات x عند $x = -5 = -2 = 4$. كيف يمكنك التحقق من أن هذه تقاطعات x؟

الإجابة النموذجية: استخدم دالة الجدول في حاسبة للتحقق من أن قيمة الدالة صفر عند $x = -5, = -2, = 4$.

b. حدد الفترات التي تكون الدالة فيها موجبة مع الإشارة إلى زيادة في الكفاءة.

بما أن قيمة الدالة هي صفر عند $x = -5 = -2, = 4$، فالدالة موجبة في الفترة $(-5, -2)$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 3 تتطلب أن يتمكن الطلاب من بناء فرضيات منطقية وتقديم التبريرات لاستنتاجاتهم. وفي **التمرين 2** يُطلب من الطلاب تقديم الدعم للاستنتاج القائل بأن كثيرة الحدود ذات الدرجة الفردية يجب أن يكون فيها صفر حقيقي واحد على الأقل.

ويتعين عليهم التفكير فيما تعلّموه بشأن السلوك الطرفي وكيف يرتبط بالدوال كثيرة الحدود ذات الدرجة الفردية. وهم يفهمون أن التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود هو منحنى واحد مستمر (أو غير منقطع). وللوصول من $-\infty$ إلى $+\infty$ فهذا سيعني المرور بالصفر (المحور الأفقي x) في مكانٍ ما على طول المنحنى.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- التمثيل البياني للدوال
- حل المعادلات باستخدام خاصية ناتج الضرب في صفر

مثال 1

نصيحة للتدريس

م. م. ر 7

لا يمكن تحديد شكل الدالة من الجدول وحده. ناقش الأشكال العاملة للدوال كثيرات الحدود بما فيها أقصى عدد للمرات التي قد يتقاطع فيها التمثيل البياني للدالة مع المحور الأفقي x بناءً على درجتها.

3.4 تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

الأهداف

- تفسير السمات الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود.
- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا وتحديد القيم القصوى النسبية.

لبناء التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود، يمكنك إنشاء جدول لعدة نقاط ثم توصيلها بمنحنى سلس متصل.

المفهوم الأساسي **مبدأ تحديد الموقع**

افترض أن $f(x)$ يمثل دالة كثيرة الحدود وأن a عددان حقيقيان بحيث تكون $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. إذًا للدالة صفر حقيقي واحد على الأقل بين a

قد تحتوي التمثيلات البيانية لدوال كثيرة الحدود على **قيم قصوى**، عليا أو صغرى على فترات معينة في المجال. تتألف **القيم القصوى النسبية** من قيم عظمى نسبية وقيم صغرى نسبية. تحتوي القيمة العظمى النسبية على القيمة الأكبر عند مقارنتها بالنقاط القريبة وتحتوي القيمة الصغرى النسبية على القيمة الأقل عند مقارنتها بالنقاط القريبة.

مثال 1 **تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود**

الاستكشاف استخدم الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$.

a. **تفسير المسائل** حدد النقاط على التمثيل البياني $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$ عن طريق ملء الجدول أدناه. ما الفترات التي يجب أن تحتوي على أصفار الدالة؟ اشرح استنتاجك.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−48	−9	4	3	0	7	36

يجب أن يحتوي التمثيل البياني على صفر بين $x = -1 = 0$ لأن $f(x)$ تغير الإشارة في هذه الفترة. حسب مبدأ الموقع، يجب أن تحتوي الدالة على صفر واحد على الأقل بين $x = -1 = 0$. من الواضح أيضًا من الجدول أن هناك صفرًا عند $x = 2$، مما يعني أن أية فترة تحتوي على قيمة x هذه ستحتوي على صفر.

b. **بناء الفرضيات** هل يمكن أن يكون هناك صفر إضافي في مكان ما بين $x = 3 = 4$؟ اشرح كيفية تأكيد وجود صفر آخر في تلك الفترة أو عدم وجوده.

يمكن أن يوجد صفر إضافي بين $x = 3 = 4$، إذا كانت قيمة $f(x)$ سالبة عند نقطة ما في تلك الفترة. يمكن التأكد من هذا عن طريق فحص أحد تمثيلات $f(x)$ البيانية أو بتوسيع الجدول ليشمل المزيد من قيم x بين 3 و 4.

74 **الوحدة 3** كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

معلومات أساسية رياضية

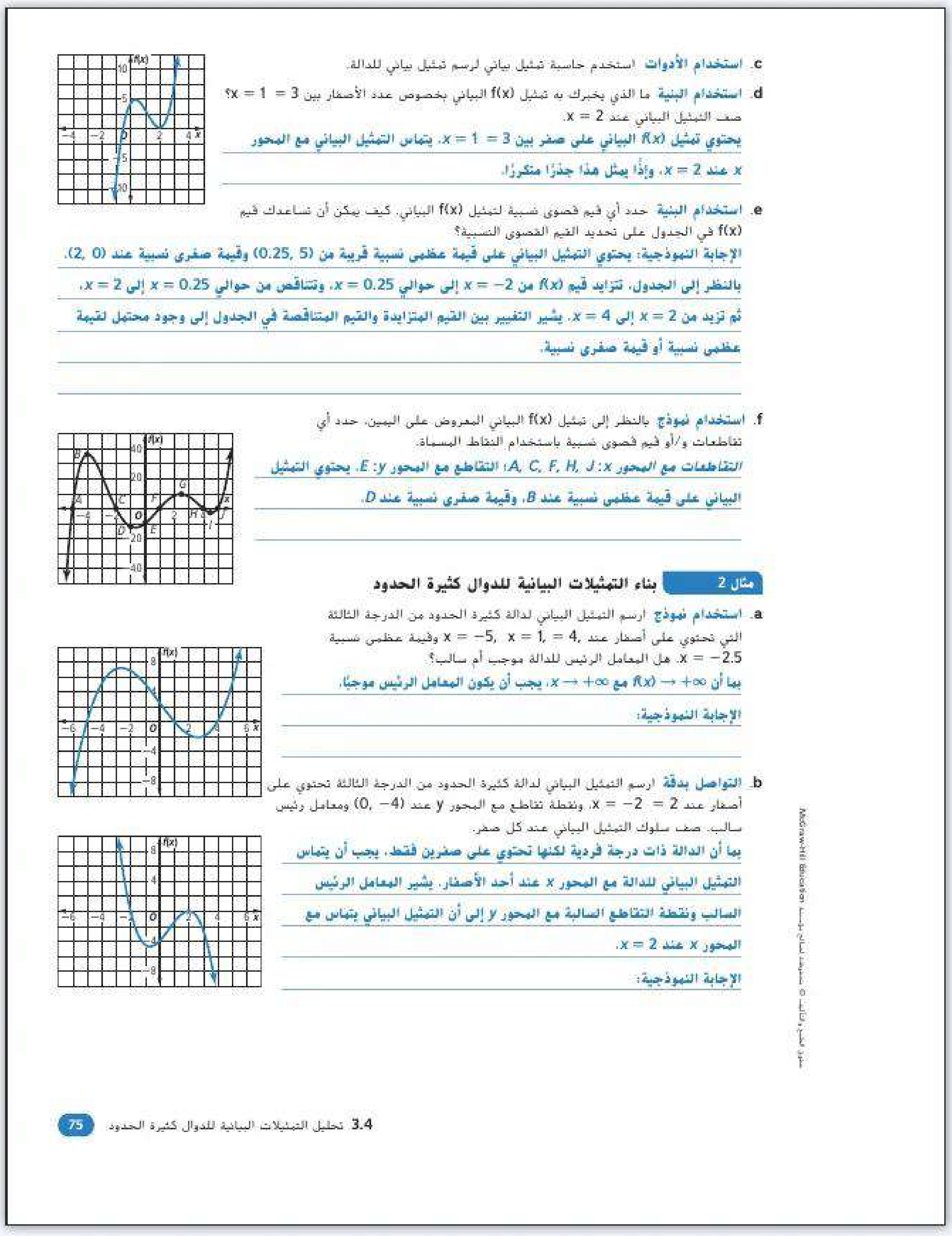
الشكل العام لدالة كثيرة الحدود يمكن تمثيله بيانيًا باستخدام نقاط رئيسية قليلة. ويمكن لجدول قِيَم أن يساعد على تحديد وجود تغير في العلامات في قيمة $f(x)$، مما يشير إلى مكان عبور التمثيل البياني للدالة للمحور الأفقي x. ويشير التغيير بين القيم المتناقصة والقيم المتزايدة لـ $f(x)$ إلى قيمة نسبية عظمى أو صغرى للدالة.

من المهم أن يطور الطلاب المهارات اللازمة لإنشاء التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود وتحليلها. ويحتاج الطلاب إلى اكتساب فهم حقيقي للقيم القصوى النسبية والتمثيلات البيانية، حيث سيكون هذا مفهومًا أساسيًا في دراسة حساب التفاضل والتكامل. ذلك أنهم سيستخدمون أساليب التفاضل لتحديد القيم القصوى النسبية كأساس لحل المسائل التي تشمل رسمًا للمنحنى وبحثًا عن الحل الأمثل على حد سواء.

المثال 1 (يُتبع)

الأسئلة الداعمة

- ما أقصى عدد من المرات التي يمكن فيها للتمثيل البياني لدالة أن يتقاطع مع المحور الأفقي x؟ كيف تعرف هذا؟
3 مرات؛ درجة الدالة تكون 3.
- قارن قيم $f(x)$ عندما يكون $x = -1$، و $x = 0$، و $x = 1$. بماذا يخبرك هذا عن التمثيل البياني للدالة؟ **$f(0) > f(-1)$ و $f(0) > f(1)$؛ قيمة $f(x)$ عند $x = 0$ هي أكبر من النقاط المحيطة، لذا يجب أن تكون هناك قيمة نسبية عظمى بالقرب من $x = 0$.**



c. **استخدام الأدوات** استخدم حاسبة تمثيل بياني لرسم تمثيل بياني للدالة.

d. **استخدام البنية** ما الذي يخبرك به تمثيل $f(x)$ البياني بخصوص عدد الأصفار بين $x = 1 = 3$؟ صف التمثيل البياني عند $x = 2$.
يحتوي تمثيل $f(x)$ البياني على صفر بين $x = 1 = 3$. يتماس التمثيل البياني مع المحور x عند $x = 2$، وإذًا يمثل هذا جذرًا متكررًا.

e. **استخدام البنية** حدد أي قيم قصوى نسبية لتمثيل $f(x)$ البياني. كيف يمكن أن تساعدك قيم $f(x)$ في الجدول على تحديد القيم القصوى النسبية؟
الإجابة النموذجية: يحتوي التمثيل البياني على قيمة عظمى نسبية قريبة من (0.25, 5) وقيمة صغرى نسبية عند (2, 0). بالنظر إلى الجدول، تتزايد قيم $f(x)$ من $x = -2$ إلى حوالي $x = 0.25$، وتتناقص من حوالي $x = 0.25$ إلى $x = 2$، ثم تزيد من $x = 2$ إلى $x = 4$. يشير التغيير بين القيم المتزايدة والقيم المتناقصة في الجدول إلى وجود محتمل لقيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية.

f. **استخدام نموذج** بالنظر إلى تمثيل $f(x)$ البياني المعروض على اليمين، حدد أي تقاطعات و/أو قيم قصوى نسبية باستخدام النقاط المسماة.
التقاطعات مع المحور x: A, C, F, H, J؛ التقاطع مع المحور y: E. يحتوي التمثيل البياني على قيمة عظمى نسبية عند B، وقيمة صغرى نسبية عند D.

مثال 2 بناء التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

a. **استخدام نموذج** ارسم التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة التي تحتوي على أصفار عند $x = -5, x = 1, = 4$ وقيمة عظمى نسبية $x = -2.5$. هل المعامل الرئيس للدالة موجب أم سالب؟
بما أن $f(x) \to +\infty$ مع $x \to +\infty$، يجب أن يكون المعامل الرئيس موجبًا.
الإجابة النموذجية:

b. **التواصل بدقة** ارسم التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تحتوي على أصفار عند $x = -2 = 2$، ونقطة تقاطع مع المحور y عند $(0, -4)$ ومعامل رئيس سالب. صف سلوك التمثيل البياني عند كل صفر.
بما أن الدالة ذات درجة فردية لكنها تحتوي على صفرين فقط، يجب أن يتماس التمثيل البياني للدالة مع المحور x عند أحد الأصفار. يشير المعامل الرئيس السالب ونقطة التقاطع السالبة مع المحور y إلى أن التمثيل البياني يتماس مع المحور x عند $x = 2$.
الإجابة النموذجية:

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 4 تتطلب من الطلاب استخدام نماذج الرياضيات. في **المثال 1**، حيث ينبغي على الطلاب التفكير في كيف يمكن استخدام جدول قيم خاص بدالة لتحديد السمات الرئيسية للتمثيل البياني للدالة. ويشرح الطلاب كيف يشير التغير في علامات قيم الدالة إلى وجود صفر في الدالة.

ينبغي أن يدرك الطلاب أن الجدول قد لا يوفر تفاصيل محددة كافية عن سلوك الدالة بين النقاط المذكورة. ويحتاجون إلى إدراك أنه يمكن إضافة المزيد من القيم إلى الجدول، مما يسمح بفحص أقرب للدالة. ويمكنهم استعمال التمثيل البياني للدالة للتأكيد أو الرفض البصري لوجود سمات إضافية للدالة.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م. م. ر 4

اطلب من الطلاب التفكير فيما إذا كانت معرفة بعض السمات فقط سيسمح لهم بإنشاء تمثيل بياني أساسي للدالة.

الأسئلة الداعمة

- هل يشير وجود الصفر إلى مرور الدالة بالمحور الأفقي x؟ لمَ ولمَ لا؟ **لا؛ فقد يكون التمثيل البياني متماسًا مع المحور الأفقي x عند تلك النقطة.**
- هل يخبرك موقع الأصفار بارتفاع الدالة بين هذه الأصفار؟ لمَ أو لمَ لا؟ **لا؛ فمسار التمثيل البياني بين الأصفار يكون تقديرًا ما لم يتم إعطاء معلومات أكثر تحديدًا عن نقاط أخرى على التمثيل البياني، مثل القيمة النسبية العظمى أو الصغرى.**

---

c. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح السبب في أن معرفة موقع الأصفار والمعامل الرئيس لدالة كثيرة الحدود لا يسمح لك بتحديد سلوك التمثيل البياني مع $x \to -\infty$.

يصف المعامل الرئيس سلوك التمثيل البياني مع $x \to +\infty$. لن تشير معرفة موقع الأصفار إلى أي جذور متكررة. إذًا، وبدون معرفة ما إذا كانت الدالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية، لا يمكن تحديد السلوك مع $x \to -\infty$.

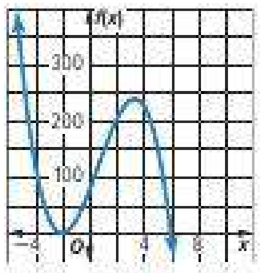
مثال 3 إنشاء وتحليل نموذج كثير الحدود

تعبئ شركة مشروباتها في عبوة أسطوانية بنصف قطر r يبلغ 2 in وارتفاع h يبلغ 6 in. تفكر الشركة في تغيير أبعاد العبوة بحيث ينخفض الارتفاع بنفس مقدار زيادة نصف القطر.

a. **التفكير بطريقة كمية** افترض أن x تمثل التغير في الأبعاد. اكتب دالة لتمثيل الحجم $V(x)$ لتصميم العبوة الجديد. ما المجال الملائم لهذا الموقف؟

$V(x) = \pi(2 + x)^2(6 - x)$؛ بما أن الأبعاد يجب أن تكون موجبة، فالمجال هو $0 < x < 6$.

b. **استخدام نموذج** ماذا ستكون الأبعاد الجديدة للعبوة إذا تغيرت الأبعاد بمقدار بوصتين؟ مثّل بيانيًا الدالة التي تم التوصل إليها في **الجزء a**. استخدم التمثيل البياني لاستنتاج الحجم الجديد تقريبًا. اشرح كيف حددت كل كمية.



للحصول على الأبعاد الجديدة للعبوة، اطرح بوصتين من الارتفاع وأضف 2 in إلى نصف القطر. الأبعاد الجديدة هي ارتفاع 4 in ونصف قطر 4 in. من التمثيل البياني، عندما تكون $x = 2$، فإن الحجم الجديد يبدو $\approx 200\ in^3$.

c. **الحساب بدقة** أوجد قيمة $V(2)$. قارن نتائجك بتقديرك من التمثيل البياني في **الجزء b**.

$V(x) = \pi(2 + x)^2(6 - x)$ إذًا $V(2) = \pi(2 + 2)^2(6 - 2) = 64\pi \approx 201.1\ in^3$. هذا الحجم قريب جدًا من التقدير الذي تم الحصول عليه من التمثيل البياني.

d. **التفكير بطريقة كمية** استخدم التمثيل البياني المأخوذ من **الجزء b** لتحديد الأبعاد التقريبية للعبوة والتي ستؤدي إلى زيادة الحجم. استخدم حاسبة تمثيل بياني للتحقق من تقديرك.

يحتوي التمثيل البياني على قيمة عظمى نسبية قريبة من (3.5, 240). ستؤدي عبوة بنصف قطر تقريبي يبلغ 5.5 in وارتفاع 2.5 in إلى زيادة الحجم. الإجابة النموذجية: استخدم ميزة حساب القيمة القصوى في الحاسبة لاكتشاف أن التمثيل البياني يحتوي على قيمة عظمى نسبية عند (3.33, 238.30). ينبغي أن تكون العبوة التي تؤدي إلى زيادة الحجم بنصف قطر يبلغ 5.33 in تقريبًا وارتفاع 2.67 in تقريبًا.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 6 تتطلب من الطلاب إيصال أفكارهم بوضوح وبدقة على حدٍ سواء للآخرين. وفي **المثال 2b**، يجب على الطلاب فحص المعلومات المُقدمة وإدراك أن سلوك الدالة يجب أن يختلف في كل تقاطع من تقاطعات المحور الأفقي x في التمثيل البياني.

بعد أن يكتشف الطلاب أن التمثيل البياني سيمر بالمحور الأفقي x عند $x = -2$، ولكن يتماس مع المحور الأفقي x عند $x = 2$، فإنه يجب عليهم إيجاد اللغة المناسبة للتعبير عن هذه النتيجة. ويجب عليهم تقديم إجابتهم باستخدام المصطلحات الصحيحة مثل "المعامل الرئيسي" و/أو "التقاطعات" و/أو "المماس". ويجب عليهم أن يتمكنوا من تلخيص اكتشافهم بحيث يفهم الآخرون استنتاجاتهم.

مثال 3

نصيحة للتدريس
م. م. ر 2

ناقش معنى الكميات عندما ترتبط بموقف المسألة. وقد يعاني الطلاب في كتابة دالة للحجم بدلالة x، حيث إنه لا يتم تمثيل الارتفاع ولا نصف القطر بـ x.

الأسئلة الداعمة

- ما حجم الأسطوانة الأصلية؟ كيف يتم تمثيل هذه الكمية على التمثيل البياني للدالة؟ **$V = \pi(2)^2(6) \approx 75.4\ in^3$. وبما أنه لم يحدث تغيير في أبعاد الأسطوانة الأصلية، فإن $x = 0$. ويتم تمثيل حجم الأسطوانة الأصلية من خلال التقاطع مع المحور الرأسي y في التمثيل البياني للدالة.**
- لماذا قد ترغب إحدى الشركات في زيادة حجم منتجها لحده الأقصى، ولكن تقلل من مساحة سطحه للحد الأدنى؟ **في هذه الحالة، ستتيح زيادة الحجم للحد الأقصى للشركة تعبئة كمية أكبر من منتجها، وتقليل مساحة السطح لحدها الأدنى يُبقي على انخفاض تكلفة مواد التعبئة.**

تلميح تقني

يمكن استخدام حاسبة تمثيل بياني أو برنامج حاسوبي لمساعدة الطلاب على ملاحظة شكل الدالة كثيرة الحدود وتقدير التقاطعات والقيم القصوى النسبية للدالة. وبالنسبة للحالة التي تكون التقاطعات فيها مجهولة (وتكون قيمًا محتملة من أعداد غير صحيحة)، يمكن لحاسبة التمثيل البياني إيجاد القيم التقريبية للإحداثيات.

قد يحتاج الطلاب إلى تعديل نافذة العرض، بحيث يتمكنون من ملاحظة السمات الرئيسية للتمثيل البياني للدالة.

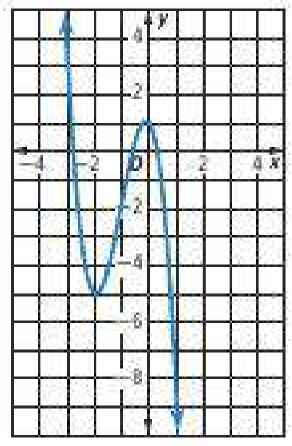
تدريب

1. **تفسير المسائل** حدد النقاط على التمثيل البياني $f(x) = -2x^3 - 6x^2 - x + 1$ عن طريق ملء الجدول أدناه.

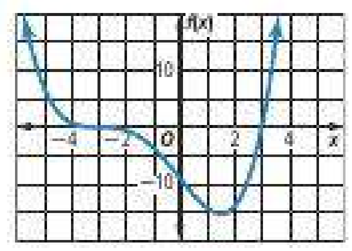
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	4	−5	−2	1	−8	−41	−110

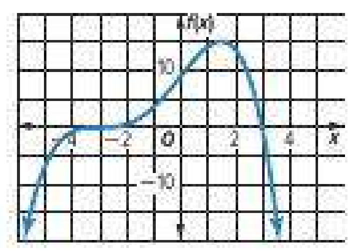
a. حدد الفترات التي يجب أن تحتوي على أصفار الدالة. اشرح استنتاجك.
يجب أن يحتوي التمثيل البياني على أصفار بين $x = -3$ و $x = -2$ وبين $x = -1$ و $x = 0$ وبين $x = 0$ و $x = 1$، بما أن $f(x)$ تغير الإشارة في هذه الفترات. ينص مبدأ الموقع على أن كل تغير في الإشارة يشير إلى وجود صفر.

b. بمساعدة حاسبة التمثيل البياني، ارسم تمثيل $f(x)$ البياني على الشبكة المتوفرة. هل الأصفار موجودة في الفترات المحددة من **الجزء a**؟ هل هناك أي أصفار بخلاف تلك المذكورة في **الجزء a**؟
يؤكد التمثيل البياني على الأصفار المذكورة في الجزء a. لا توجد أصفار أخرى.



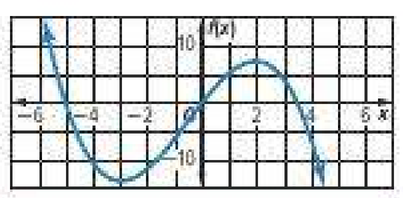
2. **استخدام البنية** ارسم تمثيلين بيانيين محتملين من دالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة لا تحتوي على أصفار إلا عند $x = -3 = 3$ وتتقاطع مع المحور y عند $(0, -9)$ أو $(0, 9)$. قارن السلوك الطرفي المحتمل للدوال. حدد ما إذا كان المعامل الرئيس للدالة يجب أن يكون موجبًا أو سالبًا واشرح استنتاجك.





دالة كثيرة الحدود بدرجة زوجية سلوكها الطرفي نفسه مثل $x \to -\infty$ و $x \to +\infty$. إذًا، إذا كانت $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ أو إذا كانت $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$. لا يمكن تحديد السلوك الطرفي بشكل متفرد بما أن الدالة قد يكون لها إما جذر أو جذران متكرران. ولهذا يمكن أن يكون المعامل الرئيس إما موجبًا أو سالبًا.

3. **استخدام البنية** ارسم التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تحتوي على قيمة صغرى نسبية عند $x = -3$ وتمر عبر نقطة الأصل ولها قيمة عظمى نسبية عند $x = 2$. صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني إذا كان ذلك ممكنًا. بناء على الرسم، حدد ما إذا كان المعامل الرئيس سالبًا أم موجبًا. **الإجابة النموذجية:**
$f(x) \to -\infty$ مع $x \to +\infty$، $f(x) \to +\infty$ مع $x \to -\infty$؛ المعامل الرئيس سالب.



أخطاء شائعة

قد يواجه الطلاب بعض الصعوبة في رسم المنحنيات الصحيحة لتمثيل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود. وقد يميلون إلى التوصيل بين التقاطعات والقيم القصوى باستخدام خطوط مستقيمة بدلاً من جعل التمثيلات البيانية منحنية لإظهار انتقالات سلسة بين الفترات في مواضع تزايد التمثيل البياني أو تناقصه.

وقد يواجهون أيضًا مشاكل في تقدير الكيفية التي ينبغي أن يرتفع أو ينزل بها المنحنى من المحور الأفقي x قبل الوصول إلى القيمة النسبية العظمى أو القيمة النسبية الصغرى. وقد لا يلاحظون أنه حين تكون الأصفار أقرب لبعضها البعض، فالتمثيل البياني لا ينتقل بعيدًا من المحور الأفقي x، بالمقارنة بالوضع حينما توجد مسافة أكبر بين مواقع الأصفار.

تمرين

التمرين 1 يتطلب من الطلاب استعمال الجدول لتفسير مواقع الأصفار في دالة ما، فهي تعدّ سمات رئيسية للتمثيل البياني.

في **التمرينين 2** و **3**، يرسم الطلاب تمثيلاً بيانيًا عامًا لدالة كثيرة الحدود بناءً على خواص معطاة للدالة.

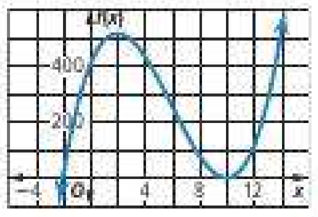
التمرين 4 يتطلب من الطلاب إنشاء دالة كثيرة حدود وتمثيلها بيانيًا.

في **التمرين 5**، يُفسّر الطلاب سمات التمثيل البياني ويصلون لاستنتاجات عن المجال.

في **التمرين 6**، يمثل الطلاب بيانيًا دالة ما ويحددون السمات الرئيسية للتمثيل البياني ويفسّرونها.

التمرين 7 يطلب من الطلاب تمثيل دالة بيانيًا وتحديد مجال مناسب ضمن السياق. كما يجب على الطلاب تفسير السمات الرئيسية في التمثيل البياني.

4. **استخدام نموذج** يحتوي الصندوق على قاعدة مربعة بأضلاع بطول 10 cm وارتفاع 4 cm. للحصول على صندوق جديد، يزداد الارتفاع بضعف مقدار انخفاض أطوال أضلاع القاعدة. مثل الدالة بيانيًا. ما الأبعاد الجديدة التي ستنتج صندوقًا بأكبر حجم؟ صف عملية حلك.



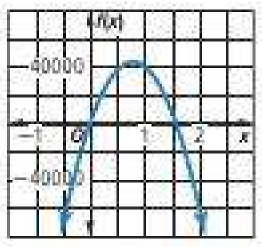
يتم تمثيل حجم الصندوق الجديد بالدالة $V(x) = (10 - x)^2(4 + 2x)$. يبدو أن التمثيل البياني يحتوي على قيمة عظمى نسبية عند $x = 2,\ V(2) = 512$. إذًا، أبعاد الصندوق الأكبر في الحجم ستكون 8 cm في 8 cm في 8 cm.

5. **استخدام نموذج** تريد شركة أن ترفع أرباحها من تصنيع محلول كيميائي وبيعه. تبيع الشركة حاليًا المحلول بسعر درهم للأونصة. تبيع الشركة 40,000 أونصة من المحلول شهريًا في المتوسط. يريدون اكتشاف ما إذا كان تغيير السعر يمكن أن يؤدي إلى زيادة الأرباح.

a. افترض أن x تمثل سعر بيع المحلول الكيميائي. توضح أبحاث السوق أن الدالة $S(x) = 110,000 - 70,000x$ يمكن استخدامها لتمثيل عدد الأونصات المبيعة في الشهر بالسعر x. اكتب دالة لتمثيل إجمالي الربح في الشهر باستخدام حقيقة أن الربح يساوي عدد الأونصات المبيعة مضروبًا في سعر البيع.

$P(x) = x\,S(x) = x\,(110,000 - 70,000x) = 110,000x - 70,000x^2.$

b. مثل بيانيًا دالة الربح المأخوذة من **الجزء a**. فسّر معنى قيم y السالبة على التمثيل البياني. ما المجال الملائم لهذا الموقف؟ أوجد سعر البيع الذي يرفع الربح.



تمثل قيم y السالبة خسارة المال عند البيع بذلك السعر. المجال الملائم هو $x > 0$ لأنه يجب بيع المادة الكيميائية بسعر أكبر من الصفر. تحدث القيمة العظمى عندما تكون $x = \frac{-110,000}{-140,000} \approx 0.79$ درهم.

6. استخدم الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ للإجابة على الأسئلة.

a. **الحساب بدقة** حدد النقاط على التمثيل البياني للدالة f(x) عن طريق ملء الجدول أدناه. حدد الفترات التي يجب أن تحتوي على أصفار الدالة. اشرح استنتاجك.

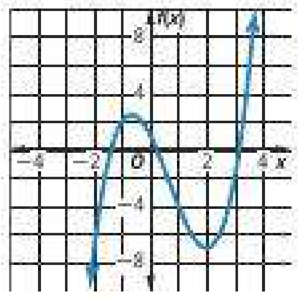
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−32	−7	2	1	−4	−7	−2

يجب أن يحتوي التمثيل البياني على صفر بين $x = -2$ و $-1 =$ وبين $x = 0$ و $1 =$ لأن $f(x)$ تغير الإشارة في هاتين الفترتين. حسب مبدأ الموقع، يجب أن تحتوي الدالة على صفر واحد على الأقل بين $x = -2$ و $-1 =$ وصفر واحد على الأقل بين $x = 0$ و $1 =$.

التدريس المتمايز

قم بتجهيز أرضية الفصل لتكون على شكل مستوى إحداثي. وأعطِ الطلاب بعض المعلومات عن إحدى الدوال كثيرات الحدود، مثل الأصفار أو القيم القصوى النسبية أو السلوك الطرفي. واجعل بعضًا منهم يقفوا في أماكن ترتبط بهذه السمات، ثم اجعل طلاب الصف يحاولوا تحديد كيفية إنشاء منحنى من أجل "الربط" بين مواضع وقوف الطلاب. على سبيل المثال، قد تضع معرفة السلوك الطرفي طالبًا في إحدى زوايا الغرفة، في حين قد تضع معرفة أحد الأصفار طالبًا على خط يمر عبر منتصف الأرضية. ويمكن أن يساعد هذا على تصور التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود.

b. **استخدام الأدوات** استخدم حاسبة تمثيل بياني لرسم تمثيل بياني للدالة. هل هناك أي أصفار خارج الفترات المحددة في **الجزء a**؟

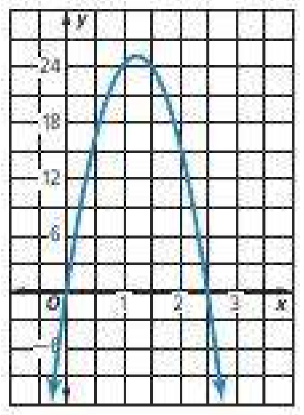


نعم؛ هناك صفرٌ بين 4 = x = 3.

c. **استخدام البنية** حدد أي قيم قصوى نسبية للتمثيل البياني للدالة f(x). كيف يمكن أن تساعدك قيم f(x) في الجدول على تحديد القيم القصوى النسبية؟

الإجابة النموذجية: يحتوي التمثيل البياني على قيمة عظمى نسبية بالقرب من (2.5 ,0.6−) وقيمة صغرى نسبية عند (7− ,2). بالنظر إلى الجدول، تزداد قيم f(x) من 3− = x إلى حوالي 0.6− = x، وتنخفض من حوالي 0.6− = x إلى 2 = x ثم ترتفع من 2 = x إلى 3 = x.يشير التغيير بين القيم المتزايدة والقيم المتناقصة في الجدول إلى احتمال وجود قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية.

7. **استخدام نموذج** لقد بنى عدة طلاب هندسة منجنيقًا لمشروع الفصل. اختبروا المنجنيق بإطلاق بطيخة ومثّلوا ارتفاع البطيخة بالأقدام بالدالة $h(t) = -16t^2 + 40t$ حيث t هو الزمن بالثواني بعد الإطلاق.



a. ارسم التمثيل البياني للدالة $h(t)$ وأوجد الأصفار.

أصفار h(t) هي 2.5 = 0 = t.

b. بالنظر إلى سياق المسألة، ما المجال الملائم لـ h(t)؟ اشرح استنتاجك.

$0 \le t \le 2.5$؛ المجال الملائم هو كل الأوقات منذ الانطلاق حتى وصول البطيخة إلى الأرض أو 0 ثانية إلى 2.5 ثانية.

c. كم عدد الثواني بعد انطلاق البطيخة قبل أن تصل إلى الأرض؟ اشرح استنتاجك.

2.5 ثانية؛ الصفر 2.5 = t يمثل النقطة التي تصل البطيخة عندها إلى الأرض. بما أن t هي الزمن بالثواني بعد انطلاق البطيخة، فإنها تستغرق 2.5 ثانية للوصول إلى الأرض.

d. استخدم التمثيل البياني للدالة h(t) للوصول إلى أقصى ارتفاع للبطيخة. متى تصل البطيخة إلى أقصى ارتفاع؟ اشرح استنتاجك.

25 قدمًا 1.25 ثانية بعد الانطلاق؛ يحتوي التمثيل البياني للدالة $h(t)$ على قيمة عظمى عند (25 ,1.25)، وهي تمثل الزمن الذي تصل البطيخة عنده إلى أقصى ارتفاع والارتفاع الذي تصل إليه.

تناول المعايير

تمرين	م. م. ر
1	1
2-3	7
4	4
5	4
6	4, 6, 7
7	4

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 4 تتطلب من الطلاب استخدام الرياضيات التي تعلموها لحل مسائل من الحياة اليومية. وفي **التمرين 5**، يكتب الطلاب دالة لتمثيل أرباح شركة تهدف إلى تعظيم عوائدها.

تمثل الخطوة الأولى في الحصول على النموذج الصحيح، مما يتطلب من الطلاب التعرف على كيفية تمثيل كل كمية رياضيًا. وفي أثناء تحليل الدالة، يجب على الطلاب تفسير عدة سمات رئيسية للدالة وتمثيلها البياني في سياق المسألة. ويجب عليهم تحديد المجال المناسب، وما إذا كانت القيم السالبة مناسبة في سياق الموقف أم لا، إلى جانب تحديد القيمة العظمى.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 5, 7

المتطلبات الأساسية

- تحليل التعابير التربيعية
- حل المعادلات باستخدام خاصية ناتج الضرب في صفر

مثال 1

نصيحة للتدريس

م. م. ر 2

اطلب من الطلاب شرح كيف يمكن تفسير حلول المعادلات في سياق الموقف. اسألهم عما تمثله قِيَم $h(0)$ أو $h(2)$. أو اسألهم عما قد تمثله حلول $h(t) = 200$ أو $h(t) = 400$. وذلك في سياق المسألة.

الأسئلة الداعمة

- هل يمكنك تقدير الحلول عن طريق النظر إلى التمثيل البياني للدالة؟ **من خلال النظر إلى التمثيل البياني، يبدو أن الحلول توجد تقريبًا عند $t = t = 1, 3, 4$.**
- ما مجال الدالة؟ **مجال الدالة كثيرة الحدود كله من الأعداد الحقيقية، ولكن ينبغي تقييده على أعداد غير سالبة في سياق هذه المسألة.**

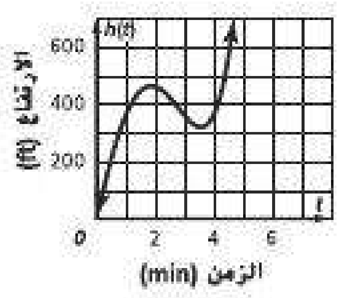
3.5 حل المعادلات كثيرة الحدود

الأهداف

- ابتكار معادلات كثيرة الحدود وحلها.
- استخدام التمثيلات البيانية لحل المعادلات كثيرة الحدود.

هناك الكثير من الأساليب المختلفة لحل المعادلات كثيرة الحدود. وتشمل التمثيل البياني وتحليل العوامل والتعويض.

مثال 1 التمثيل باستخدام الدوال كثيرة الحدود

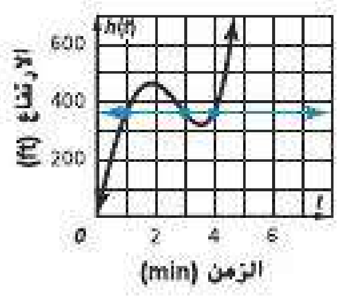


الاستكشاف يضم أحد العروض الجوية استعراضات بطائرات قديمة. من دوال تمثيل ارتفاع إحدى الطائرات الدالة $h(t) = 10t^4 - 50t^3 - 50t^2 + 450t$، حيث الارتفاع h يقاس بالأقدام والزمن t يقاس بالدقائق. يظهر جزء من التمثيل البياني للدالة $h(t)$.

a. **التفكير بطريقة كميّة** اشرح كيف يمكنك تحديد مقدار الزمن الذي تقضيه الطائرة تحت ارتفاع معين.
اجعل $h(t)$ مساوية للارتفاع المحدد بالأقدام وجـد حل المعادلة. الحلول هي المرات التي وصلت فيها الطائرة إلى ارتفاع معين. اختبر القيم بين الحلول لتحديد متى تنخفض الطائرة عن الارتفاع المذكور.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** كم عدد الدقائق التي ستقضيها الطائرة تحت ارتفاع 360 ft؟ اشرح استنتاجك.
قم بالتحليل إلى العوامل للتوصل إلى الحلول؛ $t = -3$ و 1 و 3 و 4. بما أن قياسات t تقيس الزمن الذي مر منذ الإقلاع، فاصرف النظر عن أي قيم سالبة. الطائرة أقل من ارتفاع 360 قدمًا منذ الإقلاع وحتى الدقيقة 1، وبين 3 و 4 دقائق بإجمالي دقيقتين.

c. **استخدام نموذج** اشرح كيف تمكنت من حل المسألة بيانيًا.
مثّل بيانيًا الدالة الثابتة $f(t) = 360$ وجـد نقاط تقاطع التمثيلات البيانية لـ $f(t)$ و $h(t)$. يؤكد التمثيل البياني على النتائج من الجزء b.



مثال 2 جـد حلّ المعادلات كثيرة الحدود بالتحليل إلى العوامل

a. **التخطيط لحل** صف خطة لحل المعادلة $3x^3 + 375 = 0$. ثم جـد الحل وتحقق من حلولك.
اقسم المعادلة على 3 للوصول إلى $x^3 + 125 = 0$. قم بالتحليل إلى العوامل باستخدام قانون مجموع المكعبات للوصول إلى $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = 0$. استخدم القانون العام في التعبير الثاني للوصول إلى $x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)}$ أو $x = \frac{5 \pm 5i\sqrt{3}}{2}$. الحلول هي $x = -5, \frac{5 \pm 5i\sqrt{3}}{2}, \frac{5 - 5i\sqrt{3}}{2}$.

معلومات أساسية رياضية

يتمثل أحد أهم المحاور الخاصة في هذا الدرس في التعرف على معادلات الدرجات الأعلى التي يمكن إعادة كتابتها في صيغة معادلات تربيعية باستخدام تعويض u. وقد يواجه الطلاب هذا الأسلوب مجددًا في هذا المنهج، سواء في المعادلات الأسية واللوغاريتمية ومع المعادلات المثلثية.

كما سيستفيد الطلاب أيضًا من أسلوب تعويض مماثل في دراستهم لحساب التفاضل والتكامل. وهو يعد طريقة للمساعدة مع أنواع معينة من التكامل. ورغم أن هذه الطريقة أكثر تقدمًا من الأساليب كما هو مُقدّم هنا. فيظل الغرض العام هو نفسه: تحويل تعبير مركب إلى صيغة بسيطة من أجل المزيد من التحليل.

b. التخطيط لحل صف خطة لحل المعادلة $x^3 + 5x^2 + 9x + 45 = 0$. ثم جـد حل المعادلة.
تحليل العوامل عن طريق التجميع للوصول إلى $(x + 5)(x^2 + 9) = 0$. اضبط كل عامل يساوي الصفر للوصول إلى الحلول $x = -5, 3i, -3i$.

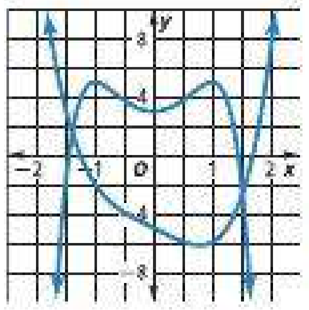
مثال 3 حلّ المعادلات كثيرة الحدود بالقانون العام

a. التخطيط لحل صف خطة لحل المعادلة $8x^4 - 22x^2 + 12 = 0$. ثم جـد حل المعادلة.
استخدم التعويض $u = 2x^2$ وحلّل العوامل إلى $(2u - 3)(u - 4) = 0$. قم بالتعويض عن u للوصول إلى $2x^2 = \frac{3}{2}$ و$2x^2 = 4$. الحلول هي $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

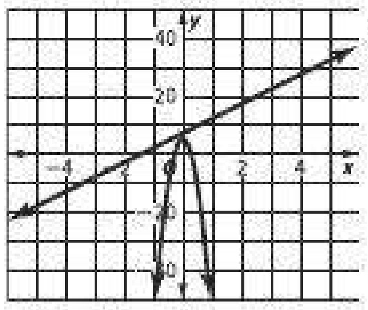
b. التخطيط لحل صف خطة لحل المعادلة $25x^4 + 130x^2 + 25 = 0$. ثم جـد حل المعادلة.
استخدم التعويض $u = 5x^2$ والتحليل إلى العوامل للوصول إلى $(u + 25)(u + 1) = 0$. قم بالتعويض عن u للوصول إلى $5x^2 = -25$ و$5x^2 = -1$. الحلول هي $x = i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}, i\frac{\sqrt{5}}{5}, -i\frac{\sqrt{5}}{5}$.

مثال 4 حل المعادلات كثيرة الحدود بيانيًا

a. استخدام الأدوات استخدم حاسبة تمثيل بياني لرسم التمثيلات البيانية لـ $f(x) = x^4 - 2x - 5$ و $g(x) = -x^4 + 3x^2 + 3$ وحدد أي نقاط تقاطع تقريبيًا.
نقاط التقاطع هي تقريبًا $(-1.39, 1.54)$ و $(1.53, -2.63)$.



b. التفكير بطريقة كمية اشرح الأهمية الجبرية لنقطة تقاطع على التمثيل البياني للدالة $f(x)$ والتمثيل البياني للدالة $g(x)$. كيف يرتبط هذا بحل المعادلة $f(x) = g(x)$؟
تشير نقطة التقاطع إلى قيمة x التي تصل فيها كل من $f(x)$ و $g(x)$ لنفس قيمة الدالة. إذا كان التمثيلان البيانيان للدالتين يتقاطعان عند x، فإن $(x, f(x))$ تساوي $(x, g(x))$ إذًا $f(x) = g(x)$. تمثل قيمة x لنقطة تقاطع حل $f(x) = g(x)$.



c. التفكير النقدي يزعم أحد الطلاب أن المعادلة $x^4 - 64x^2 + 5 = 5x + 7$ ليس لها حلول لأنه لا توجد نقاط تقاطع على التمثيلين البيانيين للدالة $f(x) = x^4 - 64x^2 + 5$ والدالة $g(x) = 5x + 7$. يظهر التمثيل البياني للطالب على اليمين. هل تتفق مع الطالب؟ اشرح استنتاجك.
لا؛ يمكن رؤية نقاط التقاطع إذا كانت التمثيلات البيانية معروضة عبر نافذة أكبر مثل $x = -12$ إلى $x = 12$ و $y = -60$ إلى $y = 60$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 7 تتطلب أن يكون الطلاب قادرين على محاولة إيجاد البنية واستخدامها أثناء حل المسائل. في **التمرين 1**، يجب على الطلاب فحص معادلة تربيعية وأخرى من الدرجة الرابعة لإيجاد التشابهات في بنيتيهما.

يجب على الطلاب إدراك أن المعاملات المتطابقة تشير إلى أن المعادلة من الدرجة الرابعة قد تصل إلى نفس القيمتين m و n. باستثناء أنهما الآن قيمتا x^2 بدلاً من x. وهناك خطوة إضافية في حل المعادلة من الدرجة الرابعة: أخذ الجذور التربيعية لحلول المعادلة التربيعية. ويمكن للطلاب استكشاف هذه المسألة بشكل أكبر عن طريق تحديد قِيَم لكل من m و n و التمثيل البياني لكلتا المعادلتين لتأكيد الحلول.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م. م. ر 1

اسأل الطلاب عن الإستراتيجية الواجب اتباعها إذا كان في المعادلة حدان: الفرق بين المربعات، أو مجموع المكعبات، أو الفرق بين المكعبات. أو الإستراتيجية المتبعة مع ثلاثة حدود: استخدام طريقة فويل (ضرب قوسين لضرب ثنائيات الحدود). وبالنسبة للحدود الأربعة: التحليل إلى عوامل عن طريق التجميع.

الأسئلة الداعمة

- ما الخطوة الأولى دائمًا في تحليل عوامل الدالة كثيرة الحدود؟ **البحث عن عامل مشترك. من خلال استخراج العامل المشترك عن طريق تحليل العوامل، فقد يكون من الأسهل رؤية أنماط لباقي كثيرة الحدود.**
- هل من المفيد تحليل عوامل أي من تعابير $P(x)$ لحل معادلة في الصيغة $P(x) = c$. حيث c هو ثابت غير صفري؟ **فقط إذا أمكن تحليل عوامله بحيث يكون هناك ظهور واحد لـ x. ويُعد تحليل العوامل أكثر إفادةً لمجموعة تعابير تساوي صفرًا. انقل c إلى الطرف الآخر في البداية ثم حلل إلى العوامل.**

مثال 3

نصيحة للتدريس

م. م. ر 1

اشرح كيف يمكن أن يترتب على التعويض (الاستبدال) تعبير أسهل من حيث إمكانية إدراكه وتحليله إلى عوامل. ذكِّر الطلاب أن عليهم الرجوع دائمًا وعكس التعويض في النهاية.

الأسئلة الداعمة

- ما الواجب عليك البحث عنه لتحديد مدى احتمالية كتابة المعادلة في صيغة تربيعية؟ **تحقق لمعرفة ما إذا كانت أسس الحدين الأولين موجودة في نسبة 2:1.**
- هل يمكن استخدام طريقة التعويض فقط في المعادلات في صيغتها التربيعية؟ **لا. تعمل هذه الطريقة في ظروف عديدة ولكنها عادة تكون أكثر صعوبة في إدراكها.**

مثال 4

نصيحة للتدريس
م.م.ر 5

ذكِّر الطلاب بأهمية إعداد نافذة مناسبة على حاسبة التمثيل البياني الخاصة بهم. كما قد يحتاجون إلى تكبير أجزاء من التمثيل البياني لتحديد مكان نقاط التقاطع.

الأسئلة الداعمة

- في رأيك، كم عدد نقاط التقاطع التي قد توجد في **الجزء a**؟
ليس أكثر من 6
- ما الذي قد تحاول فعله لمعرفة ما إذا كان هناك تقاطع في التمثيلات البيانية الواردة في **الجزء c**؟
الإجابة النموذجية: تصغير الصورة

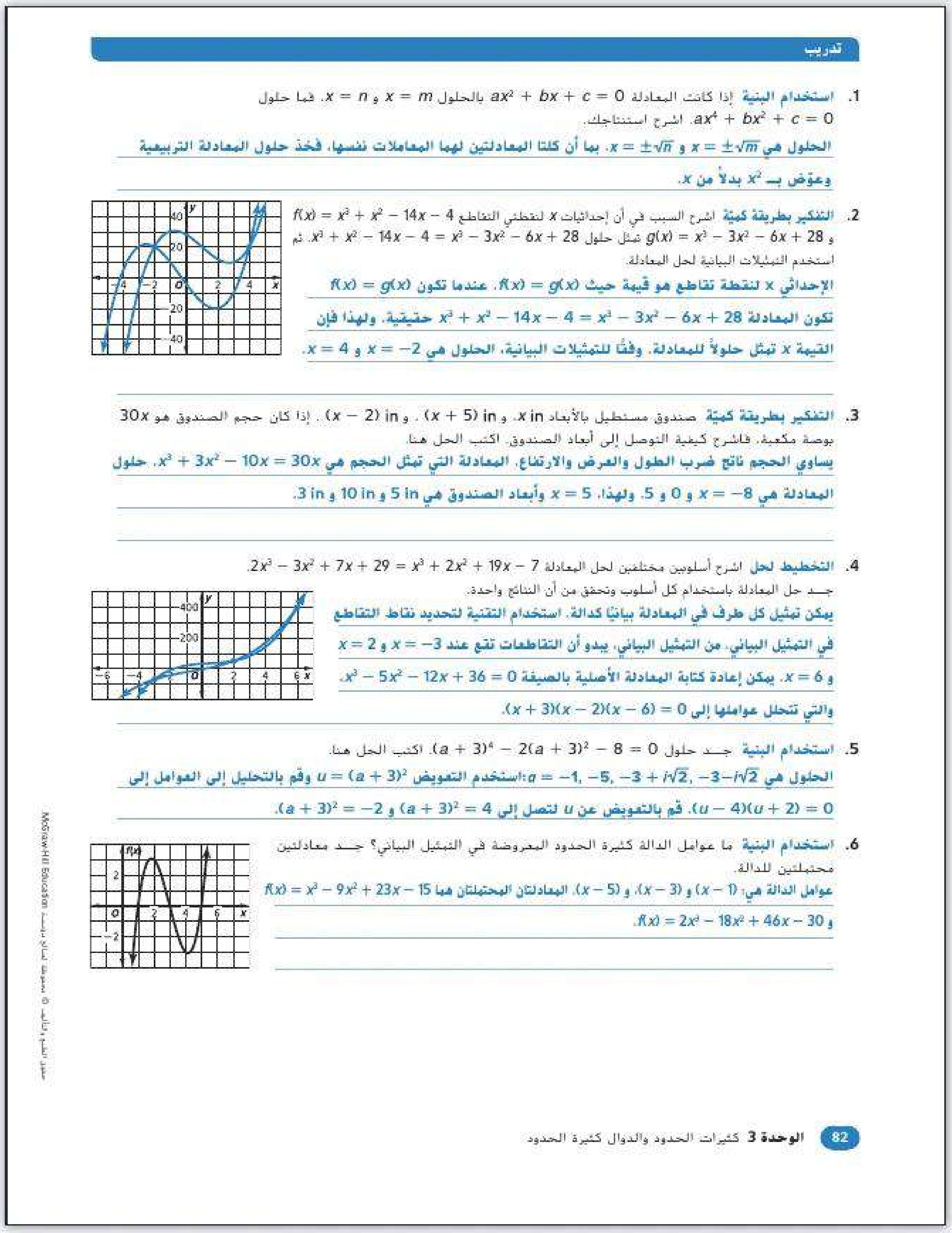
تلميح تقني

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني أو برنامج حاسوبي لمساعدة الطلاب على تصور التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود، إلى جانب مساعدتهم على التحقق من دقة حلولهم.

تمرين

في **التمرين 1**، يجب على الطلاب إدراك البنية المتشابهة للمعادلتين. واستخدام هذه البنية لحل المعادلة كثيرة الحدود.

في **التمرين 2**، يُطلب من الطلاب شرح الرابط بين إحداثيات x لزوجٍ من التمثيلات البيانية إلى جانب حلول إحدى المعادلات التي تجعل الدوال مساوية لبعضها البعض.



تدريب

1. **استخدام البنية** إذا كانت المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ بالحلول $x = m$ و $x = n$. فما حلول $ax^4 + bx^2 + c = 0$. اشرح استنتاجك.
الحلول هي $x = \pm\sqrt{m}$ و $x = \pm\sqrt{n}$. بما أن كلتا المعادلتين لهما المعاملات نفسها، فخذ حلول المعادلة التربيعية وعوّض بـ x^2 بدلاً من x.

2. **التفكير بطريقة كمية** اشرح السبب في أن إحداثيات x لنقطتي التقاطع $f(x) = x^3 + x^2 - 14x - 4$ و $g(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 28$ تمثل حلول $x^3 + x^2 - 14x - 4 = x^3 - 3x^2 - 6x + 28$. ثم استخدم التمثيلات البيانية لحل المعادلة.
الإحداثي x لنقطة تقاطع هو قيمة حيث $f(x) = g(x)$. عندما تكون $f(x) = g(x)$ تكون المعادلة $x^3 + x^2 - 14x - 4 = x^3 - 3x^2 - 6x + 28$ حقيقية. ولهذا فإن القيمة x تمثل حلولاً للمعادلة. وفقًا للتمثيلات البيانية، الحلول هي $x = -2$ و $x = 4$.

3. **التفكير بطريقة كمية** صندوق مستطيل بالأبعاد x in، و $(x + 5)$ in، و $(x - 2)$ in. إذا كان حجم الصندوق هو $30x$ بوصة مكعبة، فاشرح كيفية التوصل إلى أبعاد الصندوق. اكتب الحل هنا.
يساوي الحجم ناتج ضرب الطول والعرض والارتفاع. المعادلة التي تمثل الحجم هي $x^3 + 3x^2 - 10x = 30x$. حلول المعادلة هي $x = -8$ و 0 و 5. ولهذا، $x = 5$ وأبعاد الصندوق هي 5 in و 10 in و 3 in.

4. **التخطيط لحل** اشرح أسلوبين مختلفين لحل المعادلة $2x^3 - 3x^2 + 7x + 29 = x^3 + 2x^2 + 19x - 7$. جـد حل المعادلة باستخدام كل أسلوب وتحقق من أن النتائج واحدة.
يمكن تمثيل كل طرف في المعادلة بيانيًا كدالة. استخدام التقنية لتحديد نقاط التقاطع في التمثيل البياني. من التمثيل البياني، يبدو أن التقاطعات تقع عند $x = -3$ و $x = 2$ و $x = 6$. يمكن إعادة كتابة المعادلة الأصلية بالصيغة $x^3 - 5x^2 - 12x + 36 = 0$ والتي تتحلل عواملها إلى $(x + 3)(x - 2)(x - 6) = 0$.

5. **استخدام البنية** جـد حلول $(a + 3)^4 - 2(a + 3)^2 - 8 = 0$. اكتب الحل هنا.
الحلول هي $a = -1, -5, -3 + i\sqrt{2}, -3 - i\sqrt{2}$؛ استخدم التعويض $u = (a + 3)^2$ وقم بالتحليل إلى العوامل إلى $(u - 4)(u + 2) = 0$. قم بالتعويض عن u لتصل إلى $(a + 3)^2 = 4$ و $(a + 3)^2 = -2$.

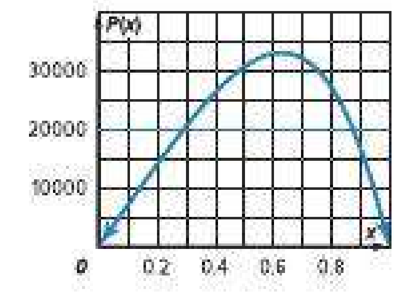
6. **استخدام البنية** ما عوامل الدالة كثيرة الحدود المعروضة في التمثيل البياني؟ جـد معادلتين محتملتين للدالة.
عوامل الدالة هي: $(x - 1)$ و $(x - 3)$، و $(x - 5)$. المعادلتان المحتملتان هما $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ و $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 46x - 30$.

أخطاء شائعة

يمكن أن يخلط الطلاب بين العلامات عند استخدام صيَغ مجموع المكعبات أو الفرق بينها. ويجدون صعوبة في رؤية النمط: العلامة في القوسين الأولين تتوافق مع المجموع أو الفرق، وفي القوسين الثانيين، تشير العلامة الأولى إلى مقابل المجموع أو الفرق، والعلامة الأخيرة هي دومًا علامة زائد. كما يواجه الطلاب صعوبة عندما يتضمن العامل المشترك سالبًا، حيث يعكس هذا العلامات في الحدود المتبقية في الأقواس.

أثناء التعامل مع تعويض u، يمكن أن يواجه الطلاب صعوبة في تحديد المعامل الذي يجب عليهم تضمينه عند التحويل من x إلى u. وعندما يحددون $u = ax^2$، على سبيل المثال، فهم يجدون صعوبةً في فهم أن u^2 سيساوي a^2x^4.

7. **استخدام الأدوات** تمثل إحدى الشركات أرباحها بالدرهم باستخدام الدالة $P(x) = 70{,}000(x - x^4)$ في المجال $(0, 1)$ حيث x هو السعر الذي يبيعون به منتجهم بالدرهم. استخدم حاسبة تمثيل بياني لرسم تمثيل بياني وإيجاد السعر الذي ينبغي بيع منتجهم به لتحقيق ربح يبلغ AED20,000.



$x = 0.29$ درهم أو $x = 0.88$ درهم. الإجابة النموذجية: مثّل بيانيًا الدالتين $70{,}000(x - x^4)$ و 20,000 وجِد قيمة x للتقاطعات.

8. **استخدام البنية** يبلغ الحجم المجمع لمكعب وأسطوانة $1{,}000\ in^3$ إذا كان ارتفاع الأسطوانة يبلغ مِثلي نصف القطر ويبلغ ضلع المكعب أربعة أمثال نصف القطر. فماذا سيكون نصف قطر الأسطوانة لأقرب عشرة من البوصة؟

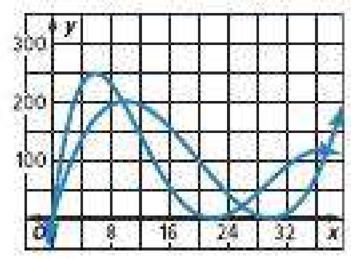
افترض أن r تمثل نصف قطر الأسطوانة. يبلغ حجم المكعب $(4r)^3 = 64r^3$ وحجم الأسطوانة $\pi r^2(2r) = 2\pi r^3$. يبلغ الحجم المجمع $64r^3 + 2\pi r^3 = (64 + 2\pi)r^3$. جِد حل المعادلة $(64 + 2\pi)r^3 = 1000$ للوصول إلى $r = 2.4$ in.

9. **استخدام نموذج** يمكن تمثيل ارتفاع سيارة ركاب في قطاري ملاهٍ بالدالتين $f(x) = \frac{1}{20}(x^3 - 60x^2 + 900x)$ و $g(x) = \frac{1}{12{,}000}(x^5 - 144x^4 + 7384x^3 - 158{,}400x^2 + 1{,}210{,}000x)$ حيث x هي الزمن بالثواني لأول 35 ثانية في الركوب.

a. **تفسير المسائل** إذا بدأ قطارا الملاهي في الوقت نفسه، فما المعادلة التي ستحدد المرات التي تصل فيها سيارة الركاب في كل قطار ملاهٍ إلى الارتفاع نفسه؟ هل يمكنك تحديد أي حلول عن طريق فحص المعادلة؟

$\frac{1}{20}(x^3 - 60x^2 + 900x) = \frac{1}{12{,}000}(x^5 - 144x^4 + 7384x^3 - 158{,}400x^2 + 1{,}210{,}000x)$. بما أن x عامل في كلتا المعادلتين، $x = 0$ حل.

b. **استخدام الأدوات** استخدم حاسبة تمثيل بياني لرسم تمثيل بياني للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ وجِد حل المعادلة من **الجزء a**.



تتقاطع التمثيلات البيانية للدوال عند $x = 0$ وتقريبًا $x = 9.6$ و $x = 26.0$. تصل سيارتا الركاب إلى الارتفاع نفسه عند الثانية 0 وتقريبًا الثانية 9.6 والثانية 26.0.

c. **تفسير المسائل** اكتب معادلة لتحديد المرات التي وصلت فيها سيارة الركاب التي تمثلها $f(x)$ إلى ارتفاع 150 قدمًا. استخدم حاسبة تمثيل بياني لحل المعادلة.

$\frac{1}{20}(x^3 - 60x^2 + 900x) = 150$، ولهما الحلان التقريبيان $x = 16.5$ و $x = 4.7$. تصل سيارة الركاب إلى ارتفاع 150 ft 4.7 والثانية 16.5 ft تقريبًا.

التمرينان 3 و 8 يطلبان من الطلاب إنشاء معادلة لتمثيل حجم الصندوق، ثم استخدام هذه المعادلة لإيجاد أبعاد الصندوق.

في **التمرين 4**، يحُل الطلاب معادلةً بطريقتين، إحداهما تشمل استخدام تمثيل بياني لإيجاد قيم x الخاصة بالتقاطعات.

في **التمرينين 5 و 6**، يحُل الطلاب معادلات كثيرة الحدود وينشئونها على حدٍ سواء.

في **التمرينين 7 و 9**، يستخدم الطلاب معادلة كثيرة حدود لحل مسألة ضمن السياق.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1	7
2	2
3	2
4	1
5-6	7
7	5
8	7
9	1, 4, 5

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 1 تتطلب من الطلاب القدرة على فهم معنى مسألة والبحث عن مداخل إلى الحل. وفي **التمرين 4**، يجب على الطلاب تحديد طريقتين لحل مسألة والتأكد من أن كل مسار يؤدي إلى الحل ذاته.

وينبغي عليهم إنشاء تمثيل بياني لكل طرف من المعادلة، واستخدام التقنية لإيجاد نقاط التقاطع. وتمثل إحداثيات x الخاصة بهذه النقاط حلولاً للمعادلة، كما شرح الطلاب بالفعل في **التمرين 2**. كما يجب عليهم أيضًا إعادة ترتيب الحدود في المعادلة والحل عن طريق تحليل العوامل، وشرح كيف أن الحلول هي نفسها نقاط التقاطع الخاصة بالتمثيلات البيانية.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- حل المعادلات التربيعية
- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا

مثال 1

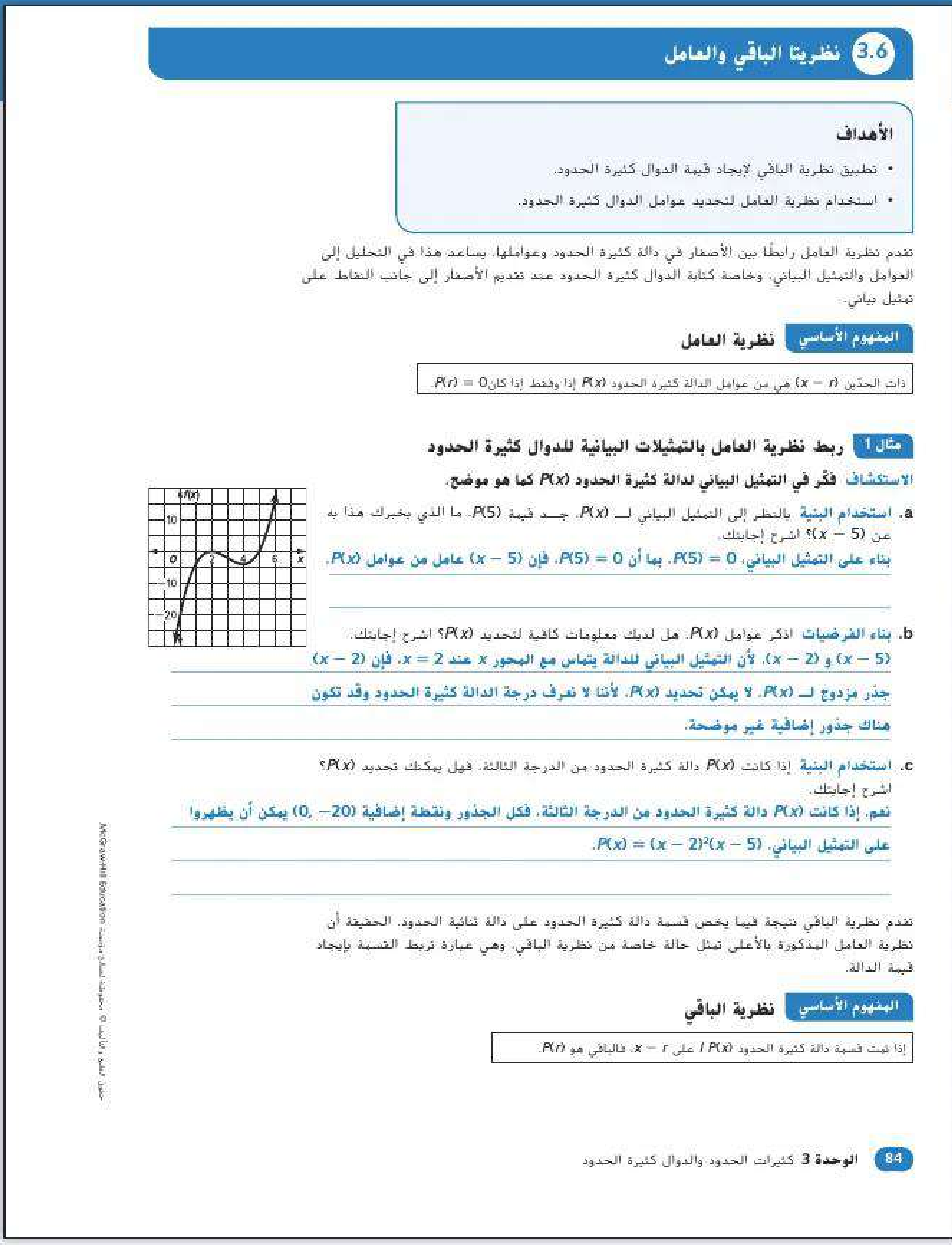
نصيحة للتدريس

م. م. ر 7

ذكّر الطلاب أن عليهم الانتباه عند رؤيتهم لتمثيلٍ بياني. فلربما يرون جزءًا واحدًا فقط من التمثيل البياني. وقد تكون هناك تقاطعات إضافية ناحية اليمين أو اليسار من نافذة العرض. إلا إذا أُعطوا معلومات كاملة أكثر حول عدد جذور الدالة أو درجتها.

الأسئلة الداعمة

- إذا كان التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود $P(x)$ يحتوي على النقطة $(4,0)$. فما الذي يمكن قوله عن عوامل $P(x)$؟ **أحد عوامل $P(x)$ هو $(x - 4)$.**
- هل يمكن أن تحتوي كثيرة حدود من الدرجة الثالثة على أكثر من جذرٍ مضاعفٍ واحد؟ **لا، تحتوي كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة فقط على 3 جذور، وبالتالي يمكن أن يوجد جذر مضاعف واحد فقط.**



3.6 نظريتا الباقي والعامل

الأهداف

- تطبيق نظرية الباقي لإيجاد قيمة الدوال كثيرة الحدود.
- استخدام نظرية العامل لتحديد عوامل الدوال كثيرة الحدود.

تقدم نظرية العامل رابطًا بين الأصفار في دالة كثيرة الحدود وعواملها. يساعد هذا في التحليل إلى العوامل والتمثيل البياني، وخاصة كتابة الدوال كثيرة الحدود عند تقديم الأصفار إلى جانب النقاط على تمثيل بياني.

المفهوم الأساسي **نظرية العامل**

ذات الحدّين $(x - r)$ هي من عوامل الدالة كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

مثال 1 **ربط نظرية العامل بالتمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود**

الاستكشاف **فكّر في التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود $P(x)$ كما هو موضح.**

a. **استخدام البنية** بالنظر إلى التمثيل البياني لـ $P(x)$. جد قيمة $P(5)$. ما الذي يخبرك هذا به عن $(x - 5)$؟ اشرح إجابتك.
بناء على التمثيل البياني، $P(5) = 0$. بما أن $P(5) = 0$، فإن $(x - 5)$ عامل من عوامل $P(x)$.

b. **بناء الفرضيات** اذكر عوامل $P(x)$. هل لديك معلومات كافية لتحديد $P(x)$؟ اشرح إجابتك.
$(x - 5)$ و $(x - 2)$. لأن التمثيل البياني للدالة يتماس مع المحور x عند $x = 2$، فإن $(x - 2)$ جذر مزدوج لـ $P(x)$. لا يمكن تحديد $P(x)$، لأننا لا نعرف درجة الدالة كثيرة الحدود وقد تكون هناك جذور إضافية غير موضحة.

c. **استخدام البنية** إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة. فهل يمكنك تحديد $P(x)$؟ اشرح إجابتك.
نعم. إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة، فكل الجذور ونقطة إضافية $(0, -20)$ يمكن أن يظهروا على التمثيل البياني. $P(x) = (x - 2)^2(x - 5)$.

تقدم نظرية الباقي نتيجة فيما يخص قسمة دالة كثيرة الحدود على دالة ثنائية الحدود. الحقيقة أن نظرية العامل المذكورة بالأعلى تمثل حالة خاصة من نظرية الباقي، وهي عبارة تربط القسمة بإيجاد قيمة الدالة.

المفهوم الأساسي **نظرية الباقي**

إذا تمت قسمة دالة كثيرة الحدود $P(x)$ على $x - r$، فالباقي هو $P(r)$.

84 **الوحدة 3** كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

معلومات أساسية رياضية

يستمر هذا الدرس في البناء على المادة المتعلقة بالمعادلات التربيعية التي تم تدريسها سابقًا. وأغلب كثيرات الحدود التي يتم تناولها هنا هي من الدرجة 3. وبعد تطبيق القسمة التركيبية، ستكون كثيرة الحدود المنخفضة في صيغة تربيعية.

يعمل هذا الدرس كوسيلة إعداد للدرس التالي. حيث سيتناول الطلاب نظرية الجبر الأساسية. كما سيوسعون تحليلهم لكثيرات الحدود ليشمل الدوال ذات الجذور غير النسبية و/أو المركبة.

المفهوم الأساسي التعويض التركيبي والدوال كثيرة الحدود المنخفضة

في دالة كثيرة الحدود $f(x)$ والقيمة a، يُعتبر **التعويض التركيبي** هو عملية إيجاد قيمة $f(a)$ باستخدام قسمة تركيبية لقسمة $f(x)$ على $x - a$.

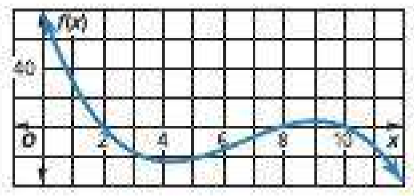
عند قسمة كثيرة حدود على ذات حدين من عواملها، يُطلق على ناتج القسمة **كثيرة حدود منخفضة**.

مثال 2 استخدام نظرية الباقي

النسبة المئوية للتغير في سعر سهم على مدار سنة يتمثل في $f(x) = -0.5x^3 + 10x^2 - 58x + 80$، حيث x هي الزمن بالأشهر.

a. **تفسير المسائل** لم يظهر في سعر السهم ربح أو خسارة في نهاية شهر فبراير. في أي الأشهر الأخرى لم يكن هناك تغير في السعر؟ اشرح استنتاجك.
أغسطس وأكتوبر؛ لا مكسب أو خسارة في شهر فبراير يعني أن $f(2) = 0$. استخدم قسمة تركيبية لتحديد ناتج القسمة عند قسمة $f(x)$ على $(x - 2)$. $\frac{f(x)}{(x-2)} = -0.5x^2 + 9x - 40$. جـد حل x باستخدام القانون العام للوصول إلى $x = 10$ أو $x = 8$.

b. **استخدام نموذج** مثّل الدالة بيانيًا على المستوى الإحداثي. في أي الأشهر كان هناك تغير إيجابي في سعر السهم؟
كان هناك تغير إيجابي في سعر السهم أثناء يناير وسبتمبر.



c. **استخدام البنية** ما النسبة المئوية للتغير في سعر السهم في اليوم الأخير من شهر يونيو؟ اشرح كيفية توصلك إلى إجابتك.
‎−16%؛ استخدمت التعويض التركيبي لإيجاد قيمة الدالة عند $x = 6$. بما أن الباقي هو ‎−16، فالتغير في النسبة المئوية في اليوم الأخير من شهر يونيو هو ‎−16 حسب نظرية الباقي.

مثال 3 طبّق نظريتي الباقي والعامل على الدوال كثيرة الحدود

a. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا كانت $(x - 2)$ من عوامل $f(x) = 3x^3 - 11x^2 + kx + 4$، فحدد قيمة k وعبّر عن الدالة كثيرة الحدود بصيغة التحليل إلى العوامل. اشرح استنتاجك.
استخدم القسمة التركيبية لتحديد الباقي عندما تكون $x = 2$. يجب أن يساوي الباقي صفرًا. إذًا $0 = 2k - 16$، أو $k = 8$. العامل الآخر هو $3x^2 - 5x - 2$، الذي يتحلل إلى $(3x + 1)(x - 2)$. لهذا يمكننا كتابة $f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = (x - 2)(3x + 1)(x - 2)$.

b. **التفكير بطريقة كمية** عند قسمة الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 7x^3 - x^2 + kx + 4$ على $(x + 2)$، كان الباقي هو 2. حدد قيمة k. اشرح استنتاجك.
استخدم القسمة التركيبية لتحديد الباقي عندما تكون $x = -2$. الباقي يساوي 2. إذًا $2 = -2k - 56$، أو $k = -29$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 7 تتطلب من الطلاب التعرف على النمط أو البنية في المسألة. وفي **المثال 1**، يستكشف الطلاب بنية التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من أجل استخلاص الاستنتاجات بشأن عواملها المختلفة.

يُعرَض على الطلاب تمثيلٌ بيانيٌ يتقاطع مع المحور الأفقي x مرتين، ويتعين عليهم إدراك كل تقاطع يرتبط بعامل من عوامل كثيرة الحدود. كما يحتاجون إلى فهم حدود ما يرونه؛ قد يكون هناك المزيد من التقاطعات غير المرئية. وقد يتقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x مجددًا بالنسبة لقيَم x التي تكون أقل من ‎−2 أو أكبر من 8. في **الجزء c**، يجب على الطلاب إدراك أنه بمجرد تحديد كثيرة الحدود على أنها من الدرجة الثالثة، فسيكون لديهم ما يكفي من المعلومات لإيجاد المعادلة.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م. م. ر 1

ناقش كيفية تفسير بعض من اللغة المستخدمة في المثال، وكيفية ربط اللغة بالتمثيل البياني. فعلى سبيل المثال، يعني عدم حدوث ربح أو خسارة في سعر السهم أن $y = 0$. ناقش كيف تمثل قيم y الموجودة أعلى المحور الأفقي x تغيرًا إيجابيًا في سعر السهم، وأن قيم y الموجودة أسفل المحور الأفقي x تمثل تغيرًا سلبيًا.

الأسئلة الداعمة

- ما الذي تمثله النقطة $(2, 0)$ على التمثيل البياني؟ **تمثل التغير في سعر السهم في اليوم الأخير من شهر فبراير.**
- كيف يمكن أن تساعدك نظرية الباقي في هذه المسألة؟ **يمكنني استخدام نظرية الباقي لإيجاد أي تغير في النسبة المئوية.**

مثال 3

نصيحة للتدريس

م. م. ر 7

ناقش مع الطلاب كيف يمكن استخدام القسمة التركيبية في تحديد معامل مجهول. وعندما يجمعون العمود الأخير للحصول على إجمالي قِيَمه، اسألهم عما يعرفون عن القيمة التي يجب أن يساويها الباقي، وناقش كيف يمكن بعدها إنشاء معادلة لإيجاد قيمة k.

الأسئلة الداعمة

- في **الجزأين a** و **b**، هل ستصلح نفس العملية لإيجاد معامل مجهول يتألف من حدود ذات درجة أعلى؟ **نعم، طالما كان هناك معامل مجهول واحد فقط.**
- هل يمكن استخدام نظريتي الباقي والعامل على دوال بخلاف كثيرات الحدود؟ **لا. فالنظريتان تُذكران مع الدوال كثيرة الحدود على وجه التحديد. فالدوال الأخرى يمكن لها أن تشتمل على عوامل ليست كثيرات حدود.**

تمرين

في **التمرينين 1** و **2**، ينبغي على الطلاب استخدام نظرية العامل لإيجاد عوامل كثيرة الحدود، ثم رسم تمثيل بياني بناءً على النتائج.

التمرين 3 يطلب من الطلاب استخدام التمثيل البياني لإيجاد الأصفار وإنشاء العوامل باستخدام نظرية العامل. ثم يجب على الطلاب استخدام العوامل لكتابة معادلة لكثيرة الحدود.

c. **التفكير النقدي** يقسم حامد $3x^4 - 4x^3 + x - 6$ على $x - 1$ ويجد أن

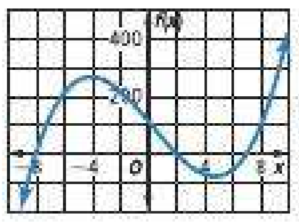
$$\frac{3x^4 - 4x^3 + x - 6}{x - 1} = 3x^3 - x^2 - x - \frac{6}{x - 1}$$

هل حامد على صواب؟ اشرح باستخدام نظرية الباقي.

لا؛ فحسب نظرية الباقي، الباقي هو المقسوم المحددة قيمته عند 1 أو $3(1)^4 - 4(1)^3 + (1) - 6 = -6$.

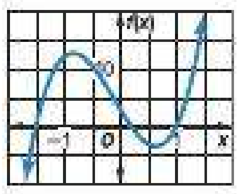
تدريب

1. **استخدام البنية** بالنظر إلى أن $f(-8) = 0$ و $f(x) = x^3 - x^2 - 58x + 112$. جد كل عوامل الدالة كثيرة الحدود واستخدم النتيجة لبناء تمثيل بياني. اشرح استنتاجك.



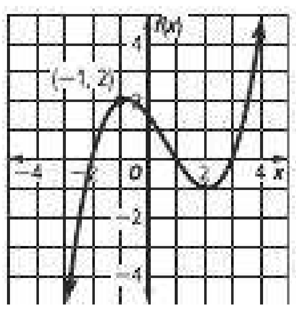
حسب نظرية العامل، $(x + 8)$ من العوامل. عندما تستخدم القسمة التركيبية مع $x = -8$، فالدالة كثيرة الحدود المنخفضة هي $x^2 - 9x + 14$، والتي تتحلل عواملها إلى $(x - 7)(x - 2)$. ولهذا، $x^3 - x^2 - 58x + 112 = (x + 8)(x - 7)(x - 2)$.

2. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا كانت $P(1) = 0$ و $P(x) = 10x^3 + kx^2 - 16x + 3$. فجد كل عوامل $P(x)$ واستخدمها لتمثيل الدالة بيانيًا. اشرح استنتاجك.



حسب نظرية العامل، $(x - 1)$ من العوامل. استخدم القسمة التركيبية مع $x = 1$. الباقي هو $k - 3$. لكي يكون $(x - 1)$ عاملاً، $k - 3 = 0$. إذًا $k = 3$. ناتج القسمة هو $10x^2 + 13x - 3$، التي تتحلل عواملها إلى $(5x - 1)(2x + 3)$. $P(x) = (x - 1)(5x - 1)(2x + 3)$. المكعب له معامل رئيسي موجب وأصفار عند -1.5 و 0.2 و 1.

3. **استخدام البنية** موضح فيما يلي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود. ما عوامل الدالة؟ ما معادلة الدالة؟ اكتب الحل هنا.



قيمة $P(x)$ تساوي الصفر عند $x = -2$ و $x = 1$ و $x = 3$. إذًا $(x + 2)$ و $(x - 1)$ و $(x - 3)$ عوامل في الدالة كثيرة الحدود حسب نظرية العامل. إذا كانت $f(x) = k(x + 2)(x - 1)(x - 3)$، فإن $f(-1) = 8k$. إذا كانت $8k = 2$، فإن $k = \frac{1}{4}$. يعني ذلك أن $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)(x - 1)(x - 3)$ أو $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$.

4. **التواصل بدقة** اقسم الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 4x^3 - 10x + 8$ على العامل $(x + 5)$. ثم اذكر نظرية الباقي مع تأكيدها لهذه الدالة كثيرة الحدود والعامل المحددين.

بالنسبة إلى $f(x) = 4x^3 - 10x + 8$، الباقي عند القسمة على $(x + 5)$ هو -442. يعني هذا أن $f(-5) = -442$; $4(-5)^3 - 10(-5) + 8 = -500 + 50 + 8 = -442$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 6 تتطلب من الطلاب مراعاة الدقة وهم ينقلون نتائجهم. وفي **المثال 3a**، يتعين على الطلاب إيجاد دالة كثيرة الحدود معينة لتناسب وصفًا مقدمًا إليهم.

على الطلاب إدراك أنه من الممكن أن يكون هناك عدد لا نهائي من كثيرات الحدود بالدرجة نفسها والعوامل نفسها. ويرجع الفرق بين العديد من هذه التمثيلات البيانية الكثيرة إلى امتداد أو انضغاط رأسي، أو انعكاس رأسي. ويجب على الطلاب استخدام إحداثيات نقطة أخرى على التمثيل البياني لتحديد الدالة الصحيحة التي ستناسب الوصف.

تمرين

في **التمرين 4**، يشرح الطلاب بدقة كيف تنطبق نظرية الباقي على كثيرة الحدود والعامل المُعطيين.

التمرين 5 يتطلب من الطلاب استخدام التمثيل البياني لإيجاد الأصفار وإنشاء العوامل مستخدمين نظرية العامل. وبعدها يستخدم الطلاب العوامل لكتابة معادلة لكثيرة الحدود.

في **التمرين 6**، ينبغي على الطلاب النظر إلى الحجم على أنه ناتج ضرب الطول والعرض والارتفاع، ثم يستخدمون نظرية العامل ونظرية الباقي لحل المسألة.

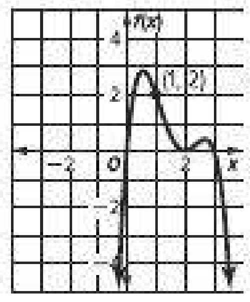
التمرين 7 يطلب من الطلاب استخدام المعرفة بتماثل التمثيل البياني ونظرية الباقي لإيجاد الباقي.

في **التمرين 8**، يستخدم الطلاب نظرية الباقي لإيجاد الباقي عند قسمة كثيرة الحدود، ثم يستخدمون القسمة التركيبية للتحقق من صحة نتائجهم.

في **التمرين 9**، يجب على الطلاب استخدام مكونات نظرية العامل ونظرية الباقي للحل لإيجاد قيمة مجهول. ثم يستخدم الطلاب هذا لإعادة كتابة الدالة وتمثيل نتائجهم بيانيًا.

التمرين 10 يطلب من الطلاب استخدام نظريتي الباقي والعامل للمساعدة في إعداد التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود.

5. **استخدام البنية** موضح فيما يلي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود. ما عوامل الدالة؟ ما معادلة الدالة الأقل في الدرجة التي تطابق التمثيل البياني؟



العوامل هي (x) و $(x - 2)$ و $(x - 3)$. يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x لكنه لا يعبره عند $x = 2$ وإذًا يجب أن يكون ذلك العامل $(x - 2)^2$. الدالة كثيرة الحدود هي $f(x) = k(x)(x - 2)^2(x - 3)$. ولذلك $f(1) = -2k$. إذا كانت $-2k = 2$، فإن $k = -1$. يعني ذلك أن $f(x) = -x^4 + 7x^3 - 16x^2 + 12x$.

6. **التفكير بطريقة تجريدية** يبلغ حجم صندوق قاعدته مربعة $V(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 27$. إذا كان ارتفاع الصندوق يبلغ $(2x + 3)$، فما أضلاع القاعدة بدلالة x؟

بما أن $(2x + 3)$ من عوامل $V(x)$، فاستخدم القسمة التركيبية مع $x = -\frac{3}{2}$ الباقي صفر والعامل الآخر هو $2(x^2 + 6x + 9)$، أو $2(x + 3)^2$. أضلاع القاعدة هي $(x + 3)$.

7. **استخدام البنية** الدالة كثيرة الحدود $P(x)$ متناظرة في المحور y وتحتوي على النقطة $(2, -5)$. ما الباقي عند قسمة $P(x)$ على $(x + 2)$؟ اشرح استنتاجك.

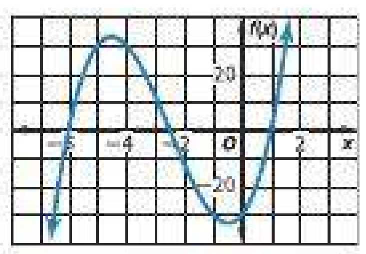
إذا كانت $P(x)$ متناظرة مع المحور y، يجب أن تحتوي أيضًا على النقطة $(-2, -5)$. وفقًا لنظرية الباقي، الباقي عند قسمة الدالة كثيرة الحدود $P(x)$ على $(x - r)$ هو $P(r)$. بما أن $P(-2) = -5$، فالباقي عند قسمة $P(x)$ على $(x + 2)$ هو -5.

8. **الحساب بدقة** تحقق من نظرية الباقي في الدالة كثيرة الحدود $x^2 + 3x + 5$ والعامل $(x - \sqrt{3})$ باستخدام القسمة التركيبية أولاً.

$$\begin{array}{c|ccc} \sqrt{3} & 1 & 3 & 5 \\ & & \sqrt{3} & 3\sqrt{3} + 3 \\ \hline & 1 & 3 + \sqrt{3} & 3\sqrt{3} + 8 \end{array}$$

$$(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} + 5 = 3 + 3\sqrt{3} + 5 = 3\sqrt{3} + 8$$

9. **استخدام نموذج** إذا كانت $(x + 6)$ من عوامل $kx^3 + 15x^2 + 13x - 30$، فحدد قيمة k، وحلّل الدالة كثيرة الحدود الى العوامل وقم بتأكيد النتيجة بيانيًا.



استخدم القسمة التركيبية مع $x = -6$. يجب أن يكون الباقي صفرًا، وإذًا $432 - 216k = 0$ أو $k = 2$. العامل الآخر هو $2x^2 + 3x - 5$، التي تتحلل عواملها إلى $(2x + 5)(x - 1)$. ولهذا يمكننا كتابة $kx^3 + 15x^2 + 13x - 30 = (x + 6)(2x + 5)(x - 1)$.

أخطاء شائعة

أثناء العمل على مسألة قسمة تركيبية، سيقع الطلاب غالبًا في أخطاء بالعلامات، خالطين بين الأعداد الموجبة والسالبة. أولاً، قد ينسون أن القيمة التي يتم اختبارها في القسمة التركيبية هي مقابل القيمة الموجودة في العامل. فعلى سبيل المثال، إذا كانوا يقسمون كثيرة حدود على $(x - 3)$، فالقيمة المستخدمة في القسمة التركيبية هي 3، بينما القسمة على $(x + 4)$ قد تعني استخدام القيمة -4.

بالإضافة لذلك، في بعض المواقف قد تشتمل كثيرة الحدود الأصلية أو ناتج القسمة الأصلي على معاملٍ صفري، وربما لا يكون الطلاب على دراية بكيفية التعامل مع هذه الحالات. وربما لا يدركون الحاجة إلى إنشاء عمود "للحد المجهول" في كثيرة الحدود الأصلية، أو الربط بين المعاملات بشكلٍ غير صحيح في ناتج القسمة.

تمرين

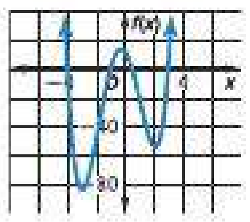
في **التمرين 11**، يستخدم الطلاب بنية نظرية العامل لكتابة معادلتين محتملتين لدالة كثيرة الحدود.

في **التمرينين 12 و 13**، يستخدم الطلاب نظريتي الباقي والعامل لإيجاد كل عوامل الدالة التكعيبية.

في **التمرين 14**، يُعطى الطلاب جدولاً من القيم ويستخدمون نظريتي الباقي والعامل للإجابة عن الأسئلة.

تلميح تقني

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني أو برنامج حاسوبي لمساعدة الطلاب على تصور التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود، إلى جانب التحقق من دقة حلولهم.



10. **التواصل بدقة** عند قسمة الدالة $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 24x^2 - 13x + 12$ على $x^2 - 2x - 3$، فيكون الباقي صفرًا. اشرح كيف يمكنك إيجاد أصفار $P(x)$. حدد الأصفار واستخدمها لرسم تمثيل بياني للدالة.
بما أن $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$، فكل من $x = -1$ و $x = 3$ من أصفار $P(x)$. استخدم القسمة التركيبية مع كل صفر بشكل متتابع للتوصل إلى العامل الآخر، $2x^2 + 7x - 4$، التي تتحلل عواملها إلى $(2x - 1)(x + 4)$. بمجرد معرفة كل العوامل الأربعة، يمكن إنشاء التمثيل البياني.

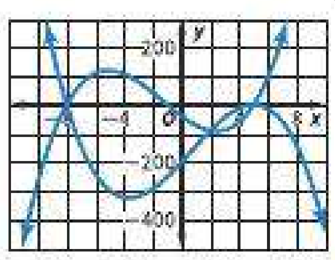
11. **استخدام البنية** تقع النقاط $(-1, 4)$ و $(5, 10)$ و $(3, 0)$ و$(0, 0)$ على التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة 4 $P(x)$. اذكر معادلتين محتملتين لـ $P(x)$. اكتب الحل هنا.
الإجابة النموذجية: $P(x) = x(x - 3)(-x^2 + 4x + 6), P(x) = x(x - 3)(-2x^2 + 8x + 11)$؛ لأن النقطتين $(0, 0)$ و $(3, 0)$ تقعان على التمثيل البياني لـ $P(x), P(0) = 0$ و $P(3) = 0$. بموجب نظرية العامل، x و $(x - 3)$ من عوامل $P(x)$، وإذًا $P(x) = x(x - 3)(ax^2 + bx + c)$. ولأن $(-1, 4)$ و$(5, 10)$ تقعان على التمثيل البياني، فإن $P(-1) = 4$ و $P(5) = 10$. استخدم هذه للتعويض عن x واحصل على نظام معادلات لكل من a، و b، و c. بما أن هناك معادلتين فقط في النظام، لا يمكن تحديد a و b و c بشكل متفرد. الحلان المحتملان لقيم a، و b، و c، هما $a = -1b = 4, c = 6$ و $a = -2, b = 8, c = 11$.

12. **التخطيط لحل** بالنسبة للدالة المكعبة $P(x)$، إذا كانت $P(-2) = -12$ و $P(1) = -15$ و $P(2) = 0$ و $P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$، فاكتب معادلة $P(x)$. اشرح إجابتك.
$P(x) = (2x + 3)(x - 2)(2x + 1)$؛ بموجب نظرية العامل، $P(x) = (2x + 3)(x - 2)(ax + b)$. استخدم $P(-2) = -12$ و $P(1) = -15$ للتعويض عن x واحصل على نظام معادلات لـ a و b. جد حل نظام المعادلات للحصول على $a = 2$ و $b = 1$.

13. **استخدام البنية** بالنسبة للدالة المكعبة $P(x)$، و $P(2) = -90$ و $P(-8) = 0$ و $P(5) = 0$.

a. اكتب معادلتين محتملتين لـ $P(x)$. اشرح إجابتك.
بموجب نظرية العامل، $P(x) = (x + 8)(x - 5)(ax + b)$ حيث $a \neq 0$. قم بالتعويض عن x باستخدام $P(2) = -90$ للحصول على $(2a + b)(-3)(10) = -90$ أو $2a + b = 3$. هناك حلان هما $a = -1, b = 5$ و $a = 1, b = 1$. الحلان المحتملان لـ $P(x)$ هما $P(x) = (x + 8)(x - 5)(-x + 5)$ و $P(x) = (x + 8)(x - 5)(x + 1)$.

b. مثّل بيانيًا معادلاتك من **الجزء a**. ما النقاط الثلاث المشتركة بين هذه التمثيلات البيانية؟
يشتركون في النقاط $(2, -90)$ و $(-8, 0)$ و $(5, 0)$.



c. إذا كانت $P(4) = 60$، فاكتب معادلة $P(x)$.
$P(x) = (x + 8)(x - 5)(-4x + 11)$؛ لأن $2a + b = 3$، فإن $b = 3 - 2a$ وإذًا $P(x) = (x + 8)(x - 5)(ax - 2a + 3)$. قم بالتعويض عن x باستخدام $P(4) = 60$ للوصول إلى $60 = (12)(-1)(2a + 3)$ أو $-5 = 2a + 3$ وإذًا $a = -4$ و $b = 11$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 6 تتطلب من الطلاب توصيل أفكارهم وطرقهم بفعالية. وفي **التمرين 10**، ينبغي على الطلاب شرح كيف يمكنهم استخدام المعلومات المعطاة لتحديد أصفار الدالة.

يتم تقديم اثنين من الأصفار في صورة كثيرة حدود تربيعية، وهو ما يدفع الطلاب إلى توضيح أنه بوسعهم فصل هذا إلى زوجٍ من العوامل. وهذان العاملان، إذا استُخدِما على التوالي على كثيرة الحدود الأصلية، فسيكشفان العوامل المتبقية. وبمجرد تحديد الطلاب لكل العوامل، فسيتمكنون من متابعة إنشاء تمثيل بياني للدالة.

14. **تفسير المسائل** صنع عرفان جدولاً لقيم x وقيم $P(x)$ المقابلة لها في دالة كثيرة الحدود.

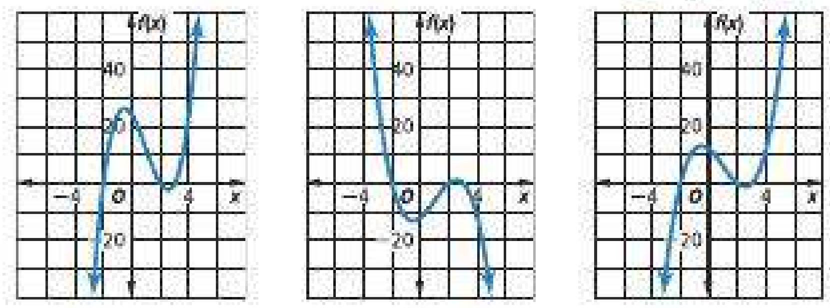
x	−3	−1	0	1	2	4
$P(x)$	−18	0	6	2	0	122

a. استخدم نظرية العامل لتحديد كل عوامل الدالة كثيرة الحدود المعروضة في الجدول. اشرح إجابتك.
$(x+1)$ و $(x-2)$؛ حسب نظرية العامل، $(x-r)$ من العوامل عندما تكون $P(r)=0$. $P(r)=0$ عندما تكون $x=-1$ و $x=2$.

b. ما باقي الدالة كثيرة الحدود عند قسمتها على $(x-1)$؟ اشرح.
2؛ بموجب نظرية الباقي، الباقي هو $P(1)=2$.

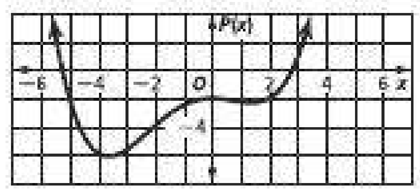
15. **بناء الفرضيات** تحتوي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على العوامل $(x+2)$ و $(x-2)$ و $(x-3)$. ارسم ثلاثة تمثيلات بيانية محتملة للدالة. اشرح كيف يمكن أن يكون هناك أكثر من تمثيل بياني واحد باستخدام هذه العوامل.

الإجابة النموذجية:



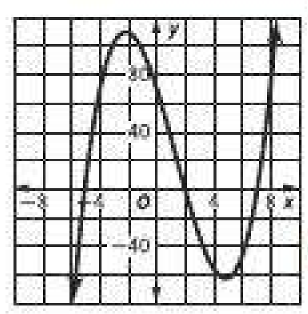
حسب نظرية العامل، تحتوي الدالة كثيرة الحدود على أصفار عند $x=-2$ و $x=2$ و $x=3$. بتطبيق تمدد رأسي و/أو انعكاس رأسي، يمكن إنشاء تمثيلات بيانية إضافية تحتوي على الأصفار نفسها.

16. **تفسير المسائل** استخدم التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود $P(x)$ لإيجاد قيمة k التقريبية إذا كانت $P(x)=q(x)(x-3)+k$ في الدالة كثيرة الحدود $q(x)$. اشرح استنتاجك.



k تبلغ تقريبًا −2. الباقي عند قسمة $P(x)$ على $(x-3)$ هو k. بموجب نظرية الباقي، $P(3)=k$.

17. **تفسير المسائل** يظهر التمثيل البياني لدالة مكعبة كثيرة الحدود $P(x)=x^3-4.1x^2-31.3x+71$ على اليمين. يبدو أن هناك أصفارًا بالقرب من $x=-5$ و $x=2$ و $x=7$. اشرح طريقة واحدة لتحديد ما إذا كانت كل قيمة صفرًا وحدد أي عوامل باستخدام نظرية العامل.



الإجابة النموذجية: استخدم التعويض التركيبي لإيجاد قيمة $P(x)$ عند −5 و 2 و 7 للتوصل إلى أن $P(-5)=0$ و $P(2)=0$ و $P(7)=-6$. حسب نظرية العامل، $(x+5)$ و $(x-2)$ عاملان.

89 3.6 نظريتا الباقي والعامل

أخطاء شائعة

قد يواجه الطلاب صعوبةً في العمل على المسائل التي يُعطَون فيها الباقي، ولكن معامل كثيرة الحدود الأصلية يكون مجهولاً. وهم يستخدمون بشكلٍ أساسي القسمة التركيبية مع القيم العددية، وقد لا يعرفون كيفية التعامل مع معاملٍ مجهول. وقد يُخفقون في ترك مساحة كافية على الصفحة للسماح بوجود أعمدة تحتوي على تعبير بدلالة k (أو حرف آخر).

وقد يرتكبون أخطاءً في الضرب، وينسون أن خاصية التوزيع تنطبق على ناتج ضرب العامل والتعبير الجبري في كل خطوة. وفي النهاية، قد يُغفلون حقيقة أن قيمة الباقي قد قُدِّمت إليهم، وهي تتيح لهم أخذ المجموع الموجود في العمود الأخير وإنشاء معادلة قابلة للحل.

تمرين

في **التمرين 15**، يجب على الطلاب استخدام نظرية العامل لرسم ثلاثة تمثيلات بيانية محتملة لدالة كثيرة الحدود.

التمرين 16 يتطلب من الطلاب إيجاد الباقي باستخدام تمثيل بياني ونظرية الباقي.

التمرين 17 يتطلب من الطلاب استخدام نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت الأصفار موضع الشك هي بالفعل أصفار لدالة معطاة.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1	7
2	2
3	7
4	6
5	7
6	2
7	7
8	6
9	4
10	6
11	7
12	1
13	1
14	1
15	3
16-17	1

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: 1, 3, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- تحليل الصيغ التربيعية الى العوامل
- استخدام اقانون العام
- التمثيل البياني للدوال

مثال 1

م. م. ر 7

نصيحة للتدريس

ناقش الصعوبات التي تشتمل عليها عملية كتابة دالة كثيرة حدود تربيعية من زوج من الأصفار المركبة أو غير النسبية. ويمكن للطلاب تعلّم حساب مجموع الجذور والفرق بينها بسرعة، وكتابة الدالة كثيرة الحدود ذات الصلة.

الأسئلة الداعمة

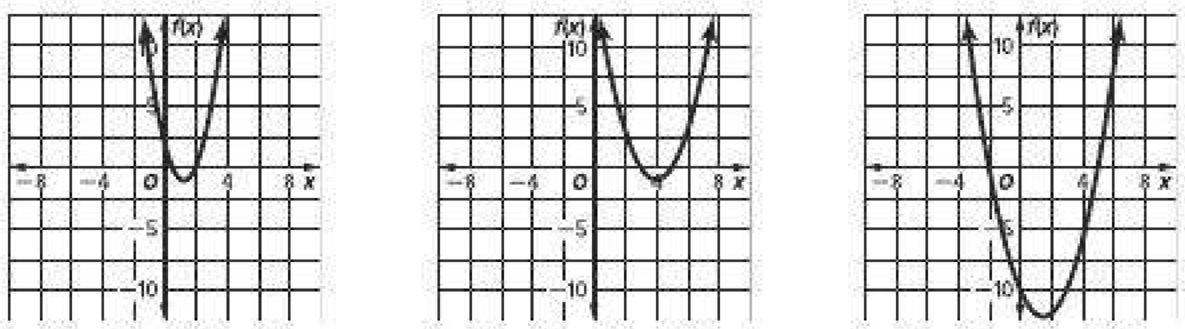
- ما مجموع الجذرين المترافقين $a + bi$ و $a - bi$؟ **مجموع الجذرين هو $2a$.**
- ما ناتج ضرب الجذرين المترافقين $a + bi$ و $a - bi$؟ **ناتج ضرب الجذرين هو $a^2 + b^2$.**

الأهداف

- استخدم نظرية الجبر الأساسية لتحليل جذور المعادلات كثيرة الحدود وأصفار الدوال كثيرة الحدود ذات الصلة.
- استخدم العوامل والأصفار لكتابة الدوال كثيرة الحدود وتمثيلها بيانيًا.

الأصفار الحقيقية في الدالة كثيرة الحدود هي التقاطعات مع المحور x في التمثيل البياني. العامل $(x - r)$ يقابل التقاطع مع المحور x $(r, 0)$، والصفر r، والجذر $x = r$. عندما تكون أصفار دالة كثيرة الحدود معروفة، يمكن استخدام العوامل المرتبطة لتحديد الدالة وتمثيلها البياني. إذا كانت معاملات الدالة كثيرة الحدود حقيقية، فستظهر أي أصفار مركبة على شكل أزواج مرافقة $a + bi$ و $a - bi$.

مثال 1 إيجاد الدوال كثيرة الحدود من التقاطعات مع المحور x



a. **التواصل بدقة** حدد الأصفار والدالة المعروضة في كل تمثيل بياني.

في التمثيل البياني الأول، نقاط التقاطع مع المحور x هي -2 و 5، والدالة هي $f(x) = x^2 - 3x - 10$. في التمثيل البياني الثاني، نقاط التقاطع مع المحور x هي 3 و 5 والدالة هي $f(x) = x^2 - 8x + 15$. في التمثيل البياني الثالث، نقاط التقاطع مع المحور x هي $\frac{1}{2}$ و 2، والدالة هي $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

b. **استخدام البنية** هل هناك علاقة بين أصفار الدالة والمعاملات والثوابت في الدالة كثيرة الحدود؟

في أول تمثيلين بيانيين، معامل x هو مقابل مجموع الأصفار والحد الثابت هو ناتج ضرب الأصفار. لا توجد هذه العلاقة إلا عندما يكون المعامل الرئيسي 1.

c. **التواصل بدقة** افترض أن دالة كثيرة الحدود تحتوي على الأصفار المركبة $2 + 3i$ و $2 - 3i$. اشرح الصعوبات في إيجاد دالة تربيعية كثيرة الحدود مرتبطة بهذه الأصفار.

العوامل المقابلة هي $(x - (2 + 3i))$ و $(x - (2 - 3i))$. يتطلب ضرب هذه العوامل انتباهًا خاصًا عند العمل مع الوحدة التخيلية i.

d. **استخدام البنية** بدون ضرب العوامل، جد معادلة تربيعية كثيرة الحدود بالجذرين $2 + 3i$ و $2 - 3i$. اشرح استنتاجك.

$x^2 - 4x + 13 = 0$؛ مجموع الجذور هو $4 = (2 + 3i) + (2 - 3i)$. ناتج ضرب الجذور هو $(2 + 3i)(2 - 3i)$، أو $4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$.

معلومات أساسية رياضية

يُعرِّف هذا الدرس الطلاب على نظرية الجبر الأساسية وقاعدة "ديكارت" للإشارات. وقد عمل العديد من الرياضيين البارزين على النظرية الأساسية في القرنين السابع عشر والثامن عشر، بمن فيهم رينيه ديكارت وغوتفريد لايبنتز وليونارد يولر وجوزيف لويس لاغرانج وبيير سيمون لابلاس. ويرجع الفضل إلى كارل فريدريش غاوس بوصفه أول من أثبت هذه النظرية في عام 1799.

وفي أطروحة رينيه ديكارت الرياضية الأبرز في عام 1637، قدَّم قاعدة الإشارات لتحديد الأعداد المحتملة للأصفار الموجبة والسالبة للدوال كثيرة الحدود. كما قدّم عمله إلينا كلاً من المستوى الديكارتي والهندسة التحليلية، اللذين استخدمهما إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتز في اكتشافهما لحساب التفاضل والتكامل.

المفهوم الأساسي **نظرية المرافقات المركبة:**

افترض أن $P(x)$ دالة كثيرة الحدود بمعاملات حقيقية. إذا كانت $a + bi$ صفرًا مركبًا في $P(x)$، فسيكون مرافقها المركب كذلك أيضًا $a - bi$.

مثال 2 استكشاف نظرية المرافق المركب

a. الحساب بدقة تحتوي الدالة كثيرة الحدود $P(x) = x^2 - 4x + 5$ على الصفر المركب $2 + i$.
تحقق من أن المرافق المركب $2 - i$ هو أيضًا من بين أصفار $P(x)$.
$P(2 - i) = (2 - i)^2 - 4(2 - i) + 5 = (4 - 4i + i^2) - 4(2 - i) + 5 = 4 - 4i - 1 - 8 + 4i + 5 = 0$.

b. استخدام البنية افترض أن $f(x)$ دالة كثيرة الحدود بمعاملات حقيقية ودرجة أكبر من الصفر. فيما يخص الأصفار، ما الذي تنص عليه نظرية الجبر الأساسية بشأن $f(x)$؟
بموجب نظرية الجبر الأساسية، تحتوي $f(x)$ على جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة.

c. بناء الفرضيات إذا كانت الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ تحتوي على معاملات حقيقية والصفر $a + bi$. فهل يمكنك العثور على صفر آخر في $f(x)$؟ ماذا لو كانت $f(x)$ بالدرجة 1؟ اشرح استنتاجك.
حسب نظرية المرافقات المركبة، إذا كانت $a + bi$ صفرًا في $f(x)$، فإن $a - bi$ كذلك أيضًا. إذا كانت $f(x)$ بالدرجة 1، فيمكنها أن تحتوي على صفر واحد فقط. ولأن $f(x)$ يجب أن تحتوي على الصفرين $a + bi$ و $a - bi$، فيجب أن تكون $b = 0$ بحيث يكون لـ $f(x)$ جذر حقيقي واحد.

المفهوم الأساسي **نظرية الجبر الأساسية**

أي معادلة كثيرة الحدود درجتها أكبر من الصفر لها **جذر واحد على الأقل** في مجموعة الأعداد المركبة.
إن أي معادلة كثيرة حدود من الدرجة n لها **n من الجذور بالضبط** في مجموعة الأعداد المركبة، بما فيها الجذور المكررة.

مثال 3 تحديد دالة كثيرة الحدود

a. استخدام البنية اكتب دالة كثيرة الحدود بأقل درجة بمعاملات صحيحة وأصفار تشمل -3 و $3 + 5i$.
اشرح استنتاجك.
$P(x) = (x + 3)(x^2 - 6x + 34)$، أو $P(x) = x^3 - 3x^2 + 16x + 102$؛ إذا كانت $3 + 5i$ أحد الأصفار، فإن $3 - 5i$ أحد الأصفار أيضًا، والعامل التربيعي هو $x^2 - 6x + 34$. العامل الآخر هو $(x + 3)$.

b. استخدام البنية اكتب دالة كثيرة الحدود بأقل درجة بمعاملات صحيحة وأصفار تشمل 2، $\frac{1}{4}$، و $-1 - i$. اشرح استنتاجك.
$P(x) = (x - 2)(4x - 1)(x^2 + 2x + 2)$، أو $P(x) = 4x^4 - x^3 - 8x^2 - 14x + 4$؛ إذا كان $-1 - i$ أحد الأصفار، فإن $-1 + i$ أحد الأصفار أيضًا، والعامل التربيعي هو $x^2 + 2x + 2$. عوامل الدالة الأخرى هي $(x - 2)$ و $(x - \frac{1}{4})$، أو $(4x - 1)$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 7 تتطلب أن يتمكن الطلاب من تحديد البنية والاستفادة منها. في **المثال 3**، يتعين على الطلاب ابتكار طريقة مختصرة *لكتابة* الدالة كثيرة الحدود التربيعية من زوج من الأصفار المركبة أو غير النسبية.

سيحتاج الطلاب إلى حساب كل من مجموع وناتج ضرب زوج من الأصفار المركبة أو غير النسبية. وعليهم إدراك أنهم يستخدمون بنية الدالة كثيرة الحدود التربيعية لتوفير الوقت، وتجنّب الحسابات المملة المتضمنة في ضرب زوج من العوامل بهما قيم غير نسبية أو مركبة. وستحتاج كثيرة الحدود التربيعية إلى أن تُضرب في العوامل الناتجة من الأصفار الأخرى للدالة.

مثال 2

م. م. ر 6

نصيحة للتدريس

ذكِّر الطلاب بتوخي الحرص عند تقييم $P(2 - i)$. ذكِّرهم أن تربيع عدد في الصيغة $a + bi$ سيكون بالصيغة نفسها.

الأسئلة الداعمة

- كم عدد الأصفار الحقيقية التي يمكن أن تحتوي عليه الدالة في **الجزء a**؟ اشرح. **0؛ تحتوي بالضبط على جذرين، كلاهما مركب.**
- إذا كانت هناك دالة تحتوي على ثلاثة أصفار، بما فيها صفر مركب، فما الذي يمكنك قوله عن عدد الأصفار الحقيقية؟ اشرح. **الدالة يكون بها صفر حقيقي واحد بالضبط. وتظهر الأصفار المركبة في أزواج، مما يعني أن الصفر الثالث لا بد أن يكون حقيقيًا.**

مثال 3

م. م. ر 7

نصيحة للتدريس

ناقش السبب في ضرورة أن تذكر المسائل أن الدالة كثيرة الحدود بها معاملات تكاملية. فهذا يشير إلى أن أي أصفار مركبة أو غير نسبية يجب أن تأتي في أزواج مترافقة، لأن كلاً من مجموع المترافقات وناتج ضربها يكون حقيقيًا ونسبيًا.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك تحديد المرافق لصفر مركب أو غير نسبي؟ **تظل القِيَم العددية كما هي؛ بينما تقوم أنت فقط بتغيير العلامة الموجودة أمام الحد الجذري أو التخيلي.**
- ماذا لو كان الصفر كسرًا، ولكن يجب في الوقت نفسه أن تكون المعاملات أعدادًا صحيحة؟ **يتعين وضع العامل ثم ضربه في مقام الكسر.**

مثال 4

نصيحة للتدريس

م. م. ر 7

ناقش السبب في أنه يتعين على الطلاب دراسة التغيرات الحادثة في العلامات (الإشارات) في $P(x)$ أو في $P(-x)$. وربما ينبغي عليهم اختبار عدة قيم مختلفة لتحديد أصفار الدالة. وفي **الجزء c**، اذكر كيف أن مميز العامل التربيعي يكون سالبًا، مما يشير إلى أن الصفرين الآخرين مركبان.

الأسئلة الداعمة

- هل يضمن وجود صفر حقيقي أن يمر التمثيل البياني بالمحور الأفقي x؟ **لا. يمكن أن يتقاطع التمثيل البياني مع المحور فقط عند الصفر، بحيث يتماس المحور مع التمثيل البياني عند تلك النقطة.**
- هل يمكن لدالة كثيرة الحدود بدرجة فردية ومعاملاتها تكاملية أن تحتوي على أصفار كلها تخيلية، ولا يتكرر أي منها؟ **لا. لأن الأصفار التخيلية يجب أن تأتي في أزواج في هذه الحالة، والحصول على عدد فردي من الأصفار التخيلية غير ممكن.**

c. **استخدام البنية** اكتب دالة كثيرة الحدود بأقل درجة بمعاملات صحيحة وأصفار تشمل $4 - \sqrt{3}$ و $4 + 3i$. اشرح استنتاجك.

$P(x) = (x^2 - 8x + 25)(x^2 - 8x + 13)$، أو $P(x) = x^4 - 16x^3 + 102x^2 - 304x + 325$؛ إذا كانت $4 + 3i$ أحد الأصفار، فإن $4 - 3i$ أحد الأصفار أيضًا، والعامل التربيعي هو $x^2 - 8x + 25$. إذا كانت $4 - \sqrt{3}$ أحد الأصفار، فإن $4 + \sqrt{3}$ أحد الأصفار أيضًا، والعامل التربيعي هو $x^2 - 8x + 13$.

المفهوم الأساسي **قاعدة "ديكارت" للإشارات**

بالنسبة للدالة كثيرة الحدود $P(x)$ التي لها معاملات حقيقية،

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة = **عدد تغيرات الإشارة في معاملات $P(x)$**، أو أقل من هذا بعدد زوجي.

عدد الأصفار الحقيقية السالبة = **عدد تغييرات الإشارة في معاملات $P(-x)$**، أو أقل من هذا بعدد زوجي.

مثال 4 **حدد الأصفار في دالة كثيرة الحدود**

a. **بناء الفرضيات** كم عدد الأصفار التي تحتوي عليها $P(x) = x^3 - 14x^2 + 64x - 80$؟ اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار التخيلية. اشرح استنتاجك.

تحتوي الدالة على 3 أصفار في مجموعة الأعداد المركبة. هناك 3 تغييرات في الإشارة في $P(x)$، ولا توجد تغييرات في الإشارة في $P(-x)$. تحتوي الدالة على 3 أصفار حقيقية موجبة أو تحتوي على صفر حقيقي موجب واحد وصفرين تخيليين.

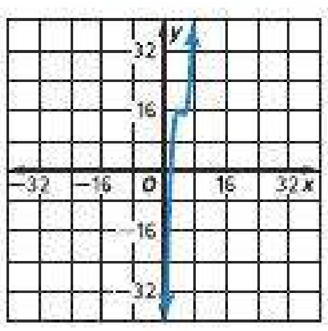
b. **بناء الفرضيات** كم عدد المرات التي يمكن أن يتقاطع فيها التمثيل البياني لـ $P(x) = x^3 - 14x^2 + 64x - 80$ مع المحور x؟ اشرح استنتاجك.

1 أو 2 أو 3 مرات؛ إذا كان هناك صفر حقيقي واحد، يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x عند نقطة واحدة. إذا كانت هناك 3 أصفار حقيقية، يمكن أن يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x مرة أو مرتين (بصفر واحد مكرر) أو 3 مرات (الأصفار مختلفة).

c. **التخطيط لحل** حدد كل أصفار $P(x) = x^3 - 14x^2 + 64x - 80$. أين يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x؟ اشرح.

الأصفار هي 2 و $6 + 2i$ و $6 - 2i$. يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x عند $x = 2$. لأن الدالة يجب أن تحتوي على صفر حقيقي موجب، ابدأ باختبار عوامل 80: 4 ,2 ,1، إلخ. لأن 2 من جذور الدالة، فإن $(x - 2)$ من عوامل $P(x)$. العامل الآخر هو $x^2 - 12x + 40$.

d. **استخدام البنية** مثّل $P(x)$ بيانيًا باستخدام حاسبة تمثيل بياني وقم بعمل رسم للتحقق من الأصفار الموجودة في **الجزء c**.



التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 3 تتطلب من الطلاب أن يتمكنوا من التخمين وإنشاء متوالية منطقية للعبارات لدعم استنتاجهم. في **المثال 4b**، يجب على الطلاب شرح الروابط بين عدد الأصفار الحقيقية والعدد المحتمل لتقاطعات المحور الأفقي x الخاصة بالدالة.

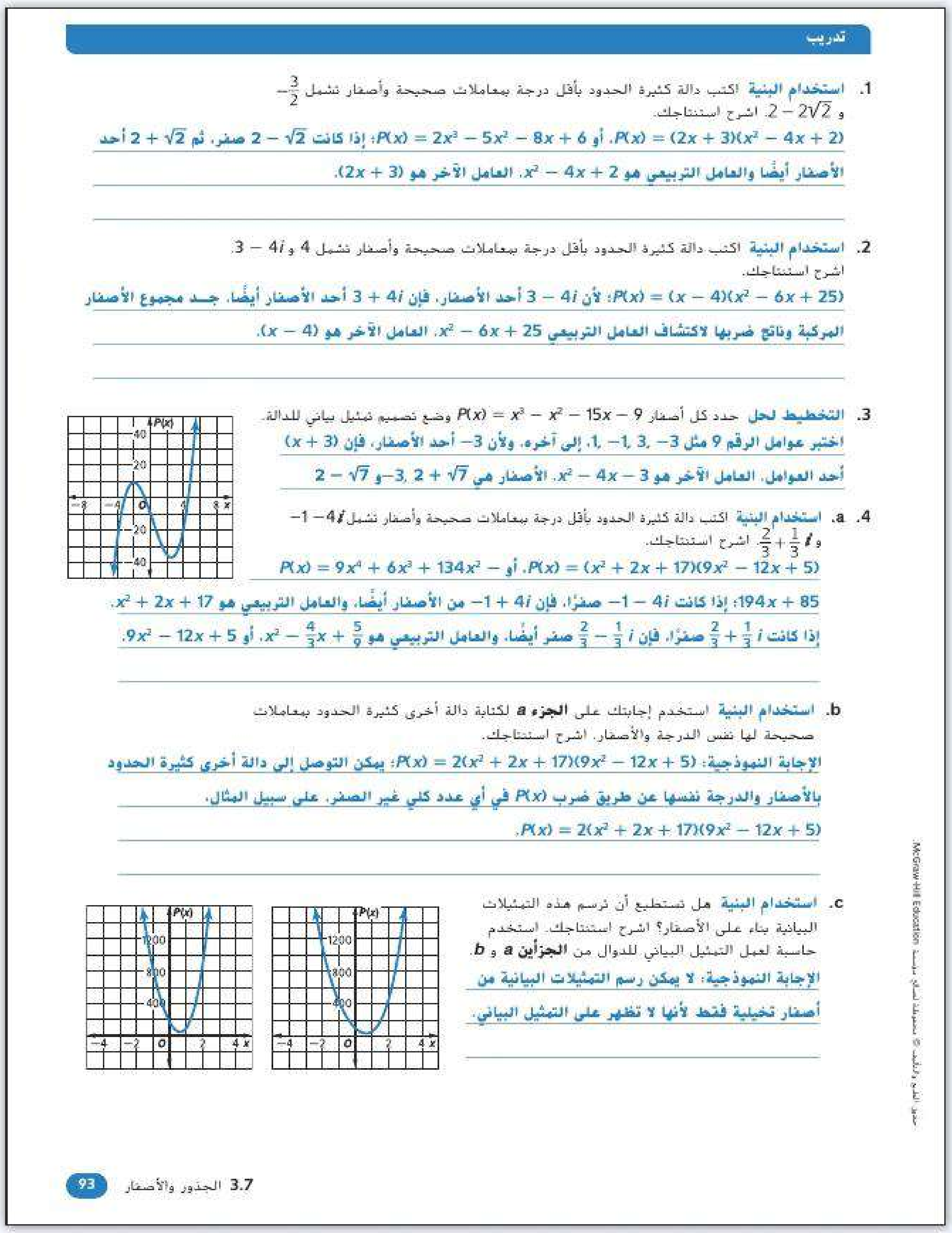
لا ينبغي على الطلاب تطبيق "قاعدة ديكارت للإشارات" و"نظرية الجبر الأساسية" فقط، بل ينبغي عليهم التفكير أيضًا في وجود الأصفار المتكررة.

تلميح تقني

بمجرد أن يجد الطلاب الجذور الخاصة بمعادلة كثيرة الحدود، فيمكنهم استخدام حاسبة أو برنامج تمثيل بياني لتأكيد نتائجهم. ويمكنهم إدخال الصيغة القياسية لكثيرة الحدود باعتبارها دالة، إلى جانب استخدام التمثيل البياني لتأكيد أي جذور حقيقية تمكنوا من إيجادها.

تمرين

في **التمارين 1 و 2 و 4**، يجب على الطلاب استخدام بنية الأصفار المركبة ومعرفة نظرية الجبر الأساسية لإنشاء دالة كثيرة الحدود.



تدريب

1. **استخدام البنية** اكتب دالة كثيرة الحدود بأقل درجة بمعاملات صحيحة وأصفار تشمل $-\frac{3}{2}$ و $2 - 2\sqrt{2}$. اشرح استنتاجك.

$P(x) = (2x + 3)(x^2 - 4x + 2)$، أو $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 6$؛ إذا كانت $2 - \sqrt{2}$ صفر، ثم $2 + \sqrt{2}$ أحد الأصفار أيضًا والعامل التربيعي هو $x^2 - 4x + 2$. العامل الآخر هو $(2x + 3)$.

2. **استخدام البنية** اكتب دالة كثيرة الحدود بأقل درجة بمعاملات صحيحة وأصفار تشمل 4 و $3 - 4i$. اشرح استنتاجك.

$P(x) = (x - 4)(x^2 - 6x + 25)$؛ لأن $3 - 4i$ أحد الأصفار، فإن $3 + 4i$ أحد الأصفار أيضًا. جد مجموع الأصفار المركبة وناتج ضربها لاكتشاف العامل التربيعي $x^2 - 6x + 25$. العامل الآخر هو $(x - 4)$.

3. **التخطيط لحل** حدد كل أصفار $P(x) = x^3 - x^2 - 15x - 9$ وضع تصميم تمثيل بياني للدالة.

اختبر عوامل الرقم 9 مثل 3−، 3، 1−، 1، إلى آخره. ولأن 3− أحد الأصفار، فإن $(x + 3)$ أحد العوامل. العامل الآخر هو $x^2 - 4x - 3$. الأصفار هي $2 + \sqrt{7}$، 3−، و $2 - \sqrt{7}$

4. a. **استخدام البنية** اكتب دالة كثيرة الحدود بأقل درجة بمعاملات صحيحة وأصفار تشمل $-1 - 4i$ و $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$. اشرح استنتاجك.

$P(x) = (x^2 + 2x + 17)(9x^2 - 12x + 5)$، أو $P(x) = 9x^4 + 6x^3 + 134x^2 - 194x + 85$؛ إذا كانت $-1 - 4i$ صفرًا، فإن $-1 + 4i$ من الأصفار أيضًا، والعامل التربيعي هو $x^2 + 2x + 17$. إذا كانت $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ صفرًا، فإن $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$ صفر أيضًا، والعامل التربيعي هو $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{9}$، أو $9x^2 - 12x + 5$.

b. **استخدام البنية** استخدم إجابتك على **الجزء a** لكتابة دالة أخرى كثيرة الحدود بمعاملات صحيحة لها نفس الدرجة والأصفار. اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: $P(x) = 2(x^2 + 2x + 17)(9x^2 - 12x + 5)$؛ يمكن التوصل إلى دالة أخرى كثيرة الحدود بالأصفار والدرجة نفسها عن طريق ضرب $P(x)$ في أي عدد كلي غير الصفر، على سبيل المثال، $P(x) = 2(x^2 + 2x + 17)(9x^2 - 12x + 5)$.

c. **استخدام البنية** هل تستطيع أن ترسم هذه التمثيلات البيانية بناء على الأصفار؟ اشرح استنتاجك. استخدم حاسبة لعمل التمثيل البياني للدوال من **الجزأين a** و **b**.

الإجابة النموذجية: لا يمكن رسم التمثيلات البيانية من أصفار تخيلية فقط لأنها لا تظهر على التمثيل البياني.

أخطاء شائعة

في أثناء محاولة تحديد أصفار دالة كثيرة الحدود، قد يُخفق الطلاب في فهم أهمية استخدام قاعدة الإشارات. وبدون التفكير في المكان المحتمل للأصفار، قد يُهدر الطلاب الوقت في البحث عن الأصفار في مكانٍ لا يمكن أن توجد فيه.

عندما يتمكن الطلاب من تحديد أحد الأصفار باستخدام القسمة التركيبية، فقد ينسون استخدام الأعداد الناتجة لتكوين كثيرة حدود أقل بدرجة واحدة، ويستكملون تحليلهم. وربما يُخفقون أيضًا في استيعاب أنه عندما يصلون إلى الصفرين الأخيرين، فإنه يمكن تحليل العامل التربيعي بطرقٍ تم تناولها بالفعل في الوحدة 4.

تمرين

في **التمرين 3**، ينبغي على الطلاب تحديد أصفار دالة كثيرة الحدود ورسم تمثيل بياني.

في **التمرين 5**، على الطلاب تطبيق نظرية الجبر الأساسية للمساعدة في شرح الفارق بين درجة الدالة وعدد الأصفار الممكن مُلاحظته.

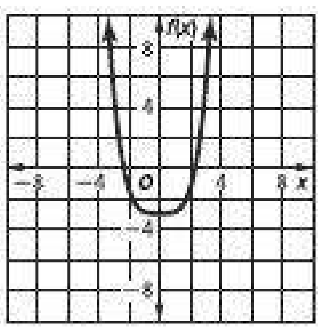
في **التمرين 6**، يجب على الطلاب التفكير في السمات الرئيسية في التمثيلات البيانية لدالتين كثيرتي الحدود.

في **التمرين 7**، يُكوّن الطلاب معادلة كثيرة الحدود ويجدون الجذور ويستخدمون تمثيلاً بيانيًا لمساعدتهم في إجابتهم.

التمرين 8 يتطلب من الطلاب إدراك أن أحد الأصفار المبينة هو صفرٌ مكرر، بحيث تكون كل الأصفار مرئية وحقيقية. كما يجب على الطلاب تفسير السمات الرئيسية للتمثيل البياني.

في **التمرين 9**، يشرح الطلاب أن الصفر المركب لا يمكن التحقق منه عن طريق النظر إلى التمثيل البياني لدالة. كما يجب عليهم شرح كيف توفر نظرية الباقي طريقة للتحقق من صفر مركب في دالة كثيرة الحدود.

التمرين 10 يطلب من الطلاب التمثيل البياني للأصفار المعطاة لدوال كثيرة الحدود.

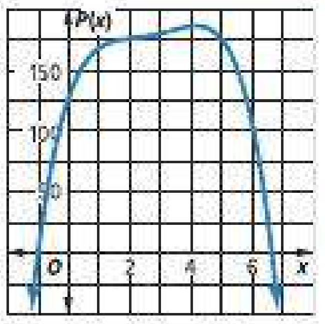


.5 استخدام البنية يوضح التمثيل البياني دالة من الدرجة 4. اذكر عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية في $P(x)$. اشرح استنتاجك.

يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x مرتين، ولذلك هناك صفران حقيقيان، أحدهما موجب والآخر سالب. الصفران الآخران في الدالة تخيليان.

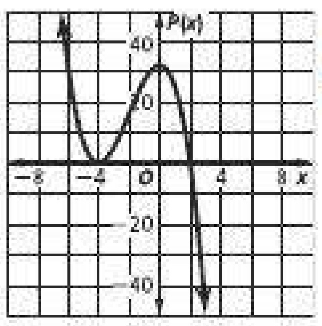
.6 بناء الفرضيات اشرح السبب في أن التمثيل البياني لـ $P(x) = -4(x + 2)(x - 3)^3$ يتقاطع مع المحور x عند $x = 3$، بينما التمثيل البياني لـ $R(x) = 2(x - 1)(x - 3)^4$ لا يتقاطع مع المحور x عند $x = 3$.

قيمة $(x - 3)^3$ سالبة عندما تكون $x < 3$ وموجبة عندما تكون $x > 3$. يؤدي هذا التغير في الإشارة إلى أن يتقاطع تمثيل $P(x)$ البياني مع المحور x عند $x = 3$. قيمة $(x - 3)^4$ موجبة عندما تكون $x < 3$ أو $x > 3$. بدون تغيير في الإشارة، لا يتقاطع تمثيل $R(x)$ البياني مع المحور x عند $x = 3$؛ ويتماس مع المحور x عند $x = 3$.



.7 التخطيط لحل أثناء أول 6 سنوات بعد تقديم منتج جديد، يتمثل عائد الشركة في $R(x) = -x^4 + 11x^3 - 43x^2 + 75x + 125$، حيث يتم قياس $R(x)$ بآلاف الدراهم ويتم قياس x بالسنوات. ما الفترة الزمنية التي زادت فيها الأرباح عن AED 175,000؟ اشرح إجابتك.

اجعل $R(x) = 175$ وجد جذور هذه المعادلة. هناك أربعة جذور، لكن الجذور الوحيدة الحقيقية هي 2 و 5. يوضح التمثيل البياني أن الأرباح كانت تزيد على AED 175,000 أثناء فترة الثلاثة أعوام بين العام 2 والعام 5.



.8 استخدام البنية يمثل التمثيل البياني دالة من الدرجة 3. اذكر عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية في $P(x)$. اشرح استنتاجك.

يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x مرتين، لكن الصفر عند $x = -4$ جذر مزدوج. هناك أيضًا تقاطع مع المحور x عند $x = 2$. ولهذا فالدالة لها صفران حقيقيان سالبان وصفر حقيقي موجب ولا توجد أصفار تخيلية.

.9 بناء الفرضيات هل يمكنك التحقق من أن عددًا مركبًا هو من أصفار الدالة كثيرة الحدود عن طريق النظر إلى تمثيلها البياني؟ كيف يمكنك التحقق من أن $3 + 2i$ هو أحد أصفار $f(x) = x^3 - 8x^2 + 25x - 26$. اشرح استنتاجك.

لا يمكن التحقق من الأصفار المركبة باستخدام التمثيل البياني لدالة. إذا كانت $a + bi$ من أصفار $f(x)$، فإن $f(a + bi) = 0$. للتحقق من أن $3 + 2i$ من الأصفار، جد قيمة $f(3 + 2i)$. يتم تحويل هذا للصورة الأبسط $(-9 + 46i) - 8(5 + 12i) + 25(3 + 2i) - 26$، وهو ما يساوي الصفر.

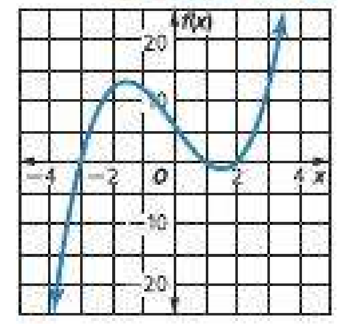
التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

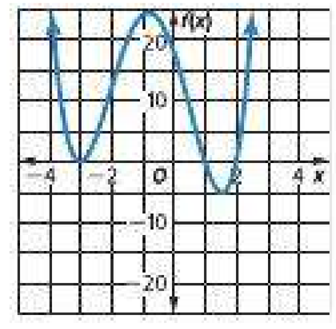
م. م. ر 1 تتطلب من الطلاب إيجاد مدخل لحل مسألة مركبة. وفي **التمرين 7**، يجب على الطلاب تحديد كيفية تطبيق كل من التحليل الجبري والبياني لتحديد وقت حصول الشركة على مستوى معين من الإيرادات.

على الطلاب أولاً أن يفهموا أن بمقدورهم التعويض بالإيراد المرغوب في الدالة، منشئين معادلة كثيرة الحدود ليتم حلها. وتاليًا، عليهم فهم أن الجذور الحقيقية وحدها للمعادلة يكون لها أي تفسير في هذا الموقف. وأخيرًا، ينبغي عليهم إدراك أن التمثيل البياني للمعادلة سيتيح لهم تحديد الفترات الزمنية التي تستوفي متطلبات المسألة.

10. **التخطيط لحل** ارسم التمثيل البياني لدالتين من درجة مختلفة تحتويان على الأصفار -3 و 1 و 2 فقط.

الإجابة النموذجية:

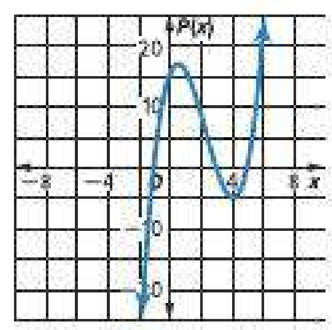




11. **بناء الفرضيات** كم عدد الجذور التكعيبية للعدد 8 الموجودة في مجموعة الأعداد المركبة؟ اشرح استنتاجك. ثم جد الجذور التكعيبية للعدد 8.

3؛ الجذور التكعيبية هي حلول المعادلة $x^3 - 8 = 0$. وفقًا لنظرية الجبر الأساسية، هناك ثلاثة جذور مركبة لهذه المعادلة. جد الحل للتوصل إلى الجذور التكعيبية للرقم 8: $-1 + i\sqrt{3}$, 2 و $-1 - i\sqrt{3}$.

12. **بناء الفرضيات** استخدم الأصفار لعمل تمثيل بياني مرسوم باليد لـ $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$.
ناقش دقة تمثيلك البياني وما يمكن عمله لتحسين الدقة.



التمثيل البياني دقيق بقدر دقة موقع الأصفار، لكنه لا يضع في اعتباره أي تمدد رأسي.

يمكن تحسينه بالتوصل إلى المزيد من النقاط بين الجذور.

13. **استخدام البنية** دالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة $P(x)$ بمعاملات حقيقية تحتوي على العامل $(x - 2i)^2$. اكتب معادلة محتملة لـ $P(x)$. اشرح استنتاجك.

$P(x) = x^4 + 8x^2 + 16$؛ لأن $(x - 2i)^2$ من العوامل، فإن $(x + 2i)^2$ من العوامل أيضًا. ولهذا، فمن المعادلات المحتملة $P(x) = (x - 2i)^2(x + 2i)^2 = ((x - 2i)(x + 2i))^2 = (x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$.

14. افترض أن الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ لها معاملات حقيقية والدرجة 5، والأصفار $4 + 3i$،
و $2 - 7i$، و $6 + bi$ حيث b ثابت من الأعداد الحقيقية.

a. **بناء الفرضيات** ما الذي يمكن تحديده من الثابت b؟ اشرح استنتاجك.
حسب نظرية المرافقات المركبة $4 - 3i$، و $2 + 7i$، و $6 - bi$ أصفار أيضًا في $f(x)$. ولأن $f(x)$ من الدرجة 5، يمكن أن تحتوي على 5 أصفار على الأكثر، يعني هذا أن b يجب أن تكون صفرًا.

b. **استخدم البنية** باستخدام إجابتك من **الجزء a**، اكتب معادلة محتملة لـ $f(x)$.
$f(x) = (x - 6)(x^2 - 8x + 25)(x^2 - 4x + 53)$؛ تحتوي $f(x)$ على الأصفار $4 + 3i$، و $4 - 3i$، و $2 + 7i$، و $2 - 7i$، و6 وإذًا $f(x) = c(x - (4 + 3i))(x - (4 - 3i))(x - (2 + 7i))(x - (2 - 7i))(x - 6) = c(x - 6)(x^2 - 8x + 25)(x^2 - 4x + 53)$ لثابت ما غير الصفر.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م. م. ر 3 تتطلب من الطلاب بناء فرضيات عملية، وتقديم تبرير لاستنتاجهم. وفي **التمرين 11**، على الطلاب شرح أن الرقم 8 في الواقع له ثلاثة جذور تكعيبية في مجموعة من الأعداد المركبة.

على الطلاب شرح أن إيجاد الجذور التكعيبية للرقم 8 هو نفسه حل المعادلة كثيرة الحدود $x^3 - 8 = 0$. ويجب عليهم الاستشهاد بنظرية الجبر الأساسية لاستنتاج أن المعادلة سيكون لها ثلاثة حلول، ثم يشرعون في إيجاد هذه الحلول.

تمرين

في **التمرين 11**، يتعين على الطلاب إنشاء معادلة لتمثيل الجذور التكعيبية للرقم 8، واستخدام نظرية الجبر الأساسية لاستنتاج أن هناك ثلاثة جذور تكعيبية محتملة، وبعدها يحلون المعادلة.

التمرين 12 يطلب من الطلاب إنشاء تمثيل بياني تقريبي باليد.

في **التمرينين 13 و 14**، يجب على الطلاب استخدام بنية الأصفار المركبة ومعرفتهم بنظرية الجبر الأساسية لإنشاء دالة كثيرة الحدود.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1–2	7
3	1
4	7
5	7
6	3
7	1
8	7
9	3
10	1
11	3
12	3
13	7
14	3, 7

تصميم كثيرات الحدود

سيستخدم الطلاب الدوال كثيرة الحدود وخواصها لوصف تمثيل بياني أو إنشائه.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: مهمة تقويم الأداء في الوحدة 3 تدعم الممارسات في الرياضيات م. م. ر 1 و م. م. ر 6 و م. م. ر 8.

بداية سريعة

قد يكون الطلاب غير متأكدين من أين يبدؤون حين يتعين عليهم كتابة معادلة. وما يلي قد يساعد على إعطاء الطلاب نقطة للبدء:

- المنحنى المار بالنقطة (5 ,0) قد يكون قطعًا مكافئًا. فما درجة كثيرة الحدود التي يمثلها؟ **الدرجة 2**
- ما معادلة القطع المكافئ الذي يقع رأسه عند النقطة (5 ,0) والتي تمثل الحد الأقصى؟ $y = 5 - ax^2$
- كيف يمكنك تقدير قيمة a؟ **يمكنني استخدام نقطة مثل (4.5 ,6−).**

ذكّر الطلاب بشأن الأنواع المختلفة للتماثل:

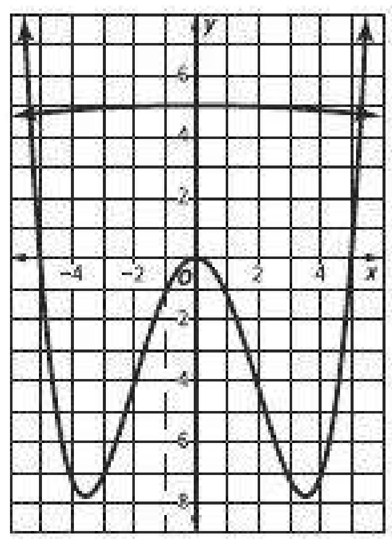
- التماثل في المحور الأفقي x
- التماثل في المحور الرأسي y
- التماثل في الأصل

مهمة تقويم الأداء

تصميم كثيرات الحدود

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وعلّل إجاباتك.

تعمل فنانة رسوميات على ابتكار شكل مثل المعروض. تستخدم برنامج رسوم وتعمل باستخدام دالتين كثيرتي الحدود لرسم المنحنيات.



الجزء A

هل يظهر في التمثيلات البيانية أي تناظر؟ ما أبسط درجات محتملة للدالتين كثيرتي الحدود؟ اكتب معادلة محتملة للدالة كثيرة الحدود الأقل في الدرجة. علّل إجابتك.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتماشى مهمة تقويم الأداء هذه تمامًا مع م. م. ر 8 **(البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)**. وسينتقل الطلاب المتفوقون بوتيرةٍ أسرع بين الخطوات لتحديد الدالة التربيعية من خلال إدراك الجذر المضاعف عند الصفر، والأصفار المقابلة لكلٍ من 5− و 5، للوصول إلى كثيرة الحدود $x^2(x^2 - 25)$. وفي حين أن هذا كافٍ لأصفار التمثيل البياني، إلا أنه لا يقترب من المرور عبر النقاط الأخرى من التمثيل البياني. وبتذكّر أن معامل $y = ax^2$ يمكنه أن يجعل القطع المكافئ أوسع أو أضيق، فبوسعهم اختبار القيم لتعديل التمثيلين البيانيين حسب الضرورة.

نصيحة للتدريس

م. م. ر 6

يجب على الطلاب محاولة اختيار معاملات تؤدي إلى نتائج دقيقة. وكما هو موضح في **م. م. ر 6**، يجب على الطلاب حساب الإجابات الرقمية بدقة وفاعلية والتعبير عنها بدرجة من الإحكام تتلاءم مع سياق المسألة. وفي هذه الحالة، يجب على الطلاب تقدير النقاط على التمثيل البياني إلى أقرب جزء من العشرة لقيمة y على الأقل.

التدريس المتمايز

الجزء C من المهمة هو مسألة غير محددة الإجابة، ويمكن تقديمها بطرقٍ متعددة. وبغرض التحدي، يمكن للطلاب تبادل التصميمات، وبعد ذلك اطلب منهم إيجاد المعادلات التي تناسب التمثيلات البيانية المرسومة بواسطة زملائهم في الفصل.

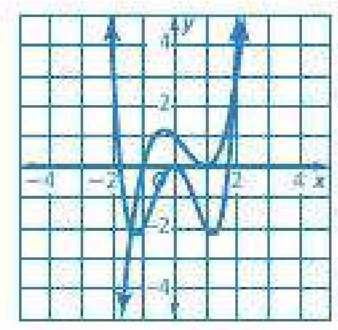
الجزء B

ضع خطة للتوصل إلى معادلة للدالة كثيرة الحدود الأكبر في الدرجة. قم بإدراج أي نظريات تستخدمها واشرح استنتاجك.

الجزء C

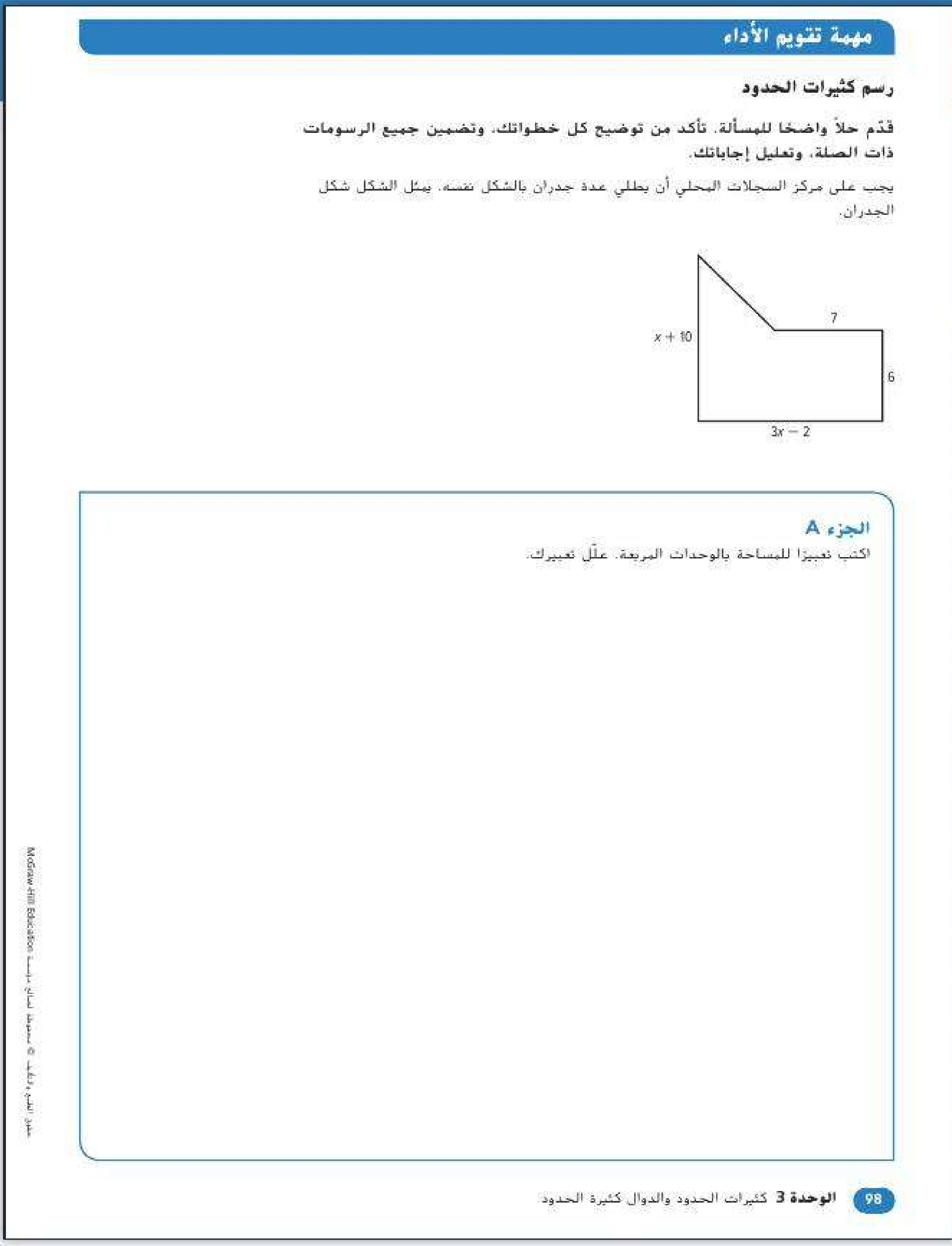
ابتكر تصميمك الخاص الذي يحقق الشروط التالية.

- يجب أن تستخدم دوال كثيرة الحدود لتعريف الحدود.
- يجب أن تحتوي دالة واحدة على الأقل من الدوال كثيرة الحدود على درجة أكبر من 2.
- لا يمكن أن تكون إحدى الدالتين كثيرتي الحدود الصورة السالبة للدالة الأخرى.
- يجب أن تحتوي المنطقة التي تحدها الدوال كثيرة الحدود التي تختارها على نقاط في كل الأرباع الأربعة.



معايير رصد الدرجات

الجزء	أقصى النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	كل تمثيل بياني يكون متماثلاً في المحور الرأسي y، ويكون بأحد المنحنيات درجة 2 أقل، والآخر به درجة 4 أقل. وهذا بسبب أن المنحنى به 4 جذور (جذر مضاعف واحد). وإحدى الدوال المحتملة هي $y = 5 - 0.01x^2$.
B	4	وفقًا لنظرية الباقي، بما أن 5− و 0 و 5 هي أصفار، فإن $(x + 5)$ و $(x - 0)$ و $(x - 5)$ هي عوامل. إذًا فالمعادلة هي $y = ax^2(x^2 - 25)$. ولإيجاد a، استخدم النقطة $(3, -7)$؛ $-7 = 9a(9 - 25)$ و $a = 0.0486111...$ أو حوالي 0.05. ولهذا فالمعادلة هي $y = 0.05x^2(x^2 - 25)$.
C	2	الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, g(x) = x^4 - 3x^2$. راجع التمثيل البياني على صفحة *دليل الطالب التفاعلي*.
الإجمالي	8	


مهمة تقويم الأداء

رسم كثيرات الحدود

قدّم حلاً واضحا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتعليل إجاباتك.

يجب على مركز السجلات المحلي أن يطلي عدة جدران بالشكل نفسه. يمثل الشكل شكل الجدران.

الجزء A
اكتب تعبيرًا للمساحة بالوحدات المربعة. علّل تعبيرك.

McGraw-Hill Education

98 الوحدة 3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

رسم كثيرات الحدود

سيُنشئ الطلاب دالة كثيرة الحدود ويمثلونها بيانيًا، ويأخذون ملاحظات عن خواص التمثيل البياني.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
مهمة تقويم الأداء في الوحدة 3 تدعم الممارسات في الرياضيات م. م. ر 1 و م. م. ر 2 و م. م. ر 4 و م. م. ر 7.

بداية سريعة

تجعل مهمة تقويم الأداء هذه الطلاب يستكشفون تطبيقًا في الحياة اليومية لإجراء عمليات باستخدام كثيرات الحدود. تحقق من أن الطلاب يمكنهم إيجاد مساحات الأشكال المختلفة بطريقة صحيحة:

- كم عدد الأشكال الأساسية التي تُكوّن الشكل الموضح عند تمديد الضلع بطول 7؟ وما هذه الأشكال؟ **شكلان: مستطيل ومثلث**
- ما هما تعبيرا قاعدة المثلث وارتفاعه؟ **التعبيران هما $3x - 9$ و $x + 4$.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

مهمة تقويم الأداء هذه تتماشى تمامًا مع م. م. ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. وتمثل الدوال كثيرة الحدود فئة من الدوال المغلقة ضمن الجمع والطرح والضرب. ويجب أن يلاحظ الطلاب كل كثيرات الحدود والدرجات الموجودة ضمن الشكل ويناقشوا ما قد يكون نتيجة نواتج الضرب. ذكّر الطلاب أن ثابتًا مثل 6 يمكن كتابته في صورة $6x^0$.

نصيحة للتدريس

م. م. ر 4

م. م. ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات) تشير إلى أن "الطلاب المتفوقين في الرياضيات يفهمون أن النماذج هي طريقة للتفكير بطريقة كمية وتجريدية (قادرون على الفصل عن السياق والربط بالسياق)." في هذه الحالة، يجب على الطلاب إيجاد إجابات أثناء الانتباه إلى السياق الأصلي لتقرير أي الإجابات منطقية أو غير منطقية.

أخطاء شائعة

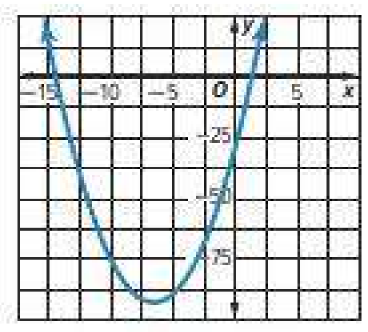
في هذه المرحلة، سيكون هناك الكثير من الطلاب الذين لا يزالون يغفلون العلامة الموجودة على الحد أثناء إجرائهم للضرب. ذكِّر الطلاب بأهمية العلامات وهم يوزعون العوامل.

الجزء B

ما حدود المتغير x في هذا السياق؟ اشرح استنتاجك.

الجزء C

استخدم تقنية الحاسوب لتمثيل الدالة بيانيًا. ارسم التمثيل البياني أدناه. صف أي قيم قصوى نسبية وأي أصفار في الدالة والسلوك الطرفي.



معايير رصد الدرجات

الجزء	أقصى النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	$y = 1.5x^2 + 19.5x - 30$؛ للمثلث أبعاد بقيمة $x + 4$ و $3x - 9$. إذًا فالمساحة هي $\frac{(3x^2 + 3x - 36)}{2}$ أو $1.5x^2 + 1.5x - 18$. المستطيل له أبعاد بقيمة $3x - 2$ و 6. إذًا فالمساحة هي $18x - 12$. المساحة الإجمالية هي مجموع المساحتين أو $1.5x^2 + 19.5x - 30$.
B	2	x يجب أن يكون أكبر من 3. إذًا $3x - 9$ يكون موجبًا. هذا هو التعبير الأكثر تقييدًا داخل الشكل.
C	4	انظر التمثيل البياني في صفحة دليل الطالب التفاعلي. ويجب أن تكون القيمة النسبية الصغرى عند $x = -6.5$. وينبغي أن تكون الأصفار بين 0 و 10 وبين −20 و −10. وبالنسبة للسلوك الطرفي، يجب أن يقترب التمثيل البياني من اللانهاية الموجبة مع اقتراب x من اللانهاية الموجبة أو السالبة.
الإجمالي	8	

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يجيبون عن **العنصر 1** بشكلٍ غير صحيح ربما يكونون قد واجهوا صعوبةً في تحليل عوامل المعادلة. ذكِّر الطلاب أنه أحيانًا ما تكون الخطوة الأولى الجيدة هي التمثيل البياني للمعادلة على حاسبة التمثيل البياني وفحص التمثيل البياني لإيجاد جذرٍ واحد أو أكثر. ثم يحتاجون بعدها إلى اختبار هذه الجذور في المعادلة أو باستخدام القسمة التركيبية.

بالنسبة للطلاب الذين لا يجيبون عن **العنصر 4** بشكلٍ صحيح، ذكِّرهم بأن بوسعهم تحديد السلوك الطرفي عن طريق التفكير في علامة الحد الرئيسي للقيم الموجبة والسالبة لـــ x.

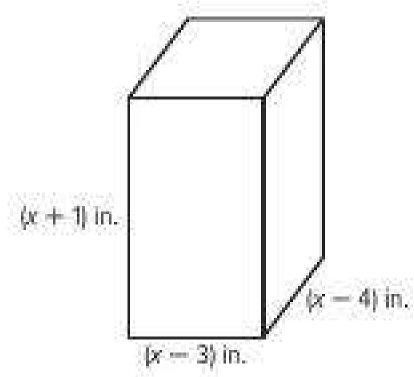
الطلاب الذين لا يرسمون تمثيلاً بيانيًا دقيقًا **للعنصر 7** ربما لم يمثلوا بيانيًا نقاطًا كافية. فذكِّرهم بتمثيل الجذور بيانيًا والتقاطع مع المحور الرأسي y والنقاط بين كلٍ من الجذور، والنقاط خارج الجذور التي ستُظهر السلوك الطرفي.

تمرين على الاختبار المعياري

1. اكتب الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ من أقل درجة التي تحتوي على الجذور -2 و 3 و 5 وتحتوي على المعامل الرئيسي 1.

$f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$

2. يشتري خالد صندوق أقلام. الصندوق عبارة عن متوازي مستطيلات بالأبعاد الموضحة.



إذا كان حجم الصندوق يبلغ $42\ in^3$، فأبعاد الصندوق هي ☐ و 2 in و 3 in و 7 in.

3. جـــد كل جذور المعادلة التالية.

$x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 82x - 65 = 0$

$1, -5, 3 \pm 2i$

4. ما الدالة التي تحتوي على السلوك الطرفي المذكور بالأدنى؟

مع $x \to -\infty, f(x) \to +\infty$، و
مع $x \to +\infty, f(x) \to -\infty$.

$f(x) = 4x + 5$

$f(x) = 4x^2 + 5x - 1$

$f(x) = -4x^2 + 5x - 1$

$f(x) = -4x^3 + 5x - 1$

5. ما مجموع $(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 11)$ + $(3x^3 - x^2 + 6x - 4)$؟

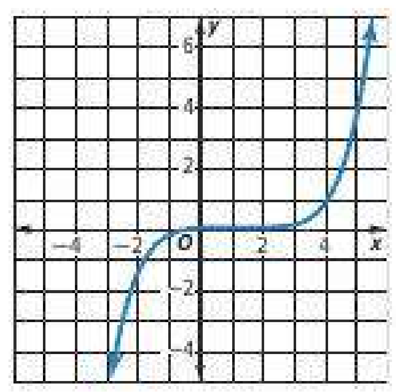
$2x^4 + 4x^2 + 5x + 7$

6. تتناسب قيمة g مع القوة رقم 5 لـــ d. إذا كانت d تبلغ 20، فإن g تبلغ 14,400.

ما الدالة؟

$g = 0.0045d^5$

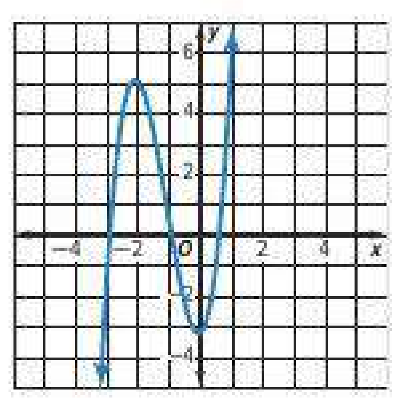
مثّل الدالة بيانيًا مع إظهار نقاط التقاطع والسلوك الطرفي.



7. ما جذور $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$؟

$-3, -1, \frac{1}{2}$

مثّل الدالة بيانيًا.



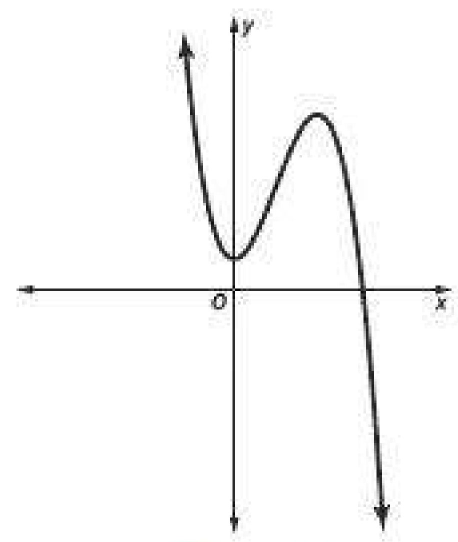
8. ما ناتج قسمة $(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 11) \div (x - 3)$؟

$2x^3 + 3x^2 + 14x + 41 + \frac{134}{x-3}$

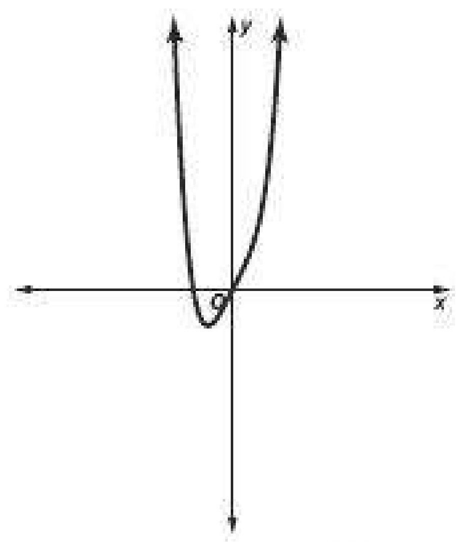
إستراتيجية خوض الاختبار

بعد قسمة كثيرات الحدود في **العنصر 8**، يمكن للطلاب التحقق من صحة إجابتهم عن طريق ضرب ناتج القسمة والمقسوم عليه، ثم جمع الباقي. وإذا أُجريت القسمة بشكل صحيح، فينبغي أن تكون النتيجة هي المقسوم عليه الأصلي.

9. لكل من التمثيلات البيانية التالية، حدد ما إذا كانت درجة الدالة المعروضة فردية أم زوجية وما إذا كانت تحتوي على معامل رئيسي موجب أم سالب.



فردي، سالب



زوجي، موجب

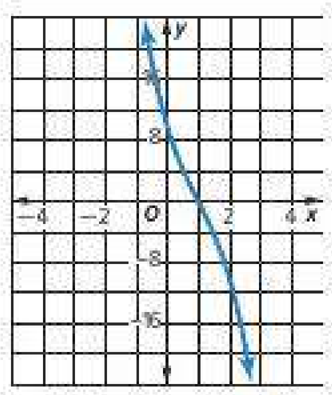
10. تحتوي الدالة التكعيبية $f(x)$ على الصفرين 1 و $1 + 2i$.

a. اكتب الدالة بصيغة ناتج ضرب قيمة ثابتة مجهولة في عامل خطي في عامل تربيعي.
$f(x) = a(x - 1)(x^2 - 2x + 5)$

b. استخدم حقيقة أن $f(0) = 10$ لتحديد قيمة الثابت. اكتب الدالة باستخدام قيمة الثابت.
$f(x) = -2(x - 1)(x^2 - 2x + 5)$

c. صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة.
مع $x \to -\infty, f(x) \to +\infty$ ومع $x \to +\infty, f(x) \to -\infty$.

d. مثّل الدالة بيانيًا للتحقق من أن **الجزء** b. هل يوضح تمثيلك البياني قيمة الدالة المذكورة في **الجزء** b؟ هل يتطابق تمثيلك البياني مع السلوك الطرفي الذي وصفته في **الجزء** c؟



11. استكمل القسمة التركيبية التي بدأت أدناه لتحديد ما إذا كانت $x = -3$ أحد أصفار $6x^6 + 13x^5 + 9x^4 - 11x^3 - 8x + 4$.

−3	6	13	9	−11	0	−8	4
		−18	15	−72	249	−747	2265
	6	−5	24	−83	249	−755	2269

هل $x = -3$ من أصفار هذه الدالة كثيرة الحدود؟ اشرح كيف تعرف.
لا؛ إذا كانت كذلك، فسيكون الباقي من القسمة أعلاه صفرًا.

12. a. هل من المحتمل لدالة كثيرة الحدود من الدرجة 5 أن تحتوي على 7 جذور متفردة؟ اشرح.
لا؛ فحسب نظرية الجبر الأساسية، يمكن أن تحتوي على 5 جذور متفردة على الأكثر.

b. هل من المحتمل لدالة كثيرة الحدود من الدرجة 5 أن تحتوي على 4 جذور متفردة؟ اشرح.
نعم؛ يمكن أن يحتوي أحد الجذور على مضاعف 2.

إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة إلى **العنصر 10**، يحتاج الطلاب إلى تذكر أنه يوجد عدد لا نهائي من الدوال التكعيبية بالأصفار المعطاة. ذكّرهم أن المعلومات المعطاة الأخرى ستحدد الدالة الفريدة المرغوبة. والتمثيل البياني للدالة في **الجزء d** يمثل طريقة للتحقق من عملهم.

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يحددون التمثيل البياني الأول في **العنصر 9** على أنه يُظهر معاملاً رئيسيًا قد يكونون يحاولون تطبيق القواعد التي يحفظونها بدلاً من التفكير على نحو منطقي. فوضّح أنه عندما تصبح الأعداد الموجبة أكبر، تصبح تكعيباتها أيضًا أكبر. ويبين هذا التمثيل البياني أن بينما يصبح x أكبر، يصبح y أصغر. وهذا يحدث فقط حينما يكون المعامل سالبًا.

الطلاب الذين يجيبون عن **العنصر 11** بشكل غير صحيح ربما يكونون قد ارتكبوا خطأً في الحساب. فوضّح للطلاب أن الغرض من القسمة التركيبية هو تحديد ما إذا كان $x = -3$.

العناوين

العنصر 10

[4] دالة وسلوك طرفي وتمثيل بياني صحيحة

[3] دالة صحيحة ولكن إما السلوك الطرفي أو التمثيل البياني غير صحيح

[2] دالة غير صحيحة، ولكن السلوك الطرفي والتمثيل البياني صحيحان بناءً على الدالة أو دالة صحيحة ولكن السلوك الطرفي والتمثيل البياني غير صحيحين

[1] دالة غير صحيحة، ولكن السلوك الطرفي صحيح أو التمثيل البياني صحيح بناءً على الدالة

[0] لا إجابة أو إجابة غير صحيحة عن كل الأجزاء

العنصر 11

[2] أُجيب عن كلا الجزأين بشكل صحيح وبشرح صحيح

[1] أُجيب عن كلا الجزأين بشكلٍ صحيح ولكن الشرح غير موجود أو غير مكتمل أو أُجيب عن جزء واحد وشُرح بشكل صحيح

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام دليل الطالب التفاعلي بجانب *الرياضيات للصف 10 المتقدم*.

درس دليل الطالب التفاعلي	الرياضيات للصف 10 المتقدم
4.1	الدرس 4-1
4.2	الدرس 4-2
4.3	الدرس 4-3
4.4	الدرس 4-4
4.5	الدرس 4-5
4.7	الدرس 4-7

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

السؤال التمهيدي للدرس 4.1 يُمكّن الطلاب من استيعاب الممارسة **م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. يُطلب من الطلاب هنا استخدام نظرية فيثاغورس بتعابير متغيرة. تنتج دالة جذرية عن التعبير المخصص لإيجاد وتر المثلث.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

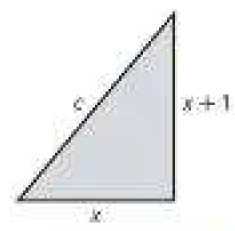
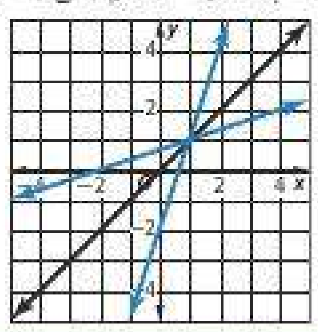
يتناول السؤال التمهيدي بالدرس 4.3 الممارسة **م.م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. ابدأ بتمثيل هذه الدالة بيانيًا:

$$y = \sqrt{x}$$

بعدها، اسأل الطلاب كيف قد تبدو معادلة هذه الدالة المبينة على اليسار. ثم اطلب منهم تحديد نوع المتباينة الموضحة بالتمثيل البياني. أكّد على النتائج باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

4 الدوال والعلاقات العكسية والجذرية

الهدف الأساسي من الوحدة الاطّلاع بعض المعايير الحكومية الأساسية المشتركة التي ستستكشفها في هذه الوحدة. أجب على الأسئلة التمهيدية. أثناء استكمالك لكل درس، راجع هذه الصفحات للتحقق من عملك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 4.1: العمليات على الدوال	
الجمع بين أنواع الدوال القياسية باستخدام العمليات الحسابية. المقارنة بين خصائص دالتين ثم تمثيل كل منهما بطريقة مختلفة (جبريًا أو بيانيًا أو عدديًا في جداول أو بالوصف اللفظي).	بالنسبة للمثلث القائم المعطى، اكتب دالةً f(x) لإيجاد الوتر.  $f(x) = \sqrt{x^2 + (x + 1)^2}$
الدرس 4.2: العلاقات والدوال العكسية	
إيجاد حل معادلة لها الشكل f(x) = c لدالة بسيطة f لها معكوس، وكتابة تعبير يصف هذا المعكوس. إيجاد العلاقة بين مجال الدالة وتمثيلها البياني، والعلاقة الكمية التي تصفها حيثما ينطبق ذلك.	التمثيل البياني لمعكوس دالةٍ متماثلٌ بالنسبة للمستقيم y = x. ارسم التمثيل البياني للدالة y = 3x − 2 على الشبكة المعطاة ثم مثل معكوسها. 
الدرس 4.3: دوال الجذر التربيعي والمتباينات	
تحديد الأثر الذي يقع على التمثيل البياني جراء تعويض f(x) بـ f(x) + k, k f(x) و f(kx) و f(x + k) من أجل قيم محددة لـ k (السالبة منها والموجبة)؛ جد قيمة k عند إعطاء التمثيلات البيانية. التجربة في المسائل وشرح التأثيرات على التمثيل البياني باستخدام التكنولوجيا. رسم دوال جذر تربيعي ودوال جذر تكعيبي ودوال محددة القطع بما في ذلك الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة.	حدّد المتباينة الموضحة في الشكل، واشرح استنتاجك.  A. $y < \sqrt{x-1}$ B. $y < \sqrt{x} - 1$ C. $y < \sqrt{x} + 1$ A: الدالة الأساسية، $y = \sqrt{x}$ مزاحة مسافة وحدة واحدة إلى الجهة اليمنى لتعطي $y = \sqrt{x-1}$ ومظللة من الأسفل.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 4.4: الجذور النونية	
استخدام بنية التعبير لتحديد طرق إعادة كتابتها.	يمثّل حجم مكعب بالدالة: $f(x) = (x + 2)^3$. حلّ الدالة لإيجاد قيمة x إذا كان الحجم يساوي 25 وحدةً مكعبة. $x = 3$
الدرس 4.5: العمليات الحسابية على التعابير الجذرية	
استخدام بنية التعبير لتحديد طرق إعادة كتابتها.	على فرض أن $f(x)$ دالة جذرية. صف التمثيل البياني لـــ $g(x) = f(x + 1) + 1$. ***إنه مماثل في الشكل للتمثيل البياني لـــ $f(x)$، ولكنه مزاحٌ رأسيًا مسافة وحدة واحدة وأفقيًا مسافة وحدة واحدة إلى الجهة اليسرى.*** أعد كتابة التعبير التالي بالصورة ax^m من أجل الخيارات الملائمة لـــ a و m. $\sqrt{4x}\left(\sqrt{16x} + \sqrt{x}\right)$ $\sqrt{4x}\left(\sqrt{16x} + \sqrt{x}\right) = \sqrt{4x}\,\sqrt{16x} + \sqrt{4x}\,\sqrt{x}$ $= \sqrt{64x^2} + \sqrt{4x^2} = 8x + 2x = 10x$
الدرس 4.7: حل المعادلات الجذرية والمتباينات	
شرح السبب في أن الإحداثيات الأفقية x لنقاط تقاطع المعادلتين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ هي حلول المعادلة $f(x) = g(x)$؛ إيجاد الحلول بصورة تقريبية، وذلك عبر استخدام التكنولوجيا مثلاً لتمثيل الدوال بيانيًا أو تشكيل جداول للقيم أو إيجاد التقريبات المتتالية. واشتمل على الحالة التي تكون فيها الدالة $f(x)$ و/أو $g(x)$ خطيتين ومتعددتي الحدود ونسبيتين ودالتي قيم مطلقة وأسيتين ولوغاريتميتين.	على فرض أن $f(x) = 0$ معادلة جذرية. فما الذي بوسعك استنتاجه حول العدد الحقيقي a إذا كانت $f(a) = 0$؟ ***a هو حلّ للمعادلة.***

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

يُمكِن أن يكون السؤال التمهيدي بالدرس 4.5 بمثابة فرصة لاستيعاب الممارسة **م.م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. ابدأ برسم مكعب بأطوال أضلاع $x + 2$. إن دالة الحجم هي ببساطة مكعب لذات حدين خطية. إن كان حجم المكعب 125، إذًا تتكون معادلة تكعيبية:

$$(x + 2)^3 = 125$$

أشر إلى أن حل المعادلة يتضمن طرح الجذر التربيعي من طرفي المعادلة ومن ثم الحل لـــ x. للتوسع، وضِّح إصدار هذه المعادلة واسأل الطلاب عن كيفية حل هذه المعادلة:

$$(x + 2)^n = 125$$

نصيحة للتدريس

م.م.ر 8

السؤال التمهيدي الأول للدرس 6.6 يتيح للطلاب استخدام الممارسة **م.م.ر 8 (البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)**. وضح أنه من الممكن تطبيق السؤال، كما هو مكتوب، على أي دالة، ولكن من المفيد التفكير في الدوال الجذرية باستخدام ترميز الدالة.

مع أخذ هذا بالاعتبار، اسأل الطلاب كيف يمكنهم وصف $g(x)$ إن كانت الدالة خطية. يمكنهم استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد $g(x)$ لدالة خطية. ثم اطلب منهم تعميم نتائجهم إلى دالة جذرية.

بالنهاية، وضح أن الحد "1+" ضمن $f(x)$ يزيح كل القيم المُدخلة وحدة واحدة إلى اليسار. والحد الآخر "1+" يزيح القيم المُخرجة $f(x + 1)$ وحدة واحدة للأعلى.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: 2, 3c 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- إجراء عمليات على التعابير الخطية وكثيرة الحدود
- تحديد أهم سمات الدوال كثيرة الحدود

مثال 1

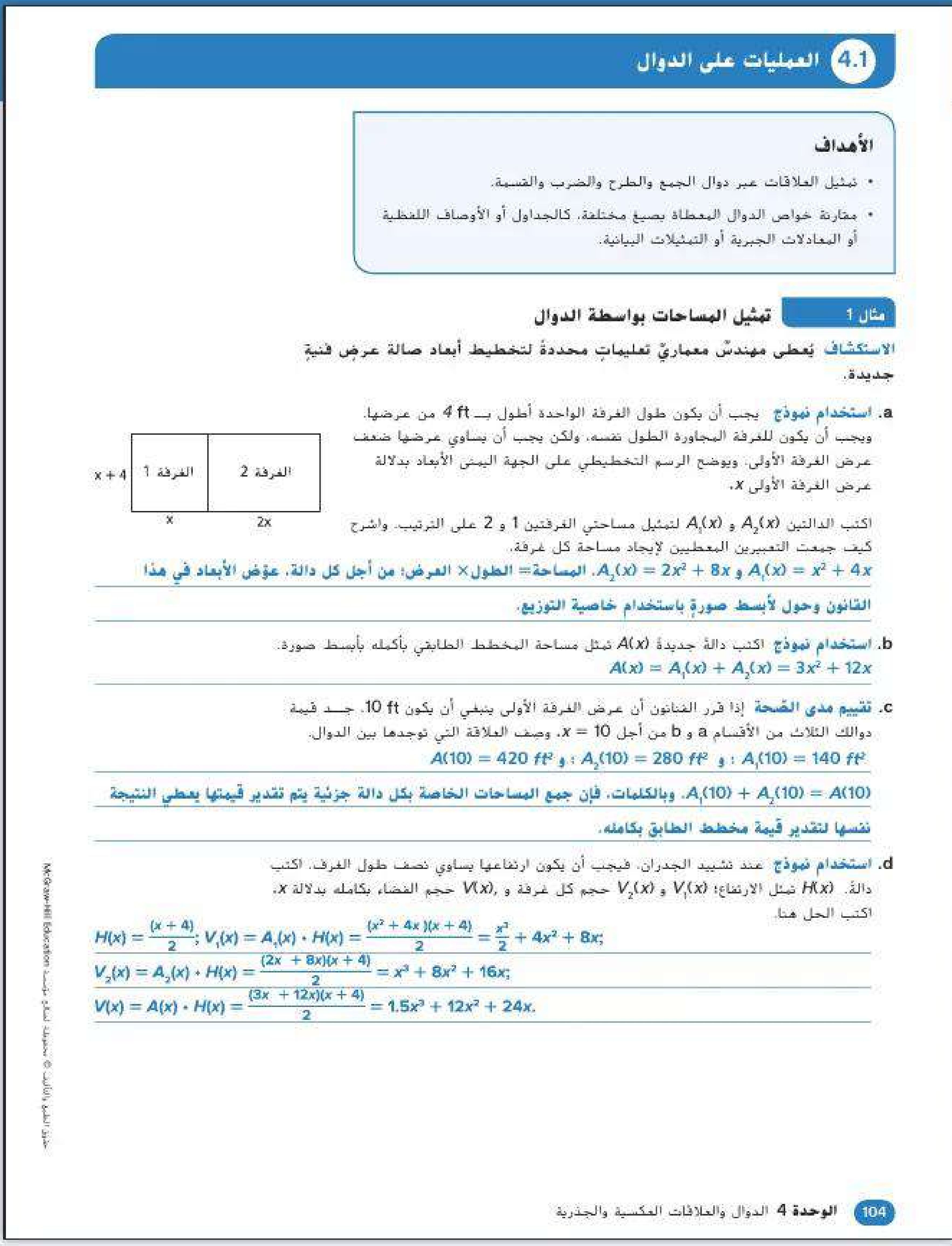
نصيحة للتدريس

م. م. ر 4

سوف يستخدم الطلاب نموذج مساحة لمخطط مبنى لاستنتاج الحسابات ذات الصلة بالعمليات على الدوال. الهدف بالنسبة للطلاب هو جعلهم يستخدموا الاستنتاج الهندسي لعمل استنتاجات عن كيفية تنفذ العمليات التي بها دوال.

الأسئلة الداعمة

- هل يشكل ترتيب تطبيق الدوال فارقًا لكل عملية؟ **لا يهم الترتيب بالجمع والضرب، ولكنه مهم بالطرح والقسمة، بالمثال تمامًا للعمليات على الأعداد الحقيقية والتعابير الجبرية.**
- كيف يؤثر الجمع والطرح والضرب والقسمة في ثابت على الدالة؟ **إن جمع وطرح ثابت يحركان الدالة لأعلى وأسفل، أما الضرب والقسمة فيغيران الشكل.**



4.1 العمليات على الدوال

الأهداف

- تمثيل العلاقات عبر دوال الجمع والطرح والضرب والقسمة.
- مقارنة خواص الدوال المعطاة بصيغ مختلفة، كالجداول أو الأوصاف اللفظية أو المعادلات الجبرية أو التمثيلات البيانية.

مثال 1 **تمثيل المساحات بواسطة الدوال**

الاستكشاف **يُعطي مهندسٌ معماريٌ تعليماتٍ محددةً لتخطيط أبعاد صالة عرضٍ فنيةٍ جديدة.**

a. **استخدام نموذج** يجب أن يكون طول الغرفة الواحدة أطول بـ 4 ft من عرضها. ويجب أن يكون للغرفة المجاورة الطول نفسه، ولكن يجب أن يساوي عرضها ضعف عرض الغرفة الأولى. ويوضح الرسم التخطيطي على الجهة اليمنى الأبعاد بدلالة عرض الغرفة الأولى x.

x + 4 | الغرفة 1 | الغرفة 2
x | 2x

اكتب الدالتين $A_1(x)$ و $A_2(x)$ لتمثيل مساحتي الغرفتين 1 و 2 على الترتيب. واشرح كيف جمعت التعبيرين المعطيين لإيجاد مساحة كل غرفة.

$A_1(x) = x^2 + 4x$ و $A_2(x) = 2x^2 + 8x$. المساحة = الطول × العرض؛ من أجل كل دالة، عوّض الأبعاد في هذا القانون وحول لأبسط صورةٍ باستخدام خاصية التوزيع.

b. **استخدام نموذج** اكتب دالة جديدة $A(x)$ تمثل مساحة المخطط الطابقي بأكمله بأبسط صورة.

$A(x) = A_1(x) + A_2(x) = 3x^2 + 12x$

c. **تقييم مدى الصحة** إذا قرر الفنانون أن عرض الغرفة الأولى ينبغي أن يكون 10 ft. جد قيمة دوالك الثلاث من الأقسام a و b من أجل $x = 10$. وصف العلاقة التي توجدها بين الدوال.

$A_1(10) = 140\ ft^2$ ؛ و $A_2(10) = 280\ ft^2$ ؛ و $A(10) = 420\ ft^2$

$A_1(10) + A_2(10) = A(10)$. وبالكلمات، فإن جمع المساحات الخاصة بكل دالة جزئية يتم تقدير قيمتها يعطي النتيجة نفسها لتقدير قيمة مخطط الطابق بكامله.

d. **استخدام نموذج** عند تشييد الجدران، فيجب أن يكون ارتفاعها يساوي نصف طول الغرف. اكتب دالة. $H(x)$ تمثل الارتفاع؛ $V_1(x)$ و $V_2(x)$ حجم كل غرفة و $V(x)$، حجم الفضاء بكامله بدلالة x. اكتب الحل هنا.

$H(x) = \frac{(x+4)}{2}$; $V_1(x) = A_1(x) \cdot H(x) = \frac{(x^2+4x)(x+4)}{2} = \frac{x^3}{2} + 4x^2 + 8x$;

$V_2(x) = A_2(x) \cdot H(x) = \frac{(2x + 8x)(x+4)}{2} = x^3 + 8x^2 + 16x$;

$V(x) = A(x) \cdot H(x) = \frac{(3x + 12x)(x+4)}{2} = 1.5x^3 + 12x^2 + 24x.$

معلومات أساسية رياضية

تتم العمليات على الدوال بنفس طريقة العمليات على التعابير الجبرية والأعداد الحقيقية. في هذا الدرس، تُقتصر الدوال على الدوال الخطية وكثيرة الحدود التي درسناها حتى الآن، ولكن مع إمكانية جمع كل الدوال مع الأخرى. يجب أن يكون الطلاب على دراية بالتمثيلات البيانية للدوال الخطية وكثيرة الحدود التي تم جمعها وطرحها وضربها، ولكن قسمة هذه الدوال قد ينتج عنه تكوين نوع جديد من الدوال – الدالة النسبية – وهو ما سيدرسه الطلاب لاحقًا.

وثمة عملية خامسة على الدوال، سيتم تناولها في دورة تدريبية لاحقة. وتُعرف باسم تركيب الدوال، بحيث تكون أحد الدوال معطيات لأخرى. ويمكن الحصول على تطبيقات عديدة لهذا التسلسل من العمليات.

المثال 1 (يتبع)

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

لتعزيز المفهوم الأساسي بأن العمليات على الدوال تتبع نفس القواعد الجبرية مثل العمليات على التعابير الجبرية، فيُطلب من الطلاب اختبار مُعطيات عدة دوال مركبة. في **الجزء c**، سوف يُقيّم الطلاب دوال المساحة لكل غرفة بشكل منفصل ودالة المساحة التي تمثل الغرفتين معًا.

الهدف بالنسبة للطلاب هو ملاحظة أن النتائج هي نفسها سواء وجدوا مساحات الغرف الفردية ثم جمعوا مساحات الغرف معًا أو جمعوا أبعاد الغرف ثم أوجدوا المساحة الكلية. وهذا ضروري لفهم **م.م.ر 8**، حيث يقوم الطلاب "بالبحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك." بمعنى آخر، ملاحظة النمط الذي يفيد بوجود طريقتين للوصول لنفس المساحة وهو ما قد يساعد الطلاب على تعميم المعلومات بالمفهوم الأساسي. بعد إكمال **الجزأين c** و **f**، فقد يكون من المفيد أن تسألهم عن الطريقة التي يفضلونها والسبب في ذلك.

e. التفكير بطريقة تجريدية أخبرك المخطّطون أنه بإمكانك استخدام الدالة $6x + 16$ لتمثيل سمة أخرى لهذا الفضاء. ما هذه السمة؟ وما الذي فعله المخطّط ليأتي بهذه الدالة؟ وكيف عرفت ذلك؟

الإجابة النموذجية: هذا هو المحيط. حيث جُمعت الأضلاع معًا. ويمكنك تخمين أن العملية كانت عملية جمعٍ لأن التعبير كان يضم معادلاتٍ خطيةً وبقي خطيًا.

f. استخدام نموذج يقرر المخطّطون تغيير أبعاد المخطط الطابقي بحيث تمثّل المساحة الكلية بالعلاقة $A(x) = 2x^2 + 14x + 24$. فإذا لم تتغير مساحة الغرفة الأولى، إذًا فما الدالة التي تمثل المساحة الجديدة للغرفة الثانية؟ وكيف عرفت ذلك؟

$A_2(x) = A(x) - A_1(x) = 2x^2 + 14x + 24 - (x^2 + 4x) = x^2 + 10x + 24$. هذه مساحة المخطط الطابقي بكامله عدا مساحة الغرفة الأولى.

g. التفكير بطريقة تجريدية إذا كانت الغرفتان تشتركان بطول الجدار المتاخم لهما، استخدم الدالة في الجزء d لتوضح أنه يمكن تمثيل عرض الغرفة الثانية بالدالة $w_2(x) = x + 6$. اشرح.

تعطي قسمة مساحة الغرفة الثانية على طول تلك الغرفة العرض:

$$w_2(x) = \frac{A_2(x)}{l_2(x)} = \frac{x^2 + 10x + 24}{x + 4} = \frac{(x + 6)(x + 4)}{x + 4} = x + 6.$$

h. تقدير مدى الصحة جد قيمة $A(x) = 2x^2 + 14x + 24$ و $B(x) = x + 4$ و $C(x) = 2x + 6$ من أجل $x = 15$. وصف العلاقة التي تتوصل إليها بين الدوال بدلالة السياق.

$A(15) = 2(15^2) + 14(15) + 24 = 684$ و $B(15) = 15 + 4 = 19$ و $C(15) = 2(15) + 6 = 36$.

بما أن ناتج ضرب 19 و 36 يساوي 684، فإن B و C يمثلان طول مخطط الطابق وعرضه والتي يمثّل A مساحته.

المفهوم الأساسي

يمكن جمع الدوال وطرحها وقسمتها بصورةٍ مماثلةٍ تمامًا للعمليات على الأعداد الحقيقية. أكمل كل عبارة مما يلي بالقاعدة المناسبة موضحًا كيفية تركيب الدوال باستخدام العمليات الحسابية.

العملية	التعريف
الجمع	$(f + g)(x) =$ f(x) + g(x)
الطرح	$(f - g)(x) =$ f(x) - g(x)
الضرب	$(f \cdot g)(x) =$ f(x) · g(x)
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$ if $g(x) \neq 0$

التدريس المتمايز

ابدأ بتقديم ترميز الدوال المركبة. وقدّم للطلاب دوال مباشرة ثم اطلب منهم إيجاد قيم $f(x) + g(x)$ و$f(g(x))$. وقد يواجه الطلاب غير المتميزين بمادة الرياضيات صعوبة في فهْم الترميز، لذا سيلزم وقت إضافي لتقديم الأمثلة التمهيدية. بالنسبة للطلاب الذين يسهل عليهم فهم تلك الأمثلة، فيمكنك ببساطة تعقيدها أكثر من خلال عمل دوال مبدئية أكثر تعقيدًا أو من خلال إضافة مستويات لتركيبات الدوال. (مثال: $f(g(h(x)))$)

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

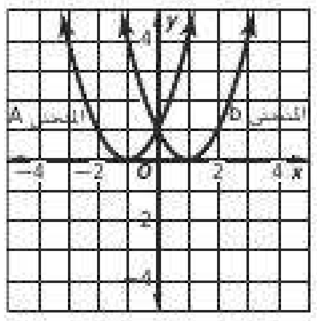
يُطلب من الطلاب مقارنة خواص الدوال الممثلة في صيغ مختلفة. كما يُطلب منهم مقارنة المعادلات الناتجة عن الجمع بين دالتين معًا باستخدام التمثيلات البيانية لتلك الدوال المركبة. إن كان يصعُب على الطلاب البدء، فاقترح أن يستخدموا ما يعرفوه عن الدوال التربيعية لإيجاد النقاط الرئيسية في **الجزأين a** و **b**. من غير المحتمل أن يتمكن الطلاب من تحديد المنحنى C كدالة نسبية ولكن يجب تطبيق م.م.ر7 لتحديد المنحنى D كدالة تكعيبية، مع ترك المنحنى C كونه الخيار الوحيد المتبقي.

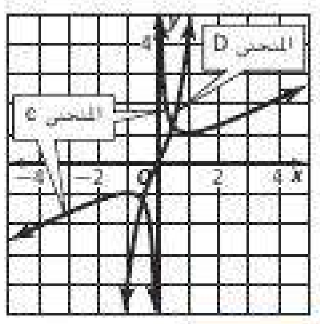
الأسئلة الداعمة

- ما نوع الدالة لكل من $(f + g)(x)$ و $(f - g)(x)$؟ ما نوع الدالة لكل من المنحنى A و B؟ **جميعُهم دوال تربيعية.**
- ما المختلف بالمنحنيين A و B؟ وكيف يمكن استخدام هذا الاختلاف لتحديد نمط كل منحنى؟ **بالنسبة للمنحنيين A و B، فلهما تقاطعات مختلفة مع المحور x، إذًا من خلال تحليل عوامل المعادلتين التربيعيتين، يمكنك معرفة أي تمثيل بياني يتوافق مع أي دالة.**
- ما نوع دالة المنحنى D؟ كيف يمكن الحصول على هذا النوع من الدوال من $f(x)$ و$g(x)$؟ **للمنحنى D شكل الدالة التكعيبية، وهو ناتج دالة خطية وتربيعية.**
- ماذا يحدث في مقام $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ عندما تكون $x = 0$؟ **تحصل على $\frac{f(x)}{0}$، وهي غير محددة.**

مثال 2 مقارنة المعادلات والتمثيل البياني للدوال

تمثل التمثيلات البيانية العمليات الحسابية الأربع على الدالتين $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = 2x$.





a. التفكير بطريقة كمية أي تمثيلٍ بياني يمثل الدالة $(f + g)(x)$؟ اشرح استنتاجك.

المنحنى A: $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ إذًا، فإن نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي x تقع عند -1.

b. التفكير بطريقة كمية أي تمثيلٍ بياني يمثل الدالة $(f - g)(x)$؟ اشرح استنتاجك.

المنحنى B: $(f - g)(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$، إذًا فإن نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي x تقع عند النقطة 1.

c. استخدام البنية من بين التمثيلين البيانيين المتبقيين، أيهما يمثل $(f \cdot g)(x)$ وأيهما يمثل $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$؟ اشرح استنتاجك.

المنحنى D يجب أن يكون $(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 2x$، لأن لها شكل دالة تكعيبية. والمنحنى C يجب أن يكون $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لأنهاليست معرفة عند $x = 0$، حيث $g(x) = 0$.

d. التفكير بطريقة تجريدية يمثل الجدول أدناه واحدةً من الدوال الأربعة المشتقة عبر إجراء العمليات الحسابية الأربع على الدوال أعلاه. حدّد القيمة العظمى والصغرى لهذه الدالة واستخدم تلك المعلومات لتحديد العملية التي تمثلها.

x	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
y	16	9	4	1	0	1	4	9

النقطة الصغرى هي $(-1, 0)$. اشتقت الدالة الوحيدة التي لها النقطة الصغرى نفسها عبر جمع الدوال.

تدريب

1. **التفكير بطريقة تجريدية** يعدّ المركز الوطني لإحصائيات التعليم تقارير عن بيانات توضح أن عدد الرجال المسجلين في الجامعة منذ عام 2006 (بالآلاف) يمكن تمثيله بالدالة $f(x) = 389x + 7500$. حيث x يمثل عدد السنوات منذ 2006. وبصورةٍ مشابهة، يمكن تمثيل عدد النسوة من خلال الدالة $g(x) = 480x + 10075$. اكتب دالةً لـ $(f + g)(x)$ واشرح ماذا تمثل.

$(f + g)(x) = 869x + 17{,}575$. تمثل هذه الدالة عدد الرجال والنساء المسجلين في الجامعة عام 2006.

2. **التفكير بطريقة تجريدية** يجمع ياسر المال لإحدى الجمعيات الخيرية المحلية عبر بيع الكعك. ويمكن تمثيل كلفة صنع x كعكةً بالدالة $C(x) = 0.625x$. ويمكن تمثيل إيراده من بيع x كعكة من خلال الدالة $R(x) = 3.45x$. اشرح ما الذي تعنيه هاتان الدالتان عن كعك ياسر. ثم اكتب دالةً تمثل ربحه. واشرح استنتاجك.

$C(x)$ تشير إلى أن الأمر يكلف 62.5 فلسًا لصنع كل كعكة، أو AED 1.25 لصنع كعكتين. $R(x)$ تشير إلى أنه يبيع كل كعكة مقابل AED 3.45.

$P(x) = 3.45x - 0.625x = 2.825x$ تمثل ربح ياسر، وذلك نظرًا إلى أن الربح = الإيراد − الكلفة.

أخطاء شائعة

في الغالب، قد يكون ترميز الدالة أمرًا محيرًا للطلاب. فذكرهم بأن الصيغة $f(x)$ تُقرأ "f بقيمة x"؛ ما يعني "قيمة الدالة بمعطى يساوي x". بحيث لا يميل الطلاب لفهم أن هذا معناه ضرب الدالة في x.

في **التمرين 3**، قد يُصعِّب الطلاب المسألة أكثر بمحاولتهم إيجاد طول وعرض القاعدة بما أنهم يعرفون أن $V = \ell \cdot w \cdot h$. مهّد للتمرين **م.م.ر 7** من خلال تشجيعهم على فهم أن $\ell \cdot w$ معطى بالفعل بصيغة $A = \ell \cdot w$.

عندما يَكتبُ الطلاب الدالة النسبية في **التمرين 4**، تأكد من أنهم لم يقسموا x ويحولون النتيجة لأبسط صورها لتصبح قيمة ثابتة.

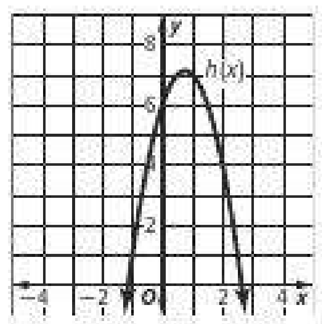
3. **الاستنتاج النقدي** تعطى مساحة قاعدة الموشور المستطيل بالعلاقة $A(x) = x^2 - 7x - 30$ ويعطى ارتفاعه بالعلاقة $h(x) = 2x + 5$. تقول دينة إن حجم الموشور يعطى بالعلاقة $V(x) = 2x^3 - 9x^2 - 95x - 150$. فهل توافق على ذلك أم لا مع السبب؟

موافق: يتم إيجاد مساحة الموشور عبر ضرب مساحة قاعدته بارتفاعه، و
$A(x) \cdot h(x) = (x^2 - 7x - 30)(2x + 5)$ أو $2x^3 - 9x^2 - 95x - 150$.

4. **استخدام نموذج** تعطى الكلفة الكلية لإنتاج x بطاقة تهنئة صورية بالدالة $f(x) = 0.8x + 25$. اكتب دالة توضح أن $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$، حيث $g(x) = x$. وما الذي يمثله نموذج هذه الدالة الجديدة؟

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{0.8x + 25}{x} = 0.8 + \frac{25}{x}$. هذا يمثل كلفة الواحدة من بطاقات التهنئة.

5. a. دقة الحساب إذا كان لديك $f(x) = -2x + 5$ و $g(x) = x + 1$.
حدد إن كان للدالة $(f \cdot g)(x)$ أو الدالة $h(x)$ نقطة تقاطع أعلى مع المحور الرأسي y. واشرح استنتاجك.



$h(x)$: $(f \cdot g)(x) = (-2x + 5)(x + 1)$ أو $-2x^2 + 3x + 5$، والتي لها نقطة تقاطع مع المحور الرأسي y عند 5. $h(x)$ لها نقطة تقاطع مع المحور الرأسي y عند 6. وبالتالي فإن لها نقطة تقاطع أعلى مع المحور الرأسي y.

b. **دقة الحساب** خذ الدالتين في **الجزء a**. فلأي الدالتين انتشارٌ أكبر بين نقطتي تقاطعهما مع المحور الأفقي x؟ مع الشرح.

الإجابة النموذجية: للتمثيل البياني انتشارٌ أكبر. نقطتا تقاطع المعادلة مع المحور الأفقي x هما 1− و 2.5. ويتم تحديد ذلك من خلال مساواة المعادلة بالصفر وحلها. ولا يمكن إيجاد نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x- إلا بصورةٍ تقديريةٍ فحسب. ولكن 1− و 2.5 تقع بين نقطتي تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x.

6. **دقة الحساب** يوضح الجدول التالي القيم المتعددة للدالتين $f(x)$, $g(x)$ و $h(x)$.

x	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	7	−2	0	2	4	1
$g(x)$	−3	−4	−5	0	1	1
$h(x)$	0	4	1	1	5	5

استخدم الجدول لإيجاد القيم التالية:

$(f \cdot h)(4) =$ **5** $(h - g)(0) =$ **8** $(f + g)(-1) =$ **4**

$\left(\frac{g}{f}\right)(1) =$ **غير معرّفة** $\left(\frac{g}{h}\right)(2) =$ **0** $\left(\frac{f}{g}\right)(3) =$ **4**

7. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا كانت $(f + g)(3) = 5$ و $(f \cdot g)(3) = 6$. جد $f(3)$ و $g(3)$. واشرح استنتاجك.

ليكن $a = f(3)$ و $b = g(3)$. بما أن $(f + g)(3) = 5$، إذًا $a + b = 5$. بالحل لإيجاد a، نحصل على $a = 5 - b$. وبما أن $(f \cdot g)(3) = 6)$، فإن $ab = 6$. بتعويض a، نحصل على $(5 - b)(b) = 6$. بتوزيع الطرف الأيسر، نحصل على $5b - b^2 = 6$، أو $b^2 - 5b + 6 = 0$. بالتحليل العاملي، نحصل على $(b - 2)(b - 3) = 0$, so $b = 2$ أو $b = 3$. إذا كان $b = 2$، إذًا $a = 3$. وإذا كان $b = 3$، إذًا $a = 2$. وبالتالي فالحلّان هما $f(3) = 2, g(3) = 3$ و $f(3) = 3, g(3) = 2$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

عندما يَستخدم الطلاب الجبر لتمثيل موقف من الحياة الواقعية وتفسير معنى نموذج رياضي، فهم يتناولون أهداف **م.م.ر 2**، وهي "التفكير بطريقة تجريدية وكميّة." وهذا يحدث بكل مواقف التمثيل حيث يجب أن يستخدم الطلاب الرموز لتمثيل كميات بالحياة الواقعية ويُجبَرون على التفكر فيما تعنيه النتائج وفقًا لهذا السياق. لتناول هذه الممارسة المعيارية الرياضية بتفصيل أكثر، اسأل الطلاب عن القيم المعقولة التي تعتبر معطيات لدوال الحجم والمساحة في **التمرين 1 والتمرين 3**. بعد ذلك، انظر للدوال لمعرفة القِيم الموجودة بمجال ومدى الدالة. ناقش أهمية ربط الدالة بالنموذج بحيث تحصل على نتائج منطقية.

تمرين

في التمرينين 1 و 2، يُطلبُ من الطلاب تفسير ما يمثله كل من مجموع دالتين واختلافهما. وفي كل حالة، يقومون بجمع دوال معيارية باستخدام عمليات حسابية.

في التمرين 3، يُطلب من الطلاب الجمع بين أنواع الدوال المعيارية مستخدمين عمليات الضرب لتكوين دالة تمثل إيجاد الحجم.

في التمرين 4، سيقوم الطلاب مرة أخرى بالجمع بين أنواع الدوال المعيارية. ولكن هذه المرة يستخدمون القسمة، لتكوين دالة تمثل تكلفة الوحدة.

في التمرين 5، يجب مقارنة دالة مركبة مع تمثيل بياني. سوف يقارن الطلاب بين خواص دالتين ممثلتين بطرق مختلفة، واحدة جبريًا والأخرى بيانيًا.

في التمرينين 6 و 7، يحدد الطلاب قيم الدوال المكونة كنتيجة للجمع بين دوال أخرى مستخدمين عمليات حسابية.

التمرين	م.م.ر
1	2
2	2
3	3
4	4
5	6
6	6
7	2

عرض المعايير

4.2 الدوال العكسية والعلاقات

المعايير

المعايير الخاصة بالممارسة الرياضية:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- تمثيل الدوال بيانيًا مع المجال والمدى المقيد
- إيجاد قيمة التعابير ذات الجذور وتعديلها

مثال 1

نصيحة للتدريس

م. م. ر 7

باستخدام دالة بالصيغة $y = f(x)$. سيتعين على الطلاب إيجاد العلاقة العكسية من خلال تبادل متغيري x و y في تعريف الدالة ثم إيجاد حل y بدلالة x. لتقديم هذا المثال، اطلب من الطلاب إيجاد قيمة الدالة للعديد من قيم x واسألهم عما يتوجب عليهم فعله لإلغاء الدالة.

الأسئلة الداعمة

- إذا طبقتَ دالة على قيمة ثم طبقتَ معكوسها على الناتج، فماذا تتوقع أن تحصل عليه؟ **القيمة الأصلية**
- ما نوع الدالتين $f(x)$ و $g(x)$؟ **دالتان خطيتان**
- ما التعميم الذي يمكن استنتاجه بشأن جميع الدوال الخطية ومعكوساتها؟ **الإجابة النموذجية: يجب أن تكون معكوسات جميع الدوال الخطية دوالاً خطية أيضًا شريطة ألا تكون الدالة الأصلية تُمثّل مستقيمًا أفقيًا.**

4.2 الدوال العكسية والعلاقات

الأهداف

- إيجاد معكوس دالة.
- مقارنة خصائص الدوال ومعكوساتها.
- تقييد مجال دالة ليكون لها دالة عكسية.

إن **العلاقة العكسية لدالة** تعكس قيم المدخلات والمخرجات للدالة. فعلى سبيل المثال، إذا كان (a, b) عنصرًا من دالة، إذًا فلا بد أن يكون (b, a) عنصرًا من معكوسها. ولكن معكوس دالةٍ قد يكون أو لا يكون بحدّ ذاته دالة. ويمكن تمثيل العديد من الحالات من الحياة اليومية عبر أخذ دالةٍ ومعكوسها، وذلك كما في حساب الأسعار الأصلية وأسعار البيع أو إيجاد الأطوال والمساحات أو تحويل وحدات القياس. ولإيجاد معكوس دالةً أُعطيت في صورة معادلةٍ من الصيغة $f(x) = c$ وفيها c يمثل تعبيرًا بسيطًا بدلالة x. عوض $f(x)$ بــ y، ثم بدّل x و y. حُلّ المعادلة لإيجاد y وستكون النتيجة هي معكوس $f(x)$. ويرمز إلى ذلك عادةً عبر استبدال y بــ $f^{-1}(x)$.

مثال 1 **إيجاد معكوس دالة.**

a. **إيجاد نمط** جـد معكوس الدالتين $A = \{(2, 3), (-1, 4), (0, -2), (1, 5)\}$ و $B = \{(-3, -2), (0, -3), (1, -2), (4, 1)\}$.

معكوس $A = \{(3, 2), (4, -1), (-2, 0), (5, 1)\}$. معكوس $B = \{(-2, -3), (-3, 0), (-2, 1), (1, 4)\}$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** هل كلا معكوسي الدالتين في **الجزء a** هما دالتان؟ اشرح. ما الذي يتعيّن أن ينطبق على الدالة إن كان معكوسها سيكون دالة؟

معكوس B ليس دالة، حيث توجد قيمتان لــ y عندما تكون $x = -2$. ولكيف يكون معكوس دالةٍ هو دالة، فيجب أن تقابل كل قيمة لــ y في الدالة الأصلية قيمةً واحدةً لــ x بالضبط.

حدّد العلاقة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$. سمِّ المعكوس $f^{-1}(x)$.

c. **تخطيط الحلّ** عوّض $f(x)$ بــ y في الدالة ثم بدّل بين x و y.

عوّض $f(x)$ بــ y: $y = \frac{3}{2}x - 2$؛ بدّل x و y: $x = \frac{3}{2}y - 2$.

d. **تخطيط الحل** حُلّ المعادلة الناتجة من أجل y ثم عوّض y بــ $f^{-1}(x)$.

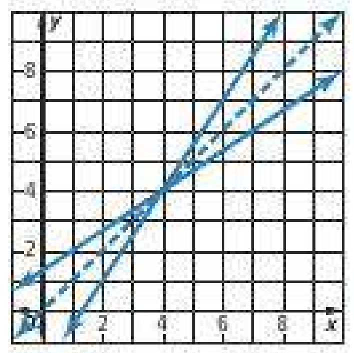
$x = \frac{3}{2}y - 2; x + 2 = \frac{3}{2}y; y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}; f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

معلومات أساسية رياضية

تُعطي الدالة مُخرجًا واحدًا فقط لأي معطيات. على سبيل المثال، $f(a) = b$. سوف يعمل معكوس الدالة على عكس هذه العلاقة، باعتبار أن $f^{-1}(b) = a$. وفي الغالب، نَصِفُ معكوس الدالة بأنه يُمثل دالة لاغية. وبما أنه تم عكس المعطيات والمخرجات، فيمكن للطلاب إيجاد معكوس أي دالة بتبديل قيم x و y في جدول، وتبديل إحداثيات النقطة على التمثيل البياني أو تبادل x و y في معادلة الدالة.

معكوس الدالة هذا ليس عبارة عن دالة دائمًا. ولكي يكون المعكوس دالة، لابد أن تجتاز الدالة الأصلية اختبار المستقيم الأفقي، أو تُعتبر "قيمة مقابل قيمة." وهذا يعني أن هناك قيمة x واحدة لكل قيمة y. في الغالب. وكما هو الحال في العديد من مواقف الحياة الواقعية، قد يكون مجال الدالة مقيدًا لكي يكون معكوسها دالة أيضًا.

e. إيجاد نمط جـد قيمة $f(2)$ و $f^{-1}(1)$. ما الذي تلاحظه؟
$f(2) = 1$; $f^{-1}(1) = 2$. تعكس $f^{-1}(x)$ المُدخل والمُخرج المعطيين لـ $f^{-1}(x)$ و $f(x)$؛ و $f(x)$
كلٌّ منهما تلغي فعل الأخرى.



f. إيجاد نمط مثّل الدالة $f(x)$, $f^{-1}(x)$ ثم المستقيم $y = x$ بيانيًا. ماذا تلاحظ؟
$f(x)$ و $f^{-1}(x)$ هما دالتان متعاكستان بالنسبة للمستقيم $y = x$.

المفهوم الأساسي

أكمل العبارة الخاصة بالدوال العكسية.

إذا كانت f و g دالتان متعاكستين. فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $g(b) = a$

مثال 2 **تمثيل تخطيط بستان**

الاستكشاف يعطي الجدول مثالاً عن دالةٍ ومعكوسها. تمثل الدالة عدد الأقدام $f(x)$ التي يمكنك تعديل طول ضلع بستانٍ مربع وفقها لتحصل على مساحةٍ مزروعةٍ تساوي x قدمًا مربعة.

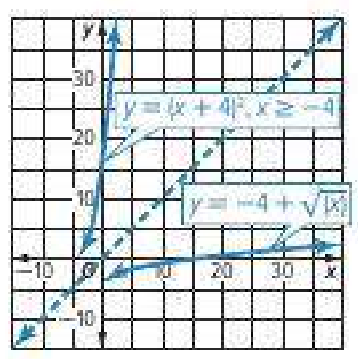
الدالة	العكسي
$f(x) = -4 + \sqrt{x}$	$g(x) = (x + 4)^2$

a. استخدام نموذج جـد قيمة $f(100)$ واشرح ماذا يعني الحساب في سياق هذا السيناريو. ثم صف ما يجب أن يتحقق في أبعاد البستان المربع الأصلي.
f؛ إذا أردت مساحةً مزروعةً مقدارها $100\ ft^2$، فعليك زيادة أطوال أضلاع المربع بمقدار 6 ft. وهذا يعني أن مساحة البستان الأصلي تساوي في الأصل 4 ft في 4 ft.

b. التفكير بطريقة كميّة بناءً على سياق النموذج، فكيف يجب تقييد مجال $f(x)$ ومداها؟ اشرح.
يجب أن يكون مجال $f(x)$ موجبًا لأن المساحات لا يمكن أن تكون إلا موجبة. المجال هو $f(x) \geq -4$ بما أنك تستطيع خفض طول الضلع بمقدار 4 ft على الأكثر.

c. التفكير بطريقة تجريدية صف كيف ترتبط الدالة $g(x)$ بسياق هذا النموذج والسبب في القيد على المجال.
تمثل الدالة العكسية $g(x)$ مساحة بستانٍ مربعٍ عندما تعدّل طول الضلع بمقدار x قدم. وعلى مجال $g(x)$ القيد نفسه على مجال $f(x)$.

d. إيجاد نمط ارسم تمثيلين بيانيين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على المستوى الإحداثي في الجهة اليمنى. وصف العلاقة بين التمثيلين البيانيين.
التمثيلان البيانيان هما انعكاسان بالنسبة للمستقيم $y = x$.



مثال 2

م.م.ر 4

نصيحة للتدريس

يجب أن يستخدم الطلاب الدوال لتمثيل موقف من الحياة اليومية. على الرغم من أن الطلاب لم يعملوا بعد بدوال الجذر التربيعي، فمن الممكن تطبيق ما يفهمونه في الهندسة في هذا المثال. اطلب منهم تصميم رسم تخطيطي لتمثيل حديقة مربعة وتسمية أبعادها، ثم اختيار قيم لـ x لعمل جدول للدالة ومعكوسها. قد يساعد هذا الطلاب على استيعاب العلاقة الهندسية في النموذج.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يعتبر المجال مقيد لقيمة $f(x)$؟ **لأن معطيات الدالة هي المساحة المرغوبة للحديقة والتي ينبغي ألا تكون سالبة.**
- لماذا يعتبر المجال مقيدًا للدالة العكسية؟ **لا يمكن لطول الأضلاع في الحديقة أن يكون سالبًا. لذا فإن بدأت عند 4 أقدام طولاً، فقد تفقد على الأغلب 4 أقدام.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

يُستخدم التفكير بطريقة تجريدية وكميّة في جميع أمثلة هذا الدرس من أجل التعرض لـ **م.م.ر 2**. في **المثالين 2** و **3**، ينتظر من الطلاب أن يفكروا في كيفية تأثير سياق النماذج على المجال والمدى.

في **المثال 1** سوف يستخدم الطلاب **م.م.ر 7** بينما يتعرفون على الأنماط ويَستخدمون البنية المتعلقة بالدوال وتمثيلاتها البيانية ومعكوساتها.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **المثال 2** يفكر الطلاب في ما إذا كانت خاصية الدوال العكسية كافية لإثبات الدوال العكسية. يُسلط هذا المثال الضوء على أهداف **م.م.ر 3**. وهي تمكن الطلاب من "بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين."

للاستفادة من هذه الممارسات الرياضية، اجعل الطلاب يوضحون الاختلاف بين العبارة: "إذا كانت دالتان معكوستين، إذًا $f(a) = b$ و $f^{-1}(b) = a$" وعكسها. أوضح أن المعكوس لا يكون صحيحًا إلا إذا خَصَّصتَ العلاقة العكسية بين المعطيات والمخرجات لجميع قيم الدوال.

بعد ذلك، اطلب من الطلاب تذكّر معنى "حصرًا إذا كان" كما هو موضح في المفهوم الأساسي.

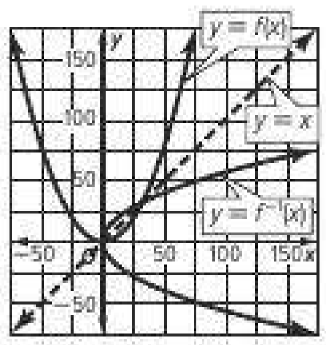
سيتم طرح نقاش حول السبب المنطقي للصياغة المستخدمة في التعريفات والنظريات والخواص في **م.م.ر 3** إضافة إلى تعزيز اللغة الدقيقة اللازمة لإيصال الأفكار الرياضية للجزء **م.م.ر 6**.

e. استخدام نموذج حدّد نقطتي التقاطع مع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ ماذا تلاحظ؟ وماذا تمثل هاتان النقطتان في سياق النموذج؟

نقطتا تقاطع $f(x)$ مع المحورين الإحداثيين هما $(16, 0)$ و $(0, -4)$؛ ونقطتا تقاطع $g(x)$ مع المحورين الإحداثيين هما $(-4, 0)$ و $(0, 16)$. لنقطتي التقاطع مع المحورين الإحداثيين y و x لهما إحداثيات متعاكسة. وللحصول على مساحة $16\ ft^2$، فيتعين عدم تغيير طول الضلع (أو إذا غيّرت طول الضلع بمقدار 0 ft، فالمساحة هي $16\ ft^2$). وللحصول على مساحة تساوي $0\ ft^2$، خفِّض طول الضلع بمقدار 4 ft (أو قلل طول الضلع بمقدار 4 ft لتحصل على مساحةٍ تساوي $0\ ft^2$).

مثال 3 متى يكون معكوس دالةٍ دالة؟

مؤشر كتلة الجسم (BMI) هو مقياسٌ يستخدم لتحديد ما إن كان بالغٌ يفوق 20 عامًا من العمر يتمتع بصحةٍ جيدة. ويعطى قانون حساب مؤشر كتلة الجسم بالعلاقة $BMI = \frac{\text{الوزن(lb)}}{[\text{الطول(in.)}]^2} \times 703$ تعطى الدالة التي تولد الوزن بدلالة الطول والذي يقابل قيمةً متوسطةً للمؤشر الصحي لكتلة الجسم الذي قيمته 21.75 بالعلاقة $w = f(h) = 0.031h^2$.



a. بناء الفرضيات التمثيل البياني لـ $f(x) = 0.031x^2$ ومعكوسها موضحان في الجهة اليمنى. وهل $f(x)$ ومعكوسها دالتان؟ اشرح.

$f(x)$ هي دالةٌ بما أنه يوجد عنصرٌ واحدٌ بالتحديد في مدى كل عنصرٍ في المجال. ومعكوس $f(x)$ ليس دالة، حيث لا يتجاوز اختبار الخط الرأسي.

b. وصف طريقة ما الذي يمكنك البحث عنه في التمثيل البياني لدالةٍ كي ترى إذا كان معكوسها هو دالةٌ أيضًا؟

يمكنك استخدام "اختبار الخط الأفقي" لترى أن هناك فقط نقطة مُدخلات واحدةً فقط مقابل كل قيمة مُخرجات. وإذا كان الأمر كذلك، فسيكون المعكوس دالةً أيضًا.

c. التفكير بطريقة تجريدية يمكنك في أغلب الأحيان الحدّ من مجال دالةٍ لتضمن أن يكون معكوسها دالةً أيضًا. فكيف يمكنك الحدّ من مجال التمثيل البياني للدالة الأصلية بحيث يكون معكوسها دالةً أيضًا؟

حدّد المجال على أنه جميع الأعداد الحقيقية الموجبة أو جميع الأعداد الحقيقية السالبة.

d. تفسير المسائل في سياق دالة مؤشر كتلة الجسم، ما هي الحدود الملائمة على مجال الدالة $w = f(h) = 0.031h^2$ ومداها؟ اشرح استنتاجك.

ينبغي أن يكون مجال الدالة $f(h)$ ومداها محدودين بالأعداد الموجبة لأن الارتفاع والوزن لا يمكن أن يكونا سوى عددين موجبين. ولكن هناك قيمتان عمليتان صغرى وعظمى للطول والوزن.

e. استخدام نموذج اكتب تعبيرًا لمعكوس الدالة $h = g(w)$ ،$w = f(h) = 0.031h^2$. وهل المعكوس دالةٌ أيضًا؟ كيف عرفت ذلك؟

$w = 0.031h^2 \Rightarrow \frac{w}{0.031} = h^2 \Rightarrow h = g(w) = \sqrt{\frac{w}{0.031}}$

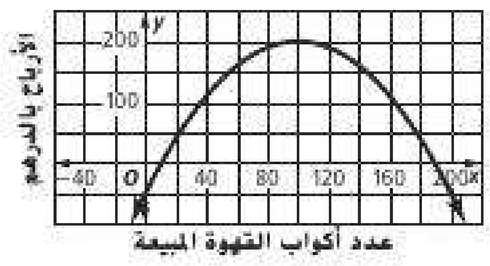
نعم، المعكوس هو دالةٌ نظرًا إلى أن هناك طولاً واحدًا في فقط المُخرجات مقابل كل وزنٍ في المُدخلات.

التدريس المتمايز

لتعزيز مفهوم المعكوس في **المثال 2**، اقترِح أن يجد الطلاب قيمة الدالة ثم إيجاد قيمة المعكوس لكل مُخرج لتأكيد الناتج الذي سيحصلون عليه في **الجزأين d** و **e**. وبدلاً من ذلك، قد يستفيدُ الطلاب من فهم ما يحدث من خلال عمل "آلات" للمدخلات (المعطيات) والمخرجات للدالتين.

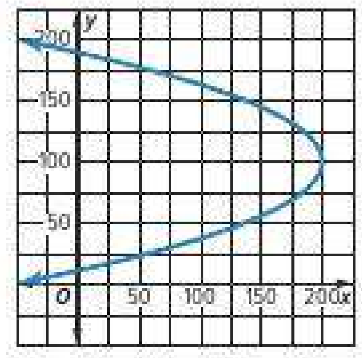
مثال 4 **معنى المعكوس في سياق مسألة**

a. استخدام بنية التمثيل البياني على الجهة اليمنى هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = -0.025x^2 + 5x - 50$. ويمكن استخدام هذه الدالة لتمثيل ربح مقهى اعتمادًا على عدد أكواب القهوة x التي تباع كل صباح. حدّد 5 نقاط يجب أن تقع على التمثيل البياني لمعكوس هذه الدالة. واشرح استنتاجك.



بما أن الدالة العكسية هي مقلوب قيم x و y، فإن $(-50, 0)$ و $(20, 40)$ و $(100, 200)$ و $(140, 160)$ و $(180, 40)$ ستكون ضمن الصورة العكسية.

b. المشاركة بدقة مثل النقاط التي توصلت إليها في **الجزء a** ثم صل بينها لرسم المعكوس على المستوى المبين في الجهة اليمنى. ما الصلة بين التمثيلين البيانيين للدالة $f(x)$ ومعكوسها؟ ناقش أي تماثلٍ للمستقيمات إضافةً إلى موقع النقاط الرئيسية ضمن شرحك.



المعكوس قد عُكس بالنسبة للمستقيم $y = x$، وللدالة الأصلية تناظرٌ محوريٌ رأسي، في حين أن لمعكوسها تناظرًا محوريًا أفقي، وتعكس إحداثيات نقاط التقاطع والرأس. ويكون للتمثيل البياني للمعكوس نقطتا تقاطع مع المحور الرأسي y بدلاً من نقطتي تقاطعٍ مع المحور الأفقي x.

c. بناء الفرضيات هل معكوس الدالة $f(x)$ a هو دالة؟ اشرح استنتاجك.

المعكوس ليس دالة، حيث لا يتجاوز التمثيل البياني اختبار الخط الرأسي. وهناك قيمتان اثنتان للمُخرجات مقابل كل قيمة مُدخلات في المجال باستثناء الرأس.

d. المشاركة بدقّة ما المعلومات التي تحصل عليها من معكوس الدالة $f(x)$؟

الإجابة النموذجية: يسمح لنا المعكوس بتحديد عدد أكواب القهوة التي نحتاج إلى بيعها للعودة بربح محدد.

e. التفكير بطريقة تجريدية كيف يمكن تقييد مجال الدالة بحيث يكون المعكوس دالة؟ وهل لذلك مغزى في سياق المسألة؟ اشرح.

الإجابة النموذجية: جِد قيمة x التي يُرفع عندها الربح إلى قيمته القصوى. وقيّد المجال إما على جميع قيم x فوق هذه النقطة أو جميع قيم x تحت هذه النقطة. ولا معنى لذلك في سياق هذه المسألة، وذلك نظرًا إلى أنه عند أي ربح معطىً هناك في الحقيقة عددان محتملان من أكواب القهوة، وبالتالي فالمعكوس ليس دالة.

تلميح تقني

يمكن للطلاب استخدام حاسبة التمثيل البياني لرؤية التمثيلات البيانية لأي دالة إن لم يتم توفيرها، ولكن من الممكن أن يحصل الطلاب على تمثيلات بيانية لا تعرض القيود التي يتطلبها النموذج. وقد يسبب ذلك ارتباكًا في **المثال 1** عندما يرى الطلاب أن التمثيل البياني للمعكوس يبدو بمثابة قطع مكافئ معياري وليس متناظرًا على طول المستقيم $y = x$ للدالة الأصلية. وقد يساعد ذلك في التأكيد على ضرورة توضيح القيود.

في **المثال 2**، يمكن لاستخدام حاسبة التمثيل البياني لتوضيح $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ تأكيد فكرة أن استخدام التمثيل البياني قد يكون وسيلة للتحقق مما إذا كانت دالتين معكوستين أم لا. اطلب من الطلاب مقارنة كل دالة بالمستقيم $y = x$ والاطلاع على الجداول.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

الهدف من هذا المثال هو استكشاف الحالة التي يكون فيها المعكوس دالة أو لا يكون دالة. استفد من التمثيل البياني لـ $f(x)$ ومعكوسها الموضح في **الجزء a**. لاحظ العلاقة بين التمثيلين البيانيين. أكد على أن $f(x)$ دالة من خلال رسم مستقيم رأسي من أي نقطة على المحور x لأعلى تجاه المنحنى ثم أفقيًا إلى القيمة y على المحور y. كرر هذه العملية على التمثيل البياني المعكوس ملاحظًا أنه يمكن الرسم في اتجاهين ممكنين للحصول على الرسم البياني المعكوس، مخالفًا لاختبار المستقيم الرأسي. لاحظ أنه في سياق مسألة *BMI*، ليس منطقيًا سوى القيم الموجبة للارتفاع والوزن.

الأسئلة الداعمة

- كيف يجب الربط بين المعطيات والمخرجات لدالة بحيث يكون المعكوس دالة أيضًا؟ **لا يمكن أن توجَد سوى قيمة y واحدة لأي قيمة x ولا يمكن أن توجَد سوى قيمة x واحدة لأي قيمة y.**
- كيف يمكن التأكد من مجرد النظر للمعادلة بأن معكوسها لن يكون دالة إن كان المجال كله عبارة عن أعداد حقيقية؟ **تكون المعادلة تربيعية، بمعنى أن يكون التمثيل البياني لها عبارة عن قطع مكافئ، لن يجتاز اختبار المستقيم الأفقي. بالإضافة إلى ذلك، انعكاس القطع المكافئ العرضي في المستقيم $y = x$ هو عبارة عن قطع مكافئ أفقي، لن يجتاز اختبار المستقيم الرأسي للدالة.**

مثال 4

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

يُقدّم هذا المثال فرصة أخرى للتفكير في معكوس الدالة التربيعية. اطلب من الطلاب التفكير في معنى معكوس الدالة عند توضيح السياق واترك لهم فرصة مناقشة – مع توفير السياق – ما إذا كان المعكوس يجب أن يكون دالة أم لا.

الأسئلة الداعمة

- ما الذي يمثله تقاطع **y** من التمثيل البياني في **الجزء a**؟ **يخسر المقهى 50 AED إن لم تباع أي مشروبات قهوة.**
- ما الذي يمثله رأس زاوية التمثيل البياني في **الجزء a**؟ **سيزيد المقهى من أرباحه لتصل إلى 200 AED إذا باع 100 فنجان من القهوة.**
- لماذا قد تقل الأرباح إذا تم بيع أكثر من 100 فنجان قهوة؟ **الإجابة النموذجية: إذا تم بيع 100 فنجان قهوة، فلا بد من استخدام ماكينة ثانية لإعداد القهوة وتوظيف المزيد من العاملين ووضع مقاعد إضافية، وهكذا.**

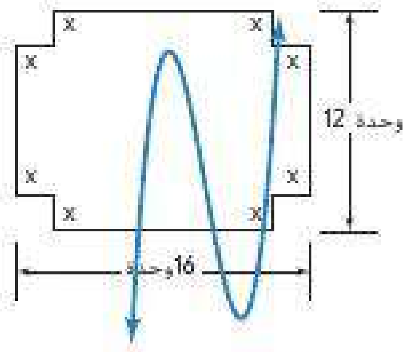
تمرين

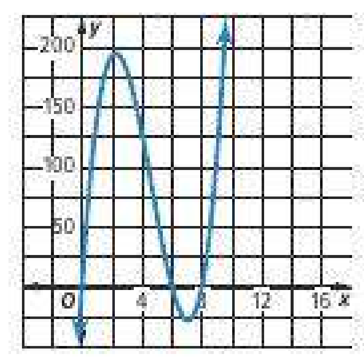
في **المثال 1** صمّم الطلاب شكل مكعب كثير الحدود لتمثيل حجم **(م.م.ر 4)**. فقد ربطوا مجال الدالة بالتمثيل البياني الخاص بها وبالعلاقة الكمية التي تصفها.

في **التمرين 2**، يجب أن يصف الطلاب موقفًا من الحياة الواقعية تكون فيه قيود المجال مُحدّدة لما إذا كان معكوس الدالة هو أيضًا دالة أم لا.

تدريب

1. a. **استخدام نموذج** اكتب ومثل بيانيًا دالة $V(x)$ تعطي حجم صندوق مفتوح صنع من صفيحة معدنية نزعت من زواياه أربعة مربعات طول ضلع الواحد منها x كما هو موضح في الرسم التخطيطي الموضح أدناه. واشرح كيف يجب تقييد مجال هذه الدالة ليكون لها معنى ضمن سياق هذا السيناريو.





$V(x) = x(12 - 2x)(16 - 2x)$ ؛ يجب أن تقع قيمة x بين 0 و 6 بما أن الطول x يجب أن يكون أكبر من 0، ولكن طول ضلع الصندوق $(12 - 2x)$ لا يمكن أن يكون أقل من 0.

b. **تفسير المسائل** هل يسمح تغيير المجال إلى $0 \le x \le 6$ في **الجزء a** أعلاه بأن يكون معكوس دالة دالةً أيضًا؟ وكيف عرفت؟

لا. فالدالة لا تنجح في اختبار الخط الأفقي حتى بوجود القيد، إذًا فلن يكون معكوسها دالة.

2. **بناء فرضيات** لقد رأينا أنه يمكن أن تمتلك الدوال ذوات المجالات المقيدة معكوساتٍ هي دوالٌ أيضًا ولكنها لا تكون دوالاً بغياب القيد. خذ مثالاً من الحياة اليومية يُرمى فيه جسمٌ نحو الأعلى وبسرعةٍ بدائيةٍ تساوي v_0. يمكن التعبير عن ارتفاع الجسم فوق سطح الأرض بدلالة الزمن وباستخدام العلاقة $h(t) = v_0t - 16t^2$ اشرح السبب في أنه لا يمكن أن يكون لهذه الدالة من الحياة اليومية دالةٌ عكسية واشرح القيود التي يجب وضعها عليها لضمان وجود دالةٍ عكسية.

نظرًا إلى أن الجسم يصعد إلى الأعلى ويهبط إلى الأسفل، فسيكون هناك ارتفاعان عند معظم قيم t، أحدهما يخصّ الصعود لأعلى، والآخر للهبوط إلى أسفل. ونظرًا لذلك، لا يمكن أن توجد دالةٌ عكسيةٌ بدون قيدٍ على المجال. ونستطيع تقييد المجال فقط على t التي ينتقل الجسم عندها إلى الأعلى. وبدلاً عن ذلك، يمكنك تقييده فقط على قيم t التي يسقط عندها الجسم. ومن شأن كلتا الطريقتين إعطاء دالةٍ عكسية.

3. **استخدام البنية** أظهر أن $g(x)$ و $f(x) = 4x^3$ $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$ متعاكستان بعضهما لبعض.

$f(x) = 4x^3 \Rightarrow y = 4x^3 \Rightarrow x = 4y^3 \Rightarrow \frac{x}{4} = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}} = g(x);$

$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{4}} \Rightarrow x^3 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4x^3 \Rightarrow g^{-1}(x) = 4x^3 = f(x)$

أخطاء شائعة

قد يرغب بعض الطلاب في تسمية التمثيل البياني للدالة التكعيبية في **التمرين 1** بالقطع المكافئ، خاصةً عند تقييد المجال. فذكّرهم بأن الدالة ما زالت تُمثل مكعبًا كثير الحدود.

في **التمرين 4**، تحقق من أن الطلاب لا يوزعون أي قيم في التعبير الجذري وأنهم يتبعون ترتيب العمليات بدقة.

وعلى مدار الدرس، تأكد من ألا يُسمّي الطلاب المعكوس باسم الدالة إلا إن كانوا يعرفون أنها دالة. وذكّرهم بأن معكوس الدالة ليس بالضرورة أن يكون دالة.

في **التمرين 3**، يُطلب من الطلاب استخدام الاستنتاج وبناء الفرضيات. سوف يحل الطلاب معادلة بصيغة $f(x) = c$ لها معكوس، وكتابة تعبير للمعكوس.

في **التمرين 4**، سوف يقارن الطلاب التمثيل البياني لدالة ومعكوسها، مع مراعاة كيفية تمثيل العلاقات بين الكميتين وفهم السمات الأساسية للتمثيل البياني. وفي هذه الحالة "الميل" والتقاطع مع المحور y.

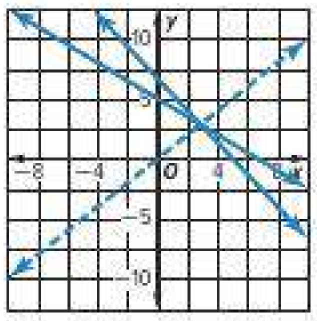
في **التمرين 5**، سوف يُفكّر الطلاب في سياق الدالة العكسية من معادلة لها معكوس ويكتبون معادلة المعكوس.

في **التمرين 6**، سوف يستخدم الطلاب جدولاً من القيم لاختبار كيفية استخدام الدوال والمعكوسات في حالة الجمع.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	1, 4
2	3
3	7
4	4
5	4
6	2

4. استخدام نموذج مثّل الدالة التالية $f(x) = -\frac{3}{4}x + 5$ ومعكوسها و $y = x$ بيانيًا. اكتب معادلة المعكوس. قارن قيم الميل ونقاط التقاطع مع المحور الرأسي y. هل بوسعك الوصول إلى استنتاج بشأن العلاقة بين الميل وبين نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y لدالة خطية و معكوسها؟



$f^{-1}(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$؛ ميل الدالة يساوي $-\frac{3}{4}$، ميل المعكوس يساوي $-\frac{4}{3}$. تقاطع الدالة مع المحور الرأسي عند $y = 5$ ونقطة تقاطع المعكوس مع المحور الرأسي عند $y = \frac{20}{3}$ يساوي ميل المعكوس المعكوس الضربي لميل الدالة. وتقاطع المعكوس مع المحور الرأسي y عند تقاطع الدالة مع المحور الرأسي y مضروبةً بالمعكوس الضربي السالب لميل الدالة.

5. استخدام نموذج تعطي الدالة $f(x) = 0.8x$ السعر المخفّض من السعر الأصلي x. حدّد معكوس هذه الدالة. ثم اشرح ما تعنيه الدالة معكوسها في سياق هذه الحالة. وما هي نسبة التخفيض؟

$f^{-1}(x) = 1.25x$. تعطي الدالة السعر بعد الخصم والمقابل لأي سعر أصلي، وتعطي الدالة العكسية السعر الأصلي مقابل أي سعرٍ بعد الخصم. والنسبة المئوية للخصم تساوي 20%.

6. التفكير بطريقة تجريدية استكشف العلاقة بين $(f+g)^{-1}(x)$ و $f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$.

a. افترض أن لكلا الدالتين $f(x), g(x)$ و $(f+g)(x)$ دالتان عكسيتين في المجال $[0, 3]$. وخذ جدول القيم التالي.

x	0	1	2	3
f(x)	0	3	1	4
g(x)	1	0	4	3

احسب القيم التالية.

$f^{-1}(1) + g^{-1}(1) =$ 2 $\qquad f^{-1}(3) + g^{-1}(3) =$ 4

b. جـد $(f+g)(1)$. واستفد من ذلك في إيجاد $(f+g)^{-1}(3)$. جـد $(f+g)(0)$. واستفد من ذلك لإيجاد $(f+g)^{-1}(1)$.

$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 3 + 0 = 3$. بما أن $(f+g)(1) = 3$، فإن $(f+g)^{-1}(3) = 1$.

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 1 = 1$. وبما أن $(f+g)(0) = 1$، فإن $(f+g)^{-1}(1) = 0$.

c. يدّعي جاسم أن $(f+g)^{-1}(x) = f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$ وأن $(f+g)^{-1}(x) = f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$. استخدم **الجزء b** لشرح أنه لا يمكن أن يكون مصيبًا.

يعطي الجزء b مثالين معاكسين لهذه الخاصية. $(f+g)^{-1}(3) = 1$، ولكن $f^{-1}(3) + g^{-1}(3) = 4$. $(f+g)^{-1}(1) = 0$، ولكن $f^{-1}(1) + g^{-1}(1) = 2$.

d. خذ الدالتين $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = 2x - 1$. جـد $(f+g)^{-1}(x)$ و $f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$. فهل هما متماثلتان؟

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$، و $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. So $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = x$، إذًا $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = x$. ولكن، بما أن $(f+g)(x) = 4x$، فإن $(f+g)^{-1}(x) = \frac{1}{4}x$. ليستا متماثلتين.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

يمكن إيجاد المعكوس بعدة طرق: من خلال حل المعادلة، أو عكس التمثيل البياني من خلال $y = x$، ومن خلال تبادل قيم x و y في جدول. من المهم أن يعرف الطلاب ميزات كل طريقة لفهم **م.م.ر 1**.

من أهداف **م.م.ر 1** أن يستخدم الطلاب طرقًا مختلفة لحل مسائل تعتمد على المعلومات المعطاة. ناقش مع الفصل كيف أن معرفة طرق مختلفة تُساعد على التحقق من مجهودهم. يجب أن يعتاد الطلاب على العمل بطرق مختلفة لتحديد معكوس الدالة في **المثال 1** و**المثال 4** و**التمرين 4**.

4.3 دوال الجذر التربيعي والمتباينات

معايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6

المتطلبات الأساسية

- حل المعادلات والمتباينات الخطية
- حل المعادلات التربيعية
- تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.م.ر 4

تحدث عن المثلثات المختلفة التي يمكن بناءها لحديقة الزهور. اسأل الطلاب لماذا يجب في مواقف الحياة الواقعية تثبيت الضلع البالغ طوله 15 قدمًا.

ذكّر الطلاب بنظرية فيثاغورس لإيجاد b بدلالة ℓ.

4.3 دوال الجذر التربيعي والمتباينات

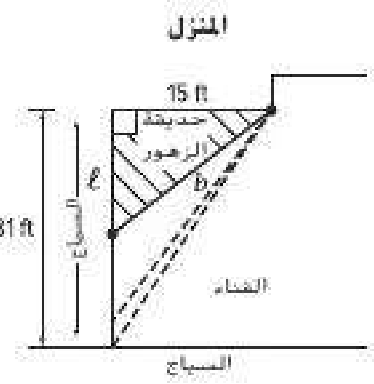
الأهداف

- تمثيل دوال الجذر التربيعي باستخدام إزاحات وانعكاسات دالة أساسية.
- إنشاء دوال جذر تربيعي لتمثيل حالة من الحياة اليومية.
- تحديد المنطقة المرتبطة بمتباينة جذرية معطاة ضمن سياق مطبّق.

إن **دالة الجذر التربيعي** هي دالةٌ تضم الجذر التربيعي لمتغير. والدالة الأساسية لدالة جذرٍ تربيعيٍ هي $f(x) = \sqrt{x}$

مثال 1 **أبعاد حديقة أزهارٍ مثلّثية**

الاستكشاف هب أنك تجهّز لزراعة حديقة أزهارٍ مثلثيةٍ في الفناء الخلفي لمنزلك كما هو موضح. يثبّت طول الضلع الممتد على طول المنزل عند 15 قدمًا. يمكنك اختيار الطول ℓ للساق الثانية الممتدة على طول السور. ويرمز إلى طول الوتر بـ b.



a. **استخدام نموذج** عبّر عن b بدلالة ℓ.

باستخدام نظرية فيثاغورس، يكون $b = \sqrt{\ell^2 + 225}$، $b^2 = \ell^2 + 15^2$ حيث b لا يمكن أن تكون سالبة.

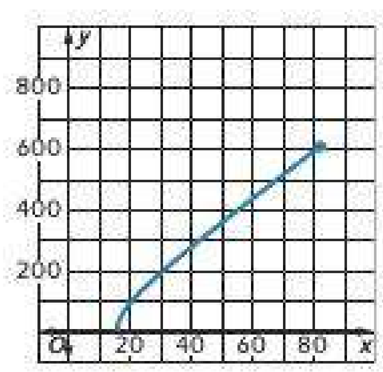
b. **التفكير بطريقة تجريدية** عبّر عن مساحة حديقة الأزهار المثلثية $A(b)$ بدلالة b. صِف عملية حلك.

$A(b) = \frac{15}{2}\sqrt{b^2 - 225}$؛ المساحة $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة× الارتفاع $= \frac{1}{2} \times 15 \times \ell = \frac{15}{2}\ell$. جِد حلّ $b = \sqrt{\ell^2 + 225}$ لإيجاد ℓ، و عوّض $\ell = \sqrt{b^2 - 225}$ في دالة المساحة.

c. **تفسير المسائل** ما هو مجال الدالة $A(b)$ في سياق هذه الحالة؟ اشرح الحدود.

قيمة b محدودة بخصائص الجذور التربيعية وبالقيود على ℓ، حيث $0 < \ell \leq 81$. ولذلك، فالمجال هو $15 < b \leq \sqrt{6786}$.

d. **استخدام نموذج** ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $A(b)$ مع تسمية جميع المحاور بصورةٍ صحيحة. ما هي مساحة أكبر حديقة زهورٍ يمكن زراعتها من هذا النوع.



يُحصَلُ على المساحة الكبرى الممكنة لحديقة الأزهار عند $b = \sqrt{6786}$. وهكذا، تساوي المساحة $A(b) = \frac{15}{2}\sqrt{6786 - 225}$ أو $607.5\ ft^2$.

معلومات أساسية رياضية

يعتمد هذا الدرس على المواد التي تعلمها الطلاب في يعرف الطلاب كيفية التمثيل البياني واستخدام الدوال الأساسية باستخدام الإزاحة. في هذا الدرس، سيبدؤون بالتفكير في دوال الجذر التربيعي وتعلم رسم وتمثيل المسائل المطبقة باستخدام تلك الدوال.

في هذا الدرس، سوف يتعرّف الطلاب على الدالة الأساسية لدوال الجذر التربيعي والإزاحات والانعكاسات وضغوط هذه الدالة. وسيفكر الطلاب في المعادلات والمتباينات التي تتضمن مثل هذه الدوال. سيتم ربط هذه الدوال بالسياقات المطبقة.

e. **المشاركة بدقّة** صف التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي عبر ملاحظة أي نقاط تقاطع لها إضافةً إلى كيفية تزايدها وما الذي سيحدث إذا كان المجال لا نهائيًا.

الإجابة النموذجية: للتمثيل البياني نقطة تقاطع مع المحور الأفقي x عند 15، وذلك بما أن 15 تجعل القيمة تحت إشارة الجذر تساوي 0. ليس هناك نقطة تقاطع مع المحور الرأسي y، وذلك بما أن وجود $x = 0$ يعطي قيمةً سالبةً تحت إشارة الجذر. يتزايد التمثيل البياني باطّرادٍ ضمن المجال، ويكون معدّل الزيادة سريعًا جدًا في البداية، ولكن إذا كان المجال لا نهائي، فيصبح معدل تغير الدالة ثابتًا تقريبًا.

إن **متباينة الجذر التربيعي** هي متباينة تضم جذورًا تربيعية. وهي تمثل بطريقة مشابهة للطريقة التي مثّلنا بها المتباينات الأخرى.

مثال 2 متباينات الجذر التربيعي

a. **التفكير بطريقة تجريدية** لتكن $f(x)$ الدالة الأساسية لدالة الجذر التربيعي. إذا $f(x)=\sqrt{x}$. إذا كانت $g(x)$ تمثل الدالة الجديدة بعد إجراء التحويلات التالية على $f(x)$، فما هي الدالة الجديدة؟

i. مزاحة يسارًا لمسافة وحدة واحدة

ii. معكوسة بالنسبة للمستقيم $x = -1$

iii. معكوسة بالنسبة للمحور الأفقي x

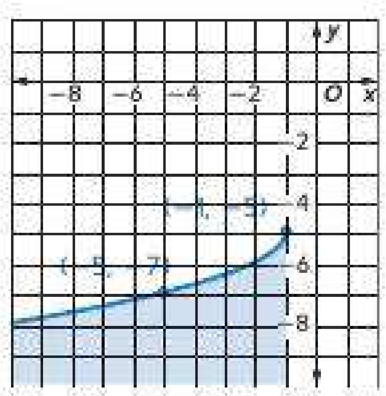
iv. مزاحة إلى الأسفل لمسافة 5 وحدات

$g(x) = -\sqrt{-(x+1)} - 5 = -\sqrt{-x-1} - 5$

b. **التفكير النقدي** يُطلب من علي وصف الهيئة التي ستظهر عليها الدالة $g(x) \le -\sqrt{-x-1} - 5$ عند تمثيلها بيانيًا. حيث يقول إن التمثيل البياني سيكون منحنى متواصلاً يقع في الربع الثالث وله قيمةٌ صغرى عند $(-1, -5)$. ويسعى هذا المنحنى إلى اللانهاية عندما تتناقص x إلى اللانهاية السالبة في المنطقة المظللة تحت المنحنى.
هل تتفق مع ذلك؟ اشرح.

لا، لا أتفق مع علي، حيث سيكون للمنحنى البياني قيمةٌ عظمى، لا صغرى، عند $(-1, -5)$ نتيجةً للانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x. ولذلك، فسوف يتناهى التمثيل البياني إلى اللانهاية السالبة مع تناقص x.

c. **تفسير المسائل** ارسم تمثيلاً بيانيًا للمتباينة في **الجزء b**. وما الفرق في التمثيل البياني لمعكوس المنحنى البياني للمتباينة في **الجزء b**؟



بدلاً من وجود حدٍّ أيمن عند $x = -1$، فإن للمعكوس حدٌّ علويٌ عند $y = -1$. وبدلاً من التظليل أسفل المنحنى البياني، يظلّل التمثيل البياني للمعكوس إلى يسار المنحنى البياني، والتمثيلان البيانيان متماثلان حول المستقيم $y = x$.

أخطاء شائعة

- قد يواجه الطلاب صعوبة باستخدام اللغة والتمكن من ترجمة عبارات شائعة إلى تعبيرات رياضية.
- غالبًا يقع الطلاب في خطأ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. وضح لهم أمثلة رقمية محددة للتأكيد على هذا الخطأ. على سبيل المثال، $\sqrt{9+4} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4}$.

الأسئلة الداعمة

- كيف تحصل على القيم الصغرى والكبرى للمدى في **الجزء c**؟ **بما أن b ضمن الجذر، $b^2 - 225 \ge 0$. القيم التي تحقق هذه الشروط هي عندما يكون $b \le -15$ أو $b \ge 15$. مع ذلك، فالشرط الأول حُذف بسبب b هو الطول ولا يمكن أن يكون بالسلب. بما أن b يعتبر دالة أيضًا لـ ℓ و $b = \sqrt{\ell^2 + 225}$، وهناك قيْد أيضًا متمثل في طول ℓ يقع بين 0 و 81 وفقًا للرسم التخطيطي. إذًا، فالقيمة العظمى b التي يمكن الحصول عليها هي $b = \sqrt{81^2 + 225} = \sqrt{6786}$.**

مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر 2

ناقش التمثيل البياني للدوال والمتباينات التربيعية التي بها دوال تربيعية. ذكرهم بأن الخطوات الرئيسية تتضمن: (1) تمثيل الدالة الحدودية بيانيًا (والتي قد تشمل إزاحة وانعكاس ونتائج مضغوطة)؛ و (2) تقرير ما إذا كان سيتم تضمين المستقيم الحدودي في المنطقة أم لا؛ و (3) تقرير ما إذا كان سيتم التظليل فوق المستقيم الحدودي أم أسفله.

الأسئلة الداعمة

- ماذا يجب تبديله مع x في قاعدة الدالة لإزاحة التمثيل البياني لليسار بمقدار وحدة واحدة؟ **$x + 1$**
- ماذا يجب تبديله مع $x + 1$ لتوضيح التمثيل البياني في المستقيم $x = -1$؟ **$-(x + 1)$**
- ماذا تفعل لتوضيح التمثيل البياني في المحور x؟ **اضرب الدالة الكلية في -1.**
- كيف يمكنك بعد ذلك إزاحة التمثيل البياني 5 وحدات لأسفل؟ **اطرح 5.**

نصيحة التمثيل البياني

عند تمثيل إزاحات وانعكاسات الدالة بيانيًا، غالبًا ما يواجه الطلاب صعوبة تطبيق الخطوات الناتجة بالتمثيل البياني الحقيقي لـ $y = a\sqrt{bx + c} + d$ للقيم المقدمة لـ a و b و c و d.

للمساعدة في تجنب ارتباك كهذا، ذكّر الطلاب بالحركات الثابتة من فرع الهندسة. اجعلهم يتعقبوا تحركات النقطة الأدنى والنقطة القصوى فقط والتي تظهر بتطبيق نتائج الإزاحة والانعكاس.

ذكّر الطلاب بالتالي:

يبدو التمثيل البياني تمامًا مثل الدالة الأساسية إذا كانت a و b موجبتين.

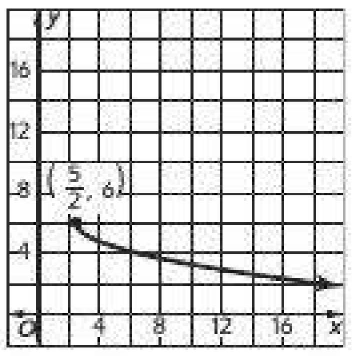
إذا كانت a سالبة و b موجبة، فسيبدو الشكل العام مثل ناتج انعكاس الدالة الأساسية على المحور x.

إذا كانت a موجبة و b سالبة، فسيبدو الشكل العام مثل ناتج انعكاس الدالة الأساسية على المحور y.

إذا كانت a سالبة و b سالبة، فسيبدو الشكل العام مثل ناتج انعكاس الدالة الأساسية على المحور y و المحور x.

تدريب

1. خذ الدالة التالية $f(x) = -\sqrt{3 - x} + \frac{13}{2}$ والدالة $g(x)$ والمبيّن تمثيلها البياني في الجهة اليمنى.



a. **تفسير المسائل** حدّد أيّ الدالتين لها القيمة العظمى الأكبر. واشرح استنتاجك.

للدالة $f(x)$ القيمة العظمى الأكبر لأنّ قيمتها العظمى $\frac{13}{2}$ أكبر من 6 التي تساوي القيمة العظمى لـ $g(x)$.

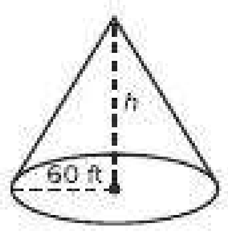
b. **تفسير المسائل** قارن مديي الدالتين.

إن مجال $f(x)$ هو $x \leq 3$ نظرًا إلى أن أي قيمٍ أكبر من 3 تنتج قيمةً سالبةً تحت رمز الجذر. ومجال $g(x)$ هو $x \geq \frac{5}{2}$.

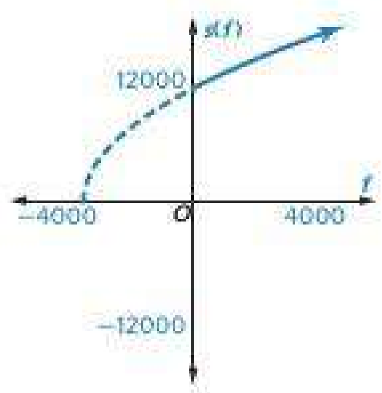
c. **تفسير المسائل** قارن معدلي تغيّر الدالتين.

$f(x)$ تتزايد من اللانهاية الموجبة إلى $x = 3$، حيث يتباطأ معدل التزايد مع تناقص x. $g(x)$ تتناقص من $\frac{5}{2}$ إلى اللانهاية الموجبة، حيث يتناقص المعدّل مع تزايد x.

2. للصومعة شكل مخروطٍ دوراني قائمٍ منصوبٍ على الأرض، كما هو موضح. وتساوي كلفة طلاء طبقة حمايةٍ صديقة للبيئة ومضادةٍ للأشعة فوق البنفسجية على سطح الصومعة لا على الأرض AED 1.25 للقدم المربعة الواحدة. فعلى فرض أن نصف القطر يساوي $r = 60$ قدم، يمكن وصف السطح الذي يجري طلاؤه عن طريق دالة الارتفاع التالية: h: $S(h) = 60\pi\sqrt{3600 + h^2}$. لتكن $f = h^2$ في هذا القانون لتعريف دالةٍ جديدةٍ $S(f) = 60\pi\sqrt{3600 + f}$.



a. **تفسير المسائل** مثل بيانيًا $S(f)$ وحدّد مجالها في هذا السياق.



الدالة معرفة عند أي قيمة $f \geq -3600$؛ ولكن المجال في هذا السياق هو $f > 0$، لأن f مشتقّة من خلال تربيع الارتفاع، والذي يجب أن يكون موجبًا.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** شكّل دالةً لـ f تصف كلفة تطبيق N طبقات من هذا الطلاء على سطح الصومعة. واشرح استنتاجك.

اضرب المتباينات التالية: مساحة سطح الصومعة في عدد طبقات الطلاء في كلفة القدم المربعة.

ينتج ذلك الدالة التالية: $C(f) = 1.25 \times N \times 60\pi\sqrt{3600 + f} = 75N\pi\sqrt{3600 + f}$

التدريس المتمايز

يعتبر ترميز تحويل التمثيل البياني المعروف لعمل تمثيل آخر من العناصر المهمة لأي تمثيل بياني. أجرِ تجربة جماعية بحيث يتم إعطاء كل مجموعة العديد من الدوال التي تتضمن إزاحات وانعكاسات وتغييرًا للأبعاد.

اطلب من المجموعات تمثيل الدوال الخاصة بها بيانيًا وتقديم تفسير لفظي لما يفعله كل معامل في الدالة $y = a\sqrt{bx + c} + d$ بدلالة التمثيل البياني للدالة الأساسية. اطلب من الطلاب تبديل المجموعات لمقارنة تفسيراتهم ومقابلتها. حال الانتهاء من ذلك، اختر متطوعين لمشاركة الملاحظات ومناقشتها مع الفصل بأكمله.

تمرين

التمرين 1 يتطلب من الطلاب مقارنة خواص دالتي الجذر التربيعي المعبر عنهما بطرق مختلفة.

في **التمرين 2**، يجب أن يفهم الطلاب الموقف لإيجاد التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي وتحديد المجال الخاص بها في سياق الموقف.

التمرين 3 يقدم للطلاب التمثيل البياني لمتباينة الجذر التربيعي. ينبغي على الطلاب تمثيل معكوسها بيانيًا. يجب أيضًا أن يقدموا التمثيل الرمزي للمعكوس والقيود على المجال.

في **التمرين 4**، يختبر الطلاب دالة تمثل العلاقة بين السرعة والارتفاع وتفسير سمات التمثيل البياني لتحليل الموقف.

تناول المعايير

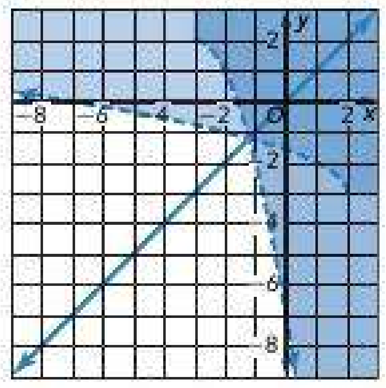
التمرين	م. م. ر
1	1
2	1, 2
3	4
4	3, 6

c. **التفكير بطريقة كمية** حدّد مدى التكلفة الناجمة عن طبقتين أو ثلاثة من هذا الطلاء على السطح الكلي للصومعة إذا كان ارتفاعها يمكن أن يتراوح بين 100 ft و 150 ft. عبّر عن إجابتك في صورة متباينة بحيث تقرّب النقاط الطرفية إلى أقرب درهم إماراتي. وشرح استنتاجك.

AED 54,955 $\leq C(f) \leq$ AED 114,196؛ تقع الكلفة الصغرى عندما $h = 100$ وعند تطبيق طبقتين من الطلاء؛ وتساوي هذه الكلفة $C(f) = 1.25 \times 2 \times 60\pi\sqrt{3{,}600 + 100^2} = 150\pi\sqrt{13{,}600} \approx$ AED 54,955.

وبصورةٍ مشابهة، تقع الكلفة العظمى عندما $h = 150$ قدمًا وعند تطبيق 3 طبقات من الطلاء؛ وتساوي هذه الكلفة $C(f) = 1.25 \times 3 \times 60\pi\sqrt{3{,}600 + 150^2} = 225\pi\sqrt{26{,}100} \approx$ AED 114,196.

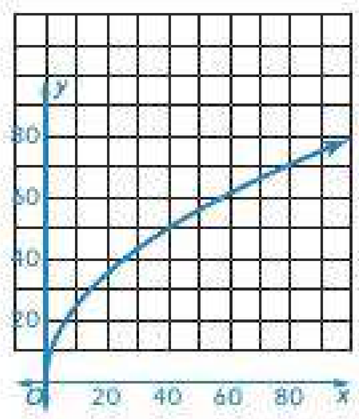
إذًا فإن مدى التكاليف الممكنة هو AED 54,955 $\leq C(f) \leq$ AED 114,196.



3. **استخدام نموذج** تشكّل رباب التمثيل البياني التالي للمتباينة $f(x) > \sqrt{-x+2} - 3$. مثّل بيانيًا معكوس هذه المتباينة على المستوى الإحداثي نفسه إضافةً إلى مستقيم التناظر. أعطِ المتباينة التي تعرّف التمثيل البياني للمعكوس. وهل يجب تطبيق أيّة قيودٍ على مجال المعكوس؟

معكوس المتباينة هو $f^{-1}(x) > -(x+3)^2 + 2$. ومعدّل المعكوس مقيّدٌ على $x > -3$.

4. يمكن تمثيل سرعة جسمٍ أُسقط على الأرض قبل أن يلامسها باستخدام المعادلة $v = \sqrt{2gh}$ حيث v السرعة بالأقدام في الثانية، و g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي ft/sec^2 و h الارتفاع البدائي الذي أُسقط منه الجسم، ويقدّر بالأقدام.



a. **التفكير النقدي** يقول لؤي إنه لمضاعفة السرعة النهائية للجسم الساقط، فيتعيّن أن يضاعف ارتفاع إسقاط الجسم. فهل توافق على ذلك؟ ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة واستخدم رسمك لشرح إجابتك.

لا؛ لا تؤدي مضاعفة الارتفاع الإبتدائي إلى مضاعفة السرعة النهائية. من التمثيل البياني، السرعة عند الإسقاط من ارتفاع 100 ft تساوي 80 ft/sec. وهذه السرعة ليست ضعف السرعة الناتجة عن السقوط من ارتفاع 50 ft بل إنها تساوي بدلاً عن ذلك ضعف السرعة عند السقوط من ارتفاع 25 ft.

b. **المشاركة بدقّة** ناقش خواص التمثيل البياني، بما في ذلك نقاط التقاطع مع المحورين الإحداثيين ومعدّل التزايد والسلوك النهائي. كيف يمكن أن تساعدك هذه المعلومات في الحكم بصحة تخمين لؤي؟

يبدأ التمثيل البياني عند نقطة الأصل، ثم يتزايد بسرعةٍ بالاتجاه الموجب، ويواصل الارتفاع بالاتجاه الموجب، ولكنّ معدل الزيادة يتناقص بصورةٍ كبيرة. وسيقارب خطًا تقاربيًا أفقيًا مع تزايد x .

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في الممارسة م.م.ر 1، يُطلب من الطلاب فهم طبيعة المسألة، وتحديد طريقة الحل، ثم تنفيذ تلك الطريقة. في **التمرين 1**، يجب أن يحدد الطلاب طريقة علمية لمقارنة دالتي جذر تربيعي، ثم تطبيق هذه الطريقة لتحديد أيهما تتسم بالقيمة العظمى الأكبر. في **التمرين 2a**، يجب أن يحدد الطلاب أفضل طريقة لتمثيل دالة بيانيًا تتضمن عدد غير نسبي، ثم تحليلها في سياق الموقف لتحديد المجال الخاص بها.

في الممارسة م.م.ر 2، يُطلب من الطلاب أن يكونوا قادرين على التفكير بطريقة تجريدية وكميّة. في **المثال 1b**، يجب أن يصنع الطلاب دالة تمثل مساحة حديقة الأزهار. في **المثال 2a**، يجب أن يستخلص الطلاب تعبيرًا جبريًا لدالة جذرية من الوصف اللفظي المقدم لهم.

4.4 الجذور النونية

معايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- التعابير التي تتضمن جذورًا تربيعية
- استخدام خواص الأسس

مثال 1

نصيحة للتدريس

م. م. ر 6

يُمثل الجزآن c و d فرصًا لمناقشة أهمية ذكر القاعدة أو الإجراء بدقة في الرياضيات. فإجابة كلا الجزأين تُمثل نفس المعلومة بطرق مختلفة. ناقش قيمة القدرة على كتابة القاعدة بصيغة معادلة وكيف يؤثر ذلك على إمكانية تذكر القاعدة.

الأسئلة الداعمة

- ما معكوس رفع حد إلى الأس النوني؟ **الإجابة النموذجية: بحذف الجذر *النوني* للنتيجة نحصل على الحد الأصلي.**
- معرفة أن حذف الجذر النوني لعدد ما هو العملية المعكوسة لرفع العدد للأس النوني. كيف يمكن تقدير $\sqrt[3]{26}$؟ **نعرف أن $27 = 3^3$، و $64 = 4^3$، إذًا $\sqrt[3]{26}$ تكون بين 3 و 4، وأقرب إلى 3.**

4.4 الجذور النونية

الأهداف

- تحويل التعابير الجذرية لأبسط صورة.

إن معكوس رفع عددٍ للقوة النونية هو إيجاد الجذر النوني لعدد.

مثال 1 **تحديد الجذور**

الاستكشاف **استخدم التعبيرين $\sqrt[5]{x^5}$ و $\sqrt[4]{x^4}$.**

a. **التفكير بطريقة كمية** جد قيمة $\sqrt[5]{x^5}$ عندما $x = 3$ وعندما $x = -3$. هل $\sqrt[5]{x^5} = x$ من أجل قيمتي x؟ اشرح.

نعم؛ عندما $3 = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{(3)^5}$ ، $x = 3$؛ عندما $-3 = \sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5}$، $x = -3$. إذًا، $\sqrt[5]{x^5} = x$ لكل من القيمتين الموجبة والسالبة.

b. **التفكير بطريقة كمية** جد قيمة $\sqrt[4]{x^4}$ عندما $x = 3$ وعندما $x = -3$. هل $\sqrt[4]{x^4} = x$ من أجل قيمتي x؟ اشرح.

لا؛ عندما $3 = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{(3)^4}$، $x = 3$؛ عندما $3 = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{(-3)^4}$، $x = -3$. إذًا، $\sqrt[4]{x^4} = x$ من أجل القيمة الموجبة لـ x، ولكن من أجل القيمة السالبة لـ x، فالنتيجة هي $-x$.

c. **المشاركة بدقة** ما الذي يمكنك استنتاجه حول جذر تعبيرٍ ذي أسٍّ فردي؟ وما الذي يمكنك استنتاجه حول جذر تعبيرٍ ذي أسٍ زوجي؟

إذا كان الدليل والأس فرديين، فالجذر هو x. وإذا كان الأس والدليل زوجيين، فالجذر هو x عندما x موجب، ولكن الجذر هو $-x$ عندما x سالب.

d. **التخمين** إذا لم تكن تعلم إن كان x موجبًا أو سالبًا، فما الطريقة التي يمكنك اتباعها لتحويل $\sqrt[n]{x^n}$ لأبسط صورة؟

إذا كان n زوجيًا، إذًا $|x| = \sqrt[n]{x^n}$ وإذا كان n فرديًا، إذًا $\sqrt[n]{x^n} = x$.

e. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح السبب في أن استخدام القيمة المطلقة ضروريّ لتحويل $\sqrt{x^2}$ لأبسط صورة، ولكنه ليس ضروريًا بالنسبة لـ $\sqrt{x^4}$.

الإجابة النموذجية: من أجل $x = \sqrt{x^2}$، الأس والدليل عددان زوجيان، ولكن النتيجة هي قوةٌ فردية. ولجعل المعادلة صحيحةً من أجل جميع الأعداد الحقيقية، استخدم القيمة المطلقة لضمان أن النتيجة غير سالبة؛ $\sqrt{x^2} = |x|$. من أجل $\sqrt{x^4} = x^2$، فإن النتيجة قوةٌ زوجية، وبالتالي فإنها ستكون غير سالبةٍ على الدوام. ولذلك، لا حاجة للقيمة المطلقة.

f. **التفكير بطريقة كمية** تعلم من السابق أن $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. استخدم هذه المعلومة إضافةً إلى استيعابك لقواعد رفع قوةٍ إلى قوةٍ لإثبات أن $\sqrt[n]{x^n} = x$ عندما $x \geq 0$.

الإجابة النموذجية: $\sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{n}}$. عند رفع قوةٍ إلى قوة، اضرب الأسس إذًا $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{n \cdot \frac{1}{n}} = x$، ولذلك $\sqrt[n]{x^n} = x$.

معلومات أساسية رياضية

يجب أن يتعرف الطلاب على الجذور التربيعية وأن عملية تربيع العدد وعملية إيجاد الجذر التربيعي هما عمليتان معكوستان. وهذا المفهوم ممتد أيضًا إلى الأعداد بالأسس النونية وحذف الجذور النونية. بالنسبة لأي عدد حقيقي a و b، وأي عدد صحيح موجب n، إذا كان $a^n = b$، إذًا a يعتبر جذرًا نونيًا لـ b.

ومن الاعتبارات المهمة لحذف الجذور النونية هي رمز المتغير. بوجهٍ عام، إذا كان n عددًا صحيحًا أكبر من أو يساوي 2، و a عددًا حقيقيًا، فإن $\sqrt[n]{a^n} = a$ إذا كان n عدد فردي و $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ إذا كان n زوجيًا. عندما تجد جذرًا زوجيًا لأس زوجي وتكون النتيجة هي أس فردي، يجب حينها استخدام القيمة المطلقة للنتيجة لضمان عدم وجود إجابة سالبة.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

راجع خواص الأس، بما في ذلك أس ناتج الضرب وأس الأس. اطلب من الطلاب توضيح كيف أن هذه الخواص يمكن استخدامها لمساعدتهم على إيجاد الجذور النونية للتعبيرات الجبرية. يجب على الطلاب تحديد طريقة لإعادة كتابة الأس بأسّ يماثل دليل الجذر.

عندما يبدأ الطلاب بتطوير مهارة حذف الجذور النونية، اطلب منهم التحقق من إجاباتهم من خلال رفع الإجابة إلى أس الفهرس. هذا يعزز عكس العلاقة بين الأسس والجذور.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكن استخدام أس خاصية الأس لإعادة كتابة x^{12} مرفوعًا للأس 2 و 4 و 6؟ $x^{12} = (x^6)^2;\ x^{12} = (x^3)^4;\ x^{12} = (x^2)^6$
- هل يمكن حذف جذر فردي من عدد سالب؟ اشرح. نعم. **فالجذر الفردي من العدد السلبي هو جذر سلبي. عندما ترفع عددًا سلبيًا لأس فردي، فالنتيجة تكون بالسالب.**

تعريف الجذور النونية: من أجل أي عددين حقيقيين a و b، وأي عددٍ صحيحٍ موجب n، إذا كان $a^n = b$، فإن a جذرٌ نونيّ b.

الجذور النونية الحقيقية

افترض أن n عددٌ صحيحٌ أكبر من 1، و a عددٌ حقيقي.

a	n عدد زوجي.	n عدد فردي.
$a > 0$	جذرٌ وحيدٌ موجبٌ وجذرٌ وحيدٌ حقيقيٌ وسالب. $\pm\sqrt[n]{a}$؛ الجذر الموجب هو الجذر الرئيسي.	جذر حقيقي وحيدٌ موجب ولا جذور حقيقية سالبة.
$a < 0$	لا توجد جذور حقيقية	لا جذور حقيقية موجبة وجذر حقيقي سالب واحد. $\sqrt[n]{a}$؛
$a = 0$	جذر حقيقي واحد.	جذر حقيقي واحد $\sqrt[n]{0} = 0$.

مثال 2 تحديد الجذور $\sqrt[4]{81x^4}$ النونية

استخدام البنية **أعد كتابة كل تعبير باستخدام الطريقة المشار إليها. ثم حوّل التعبير لأبسط صورة.**

a. $\sqrt[3]{-125x^{12}y^6}$؛ التحليل إلى العوامل الأولية

$\sqrt[4]{81x^4} = \sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = 3|x|$

b. $\sqrt[3]{-125x^{12}y^6}$؛ خاصية قوة جداء وخاصية قوة قوة

$\sqrt[3]{-125x^{12}y^6} = \sqrt[3]{(-5x^4y^2)^3} = -5x^4y^2$

c. $\sqrt[5]{(x^5+32)^{10}}$؛ خاصية قوة القوة

$\sqrt[5]{(x^5+32)^{10}} = \sqrt[5]{[(x^5+32)^2]^5} = (x^5+32)^2$

d. $\sqrt{(x^4-14x^2+49)}$؛ حلل إلى العوامل

$\sqrt{(x^4-14x^2+49)} = \sqrt{(x^2-7)^2} = x^2-7$

e. بناء الفرضيات ما قيم x التي تجعل العلاقة $\sqrt[6]{64x^5}$ غير معرّفة في مجموعة الأعداد الحقيقية؟ اشرح استنتاجك.

عندما يكون x عددًا سالبًا، فإن x^5 عددٌ سالبٌ أيضًا؛ لأن الدليل عددٌ زوجي، والجذر السادس لعدد سالبٍ لا يمكن أن يكون عددًا حقيقيًا.

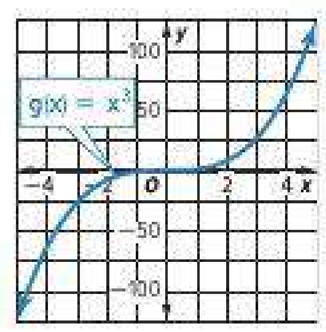
مثال 3 التمثيل البياني للجذور النونية

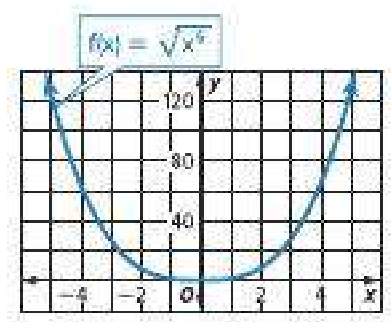
التفكير النقدي **يقول سليم إن الدالة $f(x) = \sqrt{x^6}$ هي نفسها الدالة $g(x) = x^3$.**

a. هل سليم على صواب؟ حوّل f(x) لأبسط صورة لتبرهن نتيجتك.

سليم على صواب. $f(x) = \sqrt{x^6} = \sqrt{x^3x^3} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2} = |a| = |x^3|$. هذا لا يماثل $g(x)$.

b. مثّل g(x) و f(x) بيانيًا للتحقق من إجابتك في **الجزء a**.





التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في م.م.ر 1 **(فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. يتحقق الطلاب من إجابات المسائل مستخدمين طريقة مختلفة، ويستمرون بسؤال أنفسهم، "هل هذا يُقدّم معنى؟" في تحديد الجذور النونية وإعادة كتابة تعابير الجذور النونية، فيتسنى للطلاب استكشاف نتيجة لا تمثل كل الحلول الممكنة. فإعادة كتابة التعابير بالرياضيات أمر مهم، والتساؤل، "هل ستُقدّم معنى عند إعادة كتابتها؟" مهم أيضًا بنفس الدرجة.

مثال 3

نصيحة للتدريس م. م. ر 6

ذكّر الطلاب بأن عملية الجذر التربيعي ليست المعكوس البسيط لعملية التربيع. إذا كانت القيمة في السؤال بالسالب، فلن تكون النتيجة القيمة الأصلية، ولكن عكسها. في **الجزء b**، شجّع الطلاب على التفكير في العلاقة بين التمثيلين البيانيين. فثمة تشابهات بين الاثنين أكثر من الاختلافات.

الأسئلة الداعمة

- ما العلاقة بين التمثيلين البيانيين لقيم x الموجبة؟ لماذا يكون لهذا معنى؟ **بالنسبة لقيم x الموجبة، فالتمثيلان متطابقان. وهذا يوضح معنى منطقيًا لأن القيمة المطلقة للقيمة الموجبة هي نفسها القيمة الأصلية.**
- ما العلاقة بين التمثيلين البيانيين لقيم x السالبة؟ لماذا يكون لهذا معنى منطقي؟ **بالنسبة لقيم x السالبة، فقد انعكس التمثيل البياني في المحور x. هذا يبدو منطقيًا لأن القيمة المطلقة للقيمة السالبة هي معكوسها، إذًا فالقيم السالبة في $g(x)$ سوف تُحدد بناءً على نظائرها الموجبة.**

تدريب

1. **الحساب بدقة** لديك مكعبٌ حجمه $512x^3$ in^3. جـد قياس كل ضلعٍ من أضلاع المكعب. واشرح عملية الحل التي اتبعتها.
$8x$؛ إن حجم مكعبٍ طول ضلعه s يساوي s^3. ولإيجاد طول كل ضلع، خذ الجر التكعيبي لـ $512x^3$: $\sqrt[3]{512x^3} = 8x$.

2. **استخدام البنية** حول العلاقة التالية لأبسط صورة: $(\sqrt[4]{16})^2$. واشرح كيف يمكنك استخدام خواص التعابير الجذرية لإعادة كتابة التعبير من أجل تسهيل الحسابات.
أعد كتابة العدد 16 في صورة قوةٍ أسّها 4؛ ثم خذ الجذر الرابع وحوّل لأبسط صورة: $(\sqrt[4]{16})^2 = (\sqrt[4]{2^4})^2 = (2)^2 = 4$.

3. **التفكير بطريقة تجريدية** حوّل التعبير التالي لأبسط صورة: $\sqrt[b]{m^{3b}}$، حيث $b > 0$. واشرح استنتاجك.
هناك أربع حالاتٍ علينا وضعها في الحسبان. إذا كان $m > 0$ و b عددًا زوجيًا، إذًا $\sqrt[b]{m^{3b}} = m^3$. إذا كان $m < 0$ و b عددًا زوجيًا، إذًا $\sqrt[b]{m^{3b}} = -m^3$. إذا كان $m > 0$ و b عددًا فرديًا، إذًا $\sqrt[b]{m^{3b}} = m^3$. إذا كان $m < 0$ و b عددًا فرديًا، إذًا $\sqrt[b]{m^{3b}} = m^3$.

4. **المشاركة بدقة** هل $\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$ من أجل جميع قيم x؟ اشرح استنتاجك.
لا؛ عند تحليل $x^2 - 9$ إلى العوامل، فالنتيجة هي $(x + 3)(x - 3)$. العوامل ليست متطابقة، ولذلك فالجذر التربيعي لا يساوي $x - 3$ من أجل جميع قيم x. المعادلة صحيحةٌ فقط من أجل $x = 3$.

5. **تفسير المسائل** ليست هناك جذورٌ نونيةٌ لعددٍ w فما الذي تستنتجه حول الدليل والعدد w؟
الدليل n موجب و w سالب.

6. **التفكير بطريقة تجريدية** حدّد قيم x التي يكون من أجلها $\sqrt{x^2} \neq x$. اشرح إجابتك.
$x < 0$. إذا كان $x < 0$، إذًا $\sqrt{x^2} = -x$.

7. يمكن إيجاد حجم كرة V باستخدام القانون $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
   a. **الحساب بدقة** استخدم القانون المعطى أعلاه لحساب الحجم لتحديد قانون حساب نصف قطر كرة بدلالة الحجم. واكتب الحل هنا.
   $v = \frac{4}{3}\pi r^3, \frac{3}{4\pi}v = r^3, r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$
   b. **الحساب بدقة** كم يساوي نصف قطر كرةٍ حجمها $288\ \pi\ in^3$؟
   6 in.
   c. **الحساب بدقة** صف كيف أن تناقص حجم الكرة بمعامل يساوي 8 يغيّر نصف قطرها. وما نصف القطر الجديد؟ اشرح.
   3 in؛ ينقص نصف القطر بمعاملٍ يساوي $\sqrt[3]{8}$ أو 2: $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 288\pi}{4\pi \cdot 8}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

أخطاء شائعة

يفترض العديد من الطلاب أن $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$. هذه عبارة خاطئة فيما عدا إذا كان $x = 2$. ثمة طريقتان لتوضيح أن هذه العبارة خاطئة لكل قيم x.

1. استبدل $x = 3$ و $x = 2$ في كلا الطرفين. عند إتمام الاستبدال وإيجاد قيمته، فالناتج يكون خطأً لـ $x = 3$ وصحيحًا لـ $x = 2$. بما أن العبارة خطأ لكل قيم x، فإنها عبارة غير صحيحة.
2. إذا كانت $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ صحيحة، إذًا $(x - 2)^2$ يجب أن يساوي $x^2 - 4$. مع ذلك، $(x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2) = x^2 - 4x + 4$. إذًا، فالعبارة خاطئة.

8. يحسب معدّل الاستهلاك من خلال القانون التالي: $r = 1 - \sqrt[n]{\frac{T}{P}}$، حيث r هو معدّل الاستهلاك و n هو عمر العنصر بالسنوات، و T هو سعر إعادة البيع بالدرهم الإماراتي، و P هو السعر الأصلي بالدرهم الإماراتي.

a. **الحساب بدقّة** جد معدّل الاستهلاك -مقربًا لأقرب جزء من مئة- لسيارة اشتريت في الأصل بسعر AED 52,425 واستهلكت لمدة 8 سنوات لتصبح قيمتها AED 9856. صف عملية الحل.

18.85%؛ $r = 1 - \sqrt[n]{\frac{T}{P}}$، $r = 1 - \sqrt[8]{\frac{9856}{52,425}}$، $r \approx 0.1885$ أو $\approx 18.85\%$. يساوي معدل استهلاك السيارة تقريبًا 18.85%.

b. **التفكير بطريقة كميّة** حلّ لإيجاد P بدلالة T و n و r.

$r = 1 - \sqrt[n]{\frac{T}{P}}$، $r - 1 = \sqrt[n]{\frac{T}{P}}$، $(r-1)^n = \frac{T}{P}$، $P = \frac{T}{(r-1)^n}$

9. يمثل القانون $d = \sqrt[3]{6t^2}$ المسافة d التي يبعد بها كوكبٌ عن الشمس مقدرة بملايين الأميال، وذلك بدلالة t، وهو عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. يستغرق كوكب المشتري 4,332 يومًا أرضيًا ليكمل دورة واحدة.

a. **الحساب بدقّة** كم مليون ميلٍ يبعد كوكب المشتري عن الشمس؟ قرّب إلى أقرب مليون. وصف عملية الحلّ التي اتبعتها.

483 مليون ميل؛ $d = \sqrt[3]{6(4332)^2}$، $d \approx 482.9$

b. **الحساب بدقّة** حلّ لإيجاد t بدلالة d. وحدّد عدد الأيام الأرضية التي سيستغرقها كوكبٌ ليدور حول الشمس دورةً واحدةً، علمًا أنه بعده عن الشمس يساوي ضعف بعد كوكب المشتري عن الشمس. وقارن النتيجة مع الزمن الذي يستغرقه المشتري ليدور حول الشمس.

$d = \sqrt[3]{6t^2}$، $d^3 = 6t^2$، $\frac{d^3}{6} = t^2$، $t = \sqrt{\frac{d^3}{6}}$؛ من أجل كوكبٍ يبعد ضعف مسافة المشتري عن الشمس، عوّض العدد 966 (مليون ميل) بدلاً من d. والنتيجة هي 12,257 يومًا للدوران حول الشمس، ويساوي ذلك 2.83 ضعف الزمن المستغرق لدوران المشتري حول الشمس.

10. **التفكير بطريقة تجريدية** شكّل مثالاً ترفع فيه ثابتًا للقوة n ومن ثم تأخذ جذره النوني. ثم استخدم قانون الأسس لتبيّن أن العملية تبديلية.

الإجابة النموذجية: $\sqrt[3]{(-8)^3} = -$ إذا كنت توجد أولاً $(-8)^3$ فستحصل على -512، والجذر الثالث لـ -512 هو -8. وإذا كنت توجد أولاً الجذر الثالث لـ -8 فستحصل على -2. $(-2)^3 = -8$. تبدو العملية أنها تبديلية. وباستخدام قوانين الأسس، فإن عملية رفع x إلى القوة النونية n وأخذ الجذر النوني للناتج تكتب بالصورة $(x^n)^{\frac{1}{n}}$. وإن عملية أخذ الجذر النوني لـ x أولاً ومن ثم رفع الناتج إلى القوة النونية n تكتب بالصورة: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$. يُبسّطُ كلّ تعبيرٍ إلى x بشرط أن يكون n عددًا فرديًا أو إذا كان $x \geq 0$. وتكون العملية تبديليةً إذا كان n عددًا فرديًا أو إذا كان $x \geq 0$.

11. **استخدام البنية** أيٌّ من الدوال التالية متكافئة؟ علّل إجابتك.

$f(x) = \sqrt[3]{x^9}$ $\quad g(x) = \sqrt{x^6}$ $\quad r(x) = (\sqrt[3]{x})^9$ $\quad s(x) = (\sqrt{x})^6$

$f(x)$ و $r(x)$ متكافئتان، وهما يبسّطان إلى x^3. $g(x)$ مختلفٌ ويبسّط إلى $|x^3|$. $s(x)$ يماثل تقريبًا x^3، ولكن الدالة غير معرفةٍ من أجل القيم السالبة لـ x.

معلومات أساسية رياضية

معظم الطلاب الماهرين بالجبر 1 يتذكرون المربعات بشكل جيد، غالبًا حتى 15 أو أكثر. وهذا يساعد من خلال التقديرات السريعة للمسائل مثل الجذر التربيعي للعدد 87، أو التحقق السريع عن منطقية الإجابة المحتسبة. يجب تشجيع الطلاب على تذكر المزيد من الأسس عند البدء في العمل على الجذور النونية لنفس الأسباب.

يجب أن يعرف الطلاب أسس 2 حتى 2^8 وأسس 3 حتى 3^6 وأسس 4 حتى 4^4 وأسس 5 حتى 5^4 وأسس 6 حتى 6^3.

تمرين

في **التمرينات من 1 إلى 9 و 11**، يُطلب من الطلاب التفكير في طرق متعددة لكتابة الدوال التي تتضمن جذورًا نونية وأسسًا صحيحة.

في **التمرين 10**، يُطلب من الطلاب إثبات أن العملية التي يقومون باستكشافها هي عملية تبادلية. فهم يستخدمون خواص الأسس لتحويل التعبير الأسي لتوضيح البرهان.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1	6
2	7
3	2
4	6
5	1
6	2
9–7	6
10	2
11	7

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- تبسيط الجذور النونية للتعابير العددية والجبرية
- استخدام قواعد ناتج الضرب وناتج القسمة للأسس

مثال 1

م. م. ر 6

نصيحة للتدريس

يساعد هذا المثال الطلاب على استكشاف خواص التعابير الجذرية من خلال تطبيقها على مخطّط فني. فهم قادرون على حساب مساحة المستطيل وإيجاد الأطوال التناسبية. يجب أيضًا على الطلاب إنطاق مقام التعبير.

بالنسبة **للجزء c**. تأكد من فهم الطلاب أنه من أجل إنطاق مقام له جذور أكبر من 2. فسيحتاجون للضرب في جذر يجعل المقام عددًا نسبيًا.

الأسئلة الداعمة

- ما النسب التي يجب أن تتساوى عندما يتشابه مستطيلان؟ **نسبة الطول: يجب أن يكون العرض هو نفسه بالمستطيلين.**
- لماذا لا يؤدي ناتج ضرب $6\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}$ لحذف الجذر من المقام؟ **جذر ناتج الضرب هو 4^2، وهو ليس بمكعب كامل.**

4.5 العمليات الحسابية على التعابير الجذرية

الأهداف

- تحويل التعابير الجذرية لأبسط صورة.
- أداء العمليات الحسابية لتحويل التعابير الجذرية الناشئة في السياقات المطبّقة إلى أبسط صورة.

تنطبق خصائص الجذور التربيعية جميعها على التعابير التي تضم جذورًا نونية.

المفهوم الأساسي خاصيّتا ناتج ضرب وناتج قسمة الجذور

خاصية ناتج الضرب: من أجل أي عدد صحيح $n > 1$، وأي عددين حقيقيين a و b، فإن $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

إذا كان n فرديًا، فإن a و b يمكن أن يكونا أي عددين حقيقيين .

وإذا كان n زوجيًا، إذًا a و b يجب أن يكونا عددين حقيقيين غير سالبين.

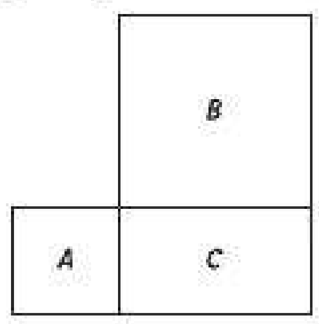
خاصية ناتج الضرب: من أجل أي عدد صحيح $n > 1$ وأي عددين حقيقيين a و b حيث $b \neq 0$، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

إذا كان n عددًا فرديًا، فإن a و b يمكن أن يكونا أي عددين حقيقيين بحيث $b \neq 0$.

إذا كان n عددًا زوجيًا، إذًا a و b يجب أن يكونا عددين حقيقيين غير سالبين بحيث $b \neq 0$.

مثال 1 خواص التعابير الجذرية

الاستكشاف يصمّم فنانٌ تمثالاً يضم مكعباتٍ ومواشير مستطيلة. يعرض جزءٌ من التمثال مجموعة الأشكال الموضحة أدناه. الشكل A هو مكعبٌ حجمه $384\ in^3$ والشكل B هو مكعبٌ حجمه $864\ in^3$. لأحد أضلاع الشكل C الطول نفسه لأحد الأضلاع في الشكل A ولضلعٍ آخر في الشكل C الطول نفسه لأحد أضلاع الشكل B.



a. **الحساب بدقّة** جد أطوال أضلاع الشكل A والشكل B.

الشكل A: $S = \sqrt[3]{384} = \sqrt[3]{64 \cdot 6} = \sqrt[3]{64}\ \sqrt[3]{6} = 4\sqrt[3]{6}$

الشكل B: $S = \sqrt[3]{864} = \sqrt[3]{216 \cdot 4} = \sqrt[3]{216}\ \sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{4}$

b. **الحساب بدقّة** جد مساحة المستطيل الذي يشكّله وجه الشكل C المحاذي لحافتي الشكل A والشكل B.

$A = 6\sqrt[3]{4} \cdot 4\sqrt[3]{6} = 48\sqrt[3]{3}$

معلومات أساسية رياضية

يشرح هذا الدرس خواص ناتج ضرب وناتج قسمة الجذور. سيحتاج الطلاب إلى إنطاق مقامات التعابير ذات الجذور في المقام. تلك التعابير الجذرية قد تكون بها جذور بدليل أكبر من 2. من الضروري فهم هذا عند إعطاء تعبير به $\sqrt[n]{a^m}$ في المقام، يجب ضرب كل من البسط والمقام في الكمية بحيث $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^b} = a$ وحيث $m + b = n$.

إن كان المقام تعبيرًا ثنائي الحدود وله جذر تربيعي مثل $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. أو يتم ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام، أو $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. فسوف ينتج مقام له جذر.

c. تفسير المسائل يقرّر الفنان تكبير الشكل B بحيث يكون طول ضلع الجديد يساوي $12\sqrt[3]{6}$ in . فإذا أراد أن يكون الوجه الجديد لوجه الشكل C المحاذي لحواف الشكلين A و B والوجه القديم مستطيلين متشابهين. فما هو طول الضلع الجديد للشكل A؟ صف عملية الحل.

$8\sqrt[3]{9}$ in; $\frac{S}{12\sqrt[3]{6}} = \frac{4\sqrt[3]{6}}{6\sqrt[3]{4}}$. إذا كان الوجه الجديد والوجه القديم مستطيلين متشابهين،

إذًا فنسبة الضلعين القديمين ستكون مماثلةً لنسبة الضلعين الجديدين. ولذلك،

$S * 6\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{6} * 12\sqrt[3]{6} = 48\sqrt[3]{36}$

$S * 6\sqrt[3]{4} = 48\sqrt[3]{36};$

$S = \frac{48\sqrt[3]{36}}{6\sqrt[3]{4}} = 8\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{4}} = 8\sqrt[3]{\frac{36}{4}} = 8\sqrt[3]{9}$.

d. التفكير النقدي يقول مروان إنه من الممكن كتابة تعبير مثل $\frac{4\sqrt[3]{6}}{6\sqrt[3]{4}}$ في صورة تعبير مكافئ لا يضم جذرًا في المقام. ويقول أنّ بوسعه القيام بذلك عبر ضرب البسط والمقام بـ $\sqrt[3]{4}$.

فهل تتفق في الرأي مع مروان؟ اشرح.

لا؛ عند ضرب المقام بـ $\sqrt[3]{4}$، فسوف يساوي المقام $\sqrt[3]{16}$ ولن يُختزل الجذر في المقام.

ولاختزال الجذر في المقام، فيجب أن يكون المجذور مكعبًا كاملاً. اضرب البسط والمقام بـ $\sqrt[3]{2}$ لاختزال الجذر في المقام.

ملخص المفهوم **تبسيط التعابير الجذرية**

يكون التعبير الجذري $\sqrt[n]{p(x)}$ في أبسط صورة إذا تم استيفاء الشروط التالية:
- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا كان المجذور لا يضم عوامل (باستثناء العدد 1) هي قوى نونيّة لعددٍ أو كثيرة حدود.
- إذا لم تظهر جذورٌ في مقام كسر.
- إذا كان المجذور لا يحتوي على أية كسور.

مثال 2 **متوسط معدل تغيّر التركيز**

تعطى جرعة دواءٍ إلى أحد المرضى عن طريق الوريد. تمثّل النسبة المئوية من الجرعة والتي يتوقع أن تبقى في مجرى دم المريض بعد t ساعات من تلقي العلاج الوريدي بالدالة $f(t) = \frac{100}{\sqrt{t-1}}$، حيث $t \geq 2$. يعرّف متوسط معدل تغيير هذه النسبة المئوية خلال الفترة الزمنية $a \leq t \leq b$ على أنه $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ بالمائة في الساعة.

a. التفكير بطريقة كميّة ما هو متوسط معدّل تغيير $f(t)$ على الفاصل $2 \leq t \leq 3$؟ عبّر عن الإجابة في صورة تعبيرٍ جذريٍ مبسّط. ثم عبّر عن قيمة التعبير مقربةً إلى أقرب جزءٍ من مائة.

$-29.29\%; \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} - \frac{100}{\sqrt{1}}}{3-2} = 50\sqrt{2} - 100 \approx -29.29$

b. التفكير بطريقة تجريدية اكتب تعبيرًا بصورة أبسط جذرٍ تربيعي لمتوسط معدل تغيير $f(t)$ على الفترة $2 \leq t \leq 2 + h$، حيث h هو أي عددٍ حقيقيٍ موجب. وأكتب الحل هنا.

$\frac{\frac{100}{\sqrt{2+h-1}} - \frac{100}{\sqrt{2-1}}}{2+h-2} = \frac{100\sqrt{1+h} - 100(1+h)}{h + h^2}$

4.5 العمليات الحسابية على التعابير الجذرية 123

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في الممارسة م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها). يُطلب من الطلاب تحديد طريقة لحل المسألة، ثم تنفيذها.

في **المثال 1c**، يجب أن يستخدم الطلاب معرفتهم بالتشابهات في المستطيلات إلى جانب معرفتهم بالأجزاء السابقة في المثال لحل المسألة. قد لا يكون الحل واضحًا على الفور للطلاب. شجعهم على الاعتماد على معرفتهم بعلم الهندسة لعمل النسبة اللازمة لحل المسألة.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

قد يكون التبسيط المتضمن في حوسبة متوسط معدل التغيير للدالة في **المثال 2** صعبًا على بعض الطلاب لأن به دوال معقدة. يتطلب الأمر تطبيق الطلاب للممارسة **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. راجع مفهوم ضرب البسط والمقام في المقام المشترك الأصغر لجميع الكسور وتطبيق $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$.

الأسئلة الداعمة

- ما مجال ومدى الدالة؟ لماذا يجب أن تكون قيم t أكبر من أو تساوي 2؟ **$D = \{$أعداد حقيقية $\geq 2\}$; $R = \{0 < f(t) \leq 100\}$; يجب أن تكون t أكبر من أو تساوي 2 لأن الدالة غير معرفة. إذا كان $t \leq 1$ و كان $1 < t < 2$، فسيتبقى أكثر من 100% من العقار.**
- ماذا تعني عبارة متوسط معدل التغيير؟ **متوسط معدل التغيير هو المقدار الذي تتغيره كمية واحدة فيما يتعلق بالتغير المقابل لكمية أخرى خلال نفس الفاصل، غالبًا ما تكون وحدة زمنية.**
- هل التعبير في **الجزء a** سالب أم موجب؟ **اشرح لماذا يبدو ذلك منطقيًا في هذا السياق. التعبير سالب لأن $50\sqrt{2} < 100$. النسبة المئوية للعقار ستكون أكبر من العقار عندما يتم تناوله وسوف يقل مع الوقت.**

أخطاء شائعة

- عند إنطاق المقام، قد ينسى الطلاب ضرب البسط في نفس الكمية.
- قد ينسى بعض الطلاب متى يجب جمع/ضرب الأسس عند الجبرية باستخدام قواعد الأسس. اقترح عليهم الاحتفاظ بملخص للقواعد في ورقة يمكنهم الرجوع إليها.

تمرين

التمرينات من 1 إلى 6 تنطوي على استخدام الرموز وإعادة كتابة التعابير.

في **التمرين 1**، يستخدم الطلاب بنية وقواعد العمل بالتعابير الجذرية لحل المسائل الهندسية.

التمرين 2a يتطلب من الطلاب استخدام الخواص الجذرية ونسخة أعم من خاصية التوزيع لتحويل التعابير الجذرية لأبسط صورها.

في **التمرين 2b**، يجب أن يتدرب الطلاب على الممارسة **م.م.ر 7** من خلال تعميم الطريقة من **الجزء a** للحصول على صيغة عامة للتعبير الجذري المجرد.

.c **التفكير بطريقة تجريدية** يمكننا تقدير المعدّل الدقيق عند t = ساعتان عبر اختيار قيمة لـ h قريبة جدًا من الصفر في التعبير الوارد في **الجزء b**. استخدم حاسبة واعتمد $h = 0.00001$ لإيجاد قيمة تقديرية لمعدّل التغيير بعد مرور ساعتين.

يساوي معدّل التغيير 50− بالمائة في الساعة.

تدريب

.1 **استخدام البنية** اكتب بأبسط صورة ممكنة نسبة أطوال أضلاع المكعبين الموصوفين.

.a حجما المكعبين هما $270x\ in^3$ و $32x^2\ in^3$.

$\frac{3\sqrt[3]{20x^2}}{4x}$

.b المساحتان السطحيتان للمكعبين هما $6x^4\ ft^2$ و $6(x+1)\ ft^2$.

$\frac{x^2\sqrt{x+1}}{x+1}$

.2 .a **التفكير بطريقة تجريدية** اكتب كلاً من التعابير التالية في صورة تعبير وحيد له الصورة ax^m من أجل الاختيارات الملائمة لـ a و m.

اكتب الحل هنا.

i. $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4x}\right)$

$3x; \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{4x}\right)=\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{4x^2}\right)=x+2x=3x$

ii. $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4x}+\sqrt{9x}\right)$

$6x; \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{4x}\right)=\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{9x}\right)=x+2x+3x=6x$

iii. $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4x}+\sqrt{9x}+\sqrt{16x}\right)$

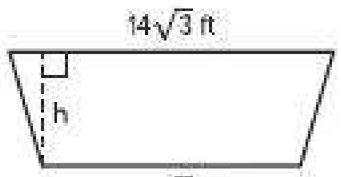
$10x; \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{4x}\right)+\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{9x}\right)+\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{16x}\right)=x+2x+3x+4x=10x$

.b **إيجاد نمط** بصورة أعم، حوّل $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4x}+\sqrt{9x}+\sqrt{16x}\right)$ لأبسط صورة من أجل أيّ عدد صحيح موجب n. استخدم المعطى التالي: $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{4x}\right)+\ldots+\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{n^2x}\right)=x+2x+\ldots+nx=(1+2+\ldots+n)x=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)x$

.3 **الحساب بدقّة** إذا كانت مساحة شبه المنحرف المبيّن $200\ ft^2$، فما الارتفاع h لشبه المنحرف؟

$14\sqrt{3}$ ft



$10\sqrt{2}$ ft

$A=\frac{b_1+b_2}{2}h \rightarrow h=\frac{2A}{b_1+b_2}$

$h=\frac{2(200)}{14\sqrt{3}+10\sqrt{2}}$

$=\frac{1400\sqrt{3}-1000\sqrt{2}}{97}$

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في الممارسة م.م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)، يُطلب من الطلاب استخدام الفرضيات المقبولة منطقيًا ورياضيًا.

في **المثال 1d**، يجب أن يستخدم الطلاب معرفتهم بتبسيط الجذور لتحديد قبول الفرضية من عدمه. ذكرهم بأهمية توضيح العبارات الرياضية بدقة، بدلاً من الاعتماد على الفرضيات.

التمرين (يُتبع)

في **التمرين 3**، يستخدم الطلاب الممارسة **م.م.ر 1**، مستخدمين فهمهم للمرافقات لإنطاق المقام من أجل إيجاد ارتفاع شبه المنحرف.

في **التمرين 5**، يُعلق الطلاب على إجابات الآخرين لتحديد مَن حوّل التعبير الجذري لأبسط صورة على نحو صحيح.

تناول المعايير

التمرين	م.م.ر
1	7
2	2, 7
3	6
4	3, 7
5	3
6	1

4. لديك ثقالة ورق كروية الشكل حجمها $72\pi\ cm^3$ ويُراد تعبئتها في علبة هدايا مكعب الشكل. ويجب أن تحاط الثقالة بسماكة $2\ cm$ على الأقل من مادة التغليف لحمايتها أثناء الشحن. يعطى قانون حجم الكرة بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

a. **استخدام البنية** اكتب تعبيرًا للطول الأدنى لضلع علبة الهدايا. واكتب الحل هنا.

$6\sqrt[3]{2} + 1;\ r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot 72\pi} = \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2};\ s = 3\sqrt[3]{2} + 2(2)$

b. **بناء الفرضيات** تريد شركة الشحن استخدام علبة حجمها $384\ cm^3$ من مخزون العلب لديها. فهل هذه العلبة مناسبة؟

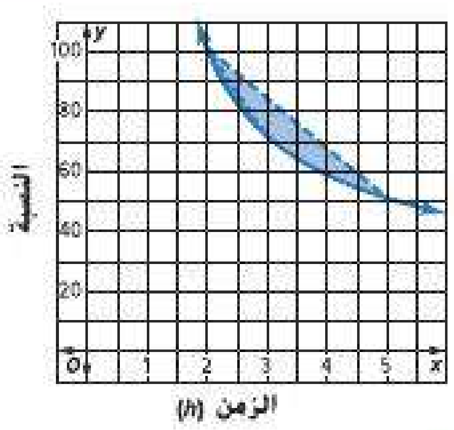
لا: لصندوقٍ حجمه $384\ cm^3$ ضلعٌ طوله $\sqrt[3]{384}$، أو حوالي $7.27\ cm$؛ $s = 3\sqrt[3]{2} + 4 \approx 7.78$ هي القيمة الصغرى الممكنة لطول ضلع صندوق الهدايا.

5. **التفكير الناقد** حوّلت ليلى وباسمة وفريد التعبير الجذري التالي لأبسط صورة: $\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{8^{2n}}}$ وهم يعلمون أن عمل واحدٍ منهم على الأكثر صحيح. حدّد الأخطاء التي ارتكبها الطلاب في الحل في حال وجود أي خطأ. وهل هناك طالبٌ من بينهم توافق على حلّه؟

ليلى	باسمة	فريد
$\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{8^{2n}}} \underset{\text{الخطوة (1)}}{=} \frac{\sqrt[n]{2^{n^2}}}{\sqrt[n]{8^{2n}}}$	$\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{8^{2n}}} \underset{\text{الخطوة (1)}}{=} \frac{\sqrt[n]{2^{n^2}}}{\sqrt[n]{8^{2n}}}$	$\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{8^{2n}}} \underset{\text{الخطوة (1)}}{=} \frac{\sqrt[n]{2^{n^2}}}{\sqrt[n]{8^{2n}}}$
$\underset{\text{الخطوة (2)}}{=} \frac{2^{\sqrt{n^2}}}{8^{\sqrt{2n}}}$	$\underset{\text{الخطوة (2)}}{=} \frac{\sqrt[n]{2^n \cdot 2^n}}{\sqrt[n]{8^{2n}}}$	$\underset{\text{الخطوة (2)}}{=} \frac{\sqrt[n]{(2^n)^n}}{\sqrt[n]{(8^2)^n}}$
	$\underset{\text{الخطوة (3)}}{=} \frac{\sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{(8^2)^n}}$	$\underset{\text{الخطوة (3)}}{=} \frac{2^n}{8^2}$
	$\underset{\text{الخطوة (4)}}{=} \frac{2 \cdot 2}{8^2}$	$\underset{\text{الخطوة (4)}}{=} \frac{2^n}{64}$
	$\underset{\text{الخطوة (5)}}{=} \frac{1}{16}$	

ليلى: الخطوة (2) خاطئة: $\sqrt[n]{a^m} \neq a^{\sqrt[n]{m}}$ باسمة: الخطوة (2) خاطئة: $2^{n^2} \neq 2^n \cdot 2^n$؛ فريد: جميع الخطوات صحيحة.

6. **تفسير المسائل** مثّل بيانيًا الدالة في **المثال 2**: $f(t) = \frac{100}{\sqrt{t-1}}$. ارسم قطعة مستقيمة من $(2, f(2))$ إلى $(3, f(3))$ وقطعة مستقيمة أخرى من $(2, f(2))$ إلى $(5, f(5))$.



a. ما الذي يمثله ميل كل قطعةٍ مستقيمة؟

يمثل ميل القطعة المستقيم معدّل التغير بين تلكما النقطتين.

b. عندما تتزايد t، هل يتزايد الميل بين النقطتين أم يتناقص أم يبقى نفسه تقريبًا؟ وماذا يعني ذلك؟ اشرح استنتاجك.

يتناقص معدّل التغيير لأن الميل بين النقطتين يتناقص مع تزايد t. وهذا يعني أن الجرعة المئوية في مجرى الدم تتناقص بمرور الزمن.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في الممارسة م.م.ر 8، يُطلب من الطلاب التفكير في عدة أمثلة، واستنتاج المبدأ العام، وتخمين صيغة أو نتيجة عامة.

التمرين 2b يتطلب أن يختبر الطلاب الخطوات المتضمنة في تبسيط تعابير جذرية محددة ومن ثم تطبيقها للحصول على صيغة لنسخة أعم عن هذه التعابير.

4.7 حل المعادلات الجذرية والمتباينات

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- التمثيل البياني للدوال النسبية
- إجراء التحويلات على التمثيلات البيانية للدوال الجذرية
- حل المعادلات التربيعية

مثال 1

م.م.ر 2

نصيحة للتدريس

شجّع الطلاب على اكتشاف كيفية "ظهور" الحلول الدخيلة. تحدَّ الطلاب إلى التساؤل عما إذا كان الحل للمسألة المطروحة منطقيًا.

الأسئلة الداعمة

- اشرح كيف استخدمت معادلة جذرية لحل المسألة.
  مساحة لوحة الأسهم تتحدد من العلاقة $A = \pi r^2$. لإيجاد الحل لمعرفة r أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين.
- إذا كان $y = x^2$ وكان x و y موجبين. فكيف تعبر عن x بدلالة y؟ **خذ الجذر التربيعي لكلا طرفي المعادلة لتحصل على $x = \sqrt{y}$.**

الأهداف

- حل المعادلات والمتباينات الجذرية وتحديد متى يكون أحد حلول معادلةٍ غير صحيحٍ في السياق المطبَّق.
- استخدام التمثيلات البيانية للدوال الجذرية لإيجاد حلول معادلاتٍ جذريةٍ اعتمادًا على البارامترات.

المعادلات الجذرية هي معادلاتٌ تضم تعابير جذرية.

المفهوم الأساسي **حل المعادلات الجذرية**

الخطوة 1: عزل التعبير الجذري على أحد طرفي المعادلة.

الخطوة 2: رفع كل طرفٍ في المعادلة إلى قوةٍ تساوي دليل الجذر لاختزال الجذر.

الخطوة 3: إيجاد حلّ المعادلة كثيرة الحدود الناتجة، والتحقق من نتائجك.

عند حل معادلات جذرية، قد تكون النتيجة عددًا لا يحقق المعادلة الأصلية. يُطلق على هذا العدد اسم حلٍ دخيل.

مثال 1 **تعليق لوحة الأسهم**

الاستكشاف **لديك لوحة أسهمٍ دائريةٌ مساحتها $8\ ft^2$.**

a. **تفسير المسائل** هل يمكن تعليق لوحة الأسهم في نهاية رواقٍ عرضه $3\ ft$؟ اشرح استنتاجك.

لا؛ بما أن مساحة الدائرة تساوي πr^2. فنصف قطرها يساوي $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\ ft$. إذًا فقطرها يساوي $2\sqrt{\frac{8}{\pi}}\ ft$ ، ويساوي ذلك تقريبًا $3.2\ ft$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** بصورةٍ أعمّ، لدينا لوحة أسهمٍ مساحتها $A\ ft^2$ فما هو العرض الأدنى لنهاية الرواق التي يمكن تعليق لوحة الأسهم فيها؟ اشرح استنتاجك .

يجب أن يكون عرض الرواق على الأقل $2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ قدمًا. يمكن تحديد نصف قطر لوحة الأسهم عبر حلّ $A = \pi r^2$. حيث يعطي القيام بذلك $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ قدمًا. إذًا فقطرها يساوي $2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ قدم.

c. **التفكير بطريقة تجريدية** جد محيط لوحة الأسهم في **الجزء b** بدلالة المساحة A. وحوّل إجابتك لأبسط صورة.

محيط الدائرة يساوي $C = \pi d$؛ نظرًا إلى أن $d = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$، $C = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{2\pi\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{A} = 2\sqrt{A\pi}$.

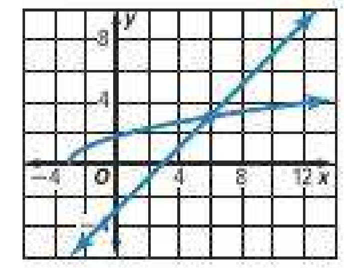
معلومات أساسية رياضية

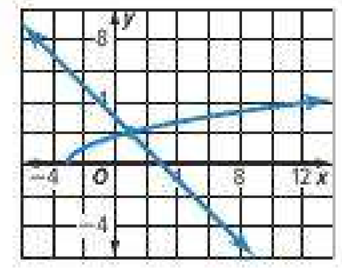
تمثل المعكوسات أحد أهم المواضيع في الرياضيات، سواء كانت العمليات العكسية أم الدوال العكسية. في الصفوف الدراسية الأولى، يتعلم الطلاب عن العمليات العكسية، مثل الجمع والطرح، أو الضرب والقسمة، أو القوى الأسية والجذور. وتستمر هذه الدراسة للمعكوسات طوال مقررات الرياضيات المتبقية لديهم

يركز هذا الدرس على المعادلات الجذرية واستخدام العمليات العكسية لحلها. عندما يكون الجذر والقوة الأسية عددًا زوجيًا، يجب أن يدرك الطلاب بأن العلاقة ليست واحدًا إلى واحد، وأن يضعوا في اعتبارهم القيود المفروضة على المجال وأي حلولٍ دخيلة قد تظهر.

مثال 2 حل المعادلات الجذرية

a. بناء الفرضيات قارن وقابل حلول المعادلتين $\sqrt{x+3} = x - 3$ و $\sqrt{x+3} = 3 - x$. ماذا كان أثر ضرب الطرف الأيمن بـ -1؟ استخدم التمثيلين البيانيين للدالتين لتوضيح إجابتك.





تُبسط المعادلتان إلى $(x - 6)(x - 1) = 0$، والتي لها الحلّان $x = 6$ و $x = 1$. بالنسبة للمعادلة الأولى، $x = 6$ هو حلٌ صحيح في حين $x = 1$ حلٌ دخيل. بالنسبة للمعادلة الثانية، $x = 1$ هو حلٌ صحيحٌ في حين $x = 6$ حلٌ دخيل. يحوّل ضرب الطرف الأيمن للمعادلة بـ -1 إلى التبديل بين الحلّ الصحيح والحلّ الدخيل. ويؤكّد المنحنيان البيانيان لأن لكل معادلةٍ حلاً واحدًا فقط.

b. المشاركة بدقة اشرح كيف أن عمليات حل معادلة الجذر التربيعي يمكن أن تعطي حلاً دخيلاً. كيف تحدد إذا ما كانت الحلول دخيلة؟

عند حل معادلة جذرٍ تربيعي، فسوف تستلزم إحدى الخطوات تربيع كلا طرفيها. وهذه ليست علاقة واحد إلى واحد. فإن كانت كلتا الكميتين متعاكستان، فيمكن أن تبدوا متساويتين بعد تربيع كل كمية. ولتحديد الحلول الدخيلة، اختبر الإجابات في المعادلة الأصلية أو انظر إلى التمثيل البياني للمعادلة.

c. التفكير بطريقة كميّة إذا أردت أن يكون للمعادلة الجذرية $\sqrt{x-4} = a$ حلٌ دخيلٌ هو $x = 13$. فما الذي يمكنك أن تختاره لتعويض a في المعادلة؟ اشرح إجابتك. وجد أي حلولٍ صحيحةٍ لمعادلتك.

عندما $x = 13$، فإن قيمة الجذر تساوي $\sqrt{9} = 3$. سيكون الحلّ $x = 13$ حلاً دخيلاً إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة يساوي -3, إذا $a = -3$. وبما أن $x = 13$، فقد يكون الطرف الأيمن هو التعبير $10 - x$. الحلّ الصحيح لـ $\sqrt{x-4} = 10 - x$ هو $x = 8$.

لأي **متباينةٍ جذريةٍ** متغيرٌ في موقع المجذور. وتستخدم الخطوات التالية لحلّ متباينةٍ من هذا النوع.

المفهوم الأساسي حلّ المتباينات الجذرية

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر زوجيًا، إيجاد قيم المتغير التي تجعل المجذور غير سالب.

الخطوة 2: حلّ المتباينة جبريًا.

الخطوة 3: اختبار القيم للتحقق من حلك.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

قد يحتاج الطلاب للمساعدة في فهم كيفية تمثيل الحلول بيانيًا. ذكّرهم أن بإمكانهم تمثيل كل طرفٍ من المعادلة بيانيًا وستكون نقطة أو نقاط التقاطع هي الحلول لـ $f(x) = g(x)$

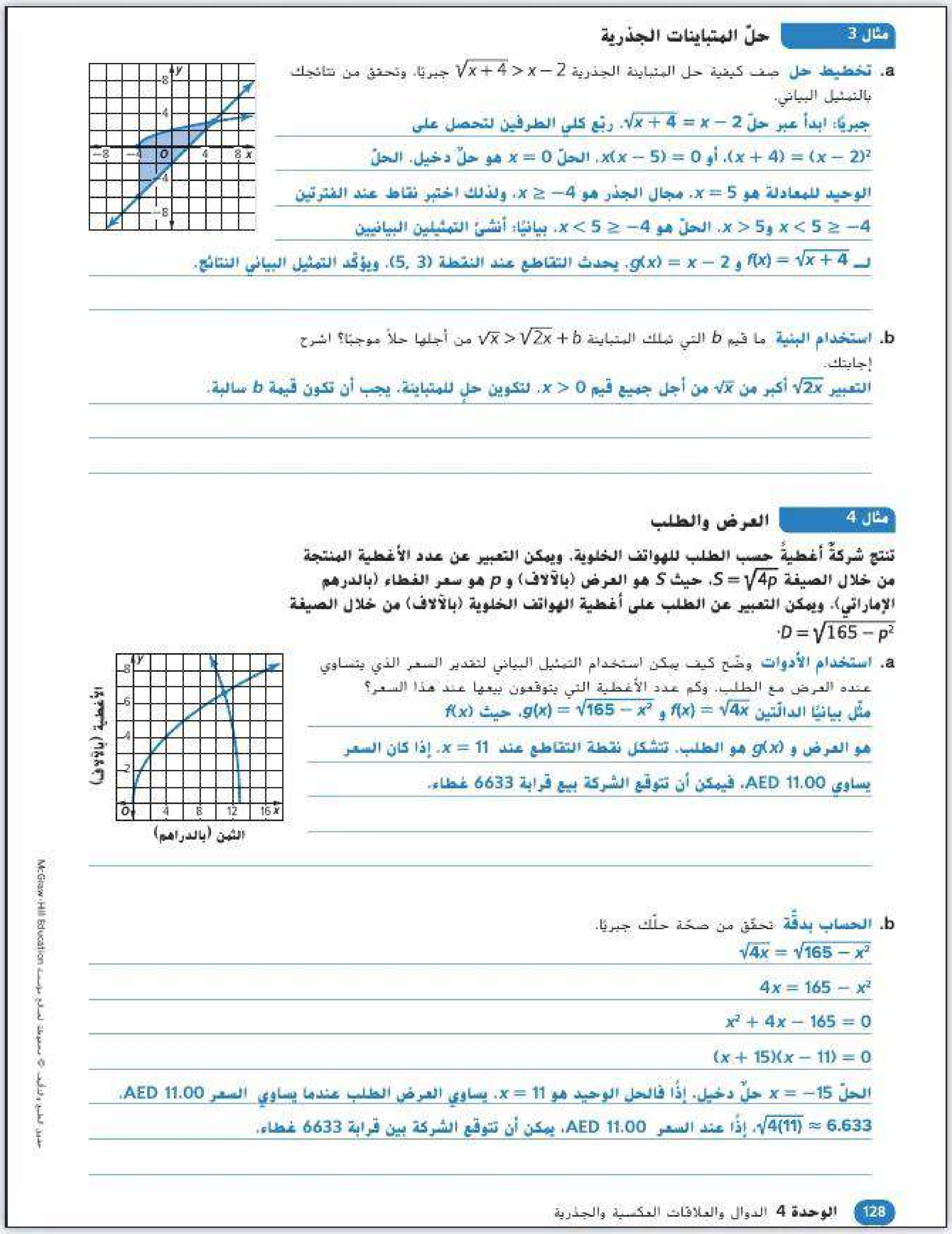
الأسئلة الداعمة

- ما قيمة x التي عندها تتساوى قيمة $\sqrt{x+1}$ مع قيمة $x - 5$؟ **إذا كان $x = 8$، فإن كلا طرفي المعادلة يساوي 3.**
- ما قيمة x التي عندها تكون قيمة $\sqrt{x+1}$ هي مقابل قيمة $x - 5$؟ **إذا كان $x = 3$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة يساوي 2، بينما الطرف الأيمن منها يساوي -2.**
- أي من قيم x التالية تعتبر الحل الدخيل؟ **القيمة التي تجعل للتعبيرين قيمًا مقابلة هي الحل الدخيل.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتطلب الممارسة م.م.ر 2 من الطلاب القدرة على الفصل عن السياق، لتلخيص موقفٍ معين وتمثيله رمزيًا واستخدام الرموز الممثلة. في **المثال 1**، يجب على الطلاب تقويم المعلومات المتوفرة عن لوحة الأسهم والرواق لتحديد إن كان من الممكن تعليق لوحة الأسهم.

عرض الرواق قياس أحادي البعد ويجب مقارنته مع قياس آخر أحادي البعد، وهو قطر لوحة الأسهم الدائرية في هذه الحالة. يجب أن يدرك الطلاب بأنه يمكن إعادة كتابة قانون مساحة الدائرة ليعبر عن نصف القطر بدلالة المساحة، ويمكن مضاعفته بعد ذلك للتعبير عن القطر. وعندها يمكنهم مقارنة قياس لوحة الأسهم مباشرةً مع عرض الرواق.



مثال 3 **حلّ المتباينات الجذرية**

a. تخطيط حل صف كيفية حل المتباينة الجذرية $\sqrt{x+4} > x-2$ جبريًا، وتحقق من نتائجك بالتمثيل البياني.

جبريًا: ابدأ عبر حلّ $\sqrt{x+4} = x-2$. ربّع كلي الطرفين لتحصل على $(x+4) = (x-2)^2$، أو $x(x-5) = 0$. الحلّ $x = 0$ هو حلّ دخيل. الحلّ الوحيد للمعادلة هو $x = 5$. مجال الجذر هو $x \geq -4$، ولذلك اختبر نقاط عند الفترتين $-4 \leq x < 5$ و$x > 5$. الحلّ هو $-4 \leq x < 5$. بيانيًا: أنشئ التمثيلين البيانيين لـ $f(x) = \sqrt{x+4}$ و $g(x) = x-2$. يحدث التقاطع عند النقطة (5, 3)، ويؤكّد التمثيل البياني النتائج.

b. استخدام البنية ما قيم b التي تملك المتباينة $\sqrt{x} > \sqrt{2x} + b$ من أجلها حلاً موجبًا؟ اشرح إجابتك.

التعبير $\sqrt{2x}$ أكبر من $\sqrt{x}$ من أجل جميع قيم $x > 0$. لتكوين حلٍ للمتباينة، يجب أن تكون قيمة b سالبة.

مثال 4 **العرض والطلب**

تنتج شركةٌ أغطيةً حسب الطلب للهواتف الخلوية. ويمكن التعبير عن عدد الأغطية المنتجة من خلال الصيغة $S = \sqrt{4p}$، حيث S هو العرض (بالآلاف) و p هو سعر الغطاء (بالدرهم الإماراتي). ويمكن التعبير عن الطلب على أغطية الهواتف الخلوية (بالآلاف) من خلال الصيغة $D = \sqrt{165 - p^2}$.

a. استخدام الأدوات وضّح كيف يمكن استخدام التمثيل البياني لتقدير السعر الذي يتساوى عنده العرض مع الطلب، وكم عدد الأغطية التي يتوقعون بيعها عند هذا السعر؟

مثّل بيانيًا الدالّتين $f(x) = \sqrt{4x}$ و $g(x) = \sqrt{165 - x^2}$، حيث $f(x)$ هو العرض و $g(x)$ هو الطلب. تتشكل نقطة التقاطع عند $x = 11$. إذا كان السعر يساوي AED 11.00، فيمكن أن تتوقع الشركة بيع قرابة 6633 غطاء.

b. الحساب بدقّة تحقّق من صحّة حلّك جبريًا.

$\sqrt{4x} = \sqrt{165 - x^2}$

$4x = 165 - x^2$

$x^2 + 4x - 165 = 0$

$(x + 15)(x - 11) = 0$

الحلّ $x = -15$ حلّ دخيل. إذًا فالحل الوحيد هو $x = 11$. يساوي العرض الطلب عندما يساوي السعر AED 11.00.

$\sqrt{4(11)} \approx 6.633$. إذًا عند السعر AED 11.00، يمكن أن تتوقع الشركة بين قرابة 6633 غطاء.

مثال 3

نصيحة للتدريس
م.م.ر 7

تحدَ الطلاب لاستخدام ما يعرفونه حول المتباينة $\sqrt{x} > \sqrt{2x}$ بغية حل المسألة. ذكر الطلاب أن تمييز الأنماط يتطلب أحيانًا عزل أجزاء من المعادلة إلى أجزاء أصغر لتحليل كل منها بمفرده.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك التخلص من الجذر $\sqrt{x+4}$؟ **بتربيع كلا طرفي المعادلة.**
- باستخدام الجبر، كيف يمكن معرفة أن الحل هو $-4 \leq x < 5$، وليس $x \geq -4$؟ **يمكنني التحقق من القيم الأكبر من 5 لأرى إن كانت تحل المعادلة. ولأنها لا تحل المعادلة، يمكننا معرفة أن $-4 \leq x < 5$.**

مثال 4

نصيحة للتدريس
م.م.ر 5

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكن للطلاب تمثيل مجموعة من المعادلات بسرعة وسهولة. تحدّ الطلاب لتغيير تفاصيل الدوال والعلاقات العكسية والجذرية المتقاطعة بهدف تعزيز سرعة فهم الطلاب لتأثير هذه التفاصيل على نقاط التقاطع.

الأسئلة الداعمة

- منحنى الطلب دالة متناقصة. لماذا يبدو هذا منطقيًا؟ **مع ازدياد سعر المنتج، سينخفض احتمال شراء الناس للمنتج، ما يؤدي إلى تناقص الطلب. على العكس من ذلك، مع انخفاض سعر المنتج، سيرتفع احتمال شراء الناس للمنتج، ما يؤدي إلى تزايد الطلب.**
- كيف تعرف أن الحل $x = -15$ دخيل؟ **لأن وضع سعر لغطاء الهاتف يبلغ 15− درهمًا ليس منطقيًا.**

أخطاء شائعة

قد ينسى الطلاب أخذ المجال المقيد لدالة الجذر التربيعي في الاعتبار. هذا الأمر مهم عند تحليل المتباينات، كما رأينا في **المثال 3a**. قد يختار الطلاب حل المتباينة من خلال النظر إلى المعادلة المرتبطة بها. يمكنهم إيجاد أن الحل الصحيح للمعادلة هو $x = 5$، ما يتيح لهم التحقق من الأعداد الأكبر من 5 والأصغر من 5.

يجب أن يلاحظوا أن تعبير الجذر التربيعي مقيد بالأعداد الأكبر من 4− والمساوية لها. يغير هذا الفترات المحتملة للحل، لأنه لن يكون عندها جميع الأعداد الأصغر من 5. ستكون الفترة الآن هي الأعداد بين 4− و 5.

مثال 5 حل معادلات ومتباينات جذرية ذات تعبيرين جذريين

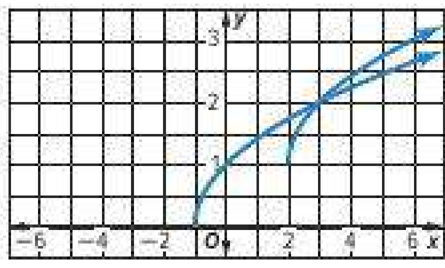
a. التفكير بطريقة كمية خذ المعادلة $\sqrt{x-2}+1=\sqrt{x+1}$. ربّع كلا طرفي المعادلة وحوّلها لأبسط صورة.

$(\sqrt{x-2}+1)^2=(\sqrt{x+1})^2;\ (\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x-2}+1)=x+1;\ (\sqrt{x-2})^2+2\sqrt{x-2}+1=x+1;$
$(x-2)+2\sqrt{x-2}+1=x+1;\ x-1+2\sqrt{x-2}=x+1.$

b. التفكير بطريقة كمية في معادلتك الواردة في **الجزء a**. اعزل الجذر في أحد طرفي المعادلة وربّع الطرفين. ثم حوّل المعادلة لأبسط صورة وحُلّها لإيجاد x.

$x-1+2\sqrt{x-2}=x+1;\ 2\sqrt{x-2}=2;\ \sqrt{(x-2)}=1;\ (\sqrt{x-2})^2=1^2;\ x-2=1;\ x=3$

c. التفكير بطريقة كميّة كم عدد الحلول التي حصلت عليها في **الجزء b**؟ عوّض قيم الحلول للتحقق إن كانت أيٌّ منها دخيلة. ومثّل كلا طرفي المعادلة للتحقق من إجابتك.



وجدت قيمةً واحدةً لـx وهي $x=3$. يعطي تعويض هذه القيمة في الطرف الأيسر $\sqrt{3-2}+1=\sqrt{1}+1=2$. يعطي تعويض $x=3$ في الطرف الأيمن $\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$ إذًا فالحلّ صحيح. ويشير التمثيل البياني أيضًا إلى نقطة تقاطع عند $x=3$.

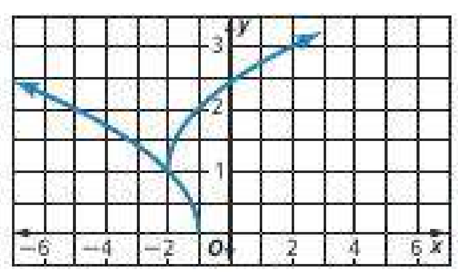
d. التفكير بطريقةٍ كمية استخدم ما قمت به في **الأقسام a–c** لحلّ $\sqrt{x-2}+1<\sqrt{x+1}$.

النقطة $x=3$ هي النقطة التي يساوي عندها الطرف الأيمن الطرف الأيسر. مجال الطرف الأيسر هو $x\geq 2$. ومجال الطرف الأيمن هو $x\geq -1$. إذًا فالمجال المشترك هو $x\geq 2$. باستخدام نقطة الاختبار $x=11$، نتوصل إلى أن $\sqrt{(11-2)}+1<\sqrt{11+1};\ \sqrt{9}+1<\sqrt{12};\ 4<\sqrt{12}$، وهذا خاطئ. إذًا فالحلّ هو جميع قيم x الواقعة في الفترة $(2, 3)$.

e. التفكير النقدي تقول سعاد إن للمعادلة $\sqrt{x+2}+1=\sqrt{-x-1}$ حلين حقيقيين اثنين، في حين أن المعادلة في **الجزء a** لها حلّ وحيد. حُلّ هذه المعادلة لتحديد ما إن كانت سعاد على صواب.

$(\sqrt{x+2}+1)^2=(\sqrt{-x-1})^2;\ (\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}+1)=-x-1;\ (\sqrt{x+2})^2+2\sqrt{x+2}+1=-x-1;$
$(x+2)+2\sqrt{x+2}+1=-x-1;\ x+3+2\sqrt{x+2}=-x-1;\ 2\sqrt{x+2}=-2x-4;\ \sqrt{x+2}=-x-2;\ x+2=x^2+4x+4;\ x^2+3x+2=0;\ (x+2)(x+1)=0$. إذًا $x=-2$ و $x=-1$. ولكن تعويض $x=-1$ في المعادلة الأصلية يعطينا $2=0$. إذًا $x=-1$ حلّ دخيل. وبصورة مشابهة، فإن تعويض $x=-2$ في المعادلة يعطينا $1=1$. إذًا $x=-2$ هو حلّ. ولذلك، هناك فقطحلّ حقيقيٌّ واحد. إذًا، فسعاد ليست على صواب.

f. استخدام الأدوات استخدم حاسبةً لتمثيل المعادلة بيانيًا وتحقق من الحل الذي جدته في **الجزء e**.



يؤكد التمثيل البياني أن هناك حلاً حقيقيًا واحدًا عند $x=-2$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتطلب الممارسة م.م.ر 3 من الطلاب تقديم فرضياتٍ منطقية وتبرير استنتاجاتهم وتقديمها للآخرين. في **المثال 2a**، يدرس الطلاب حلول زوج من المعادلات التي تبدو متشابهة، ويشرحون كيف ترتبط الحلول ببعضها.

يجب على الطلاب حل كلٍ من المعادلتين، وإيجاد حل صحيح واحدٍ وحلٍ دخيلٍ واحد. يجب أن يلاحظوا بأن تغيير الطرف الأيمن للمعادلة أثّر على الحلول. خلال تقديم الطلاب لاستنتاجاتهم، يجب أن يتمكنوا من استخدام التمثيلات البيانية لكل حلٍ لمساعدتهم في تبرير إجاباتهم.

مثال 5

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

يطرح هذا المثال نموذجًا معدلاً من المعادلات والمتباينات الجذرية التي سبق أن درسها الطلاب. فهو يحتوي على جذرين منفصلين، ولذلك فهو يتطلب عزل الجذر وتربيع كلا الطرفين مرتين. ولأن الحد الإضافي ثابت، فلن يواجه الطلاب أية صعوبات فيه. سوف يكون من المفيد مراجعة كيفية تربيع ذات الحدين.

الأسئلة الداعمة

- بالاعتماد على مجالات الجذور المفردة، ما مجال الإجابات المحتملة للمعادلة في الجزء a؟ **للطرف الأيسر المجال $x\geq 2$. للطرف الأيمن المجال $x\geq -1$. إذًا فمجال الإجابات المحتملة هو $x\geq 2$.**
- هل يمكننا وضع كلا الجذرين في أحد طرفي المعادلة، ووضع الثابت في الطرف الآخر، ثم تربيع الطرفين؟ ما تأثير هذا على الحل؟ **يمكننا فعل ذلك. سيظل الحل صحيحًا، ولكن ذات الحدين التي نقوم بتوسيعها ستكون أكثر تعقيدًا إلى حدٍ كبيرٍ بوجود جذرين فيها.**

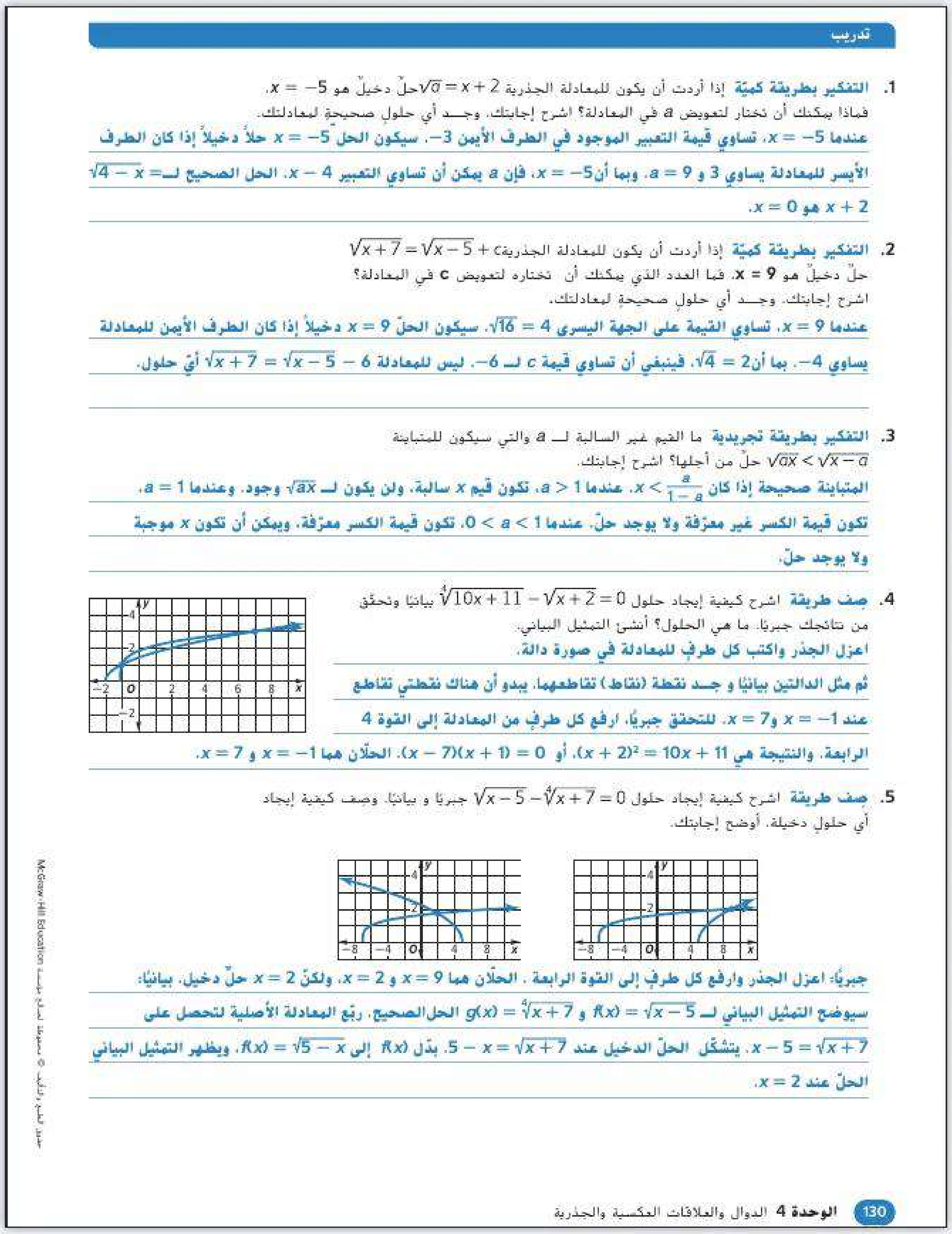
أخطاء شائعة

عند حل المعادلات الجذرية جبريًا، قد يقع الطلاب في مجموعة من الأخطاء. فقد يقومون بتربيع ذات حدين بشكلٍ خاطئ. على سبيل المثال، قد يقرر الطلاب أن $(\sqrt{x}+3)^2 = x+9$ أو أن $\sqrt{x-2} = \sqrt{x}+3$ يمكن كتابتها بالصورة $x-2 = x+3$.

قد ينسى الطلاب اختبار إجاباتهم أيضًا – إما جبريًا أو هندسيًا – للتحقق من أنها حلولٌ صحيحة للمسألة. هذا أمر بالغ الأهمية لأن عملية حل المعادلات والمتباينات الجذرية يمكن أن ينتج عنها حلول دخيلة في كثير من الأحيان.

يجب أن يتوخى الطلاب الحذر عند تربيع كلا طرفي المتباينة. إذا كان من الممكن أن ينتج عن التعابير أعداد سالبة، فقد يؤثر هذا على النتائج. لتجنب الأخطاء، قد يكون من الأسهل على الطلاب تحويل المتباينة إلى معادلة وتربيعها ومن ثم النظر في حلول المعادلة من حيث صلتها بالمتباينة الأصلية.

في **المثال 3** قد يواجه الطلاب صعوبة في اكتشاف كيفية تحليل المتباينة. بما أن قيمة a مجهولة. خلال عملية النظر في مختلف قيم a، قد لا يلاحظون أنه يجب عليهم النظر في كلٍ من الأعداد الأكبر من 1 والأعداد بين 0 و 1.



تدريب

1. **التفكير بطريقة كميّة** إذا أردت أن يكون للمعادلة الجذرية $\sqrt{a} = x+2$ حلٌ دخيلٌ هو $x = -5$.
فماذا يمكنك أن تختار لتعويض a في المعادلة؟ اشرح إجابتك. وجِد أي حلولٍ صحيحةٍ لمعادلتك.
عندما $x = -5$، تساوي قيمة التعبير الموجود في الطرف الأيمن -3. سيكون الحل $x = -5$ حلاً دخيلاً إذا كان الطرف الأيسر للمعادلة يساوي 3 و $a = 9$. وبما أن $x = -5$، فإن a يمكن أن تساوي التعبير $4 - x$. الحل الصحيح لـ $\sqrt{4-x} = x+2$ هو $x = 0$.

2. **التفكير بطريقة كميّة** إذا أردت أن يكون للمعادلة الجذرية $\sqrt{x+7} = \sqrt{x-5} + c$
حلٌ دخيلٌ هو $x = 9$، فما العدد الذي يمكنك أن تختاره لتعويض c في المعادلة؟
اشرح إجابتك. وجِد أي حلولٍ صحيحةٍ لمعادلتك.
عندما $x = 9$، تساوي القيمة على الجهة اليسرى $\sqrt{16} = 4$. سيكون الحلّ $x = 9$ دخيلاً إذا كان الطرف الأيمن للمعادلة يساوي -4. بما أن $\sqrt{4} = 2$، فينبغي أن تساوي قيمة c لـ -6. ليس للمعادلة $\sqrt{x+7} = \sqrt{x-5} - 6$ أيّ حلول.

3. **التفكير بطريقة تجريدية** ما القيم غير السالبة لـ a والتي سيكون للمتباينة $\sqrt{ax} < \sqrt{x-a}$ حلّ من أجلها؟ اشرح إجابتك.
المتباينة صحيحة إذا كان $x < \frac{a}{1-a}$. عندما $a > 1$، تكون قيم x سالبة، ولن يكون لـ $\sqrt{ax}$ وجود. وعندما $a = 1$، تكون قيمة الكسر غير معرّفة ولا يوجد حلّ. عندما $0 < a < 1$، تكون قيمة الكسر معرّفة، ويمكن أن تكون x موجبة ولا يوجد حلّ.

4. **صِف طريقة** اشرح كيفية إيجاد حلول $\sqrt[4]{10x+11} - \sqrt{x+2} = 0$ بيانيًا وتحقق من نتائجك جبريًا. ما هي الحلول؟ أنشئ التمثيل البياني.
اعزل الجذر واكتب كل طرفٍ للمعادلة في صورة دالة.
ثم مثل الدالتين بيانيًا و جِد نقطة (نقاط) تقاطعهما. يبدو أن هناك نقطتي تقاطع عند $x = -1$ و $x = 7$. للتحقق جبريًا، ارفع كل طرفٍ من المعادلة إلى القوة 4 الرابعة. والنتيجة هي $(x+2)^2 = 10x+11$، أو $(x-7)(x+1) = 0$. الحلّان هما $x = -1$ و $x = 7$.

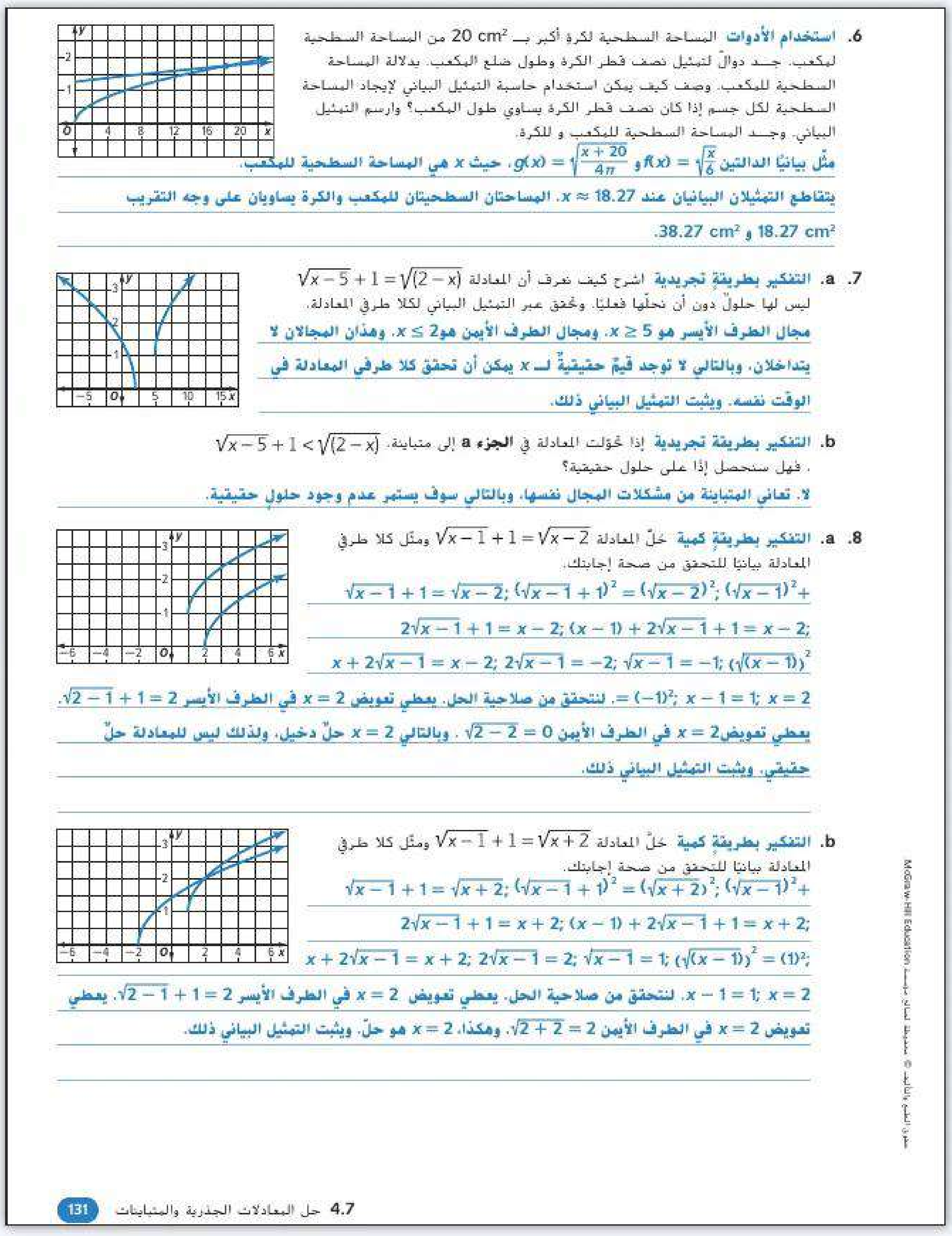
5. **صِف طريقة** اشرح كيفية إيجاد حلول $\sqrt{x-5} - \sqrt[4]{x+7} = 0$ جبريًا و بيانيًا. وصف كيفية إيجاد أي حلولٍ دخيلة. أوضح إجابتك.
جبريًا: اعزل الجذر وارفع كل طرفٍ إلى القوة الرابعة . الحلّان هما $x = 9$ و $x = 2$، ولكنّ $x = 2$ حلّ دخيل. بيانيًا: سيوضح التمثيل البياني لـ $f(x) = \sqrt{x-5}$ و $g(x) = \sqrt[4]{x+7}$ الحل الصحيح. ربّع المعادلة الأصلية لتحصل على $x - 5 = \sqrt{x+7}$. يتشكّل الحلّ الدخيل عند $5 - x = \sqrt{x+7}$. بدّل $f(x)$ إلى $f(x) = \sqrt{5-x}$، ويظهر التمثيل البياني الحلّ عند $x = 2$.

130 الوحدة 4 الدوال والعلاقات العكسية والجذرية

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتطلب الممارسة م.م.ر 5 من الطلاب تحديد الأدوات المناسبة لاستخدامها عند حل التمارين. في **المثال 4**، يجب أن يستخدم الطلاب حاسبة التمثيل البياني أو برنامج تمثيل بياني لتحليل العرض والطلب وتحديد نقطة التقاطع.

الزمن الذي يستغرقه جسمٌ ليصل إلى الأرض عند إسقاطه هو من أمثلة الحياة اليومية الأخرى التي يمكن تمثيلها باستخدام الدوال والعلاقات العكسية والجذرية. المسافة التي يقطعها الجسم إلى الأرض هي $d = \frac{1}{2}at^2$، حيث تمثل a التسارع وتمثل t الزمن. لكن حل المعادلة لمعرفة الزمن ينتج عنه الدالة $t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$.



6. **استخدام الأدوات** المساحة السطحية لكرة أكبر بـ $20\ cm^2$ من المساحة السطحية لمكعب. جد دوالّ لتمثيل نصف قطر الكرة وطول ضلع المكعب، بدلالة المساحة السطحية للمكعب. وصف كيف يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المساحة السطحية لكل جسم إذا كان نصف قطر الكرة يساوي طول المكعب؟ وارسم التمثيل البياني. وجد المساحة السطحية للمكعب و للكرة.

مثّل بيانيًا الدالتين $f(x) = \sqrt{\frac{x}{6}}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x+20}{4\pi}}$، حيث x هي المساحة السطحية للمكعب.

يتقاطع التمثيلان البيانيان عند $x \approx 18.27$. المساحتان السطحيتان للمكعب والكرة يساويان على وجه التقريب $18.27\ cm^2$ و $38.27\ cm^2$.

7. a. **التفكير بطريقةٍ تجريدية** اشرح كيف نعرف أن المعادلة $\sqrt{x-5} + 1 = \sqrt{(2-x)}$ ليس لها حلولٌ دون أن نحلّها فعليًا. وتحقق عبر التمثيل البياني لكلا طرفي المعادلة.

مجال الطرف الأيسر هو $x \geq 5$، ومجال الطرف الأيمن هو $x \leq 2$. وهذان المجالان لا يتداخلان، وبالتالي لا توجد قيمٌ حقيقيةٌ لـ x يمكن أن تحقق كلا طرفي المعادلة في الوقت نفسه. ويثبت التمثيل البياني ذلك.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا تحوّلت المعادلة في **الجزء a** إلى متباينة، $\sqrt{x-5} + 1 < \sqrt{(2-x)}$، فهل سنحصل إذًا على حلول حقيقية؟

لا، تعاني المتباينة من مشكلات المجال نفسها، وبالتالي سوف يستمر عدم وجود حلولٍ حقيقية.

8. a. **التفكير بطريقةٍ كمية** حُلّ المعادلة $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x-2}$ ومثّل كلا طرفي المعادلة بيانيًا للتحقق من صحة إجابتك.

$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x-2}; (\sqrt{x-1}+1)^2 = (\sqrt{x-2})^2; (\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1} + 1 = x-2; (x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1 = x-2; x + 2\sqrt{x-1} = x-2; 2\sqrt{x-1} = -2; \sqrt{x-1} = -1; (\sqrt{(x-1)})^2 = (-1)^2; x-1 = 1; x = 2$. لنتحقق من صلاحية الحل. يعطي تعويض $x = 2$ في الطرف الأيسر $\sqrt{2-1} + 1 = 2$. يعطي تعويض $x = 2$ في الطرف الأيمن $\sqrt{2-2} = 0$. وبالتالي $x = 2$ حلٌّ دخيل، ولذلك ليس للمعادلة حلٌّ حقيقي. ويثبت التمثيل البياني ذلك.

b. **التفكير بطريقةٍ كمية** حُلّ المعادلة $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+2}$ ومثّل كلا طرفي المعادلة بيانيًا للتحقق من صحة إجابتك.

$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+2}; (\sqrt{x-1}+1)^2 = (\sqrt{x+2})^2; (\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1} + 1 = x+2; (x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1 = x+2; x + 2\sqrt{x-1} = x+2; 2\sqrt{x-1} = 2; \sqrt{x-1} = 1; (\sqrt{(x-1)})^2 = (1)^2; x-1 = 1; x = 2$. لنتحقق من صلاحية الحل. يعطي تعويض $x = 2$ في الطرف الأيسر $\sqrt{2-1} + 1 = 2$. يعطي تعويض $x = 2$ في الطرف الأيمن $\sqrt{2+2} = 2$. وهكذا، $x = 2$ هو حلّ. ويثبت التمثيل البياني ذلك.

أخطاء شائعة

يجب أن يلاحظ الطلاب أن تربيع كلا طرفي المعادلة لن يلغي الجذر الرابع. ولذلك يجب عليهم رفع الطرفين للقوة الأسية الرابعة. كما يجب أن يفهموا بأن رفع معادلة لقوة أسية زوجية قد ينتج عنه حلول دخيلة. يجب عليهم اختبار حلولهم، و/ أو فحص التمثيل البياني ليتحققوا إن كان كلا الحلين **(التمرين 4)** أو أحدهما فقط **(التمرين 5)** صحيحًا.

تمرين

يوضح الطلاب في **التمرينين 1 و 2** كيف يمكن أن تظهر الحلول الدخيلة.

في **التمرين 3**، يجب أن يحل الطلاب المتباينة الجذرية.

في **التمارين من 4 إلى 8** يحدد الطلاب الدوال المتساوية بهدف إيجاد نقاط التقاطع. يجب عليهم إيجاد الحل بيانيًا وجبريًا.

بشكلٍ خاص، يمثل الطلاب في **التمرين 6** أبعاد كل شكلٍ في صورة دالة بدلالة مساحة السطح، ثم يستخدمون التقنية لمقارنة التمثيلات البيانية وإيجاد نقطة التقاطع..

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1–3	2
4–5	8
6	5
7–8	2

يمكن أن تكون السرعة عبارة عن جرّ

سوف يستخدم الطلاب تمثيلاً بيانيًا لقوة السحب وإيجاد معكوسها، ويكتبون ويحلون معادلات تتعلق بالدوال ذات الصلة.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:

الوحدة 6 مهمة تقويم الأداء تُعزز استيعاب الممارسة الرياضية **م.م.ر 2** و **م.م.ر 7**.

بداية سريعة

الجزء الأول من المهمة مصمم لجعل الطلاب يفكرون بطريقة نقدية. قد لا يعرف الطلاب أن المعادلة (وهي معادلة تربيعية هنا) تحتاج لنقطتين فقط. قد تكون النقاط التالية مفيدة لمساعدة الطلاب على البدء:

- ما علاقة التناسب؟ **هي علاقة بها قيمة ثابتة مضروبة في قيمة أخرى**
- كيف تعبر عن مربع السرعة كتعبير متغير؟ v^2

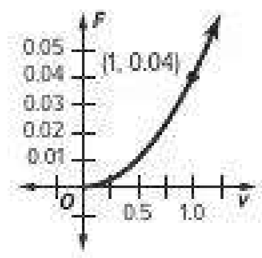
يجب أن يكون الطلاب الآن قادرين على إعداد المعادلات الموضحة في معايير رصد الدرجات **للجزء A** لتحديد قيم المعاملات في المعادلات التربيعية في **الجزء A**.

مهمة تقويم الأداء

يمكن أن تكون السرعة عبارة عن قوة جرّ

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. وتأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وبرر إجاباتك.

قوة الجر هي قوةٌ تنتج عن مقاومة الهواء التي يبديها جسمٌ يتحرك عبر الهواء، وهي تتناسب مع مربع سرعة الجسم الاتجاهية. نعطي أدناه قوة الجر التي تخضع لها سيارة معيّنة، حيث v تقدّر بالأمتار في الثانية.



الجزء A

جـد F(v). ثم جـد معكوس(F(v. إذا كان للدالة F(v) المجال $0 \le v \le 75$، إذًا ما مجال الدالة العكسية ومداها v(F)؟

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتوافق مهمة تقويم الأداء هذه مع الممارسة **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. على الطلاب استخدام المعادلات لتمثيل الوصف اللفظي، واستخدام تحليل الوحدات لفهم المعادلة.

نصيحة للتدريس

م.م.ر.7

بعد إكمال **الجزء A**، سيحتاج الطلاب للمراجعة وتذكير أنفسهم بالعمليات التي استخدموها لإكمال بقية المهمة. على سبيل المثال، ينطوي **الجزء A** على تحديد المعادلة من التمثيل البياني. سيحتاج الطلاب إلى استخدام هذه المعادلة لإيجاد المعادلة المطلوبة في **الجزء B**.

أخطاء شائعة

قد يرتبك الطلاب في **الجزء B**، لأن المعادلة الأصلية غير معبر عنها بدلالة الوقت، ***t***. اشرح للطلاب إمكانية استخدام تحليل الوحدات لتحديد الوقت المستغرق لحل المعادلة.

الجزء B

افترض أن السيارة تسير بسرعة 5 m/s، ومن ثم تبدأ بالتسارع عند $3\ m/s^2$. عبّر عن القوة في صورة دالة تابعة للزمن t منذ بدء السيارة بالتسارع. (تلميح: استخدم تحليل الوحدات.)

الجزء C

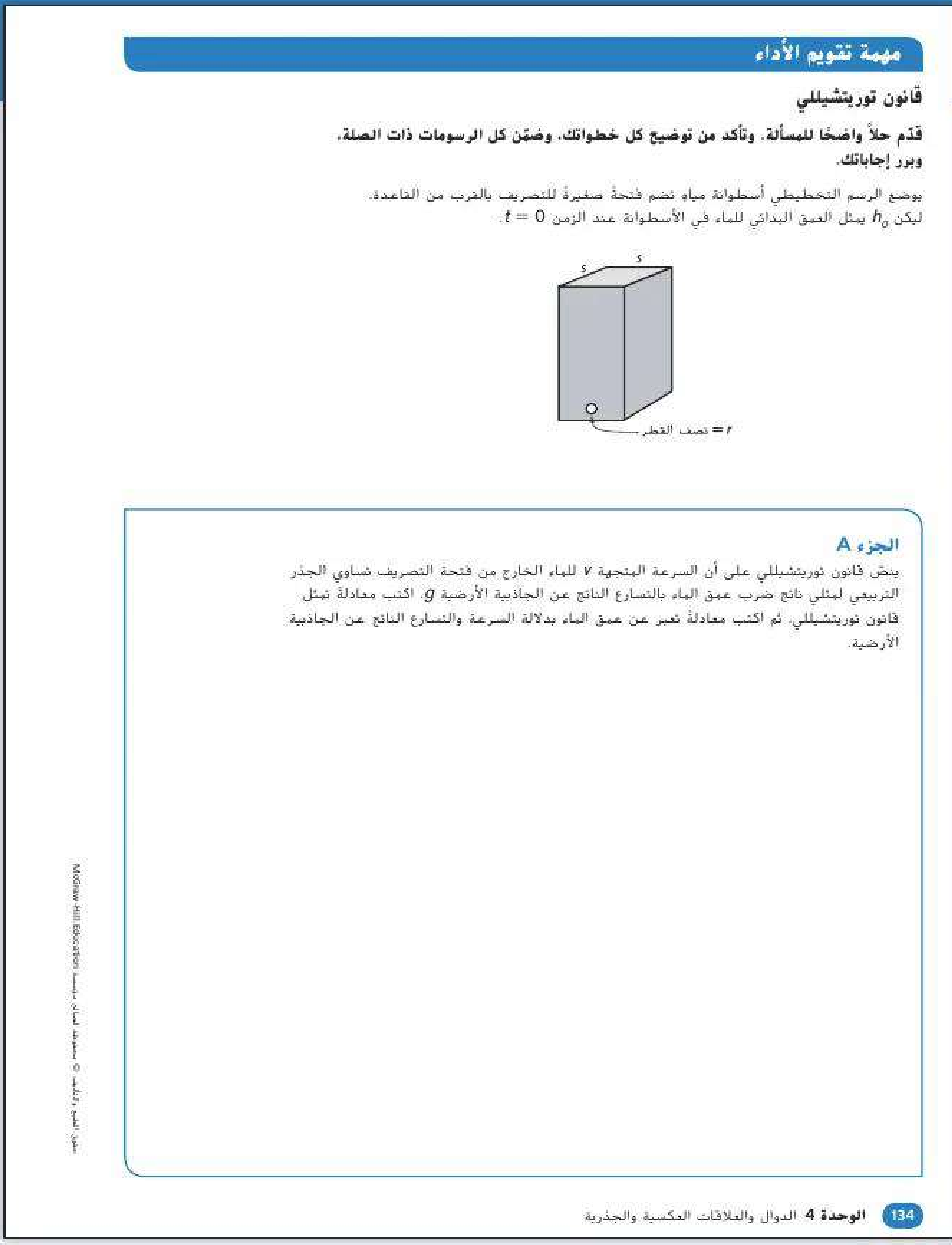
تساوي القوة الكلية التي يخضع لها جسمٌ ناتج ضرب كتلته وتسارعه. أي $F_{total} = ma$. تساوي كتلة السيارة 1300 kg. وباستخدام إجاباتك والمعلومات المعطاة أعلاه، حدّد ما يلي:

i) القوة المطبّقة على السيارة لتسريعها (لا تتضمن قوة الجر)

ii) الزمن الذي تتساوى فيه قوة الجر مع القوة المطبقة لتسريع السيارة

معايير رصد الدرجات

الجزء	أقصى النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	4	$F = kv^2$؛ باستخدام النقطة $(1, 0.04)$، $0.04 = k(1)^2$ أو $k = 0.04$. إذًا $F = 0.04v^2$ إيجاد حل v، $v = \sqrt{\frac{F}{0.04}} = \frac{\sqrt{F}}{0.2} = 5\sqrt{F}$ = المدى هو مجال F، أو $0 \le v \le 75$. المجال هو مدى F، $0 \le F \le 225$.
B	2	$F(t) = 0.04(3t+5)^2 = 0.04(9t^2 + 30t + 25) = \frac{9}{25}t^2 + \frac{6}{5}t + 1$.
C	2	i) $F_{\text{الإجمالي}} = ma = (1300)(3) = 3900$; ii) $3900 = \frac{9}{25}t^2 + \frac{6}{5}t + 1$. بعد تحويل المقامات لأبسط صورها، فتعطينا الصيغة التربيعية الإجابة الموجبة بصيغة $t = \frac{-30 + \sqrt{900 - (4)(9)(-97475)}}{18} \approx 102.4\ s \approx 1.71\ min$
الإجمالي	8	


مهمة تقويم الأداء

قانون توريتشيللي

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. وتأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وبرر إجاباتك.

يوضح الرسم التخطيطي أسطوانة مياه تضم فتحة صغيرة للتصريف بالقرب من القاعدة. ليكن h_0 يمثل العمق البدائي للماء في الأسطوانة عند الزمن $t = 0$.

الجزء A

ينص قانون توريتشيللي على أن السرعة المتجهة v للماء الخارج من فتحة التصريف تساوي الجذر التربيعي لمثلي ناتج ضرب عمق الماء بالتسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية g. اكتب معادلة تمثل قانون توريتشيللي. ثم اكتب معادلةً تعبر عن عمق الماء بدلالة السرعة والتسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية.

134 الوحدة 4 الدوال والعلاقات العكسية والجذرية

قانون توريتشيللي

سوف يكتب الطلاب معادلات جذرية ويحلونها من خلال تمثيل تدفق من خزان متسرب.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: الوحدة 6 مهمة تقويم الأداء تدعم الممارسات في الرياضيات **م.م.ر 1، م.م.ر2 ، م.م.ر 4، م.م.ر6.**

بداية سريعة

في **الجزء C**، يتعين على الطلاب تحديد القيمة الثابتة **C** الموضحة في الحالة الأولية للخزان. ساعد على تحديد المعلومات الضرورية بشكل صحيح من خلال طرح الأسئلة التالية.

- ما القيمة الأولية لـ t؟
  القيمة الأولية، $t = 0$.
- ما القيمة الأولية لـ h؟
  القيمة الأولية، $h = h_0$

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتوافق مهمة تقييم الأداء هذه مع الممارسة **م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. تعتبر فكرة تسرب سائل ما من فتحة بوعاء مألوفة للطلاب. على الرغم من أنهم لم يتفكروا من قبل بالوصف الرياضي للمعدل المتغير لارتفاع السائل بالوعاء أو بمعدل تدفق السائل من الوعاء. وهذا يوفر أيضًا فرصة لفهم الممارسة **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**.

م.م.ر 6

نصيحة للتدريس

الممارسة م.م.ر 6 (مراعاة الدقة) تتضمن الاستخدام المناسب لوحدات القياس. إلى جانب الاستخدام الصحيح لعلامة = و ≈. فكلا المهارتين مطلوبتان للنجاح في تلك المهمة. يجب أن يتمكن الطلاب من إيجاد وحدات نيوتن عبر الإنترنت. وقد يفي القاموس بذلك. تأكد من تحويل الطلاب 15 سنتيمترًا إلى 0.15 m بشكل صحيح قبل عمل الحسابات.

الجزء B

يساوي الثابت g تقريبًا 9.81 N/kg. حيث يرمز الحرف N إلى النيوتن. ابحث عن النيوتن بين أنواع الوحدات. ومن ثم أوضح أن الوحدات في المعادلة الواردة في **الجزء A** هي الوحدات المتوقعة للسرعة المتجهة.

الجزء C

إذا كان h هو عمق الماء عند الزمن t. فيمكن أن توضح مع تصريف الماء من الأسطوانة أن $2\sqrt{h} = \frac{-r^2}{s^2}\sqrt{2g} \cdot t + C$، حيث C ثابت. استخدم الحالة البدائية للماء في الأسطوانة لتحديد قيمة C. وعوّض قيمة C في المعادلة الأصلية.

الجزء D

حلّ معادلتك في **الجزء C** لإيجاد t. كم سيستغرق تصريف الأسطوانة بصورةٍ كاملةً إذا كانت ممتلئة وتضم $90\ m^3$ من الماء؟ استخدم $s = 3$ m و $r = 15$ cm.

معايير رصد الدرجات

الجزء	أقصى النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	$v = \sqrt{2gh}; h = \frac{v^2}{2g}$
B	2	يتميز النيوتن بوحدات $kg \cdot m/s^2$؛ إذًا $\sqrt{2gh}$ به وحدات $\sqrt{\frac{kg \cdot m \cdot m}{kg \cdot s^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$، وهي الوحدة الصحيحة للسرعة.
C	2	عند $t = 0$. يكون العمق h_0. إذًا $2\sqrt{h_0} = \frac{-r^2}{s^2}\sqrt{2g} \cdot 0 + C$ **إذًا** $2\sqrt{h_0} = C. 2\sqrt{h} = \frac{-r^2}{s^2}\sqrt{2g} \cdot t + 2\sqrt{h_0}$
D	4	$t = \frac{2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0}}{-\frac{r^2}{s^2}\sqrt{2g}}$ ؛ إن كان الخزان ممتلئًا. إذًا $h_0 = \frac{90}{3^2} = 10$ m. عندما يتسرب الخزان. $h = 0$. إذًا $t = \frac{2\sqrt{0} - 2\sqrt{10}}{-\frac{(0.15)^2}{3^2}\sqrt{2(9.81)}} \approx 571.14$، أو حوالي 9.5 دقائق.
الإجمالي	10	

تشخيص الأخطاء

بالنسبة للطلاب الذين يمثلون الدالة في **الفقرة 3** بيانيًا بشكل غير صحيح قد لا يفهمون كيفية استخدام التحويلات للدالة الأساسية لتمثيل هذه الدالة بيانيًا بسهولة. وضّح أن الدالة الأساسية، $f(x) = \sqrt{x}$، مضغوطة رأسيًا بعامل 3 مع الإزاحة لليمين بمقدار وحدتين.

الطلاب الذين قدموا $3x^2 - 9x + 7$ كإجابة للجزء الثاني في **الفقرة 6** قد يكونوا وزعوا العلامة السلبية بشكل غير صحيح في $g(x)$ و $h(x)$، والتي تنطبق على الحدّين، وليس الحد الأول فقط. راجع خاصية التوزيع، مع الانتباه بشدة لعلامات الحدين.

الطلاب الذين قدموا الإجابة $210\sqrt{14} + 875$ للجزء الأول في **الفقرة 7** قد يكونوا طبقوا خاصية التوزيع قبل التربيع. راجع الترتيب الصحيح للعمليات لتبسيط هذا التعبير.

تدريب على الاختبار المعياري

1. إذا علمت أن $f(x) = x^2 + 4x - 5$ و $g(x) = 2x^2 + 13x + 15$. أكمل ما يلي. واشمل على أيّ قيود في المجال

$(f + g)(x) = \boxed{3x^2 + 17x + 10}$

$(f - g)(x) = \boxed{-x^2 - 9x - 20}$

$(fg)(x) = \boxed{2x^4 + 21x^3 + 57x^2 - 5x - 75}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \boxed{\frac{x-1}{2x+3},\ x \neq -5,\ x \neq -\frac{3}{2}}$

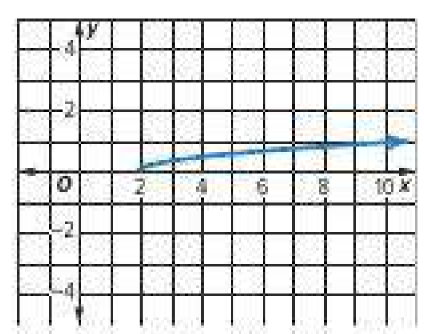
2. بسّط كل تعبير مما يلي. وافترض أن جميع المتغيرات موجبة.

$\sqrt[3]{\frac{16x^{12}}{216}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{2}x^4}{3}}$

$\sqrt[4]{81x^8y^2} = \boxed{3x^2\sqrt{y}}$

3. خذ الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{3}$.

مثّل f(x) بيانيًا.



ما مجال الدالة f(x) ومداها؟

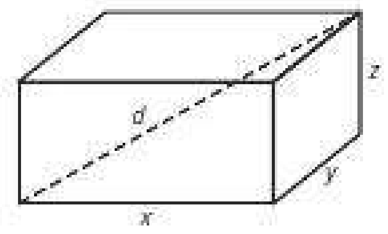
المجال: $\boxed{x \geq 2}$

المدى: $\boxed{y \geq 0}$

4. حلّ $\sqrt{3x - 1} \geq 7$ لإيجاد قيمة x.

$\boxed{x \geq \frac{50}{3}}$

5. يعطى طول قطر مجسم شكله متوازي المستطيلات بالقانون $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$، حيث x و y و z أبعاد المجسم.



اكتب القانون الذي يعطي ارتفاع المجسم z بدلالة d و x و y واستخدمه لإيجاد الارتفاع عندما يساوي الطول 2 والعرض 4 والقطر 7.

$\boxed{z = \sqrt{d^2 - x^2 - y^2},\ \sqrt{29}}$

6. إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 4x$ و $g(x) = 5x + 3$ و $h(x) = -x^2 + 4$. أكمل ما يلي.

$(f + g + h)(x) = \boxed{x^2 + x + 7}$

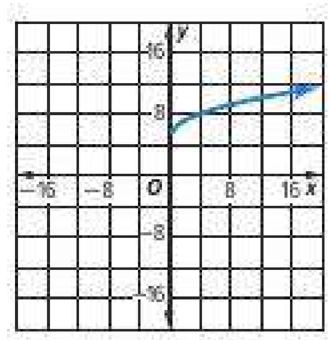
$(f - g - h)(x) = \boxed{3x^2 - 9x - 7}$

7. بسّط التعابير التالية.

$\sqrt{35}(3\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 = \boxed{25\sqrt{35} + 42\sqrt{10}}$

$4\sqrt{11} - 2\sqrt{2}(5\sqrt{6} - 3\sqrt{22}) = \boxed{16\sqrt{11} - 20\sqrt{3}}$

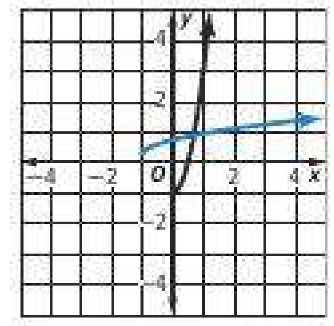
8. مثّل الدالة التالية بيانيًا: $f(x) = \sqrt{2x - 1} + 3$.



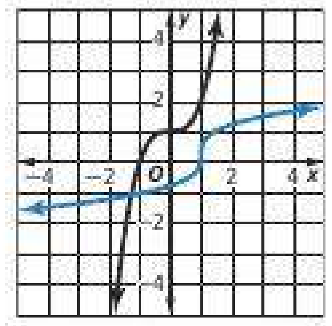
إستراتيجية خوض الاختبار

عند تبسيط تعابير الجذور، مثل **الجزء 2**، يجب على الطلاب أولاً إعادة كتابة التعبير بالأجزاء الرقمية المكتوبة في التحليل إلى العوامل الأولية. وهذا سيبسط عملية إيجاد الجذور.

9. يعطى التمثيلان البيانيان لـــ $f(x) = 4x^2 - 1$ ذات المجال $x \geq 0$ و $g(x) = x^3 + 1$ على مقياس مرتع. ارسم على نفس المحورين التمثيلين البيانيين لـــ $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ و $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$، وهما معكوسا $f(x)$ و $g(x)$.



$f(x) = 4x^2 - 1$ ضمن المجال $x \geq 0$



$g(x) = x^3 + 1$

10. يوضح الجدول التالي عمر شجرة مقابل قطر جذعها.

العمر (yrs)	16	14	12	10	8	6	4
القطر (cm)	7.7	7.2	6.7	6.1	5.4	4.7	3.9

ما نوع النموذج الذي يلائم البيانات على النحو الأفضل؟ اشرح عبر مقارنة الخصائص الواردة في الجدول بخصائص النموذج.

الجذر التربيعي؛ من أجل تغير ثابت في قيمة y، الفروق الثانية في قيم x ثابتة تقريبًا، حيث تطابق خصائص دالة الجذر التربيعي.

11. تعطي الدالة $f(x) = 2\pi(x + 1)$ محيط الهدف في إحدى الألعاب الحاسوبية بعد x ثانية من نقر اللاعب على الهدف. فما معكوس هذه الدالة؟ اشرح ما الذي تمثّله.

$f^{-1}(x) = \frac{x}{2\pi} - 1$؛ يمكن استخدام الدالة العكسية لتحديد الزمن المنقضي بالثواني منذ نقر اللاعب على الهدف، إذا كان للهدف المحيط x.

12. حلّ $x = \sqrt{x+8} + 4$ لإيجاد x. وصف طريقة الحل التي اتبعتها.

8: $x - 4\sqrt{x+8} = x - 4$؛ اعزل الجذر.

$x + 8 = x^2 - 8x + 16$؛ بتربيع كلا الطرفين.

$x^2 - 9x + 8 = 0$؛ بنقل الحدود إلى أحد الطرفين.

$(x - 8)(x - 1) = 0$؛ بالتحليل إلى العوامل.

الحلول: $x = 8$ أو $x = 1$ ولكن 1 هو حلّ دخيل.

تشخيص الأخطاء

قد يحتاج الطلاب الذين يواجهون صعوبة في رسم التمثيل البياني في **الفقرة 9** إلى استخدام بنية ذات مدى أكبر من خلال رسم الخط $y = x$ قبل رسم المعكوس.

والطلاب الذين قدموا تفسيرًا خاطئًا في **الفقرة 11** قد يحتاجون للمساعدة في ترتيب المعلومات الخاصة بالدالة ومعكوسها. وضّح لهم إمكانية كتابة "ثوانٍ بعد النقر ← محيط الدائرة" عن الدالة. فبالنسبة للدالة العكسية يمكنهم كتابة "ثوانٍ بعد النقر ← محيط الدائرة." يمكنهم بعد ذلك كتابة عبارة وفقًا لذلك.

العناوين

الجزء 10

[2] نموذج جذر تربيعي محدد بتفسير صحيح

[1] نموذج جذر تربيعي محدد، ولكن لا يوجد تفسير أو غير مكتمل

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

الجزء 11

[2] دالة عكسية صحيحة مع تقديم تفسير

[1] خطأ طفيف في الدالة أو التفسير

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

الجزء 12

[2] إجابة صحيحة مع توضيح الخطوات، بما فيها تحديد الحل الدخيل

[1] إجابة صحيحة، ولكن التفسير المقدم غير واضح أو غير مكتمل أو لم يتم تحديد الحل الدخيل

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج غير صحيحين

إستراتيجية خوض الاختبار

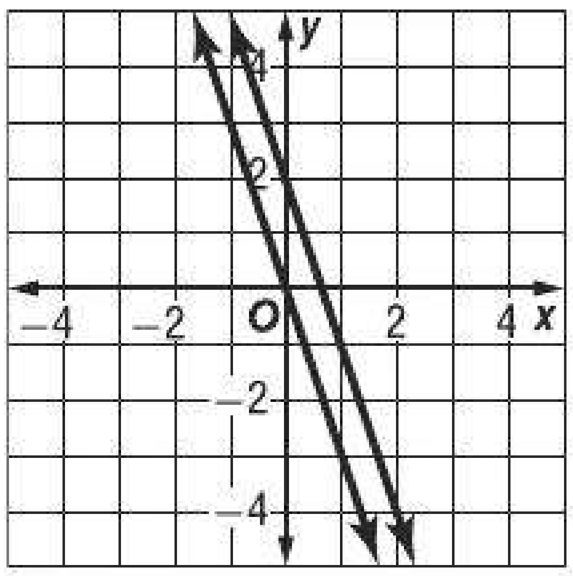
بالنسبة للتمارين التي تطلب من الطلاب وصف عمليات الحل، مثل **الجزء 12**، فتحتاج إلى توضيح الخطوات بكل وضوح للحصول على الدرجة الكاملة. يجب أن يفكر الطلاب ما إذا كان من السهل على زملائهم متابعة طريقة تفكيرهم من خلال قراءة الحل. وإن لم يكن كذلك، فعليهم الرجوع لتوضيح خطواتهم.

1-1 تمارين المهارات

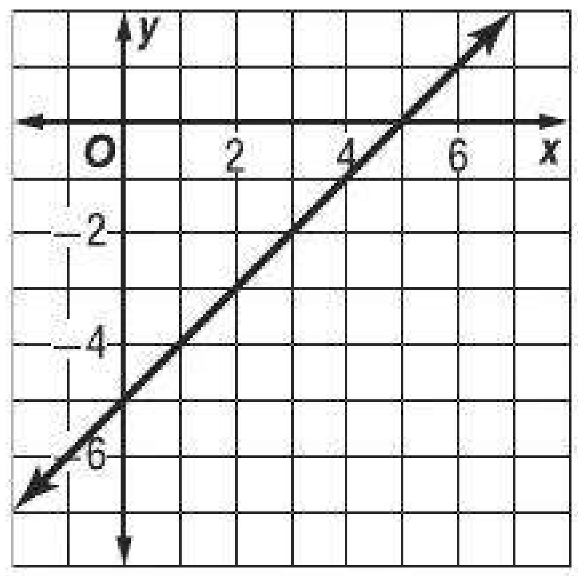
حل أنظمة المعادلات

مثّل كل نظام معادلات بيانيًا وصفه من حيث كونه متوافقًا ومستقلًا، أو متوافقًا وغير مستقل، أو غير متوافق.

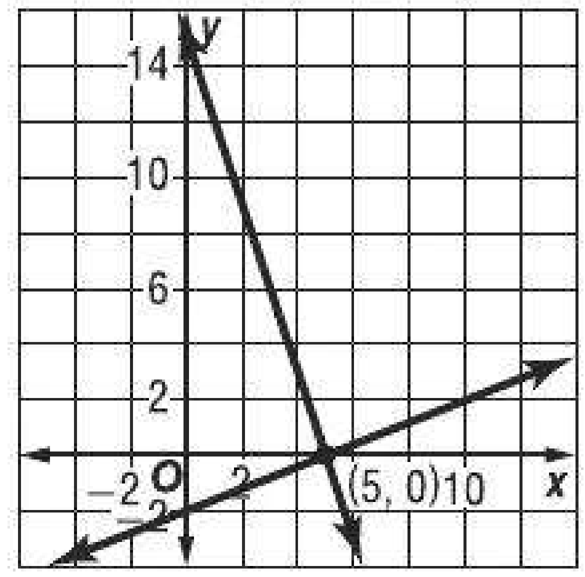
1. $y = -3x$
$y = -3x + 2$



2. $y = x - 5$
$-2x + 2y = -10$



3. $2x - 5y = 10$
$3x + y = 15$



أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

4. $-r + t = 5$
$-2r + t = 4$

5. $2x - y = -5$
$4x + y = 2$

6. $x - 3y = -12$
$2x + y = 11$

7. $2p - 3r = 6$
$-2p + 3r = -6$

8. $6w - 8z = 16$
$3w - 4z = 8$

9. $c + d = 6$
$c - d = 0$

10. $2u + 4x = -6$
$u + 2x = 3$

11. $3a + b = -1$
$-3a + b = 5$

12. $2x + y = 6$
$3x - 2y = 16$

13. $3y - z = -6$
$-3y - z = 6$

14. $c + 2d = -2$
$-2c - 5d = 3$

15. $3r - 2t = 1$
$2r - 3t = 9$

16. مجموع رقمين هو 12. والفرق بين نفس الرقمين هو 4−.
أوجد الرقمين.

17. يبلغ ضعف أحد الأعداد ناقص عدد ثانٍ 1−. ويبلغ ضعف العدد الثاني مجموع مع ثلاثة أضعاف العدد الأول 9. أوجد العددين.

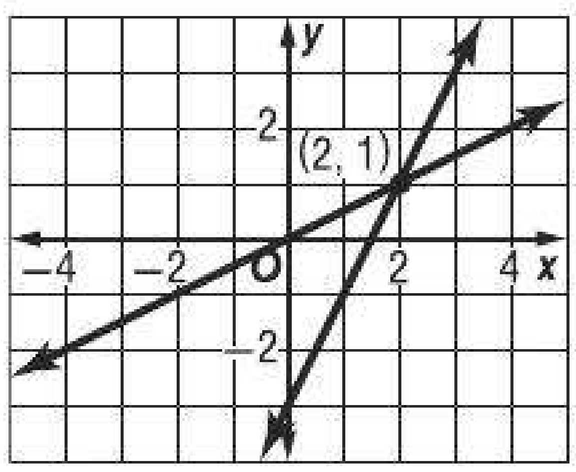
الاسم ______________ التاريخ ______________ المدّة ______________

1-1 تمرين

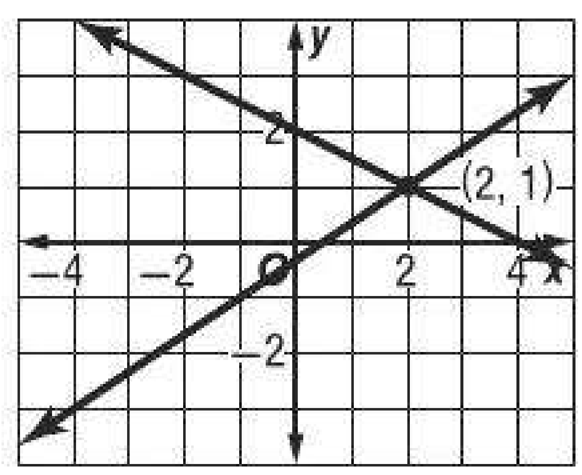
حل أنظمة المعادلات

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

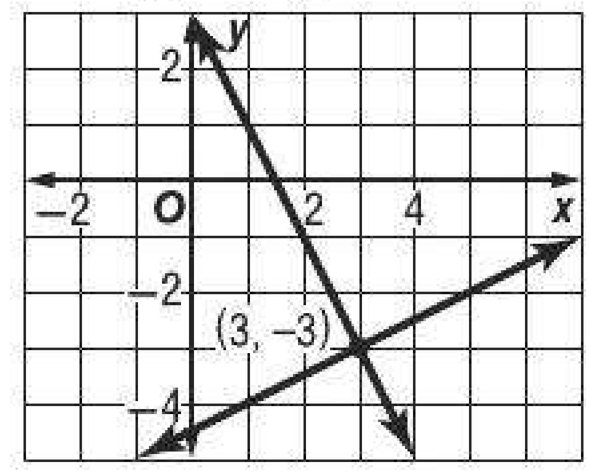
1. $x - 2y = 0$
$y = 2x - 3$



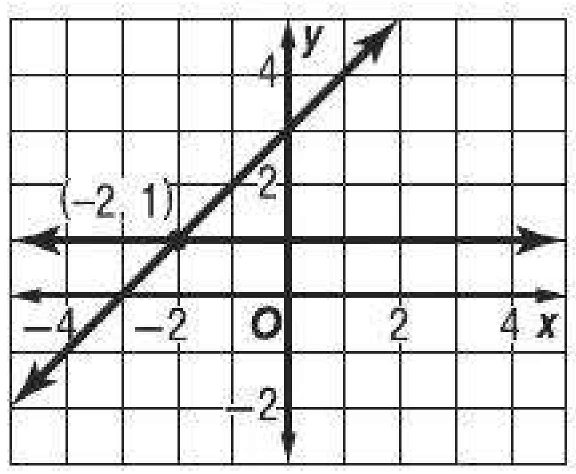
2. $x + 2y = 4$
$2x - 3y = 1$



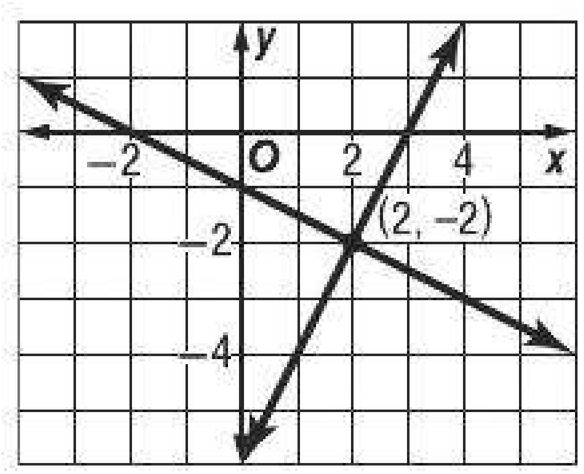
3. $2x + y = 3$
$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$



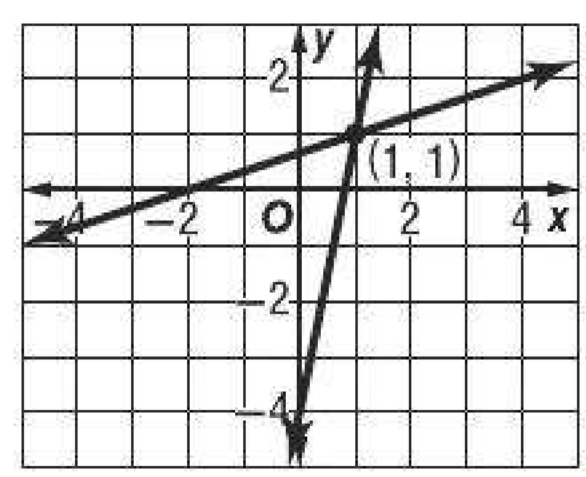
4. $y - x = 3$
$y = 1$



5. $2x - y = 6$
$x + 2y = -2$



6. $5x - y = 4$
$-2x + 6y = 4$



أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

7. $8x + 3y = -5$
$10x + 6y = -13$

8. $8q - 15r = -40$
$4q + 2r = 56$

9. $3x - 4y = 12$
$\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}y = \frac{4}{3}$

10. $4b - 2d = 5$
$-2b + d = 1$

11. $x + 3y = 4$
$x = 1$

12. $4m - 2p = 0$
$-3m + 9p = 5$

13. $5g + 4k = 10$
$-3g - 5k = 7$

14. $0.5x + 2y = 5$
$x - 2y = -8$

15. $h - z = 3$
$-3h + 3z = 6$

16. الرياضات دفع فريق الكرة الطائرة العام الماضي AED 5 لكل زوج من الجوارب و 17 لكل زوج من السراويل القصيرة بإجمالي للمشتريات يبلغ AED 315. ودفع هذا العام AED 342 لشراء نفس العدد من الأزواج للجوارب والسراويل القصيرة لأن تكلفة الجوارب تبلغ الآن AED 6 لكل زوج وتبلغ تكلفة السراويل القصيرة AED 18.

a. اكتب نظام من معادلتين تمثلان عدد أزواج الجوارب والسراويل القصيرة التي تم شراؤها كل عام.

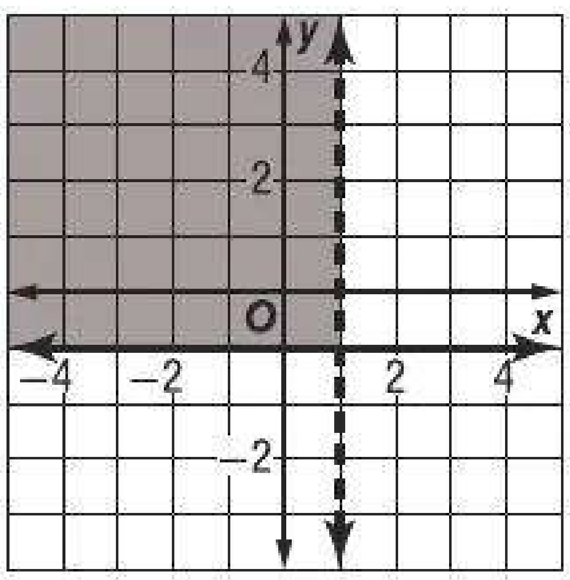
b. كم عدد أزواج الجوارب والسراويل القصيرة التي اشتراها الفريق كل عام؟

1-2 تمارين المهارات

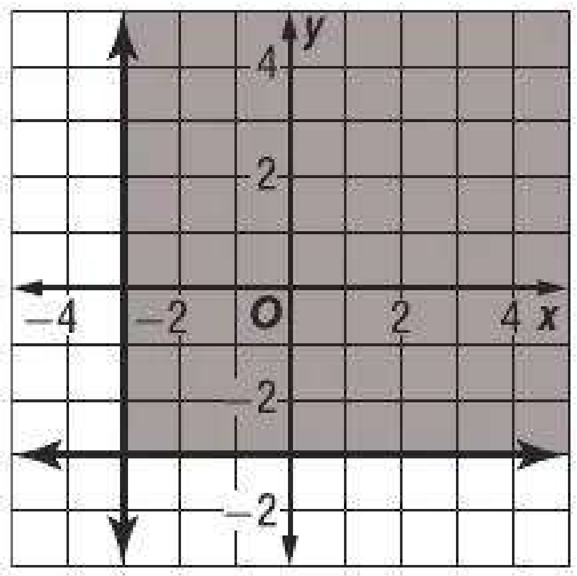
حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني

أوجد حل كل من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

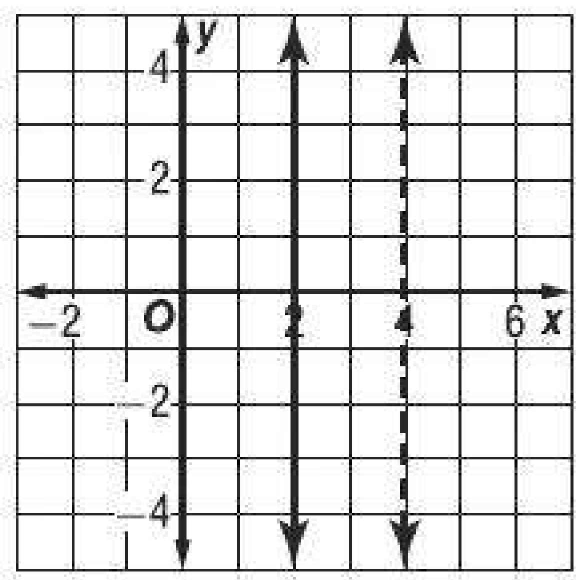
1. $x < 1$
$y \geq -1$



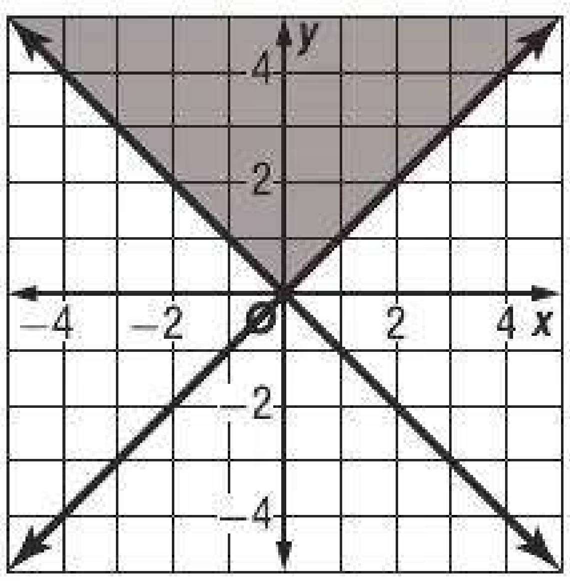
2. $x \geq -3$
$y \geq -3$



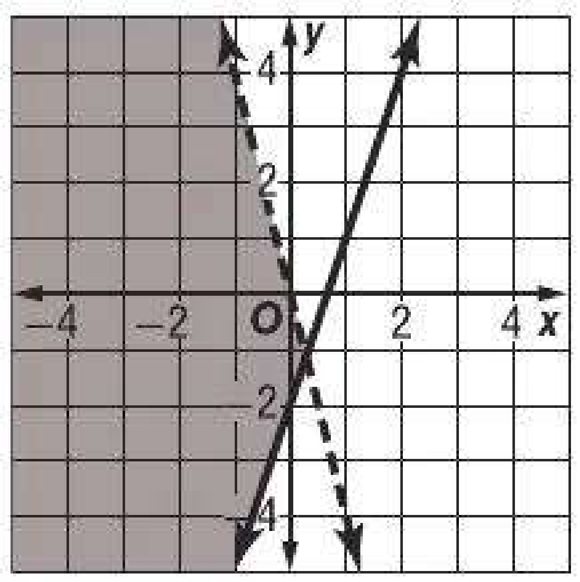
3. $x \leq 2$
$x > 4$



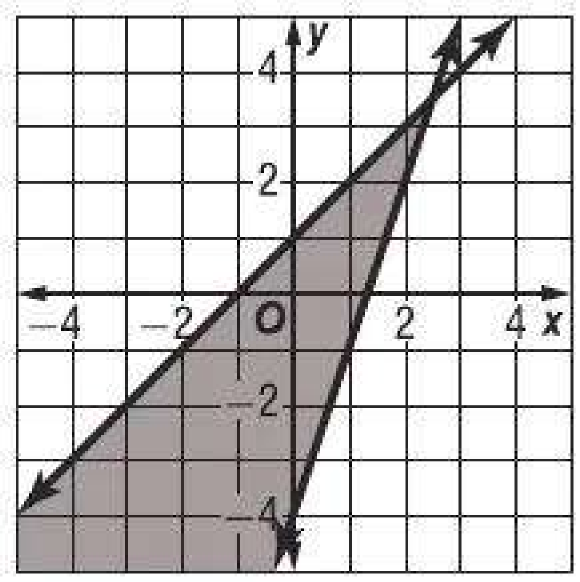
4. $y \geq x$
$y \geq -x$



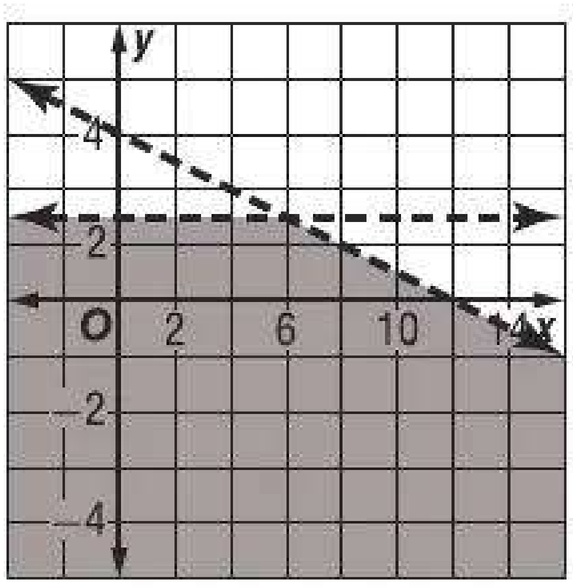
5. $y < -4x$
$y \geq 3x - 2$



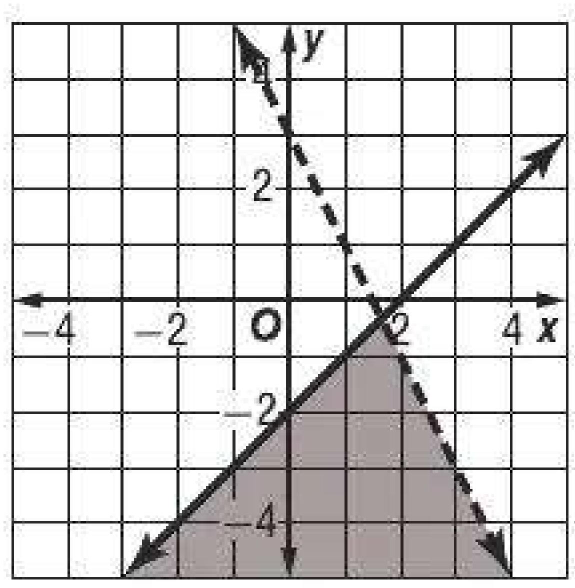
6. $x - y \geq -1$
$3x - y \leq 4$



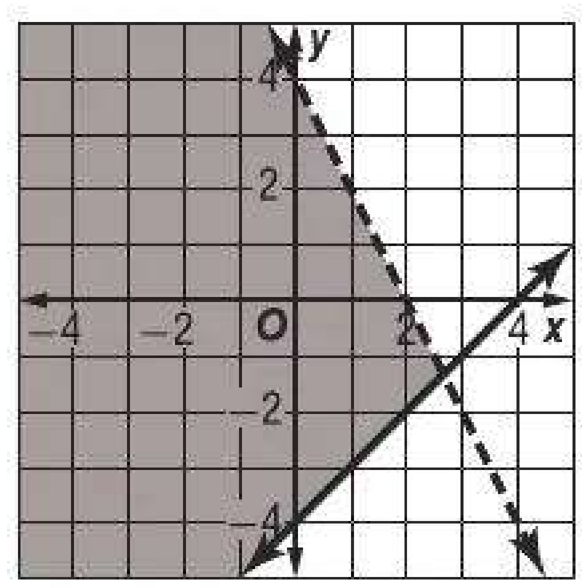
7. $y < 3$
$x + 2y < 12$



8. $y < -2x + 3$
$y \leq x - 2$



9. $x - y \leq 4$
$2x + y < 4$



أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الذي يشكله كل نظام متباينات.

10. $y \leq 0$
$x \leq 0$
$y \geq -x - 1$

11. $y \leq 3 - x$
$y \geq 3$
$x \geq -5$

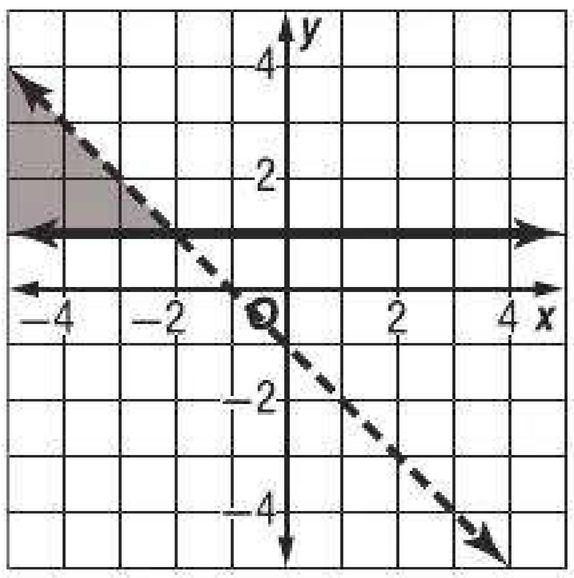
12. $x \geq -2$
$y \geq x - 2$
$x + y \leq 2$

1-2 تمرين

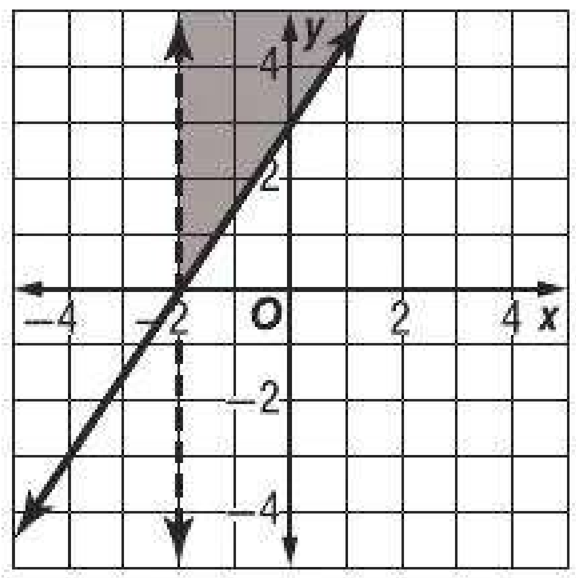
حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني

أوجد حل كل من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

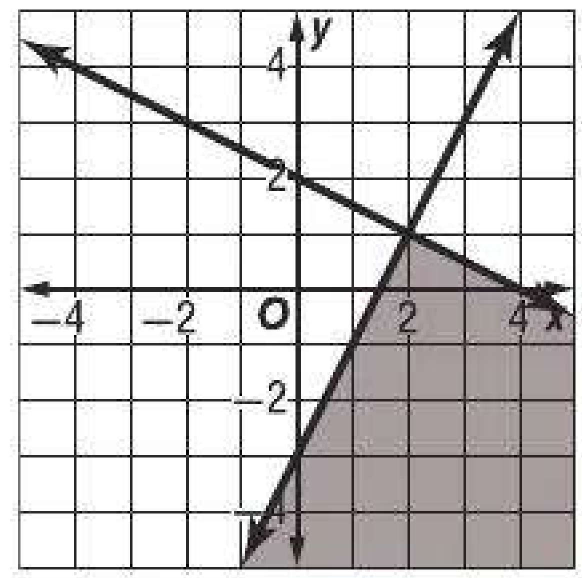
1. $y + 1 < -x$
$y \geq 1$



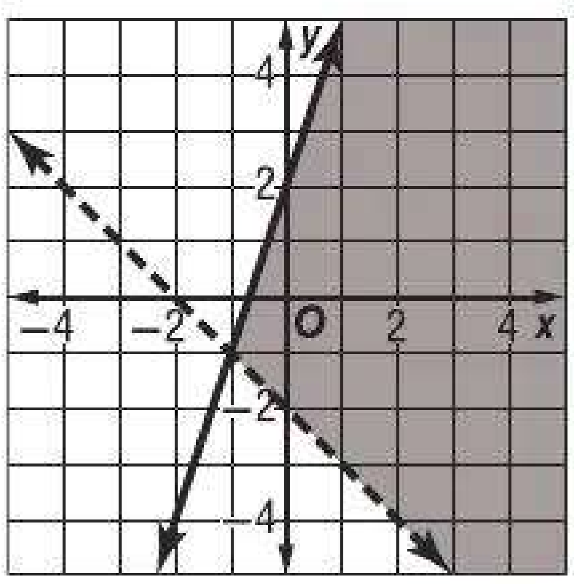
2. $x > -2$
$2y \geq 3x + 6$



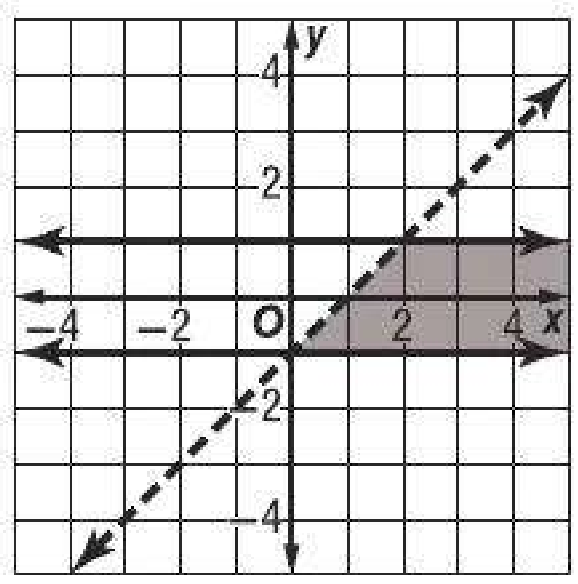
3. $y \leq 2x - 3$
$y \leq -\frac{1}{2}x + 2$



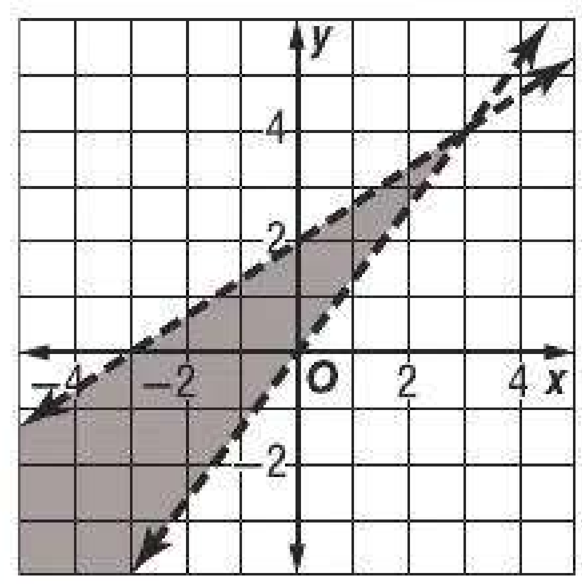
4. $x + y > -2$
$3x - y \geq -2$



5. $|y| \leq 1$
$y < x - 1$



6. $3y > 4x$
$2x - 3y > -6$



أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الذي يشكله كل نظام متباينات.

7. $y \geq 1 - x$
$y \leq x - 1$
$x \leq 3$

8. $x - y \leq 2$
$x + y \leq 2$
$x \geq -2$

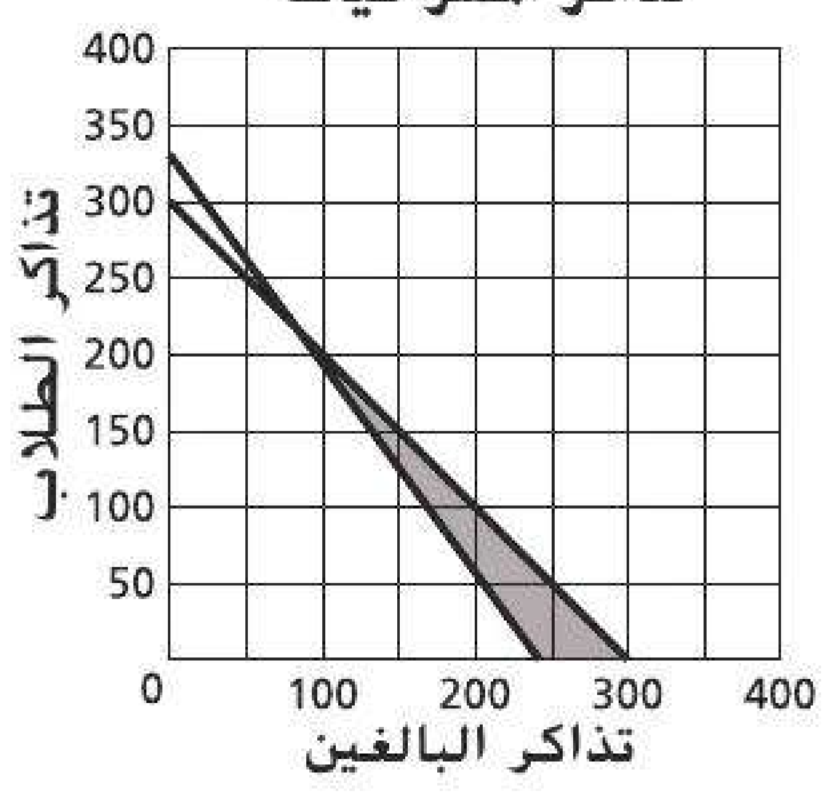
9. $y \geq 2x - 2$
$2x + 3y \geq 6$
$y < 4$

10. العروض المسرحية يبيع نادي الدراما تذاكر مسرحيته. تبلغ تكلفة تذكرة البالغين AED 15 وتبلغ تكلفة تذكرة الطلاب AED 11. تستوعب القاعة مقاعد لعدد 300 من حاملي التذاكر. ويرغب نادي الدراما في جمع AED 3630 على الأقل من مبيعات التذاكر.

a. اكتب ومثّل نظام من أربع متباينات بيانيًا يصف كم عدد كل نوع من التذاكر الذي يجب على النادي بيعه ليحقق هدفه.

b. أدرج ثلاثة توافيق مختلفة من التذاكر المبيعة تحقق المتباينات.

تذاكر المسرحيات

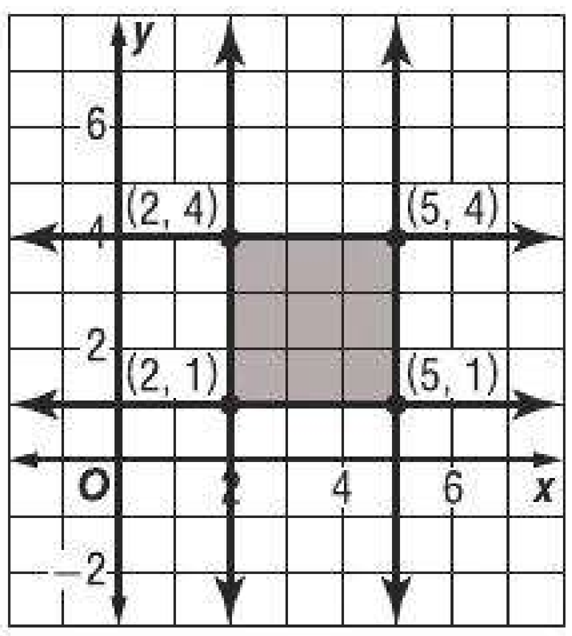


1-3 تمارين المهارات

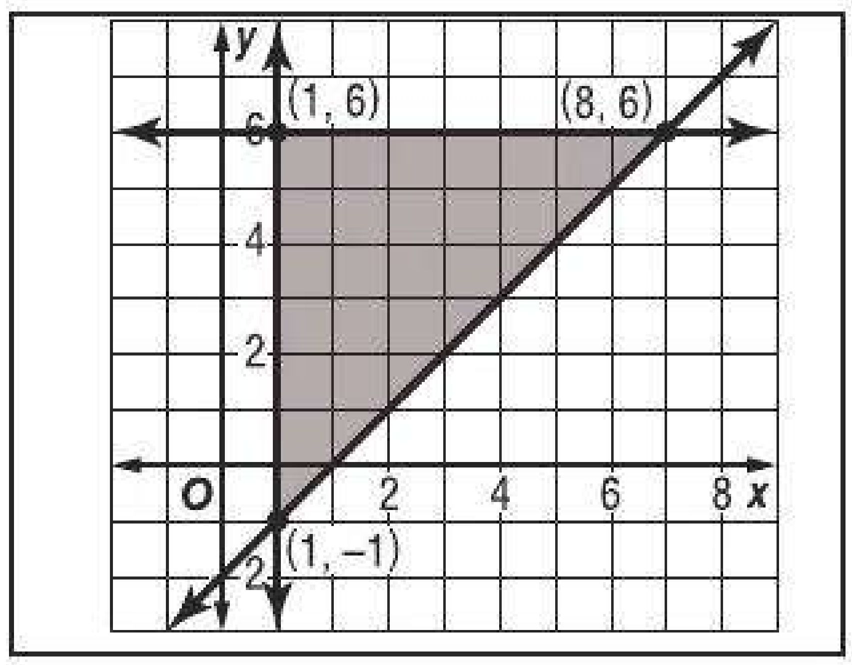
البحث عن الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

مثّل كل نظام متباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وأوجد القيمة العظمى والصغرى لدالة هذه المنطقة.

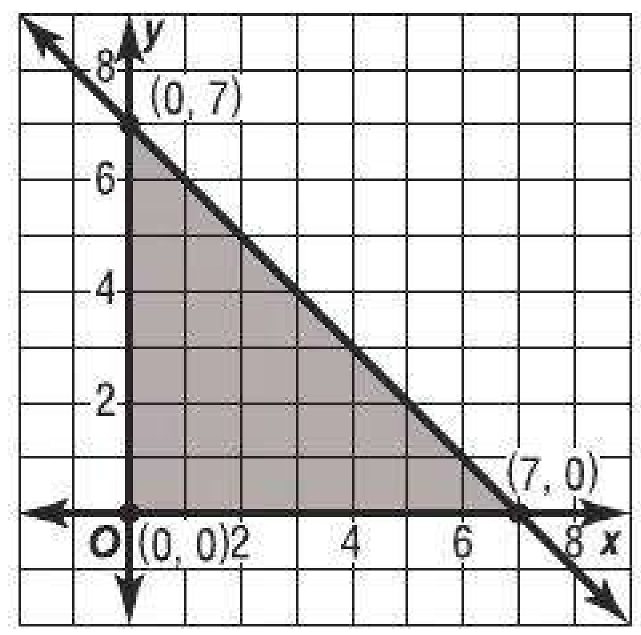
1. $x \ge 2$
$x \le 5$
$y \ge 1$
$y \le 4$
$f(x, y) = x\ 0+ y$



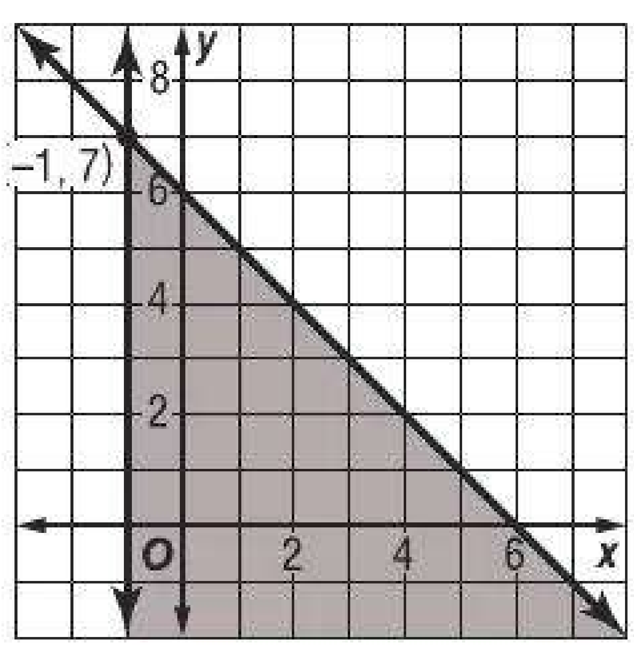
2. $x \ge 1$
$y \le 6$
$y \ge x - 2$
$f(x, y) = x - y$



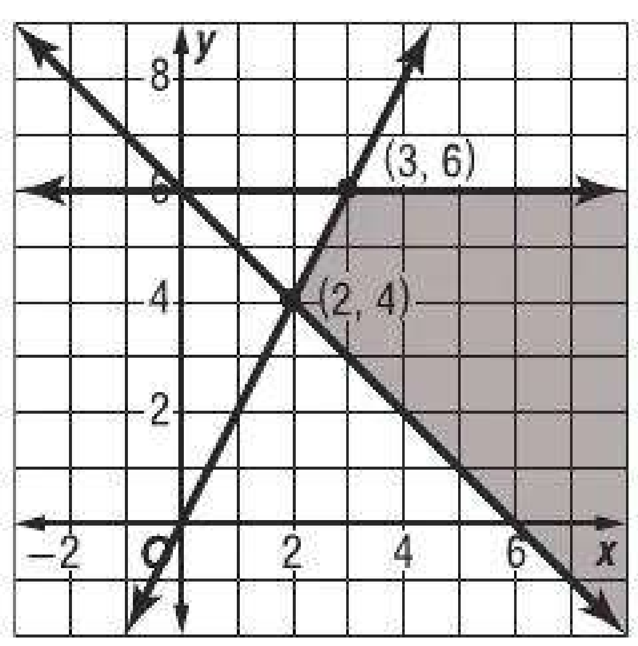
3. $x \ge 0$
$y \ge 0$
$y \le 7 - x$
$f(x, y) = 3x + y$



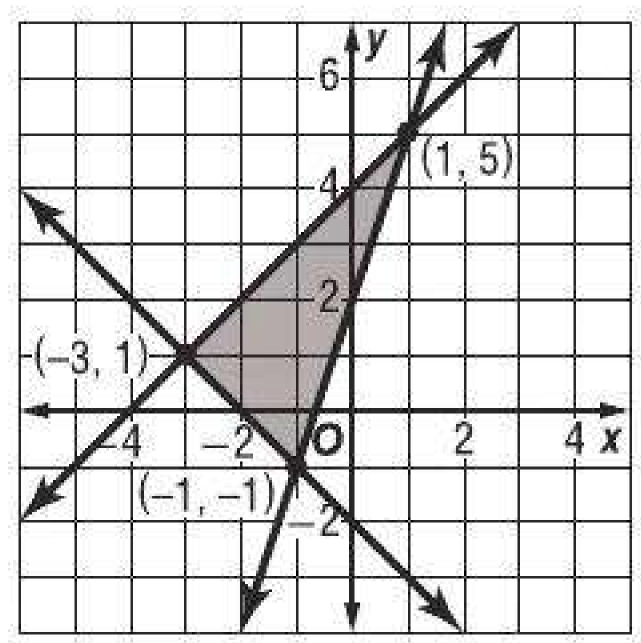
4. $x \ge -1$
$x + y \le 6$
$f(x, y) = x + 2y$



5. $y \le 2x$
$y \ge 6 - x$
$y \le 6$
$f(x, y) = 4x + 3y$



6. $y \ge -x - 2$
$y \ge 3x + 2$
$y \le x + 4$
$f(x, y) = -3x + 5y$



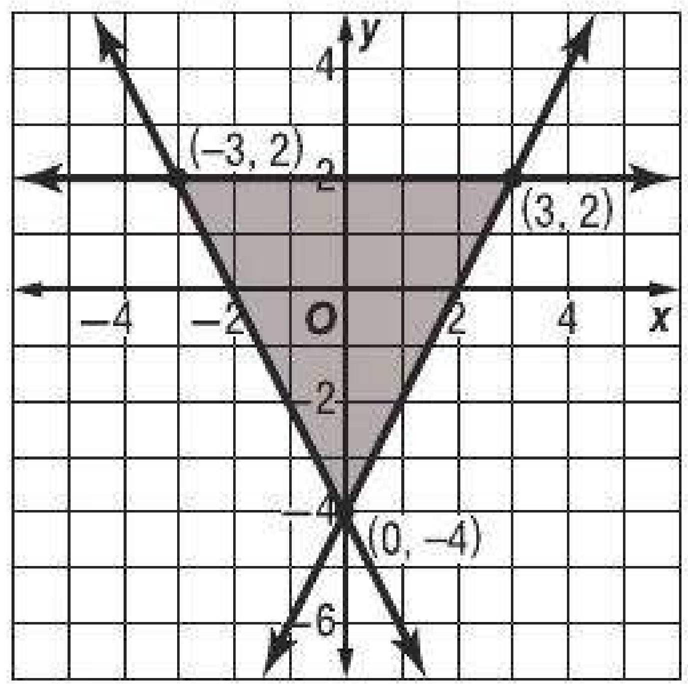
7. الصناعة ينتج مصنع لحقائب الظهر حقائب ذات إطار داخلي وحقائب ذات إطار خارجي. افترض أن x تمثل عدد الحقائب ذات الإطار الداخلي التي تم إنتاجها في خلال ساعة واحدة وافترض أن y تمثل عدد الحقائب ذات الإطار الخارجي التي تم إنتاجها في خلال ساعة واحدة $x + 3y \le 18$، و $2x + y \le 16$، و $y \ge 0$، $x \ge 0$ قم بوصف قيود صناعة كلتا الحقيبتين. استخدم دالة الربح $f(x, y) = 50x + 80y$ والقيود المعطاة لتحديد أقصى ربح من صناعة حقيبتي الظهر كلتيهما للقيود المعطاة.

1-3 تمرين

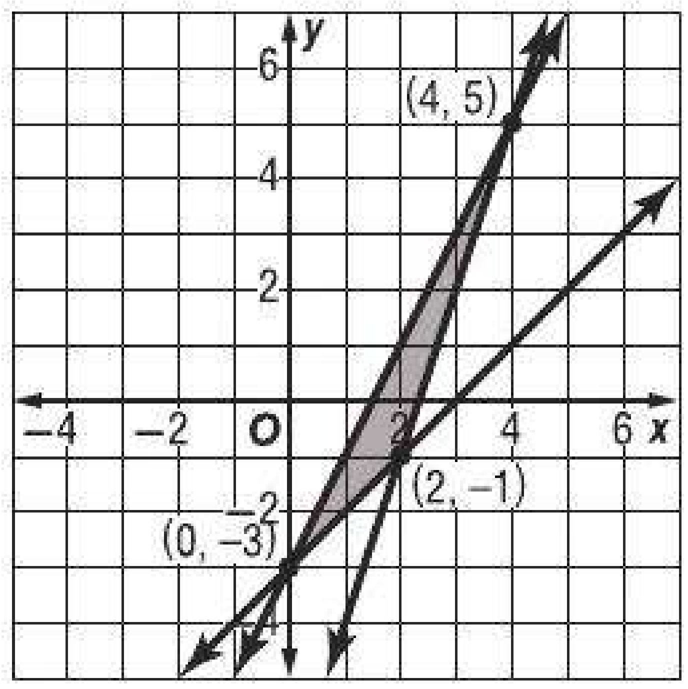
البحث عن الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

مثّل كل نظام متباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وأوجد القيمة العظمى والصغرى لدالة هذه المنطقة.

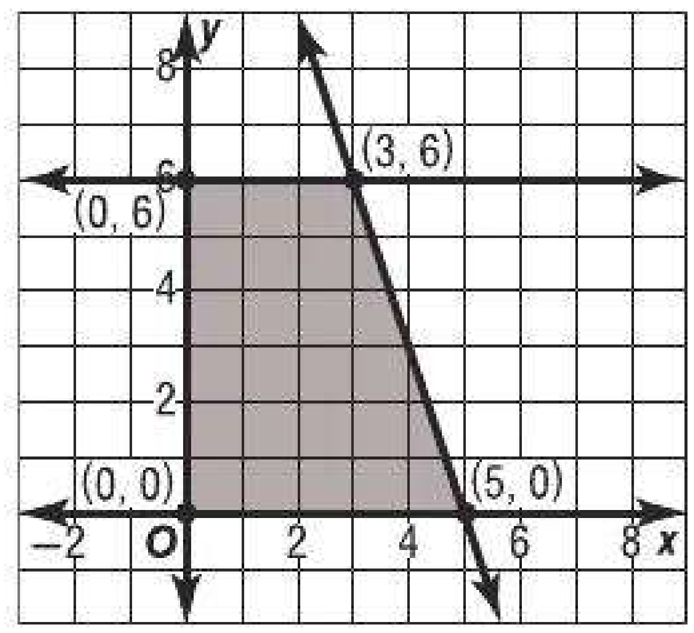
1. $2x - 4 \le y$
$-2x - 4 \le y$
$y \le 2$
$f(x, y) = -2x + y$
$f(x, y) = 3x + y$



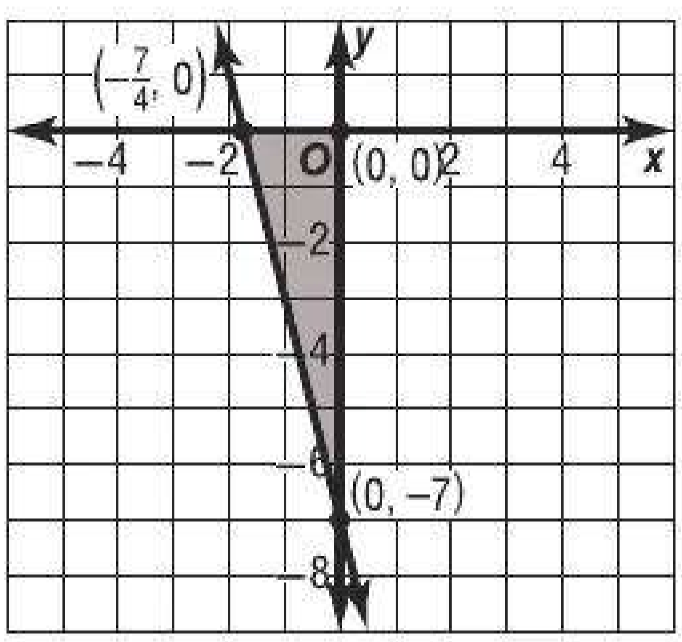
2. $3x - y \le 7$
$2x - y \ge 3$
$y \ge x - 3$
$f(x, y) = x - 4y$



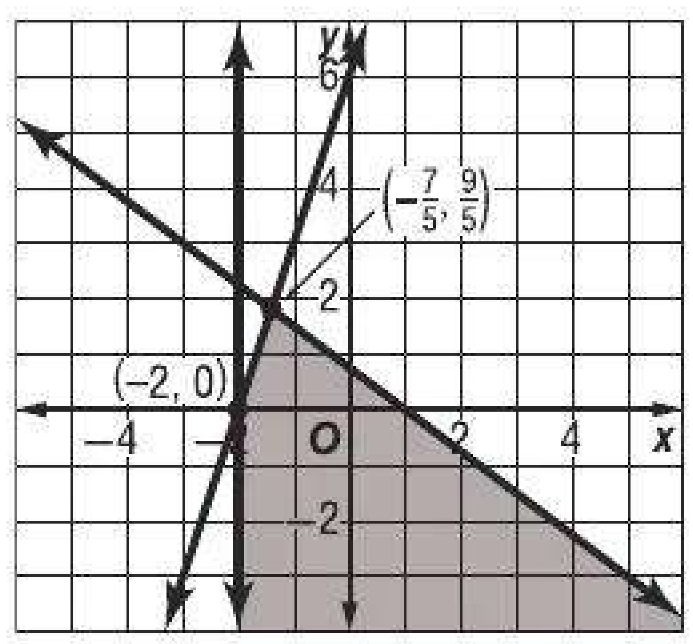
3. $x \ge 0$
$y \ge 0$
$y \le 6$
$y \le -3x + 15$



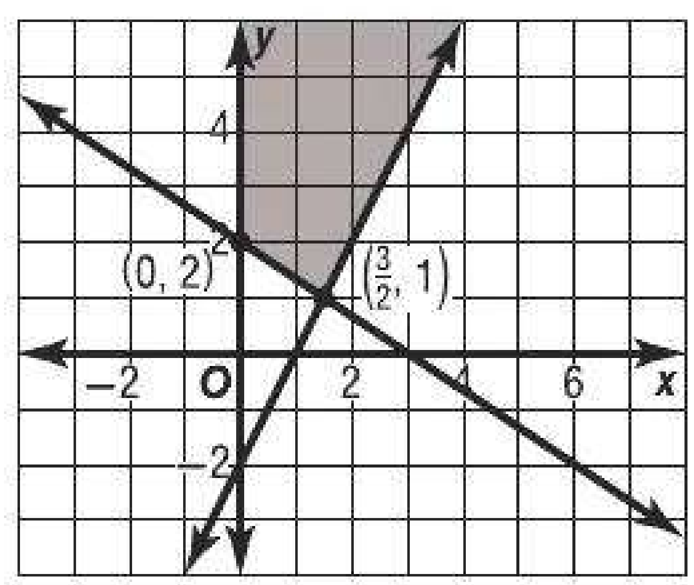
4. $x \le 0$
$y \le 0$
$4x + y \ge -7$
$f(x, y) = -x - 4y$



5. $y \le 3x + 6$
$4y + 3x \le 3$
$x \ge -2$
$f(x, y) = -x + 3y$



6. $2x + 3y \ge 6$
$2x - y \le 2$
$x \ge 0$
$y \ge 0$
$f(x, y) = x + 4y + 3$



7. الإنتاج يمكن أن يشكل نافخ الزجاج 8 مزهريات بسيطة ومزهريتين متقنتين في خلال ساعة. يجب أن يشكل العامل 40 مزهرية على الأقل في مناوبة عمل لا تزيد عن 8 ساعات.

a. افترض أن s تمثل الساعات المستغرقة في تشكيل المزهريات البسيطة الساعات المستغرقة في تشكيل المزهريات المتقنة. اكتب نظام متباينات يتضمن الوقت المستغرق في تشكيل كل نوع من المزهريات.

b. إذا كان نافخ الزجاج يحقق ربح يبلغ AED 30 في ساعة عمل لتشكيل المزهريات البسيطة و AED 35 في ساعة عمل لتشكيل المزهريات المتقنة. فاكتب دالة لإجمالي الربح المحقق من المزهريات.

c. أوجد عدد الساعات التي ينبغي أن يقضيها العامل على كل نوع من المزهريات لتحقيق أقصى ربح. وما هو مقدار هذا الربح؟

1-4 تمارين المهارات

أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات

أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

1. $2a + c = -10$
$b - c = 15$
$a - 2b + c = -5$

2. $x + y + z = 3$
$13x + 2z = 2$
$-x - 5z = -5$

3. $2x + 5y + 2z = 6$
$5x - 7y = -29$
$z = 1$

4. $x + 4y - z = 1$
$3x - y + 8z = 0$
$x + 4y - z = 10$

5. $-2z = -6$
$2x + 3y - z = -2$
$x + 2y + 3z = 9$

6. $3x - 2y + 2z = -2$
$x + 6y - 2z = -2$
$x + 2y = 0$

7. $-x - 5z = -5$
$y - 3x = 0$
$13x + 2z = 2$

8. $-3x + 2z = 1$
$4x + y - 2z = -6$
$x + y + 4z = 3$

9. $x - y + 3z = 3$
$-2x + 2y - 6z = 6$
$y - 5z = -3$

10. $5x + 3y + z = 4$
$3x + 2y = 0$
$2x - y + 3z = 8$

11. $2x + 2y + 2z = -2$
$2x + 3y + 2z = 4$
$x + y + z = -1$

12. $x + 2y - z = 4$
$3x - y + 2z = 3$
$-x + 3y + z = 6$

13. $3x - 2y + z = 1$
$-x + y - z = 2$
$5x + 2y + 10z = 39$

14. $3x - 5y + 2z = -12$
$x + 4y - 2z = 8$
$-3x + 5y - 2z = 12$

15. $2x + y + 3z = -2$
$x - y - z = -3$
$3x - 2y + 3z = -12$

16. $2x - 4y + 3z = 0$
$x - 2y - 5z = 13$
$5x + 3y - 2z = 19$

17. $-2x + y + 2z = 2$
$3x + 3y + z = 0$
$x + y + z = 2$

18. $x - 2y + 2z = -1$
$x + 2y - z = 6$
$-3x + 6y - 6z = 3$

19. يبلغ مجموع ثلاثة أعداد 18. ويبلغ مجموع أول وثاني عدد 15 ويكون العدد الأول ثلاثة أضعاف العدد الثالث. أوجد الأعداد.

1-4 تمرين

أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات

أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

1. $2x - y + 2z = 15$
$-x + y + z = 3$
$3x - y + 2z = 18$

2. $x - 4y + 3z = -27$
$2x + 2y - 3z = 22$
$4z = -16$

3. $a + b = 3$
$-b + c = 3$
$a + 2c = 10$

4. $3m - 2n + 4p = 15$
$m - n + p = 3$
$m + 4n - 5p = 0$

5. $2g + 3h - 8j = 10$
$g - 4h = 1$
$-2g - 3h + 8j = 5$

6. $2x + y - z = -8$
$4x - y + 2z = -3$
$-3x + y + 2z = 5$

7. $2x - 5y + z = 5$
$3x + 2y - z = 17$
$4x - 3y + 2z = 17$

8. $2x + 3y + 4z = 2$
$5x - 2y + 3z = 0$
$x - 5y - 2z = -4$

9. $p + 4r = -7$
$p - 3q = -8$
$q + r = 1$

10. $4x + 4y - 2z = 8$
$3x - 5y + 3z = 0$
$2x + 2y - z = 4$

11. $d + 3g + h = 0$
$-d + 2g + h = -1$
$4d + g - h = 1$

12. $4x + y + 5z = -9$
$x - 4y - 2z = -2$
$2x + 3y - 2z = 21$

13. $5x + 9y + z = 20$
$2x - y - z = -21$
$5x + 2y + 2z = -21$

14. $2x + y - 3z = -3$
$3x + 2y + 4z = 5$
$-6x - 3y + 9z = 9$

15. $3x + 3y + z = 10$
$5x + 2y + 2z = 7$
$3x - 2y + 3z = -9$

16. $2u + v + w = 2$
$-3u + 2v + 3w = 7$
$+2w = 7$

17. $x + 5y - 3z = -18$
$3x - 2y + 5z = 22$
$-2x - 3y + 8z = 28$

18. $x - 2y + z = -1$
$-x + 2y - z = 6 - u - v$
$-4y + 2z = 1$

19. $2x - 2y - 4z = -2$
$3x - 3y - 6z = -3$
$-2x + 3y + z = 7$

20. $x - y + 9z = -27$
$2x - 4y - z = -1$
$3x + 6y - 3z = 27$

21. $2x - 5y - 3z = 7$
$-4x + 10y + 2z = 6$
$6x - 15y - z = -19$

22. يبلغ مجموع ثلاثة أعداد 6. ويساوي العدد الثالث مجموع أول وثاني عدد. ويزيد العدد الأول عن العدد الثالث بمقدار واحد. أوجد الأعداد.

23. يبلغ مجموع ثلاثة أعداد 4−. وناتج طرح العدد الثالث من العدد الثاني يساوي العدد الأول. يبلغ مجموع العدد الأول والثاني 5−. أوجد الأعداد.

24. الرياضات أحرزت مدرسة الإسكندرية الثانوية 37 نقطة في مباراة كرة قدم. تم الحصول على 6 نقاط مقابل كل هدف. وبعد كل هدف، يمكن للفريق الحصول على نقطة واحدة مقابل الركلة الإضافية أو نقطتين مقابل التحويل من نقطتين. أحرز الفريق تحويلا من نقطتين واحد أقل من الركلات الإضافية. وأحرز الفريق نقاط 10 مرات أثناء المباراة. فكم عدد الأهداف التي سجلها خلال المباراة؟

2-3 تمارين المهارات

حل المعادلات التربيعية بطريقة التحليل إلى عوامل

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذرين الموضحين أدناه.

1. $1, 4$

2. $6, -9$

3. $-2, -5$

4. $0, 7$

5. $-\frac{1}{3}, -3$

6. $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

حلّل كل كثيرة حدود إلى عوامل.

7. $m^2 + 7m - 18$

8. $2x^2 - 3x - 5$

9. $4z^2 + 4z - 15$

10. $4p^2 + 4p - 24$

11. $3y^2 + 21y + 36$

12. $c^2 - 100$

أوجد حل كل معادلة باستخدام التحليل إلى عوامل.

13. $x^2 = 64$

14. $x^2 - 100 = 0$

15. $x^2 - 3x + 2 = 0$

16. $x^2 - 4x + 3 = 0$

17. $x^2 + 2x - 3 = 0$

18. $x^2 - 3x - 10 = 0$

19. $x^2 - 6x + 5 = 0$

20. $x^2 - 9x = 0$

21. $x^2 - 4x = 21$

22. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

23. $4x^2 + 5x - 6 = 0$

24. $3x^2 - 13x - 10 = 0$

25. نظرية الأعداد أوجد عددين صحيحين متتاليين ناتج ضربهما 272.

2-3 تمرين

حل المعادلات التربيعية بطريقة التحليل إلى عوامل

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذرين الموضحين أدناه.

1. $7, 2$

2. $0, 3$

3. $-5, 8$

4. $-7, -8$

5. $-6, -3$

6. $3, -4$

7. $1, \frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{3}, 2$

9. $0, -\frac{7}{2}$

حلّل كل كثيرة حدود إلى عوامل.

10. $r^3 + 3r^2 - 54r$

11. $8a^2 + 2a - 6$

12. $c^2 - 49$

13. $x^3 + 8$

14. $16r^2 - 169$

15. $b^4 - 81$

أوجد حل كل معادلة باستخدام التحليل إلى عوامل.

16. $x^2 - 4x - 12 = 0$

17. $x^2 - 16x + 64 = 0$

18. $x^2 - 6x + 8 = 0$

19. $x^2 + 3x + 2 = 0$

20. $x^2 - 4x = 0$

21. $7x^2 = 4x$

22. $10x^2 = 9x$

23. $x^2 = 2x + 99$

24. $x^2 + 12x = -36$

25. $5x^2 - 35x + 60 = 0$

26. $36x^2 = 25$

27. $2x^2 - 8x - 90 = 0$

28. نظرية الأعداد أوجد عددين صحيحين موجبين زوجيين متتاليين ناتج ضربهما 624.

29. نظرية الأعداد أوجد عددين صحيحين موجبين فرديين متتاليين ناتج ضربهما 323.

30. الهندسة مستطيل يزيد طوله بمقدار قدمين عن عرضه. أوجد أبعاد المستطيل إذا علمت أن مساحته تساوي 63 قدمًا مربّعة.

31. التصوير الفوتوغرافي تم تقليل طول وعرض صورة فوتوغرافية (8 × 6 بوصات) بنفس القياس لعمل صورة جديدة مساحتها تساوي نصف مساحة الصورة الأصلية. كم بوصة سيتم تقليلها من أبعاد الصورة الفوتوغرافية؟

2-4 تمارين المهارات

الأعداد المركبة

بسّط.

1. $\sqrt{99}$

2. $\sqrt{\frac{27}{49}}$

3. $\sqrt{52x^3y^5}$

4. $\sqrt{-108x^7}$

5. $\sqrt{-81x^6}$

6. $\sqrt{-23} \cdot \sqrt{-46}$

7. $(3i)(-2i)(5i)$

8. i^{11}

9. i^{65}

10. $(7 - 8i) + (-12 - 4i)$

11. $(-3 + 5i) + (18 - 7i)$

12. $(10 - 4i) - (7 + 3i)$

13. $(7 - 6i)(2 - 3i)$

14. $(3 + 4i)(3 - 4i)$

15. $\frac{8 - 6i}{3i}$

16. $\frac{3i}{4 + 2i}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

17. $3x^2 + 3 = 0$

18. $5x^2 + 125 = 0$

19. $4x^2 + 20 = 0$

20. $-x^2 - 16 = 0$

21. $x^2 + 18 = 0$

22. $8x^2 + 96 = 0$

أوجد قيمتي ℓ و m اللتين تجعلان كل معادلة صحيحة.

23. $20 - 12i = 5\ell + (4m)i$

24. $\ell - 16i = 3 - (2m)i$

25. $(4 + \ell) + (2m)i = 9 + 14i$

26. $(3 - m) + (7\ell - 14)i = 1 + 7i$

2-4 تمرين

الأعداد المركبة

بسّط.

1. $\sqrt{-36}$

2. $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-32}$

3. $\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-25}$

4. $(-3i)(4i)(-5i)$

5. $(7i)^2(6i)$

6. i^{42}

7. i^{55}

8. i^{89}

9. $(5 - 2i) + (-13 - 8i)$

10. $(7 - 6i) + (9 + 11i)$

11. $(-12 + 48i) + (15 + 21i)$

12. $(10 + 15i) - (48 - 30i)$

13. $(28 - 4i) - (10 - 30i)$

14. $(6 - 4i)(6 + 4i)$

15. $(8 - 11i)(8 - 11i)$

16. $(4 + 3i)(2 - 5i)$

17. $(7 + 2i)(9 - 6i)$

18. $\frac{6 + 5i}{-2i}$

19. $\frac{2}{7 - 8i}$

20. $\frac{3 - i}{2 - i}$

21. $\frac{2 - 4i}{1 + 3i}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

22. $5n^2 + 35 = 0$

23. $2m^2 + 10 = 0$

24. $4m^2 + 76 = 0$

25. $-2m^2 - 6 = 0$

26. $-5m^2 - 65 = 0$

27. $\frac{3}{4}x^2 + 12 = 0$

أوجد قيمتي ℓ و m اللتين تجعلان كل معادلة صحيحة.

28. $15 - 28i = 3\ell + (4m)i$

29. $(6 - \ell) + (3m)i = -12 + 27i$

30. $(3\ell + 4) + (3 - m)i = 16 - 3i$

31. $(7 + m) + (4\ell - 10)i = 3 - 6i$

32. **الكهرباء** تبلغ المقاومة في جزء من دائرة متصلة على التوالي $1 + 3j$ أوم. وتبلغ المقاومة في الجزء الآخر من الدائرة $7 - 5j$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد إجمالي المقاومة في الدائرة.

33. **الكهرباء** باستخدام الصيغة $E = IZ$. أوجد الجهد الكهربائي E في الدائرة إذا كانت شدة التيار I تساوي $3 - j$ أمبير والمقاومة Z تساوي $3 + 2j$ أوم.

2-6 تمارين المهارات

الصيغة التربيعية والمميِّز

أكمل الأجزاء a-c لكل معادلة تربيعية.

a. أوجد قيمة المميِّز.

b. اذكر عدد الجذور ونوعها.

c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام الصيغة التربيعية.

1. $x^2 - 8x + 16 = 0$

2. $x^2 - 11x - 26 = 0$

3. $3x^2 - 2x = 0$

4. $20x^2 + 7x - 3 = 0$

5. $5x^2 - 6 = 0$

6. $x^2 - 6 = 0$

7. $x^2 + 8x + 13 = 0$

8. $5x^2 - x - 1 = 0$

9. $x^2 - 2x - 17 = 0$

10. $x^2 + 49 = 0$

11. $x^2 - x + 1 = 0$

12. $2x^2 - 3x = -2$

حل كل معادلة باستخدام الصيغة التربيعية.

13. $x^2 = 64$

14. $x^2 - 30 = 0$

15. $x^2 - x = 30$

16. $16x^2 - 24x - 27 = 0$

17. $x^2 - 4x - 11 = 0$

18. $x^2 - 8x - 17 = 0$

19. $x^2 + 25 = 0$

20. $3x^2 + 36 = 0$

21. $2x^2 + 10x + 11 = 0$

22. $2x^2 - 7x + 4 = 0$

23. $8x^2 + 1 = 4x$

24. $2x^2 + 2x + 3 = 0$

25. القفز بالمظلات مع تجاهل مقاومة الرياح، يمكن تقدير المسافة $d(t)$ بالقدم التي يسقطها المظلي في t ثوانٍ باستخدام الصيغة $d(t) = 16t^2$. إذا قفز مظلي من طائرة وهبط 1100 قدم قبل فتح مظلته، فكم عدد الثواني التي مرت قبل أن يفتح المظلة؟

2-6 تمرين

الصيغة التربيعية والمميِّز

حل كل معادلة باستخدام الصيغة التربيعية.

1. $7x^2 - 5x = 0$

2. $4x^2 - 9 = 0$

3. $3x^2 + 8x = 3$

4. $x^2 - 21 = 4x$

5. $3x^2 - 13x + 4 = 0$

6. $15x^2 + 22x = -8$

7. $x^2 - 6x + 3 = 0$

8. $x^2 - 14x + 53 = 0$

9. $3x^2 = -54$

10. $25x^2 - 20x - 6 = 0$

11. $4x^2 - 4x + 17 = 0$

12. $8x - 1 = 4x^2$

13. $x^2 = 4x - 15$

14. $4x^2 - 12x + 7 = 0$

أكمل الأجزاء a-c لكل معادلة تربيعية.

a. أوجد قيمة المميِّز.

b. اذكر عدد الجذور ونوعها.

c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام الصيغة التربيعية.

15. $x^2 - 16x + 64 = 0$

16. $x^2 = 3x$

17. $9x^2 - 24x + 16 = 0$

18. $x^2 - 3x = 40$

19. $3x^2 + 9x - 2 = 0$

20. $2x^2 + 7x = 0$

21. $5x^2 - 2x + 4 = 0$

22. $12x^2 - x - 6 = 0$

23. $7x^2 + 6x + 2 = 0$

24. $12x^2 + 2x - 4 = 0$

25. $6x^2 - 2x - 1 = 0$

26. $x^2 + 3x + 6 = 0$

27. $4x^2 - 3x^2 - 6 = 0$

28. $16x^2 - 8x + 1 = 0$

29. $2x^2 - 5x - 6 = 0$

30. قوة الجاذبية يتم تمثيل ارتفاع $h(t)$ جسم ما بالقدم بعد t ثوانٍ من إلقائه لأعلى في خط مستقيم من الأرض بسرعة متجهة 60 قدمًا في الثانية، بالمعادلة $h(t) = -16t^2 + 60t$. في أي أوقات بلغ ارتفاع الجسم 56 قدمًا؟

31. مسافة التوقف الصيغة $d = 0.05s^2 + 1.1s$ تقدر مسافة التوقف الصغرى d بالقدم لسيارة تقطع s أميال في الساعة. إذا توقفت سيارة بعد 200 قدم، فما السرعة العظمى التي كانت تسير بها على نحو محتمل عندما ضغط السائق على المكابح؟

2-7 تمارين المهارات

تحويلات التمثيلات البيانية التربيعية

اكتب كل معادلة تربيعية بصيغة رأس القطع المكافئ. ثم حدد رأس القطع المكافئ، ومحور تماثله، واتجاه فتحته.

1. $y = (x - 2)^2$

2. $y = -x^2 + 4$

3. $y = x^2 - 6$

4. $y = -3(x + 5)^2$

5. $y = -5x^2 + 9$

6. $y = (x - 2)^2 - 18$

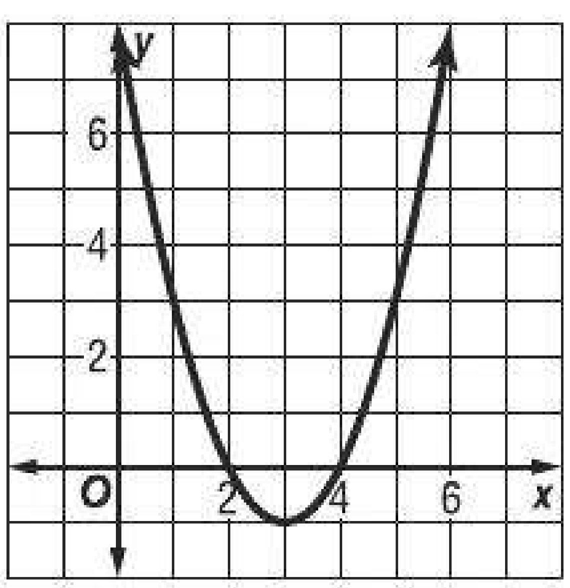
7. $y = x^2 - 2x - 5$

8. $y = x^2 + 6x + 2$

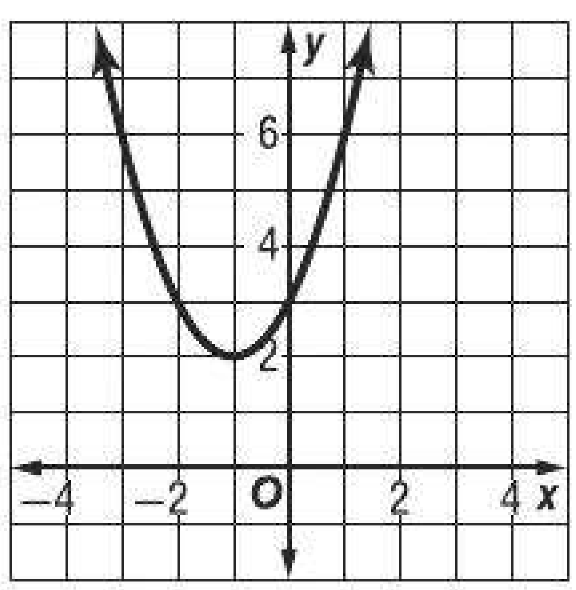
9. $y = -3x^2 + 24x$

مثِّل كل دالة بيانيًا.

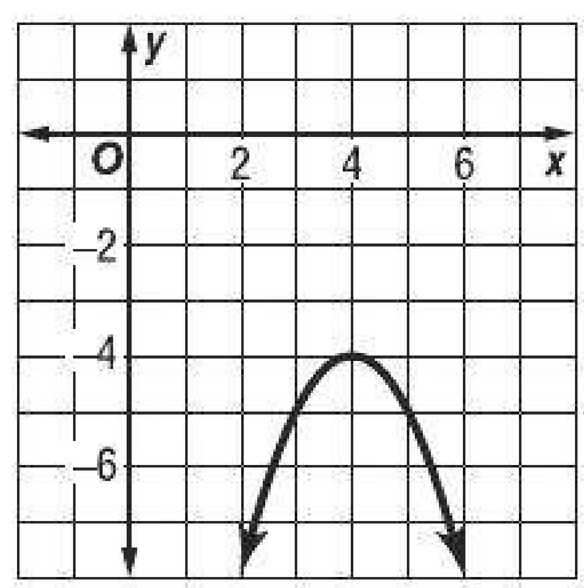
10. $y = (x - 3)^2 - 1$



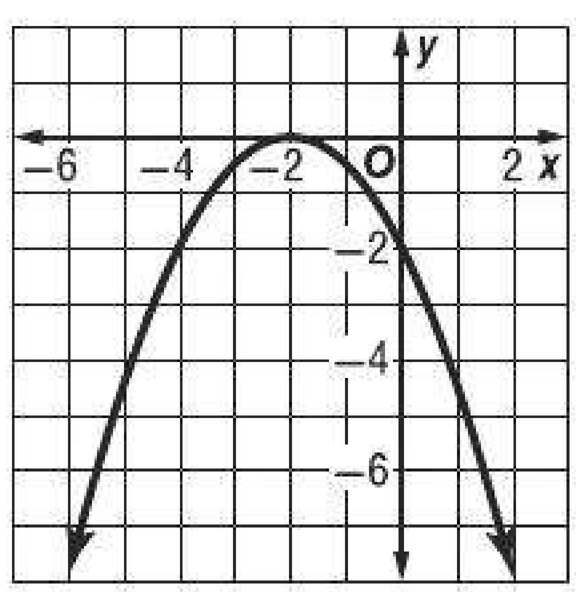
11. $y = (x + 1)^2 + 2$



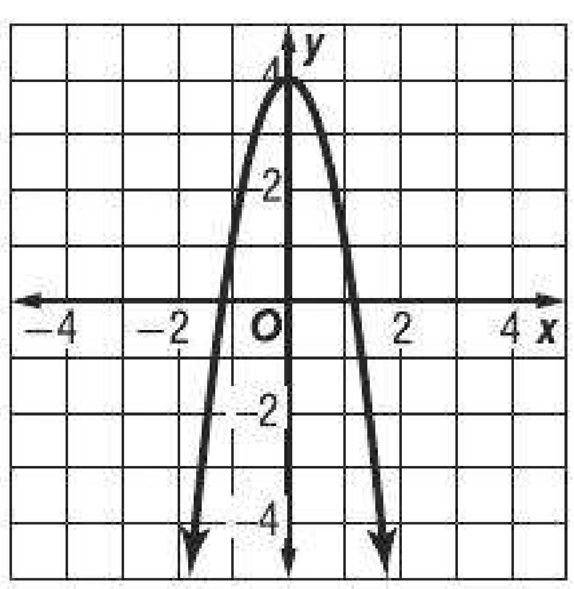
12. $y = -(x - 4)^2 - 4$



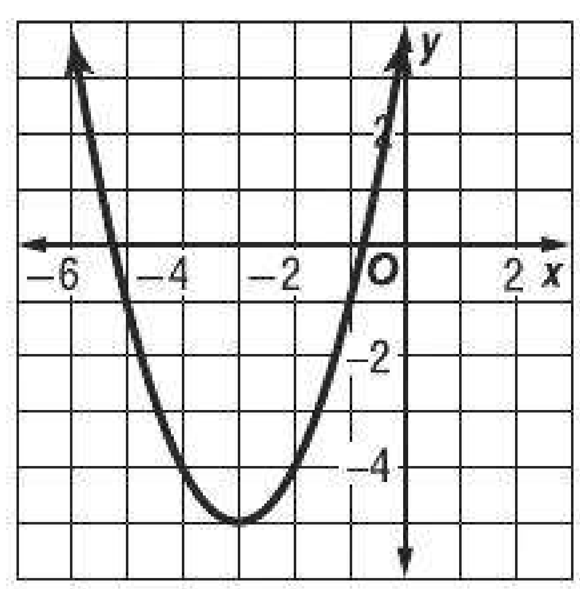
13. $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2$



14. $y = -3x^2 + 4$



15. $y = x^2 + 6x + 4$



الاسم ______________ التاريخ ______________ المدّة ______________

2-7 تمرين

تحويلات التمثيلات البيانية التربيعية

اكتب كل معادلة بصيغة رأس القطع المكافئ. ثم حدد رأس القطع المكافئ، ومحور تماثله، واتجاه فتحته.

1. $y = -6x^2 - 24x - 25$

2. $y = 2x^2 + 2$

3. $y = -4x^2 + 8x$

4. $y = x^2 + 10x + 20$

5. $y = 2x^2 + 12x + 18$

6. $y = 3x^2 - 6x + 5$

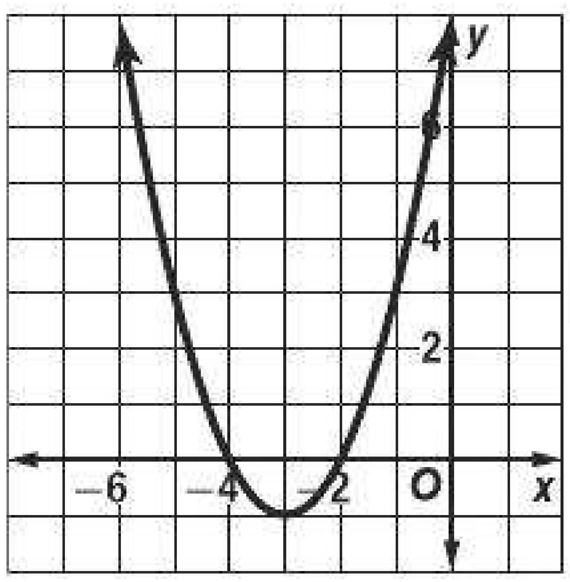
7. $y = -2x^2 - 16x - 32$

8. $y = -3x^2 + 18x - 21$

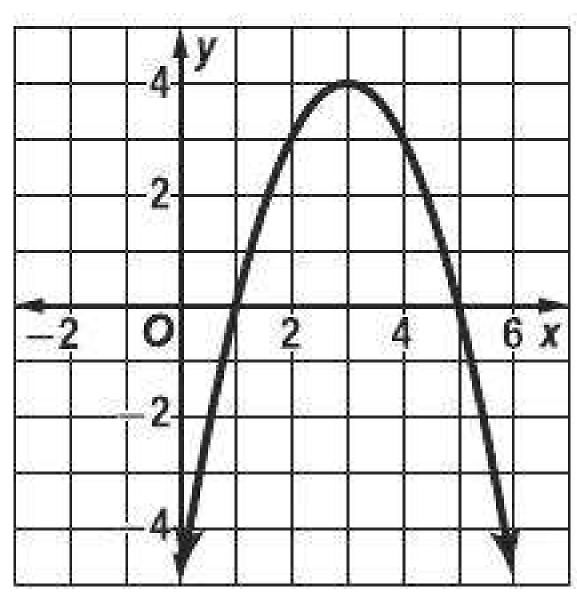
9. $y = 2x^2 + 16x + 29$

مثِّل كل دالة بيانيًا.

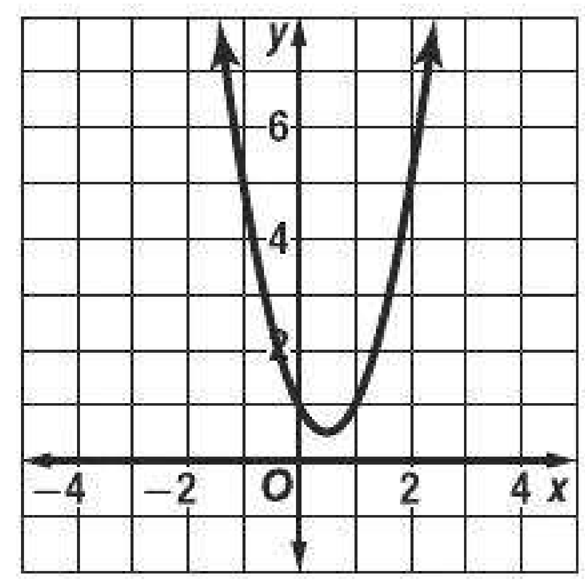
10. $y = (x + 3)^2 - 1$



11. $y = -x^2 + 6x - 5$



12. $y = 2x^2 - 2x + 1$

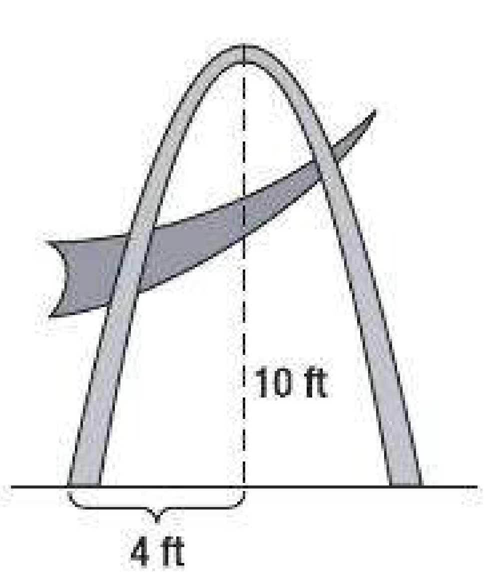


13. اكتب معادلة لقطع مكافئ تقع رأسه عند (3 ,1) و يمر عبر (15− ,2−).

14. اكتب معادلة لقطع مكافئ تقع رأسه عند (0 ,3−) و يمر عبر (18 ,3).

15. كرة القاعدة يُمكننا إيجاد ارتفاع h كرة القاعدة بعد t ثوانٍ من ضربها بالمعادلة $h(t) = -16t^2 + 80t + 3$. ما أقصى ارتفاع تصل إليه كرة القاعدة ومتى يحدث هذا؟

16. النحت توجد منحوتة معاصرة في حديقة، وتحتوي على قوس له شكل القطع المكافئ يبدأ من الأرض ويصل إلى أقصى ارتفاع له من 10 أقدام بعد مسافة أفقية من 4 أقدام. اكتب دالة تربيعية بصيغة رأس القطع المكافئ، تصف الشكل الخارجي للقوس حيث y هو ارتفاع نقطة على القوس و x هي مسافتها الأفقية من نقطة البداية اليسرى للقوس.



3-1 تمارين المهارات

العمليات على كثيرات الحدود

بسّط ما يلي. افترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي 0.

1. $b^4 \cdot b^3$ $\mathbf{b^7}$

2. $c^5 \cdot c^2 \cdot c^2$ $\mathbf{c^9}$

3. $a^{-4} \cdot a^{-3}$ $\mathbf{\frac{1}{a^7}}$

4. $x^5 \cdot x^{-4} \cdot x$ $\mathbf{x^2}$

5. $(2x)^2(4y)^2$ $\mathbf{64x^2y^2}$

6. $-2gh(g^3h^5)$ $\mathbf{-2g^4h^6}$

7. $10x^2y^3(10xy^8)$ $\mathbf{100x^3y^{11}}$

8. $\frac{24wz^7}{3w^3z^5}$ $\mathbf{\frac{8z^2}{w^2}}$

9. $\frac{-6a^4bc^8}{36a^7b^2c}$ $\mathbf{\frac{-c^7}{6a^3b}}$

10. $\frac{-10pt^4r}{-5p^3t^2r}$ $\mathbf{\frac{2t^2}{p^2}}$

11. $(g + 5) + (2g + 7)$
$\mathbf{3g + 12}$

12. $(5d + 5) - (d + 1)$
$\mathbf{4d + 4}$

13. $(x^2 - 3x - 3) + (2x^2 + 7x - 2)$
$\mathbf{3x^2 + 4x - 5}$

14. $(-2f^2 - 3f - 5) + (-2f^2 - 3f + 8)$
$\mathbf{-4f^2 - 6f + 3}$

15. $-5(2c^2 - d^2)$
$\mathbf{-10c^2 + 5d^2}$

16. $x^2(2x + 9)$
$\mathbf{2x^3 + 9x^2}$

17. $(a - 5)^2$
$\mathbf{a^2 - 10a + 25}$

18. $(2x - 3)(3x - 5)$
$\mathbf{6x^2 - 19x + 15}$

19. $(r - 2t)(r + 2t)$
$\mathbf{r^2 - 4t^2}$

20. $(3y + 4)(2y - 3)$
$\mathbf{6y^2 - y - 12}$

21. $(3 - 2b)(3 + 2b)$
$\mathbf{9 - 4b^2}$

22. $(3w + 1)^2$
$\mathbf{9w^2 + 6w + 1}$

3-1 تمرين

العمليات على كثيرات الحدود

بسّط ما يلي. افترض أنه لا يوجد متغيّر يساوي 0.

1. $n^5 \cdot n^2$ $\mathbf{n^7}$

2. $y^7 \cdot y^3 \cdot y^2$ $\mathbf{y^{12}}$

3. $t^9 \cdot t^{-8}$ $\mathbf{t}$

4. $x^{-4} \cdot x^{-4} \cdot x^4$ $\mathbf{\frac{1}{x^4}}$

5. $(2f^4)^6$ $\mathbf{64f^{24}}$

6. $(-2b^{-2}c^3)^3$ $\mathbf{\frac{-8c^9}{b^6}}$

7. $(4d^2t^5v^{-4})(-5dt^{-3}v^{-1})$ $\mathbf{-\frac{20d^3t^2}{v^5}}$

8. $8u(2z)^3$ $\mathbf{64uz^3}$

9. $\frac{12m^8y^6}{-9my^4}$ $\mathbf{-\frac{4m^7y^2}{3}}$

10. $\frac{-6n^5x^3}{18nx^7}$ $\mathbf{-\frac{n^4}{3x^4}}$

11. $\frac{-27x^3(-x^7)}{16x^4}$ $\mathbf{\frac{27x^6}{16}}$

12. $\left(\frac{2}{3r^2t^3z^6}\right)^2$ $\mathbf{\frac{4}{9r^4t^6z^{12}}}$

13. $-(4w^{-3}z^{-5})(8w)^2$ $\mathbf{-\frac{256}{wz^5}}$

14. $(m^4n^6)^4(m^3n^2p^5)^6$ $\mathbf{m^{34}n^{36}p^{30}}$

15. $\left(\frac{3}{2}d^{-2}f^4\right)^4\left(-\frac{4}{3}d^5f\right)^3$ $\mathbf{-12d^7f^{19}}$

16. $\left(\frac{2x^3y^2}{-x^2y^5}\right)^{-2}$ $\mathbf{\frac{y^6}{4x^2}}$

17. $\frac{(3x^{-2}y^3)(5xy^{-8})}{(x^{-3})^4y^{-2}}$ $\mathbf{\frac{15x^{11}}{y^3}}$

18. $\frac{-20(m^2v)(-v)^3}{5(-v)^2(-m^4)}$ $\mathbf{-\frac{4v^2}{m^2}}$

19. $(3n^2 + 1) + (8n^2 - 8)$

$\mathbf{11n^2 - 7}$

20. $(6w - 11w^2) - (4 + 7w^2)$

$\mathbf{-18w^2 + 6w - 4}$

21. $(w + 2t)(w^2 - 2wt + 4t^2)$

$\mathbf{w^3 + 8t^3}$

22. $(x + y)(x^2 - 3xy + 2y^2)$

$\mathbf{x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3}$

23. **الأعمال المصرفية** يستثمر عامر AED 1500 في اثنين من صناديق الاستثمار المشترك. في السنة الأولى، ينمو صندوق واحد بنسبة 3.8% بينما ينمو الآخر بنسبة 6%. اكتب كثيرة حدود لتمثيل إجمالي نسبة نمو مبلغ AED 1500 الخاص بعامر في تلك السنة إذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره في الصندوق ذي معدل النمو الأقل.

$\mathbf{-0.022x + 1590}$

24. **تبلغ** مساحة قاعدة صندوق مستطيل $2x^2 + 4x - 3$ وحدة مربعة. ويبلغ ارتفاع الصندوق x وحدة. أوجد تعبير كثير الحدود لحجم الصندوق.

$\mathbf{2x^3 + 4x^2 - 3x}$ **وحدات³**

3-2 تمارين المهارات

قسمة كثيرات الحدود

بسّط ما يلي.

1. $\frac{10c + 6}{2}$ **5c + 3**

2. $\frac{12x + 20}{4}$ **3x + 5**

3. $\frac{15y^3 + 6y^2 + 3y}{3y}$ **$5y^2 + 2y + 1$**

4. $\frac{12x^2 - 4x - 8}{4x}$ **$3x - 1 - \frac{2}{x}$**

5. $(15q^6 + 5q^2)(5q^4)^{-1}$
$3q^2 + \frac{1}{q^2}$

6. $(4f^5 - 6f^4 + 12f^3 - 8f^2)(4f^2)^{-1}$
$f^3 - \frac{3f^2}{2} + 3f - 2$

7. $(6j^2k - 9jk^2) \div 3jk$
$2j - 3k$

8. $(4a^2h^2 - 8a^3h + 3a^4) \div (2a^2)$
$2h^2 - 4ah + \frac{3a^2}{2}$

9. $(n^2 + 7n + 10) \div (n + 5)$
$n + 2$

10. $(d^2 + 4d + 3) \div (d + 1)$
$d + 3$

11. $(2t^2 + 13t + 15) \div (t + 5)$
$2t + 3$

12. $(6y^2 + y - 2)(2y - 1)^{-1}$
$3y + 2$

13. $(4g^2 - 9) \div (2g + 3)$
$2g - 3$

14. $(2x^2 - 5x - 4) \div (x - 3)$
$2x + 1 - \frac{1}{x - 3}$

15. $\frac{u^2 + 5u - 12}{u - 3}$
$u + 8 + \frac{12}{u - 3}$

16. $\frac{6x^3 + 5x^2 + 9}{2x + 3}$
$3x^2 - 2x + 3$

17. $(3v^2 - 7v - 10)(v - 4)^{-1}$
$3v + 5 + \frac{10}{v - 4}$

18. $(3t^4 + 4t^3 - 32t^2 - 5t - 20)(t + 4)^{-1}$
$3t^3 - 8t^2 - 5$

19. $\frac{y^3 - y^2 - 6}{y + 2}$
$y^2 - 3y + 6 - \frac{18}{y + 2}$

20. $\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 15}{x - 3}$
$2x^2 + 5x - 4 + \frac{3}{x - 3}$

21. $(4p^3 - 3p^2 + 2p) \div (p - 1)$
$4p^2 + p + 3 + \frac{3}{p - 1}$

22. $(3c^4 + 6c^3 - 2c + 4)(c + 2)^{-1}$
$3c^3 - 2 + \frac{8}{c - 2}$

23. **الهندسة** تبلغ مساحة مستطيل $x^3 + 8x^2 + 13x - 12$ وحدة مربعة. ويبلغ عرض المستطيل $x + 4$ وحدة. فما هو طول المستطيل؟ **$x^2 + 4x - 3$ وحدات**

3-2 تمرين

قسمة كثيرات الحدود

بسّط ما يلي.

1. $\dfrac{15r^{10} - 5r^8 + 40r^2}{5r^4}$

2. $\dfrac{6k^2m - 12k^3m^2 + 9m^3}{2km^2}$

3. $(-30x^3y + 12x^2y^2 - 18x^2y) \div (-6x^2y)$

$5x - 2y + 3$

4. $(-6w^3z^4 - 3w^2z^5 + 4w + 5z) \div (2w^2z)$

$-3wz^3 - \dfrac{3z^4}{2} + \dfrac{2}{wz} + \dfrac{5}{2w^2}$

5. $(4a^3 - 8a^2 + a^2)(4a)^{-1}$

$a^2 - 2a + \dfrac{a}{4}$

6. $(28d^3k^2 + d^2k^2 - 4dk^2)(4dk^2)^{-1}$

$7d^2 + \dfrac{d}{4} - 1$

7. $\dfrac{f^2 + 7f + 10}{f + 2}$ $f + 5$

8. $\dfrac{2x^2 + 3x - 14}{x - 2}$ $2x + 7$

9. $(a^3 - 64) \div (a - 4)$ $a^2 + 4a + 16$

10. $(b^3 + 27) \div (b + 3)$ $b^2 - 3b + 9$

11. $\dfrac{2x^3 + 6x + 152}{x + 4}$ $2x^2 - 8x + 38$

12. $\dfrac{2x^3 + 4x - 6}{x + 3}$ $2x^2 - 6x + 22 - \dfrac{72}{x + 3}$

13. $(3w^3 + 7w^2 - 4w + 3) \div (w + 3)$

$3w^2 - 2w + 2 - \dfrac{3}{w + 3}$

14. $(6y^4 + 15y^3 - 28y^2 - 6) \div (y + 2)$

$6y^3 + 3y^2 - 34y + \dfrac{62}{y + 2}$

15. $(x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10) \div (x - 5)$

$x^3 + 2x^2 - x - 2$

16. $(3m^5 + m - 1) \div (m + 1)$

$3m^4 - 3m^3 + 3m^2 - 3m + 4 - \dfrac{5}{m + 1}$

17. $(x^4 - 3x^3 + 5x - 6)(x + 2)^{-1}$

$x^3 - 5x^2 + 10x - 15 + \dfrac{24}{x + 2}$

18. $(6y^2 - 5y - 15)(2y + 3)^{-1}$

$3y - 7 + \dfrac{6}{2y + 3}$

19. $\dfrac{4x^2 - 2x + 6}{2x - 3}$

$2x + 2 + \dfrac{12}{2x - 3}$

20. $\dfrac{6x^2 - x - 7}{3x + 1}$

$2x - 1 - \dfrac{6}{3x} + 1$

21. $(2r^3 + 5r^2 - 2r - 15) \div (2r - 3)$

$r^2 + 4r + 5$

22. $(6t^3 + 5t^2 - 2t + 1) \div (3t + 1)$

$2t^2 + t - 1 + \dfrac{2}{3t + 1}$

23. $\dfrac{4p^4 - 17p^2 + 14p - 3}{2p - 3}$

$2p^3 + 3p^2 - 4p + 1$

24. $\dfrac{2h^4 - h^3 + h^2 + h - 3}{h^2 - 1}$

$2h^2 - h + 3$

25. **الهندسة** تبلغ مساحة مستطيل $2x^2 - 11x + 15$ قدم مربع. ويبلغ طول المستطيل $2x - 5$ قدم. فما هو عرض المستطيل؟

$x - 3$ ft

26. **الهندسة** تبلغ مساحة مثلث $15x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x - 3$ متر مربع. ويبلغ طول قاعدة المثلث $6x^2 - 2$ متر. فما هو ارتفاع المثلث؟

$5x^2 + x + 3$ m

3-3 تمارين المهارات

الدوال كثيرة الحدود

اذكر الدرجة والمعامل الرئيسي لكل كثيرة حدود ذات متغير واحد. وإذا لم تكن كثيرة حدود ذات متغير واحد، فاشرح السبب.

1. $a + 8$ **1; 1**

2. $(2x - 1)(4x^2 + 3)$ **3; 8**

3. $-5x^5 + 3x^3 - 8$ **5; −5**

4. $18 - 3y + 5y^2 - y^5 + 7y^6$ **6; 7**

5. $u^3 + 4u^2t^2 + t^4$

لا، هذه ليست كثيرة حدود لأن $\frac{1}{r^2}$ لا يمكن كتابتها بالصيغة r^n، حيث n عدد صحيح غير سالب.

6. $2r - r^2 + \frac{1}{r^2}$

لا، كثيرة الحدود هذه تحتوي على متغيرين، u و t.

أوجد $p(2)$ و $p(-1)$ لكل دالة.

7. $p(x) = 4 - 3x$ **7; −2**

8. $p(x) = 3x + x^2$ **− 2; 10**

9. $p(x) = 2x^2 - 4x + 1$ **7; 1**

10. $p(x) = -2x^3 + 5x + 3$ **0; −3**

11. $p(x) = x^4 + 8x^2 - 10$ **−1; 38**

12. $p(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ **3; 2**

إذا كانت $p(x) = 4x^2 - 3$ و $r(x) = 1 + 3x$، فأوجد كل منهما.

13. $p(a)$ **$4a^2 - 3$**

14. $r(2a)$ **$1 + 6a$**

15. $3r(a)$ **$3 + 9a$**

16. $-4p(a)$ **$-16a^2 + 12$**

17. $p(a^2)$ **$4a^4 - 3$**

18. $r(x + 2)$ **$7 + 3x$**

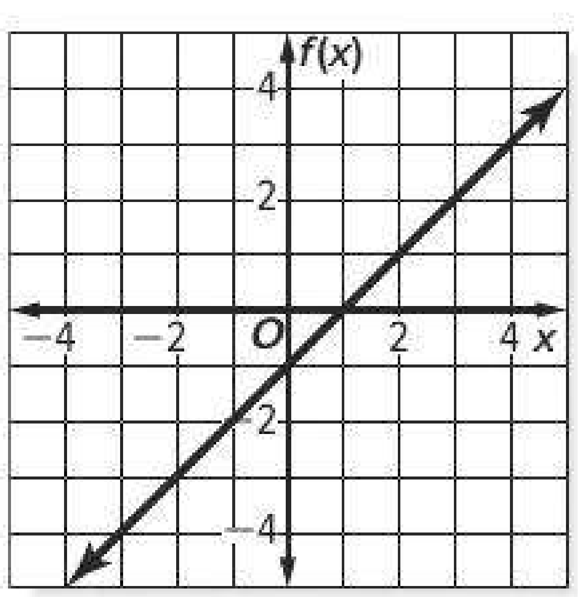
في كل تمثيل بياني،

a. صِف السلوك الطرفي

b. حدّد إذا ما كان التمثيل البياني يمثل دالة فردية أو زوجية الدرجة

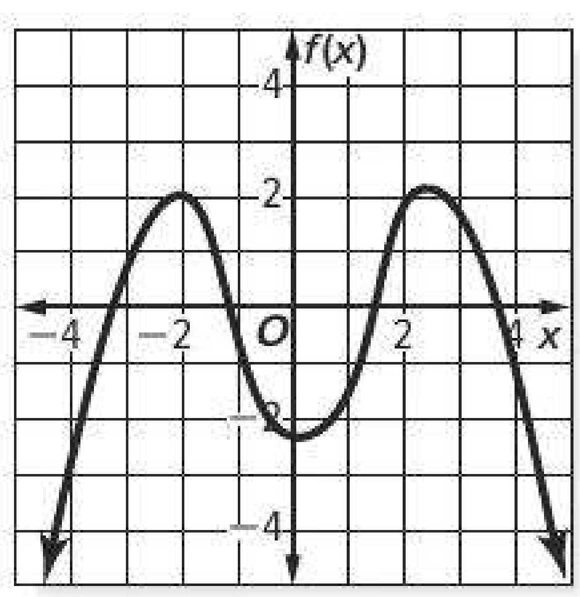
c. اذكر عدد الأصفار الحقيقية.

19.



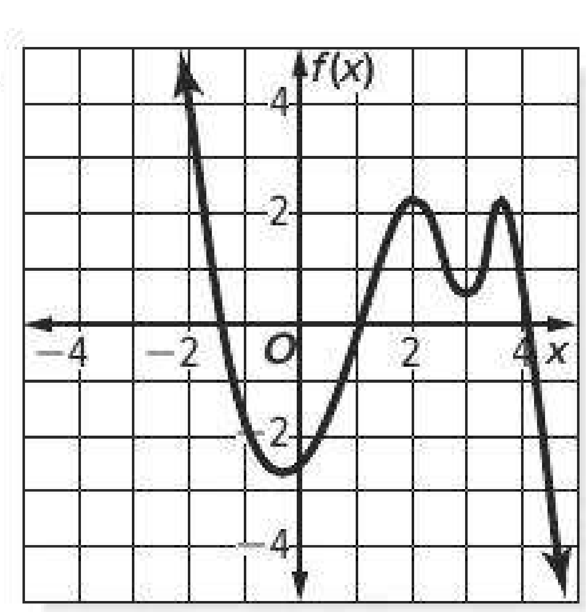
بينما $f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$
بينما $x \to -\infty$؛ فردي؛ 3

20.



بينما $f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty, f(x) \to -\infty$
بينما $x \to -\infty$؛ زوجي؛ 4

21.



بينما $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty, f(x) \to -\infty$
بينما $x \to -\infty$؛ فردي؛ 1

الاسم ______________ التاريخ ______________ المدة ______________

3-3 تمرين

الدوال كثيرة الحدود

اذكر الدرجة والمعامل الرئيسي لكل كثيرة حدود ذات متغير واحد. وإذا لم تكن كثيرة حدود ذات متغير واحد، فاشرح السبب.

1. $(3x^2 + 1)(2x^2 - 9)$ **4; 6**

2. $\frac{1}{5}a^3 - \frac{3}{5}a^2 + \frac{4}{5}a$ **3; $\frac{1}{5}$**

3. $\frac{2}{m^2} + 3m - 12$

ليست كثيرة حدود؛ $\frac{2}{m^2}$ لا يمكن كتابتها بالصيغة m^n لعدد صحيح غير سالب n.

4. $27 + 3xy^3 - 12x^2y^2 - 10y$

لا، كثيرة الحدود هذه تحتوي على متغيرين، x و y.

أوجد $p(-2)$ و $p(3)$ لكل دالة.

5. $p(x) = x^3 - x^5$
24; −216

6. $p(x) = -7x^2 + 5x + 9$
−29; −39

7. $p(x) = -x^5 + 4x^3$
0; −135

8. $p(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 5$
−37; 73

9. $p(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$
13; 93

10. $p(x) = \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3x^2} + 3x$
−6; 24

إذا كانت $p(x) = 3x^2 - 4$ و $r(x) = 2x^2 - 5x + 1$، فأوجد قيمة كل منهما.

11. $p(8a)$
$192a^2 - 4$

12. $r(a^2)$
$2a^4 - 5a^2 + 1$

13. $-5r(2a)$
$-40a^2 + 50a - 5$

14. $r(x + 2)$
$2x^2 + 3x - 1$

15. $p(x^2 - 1)$
$3x^4 - 6x^2 - 1$

16. $5p(x + 2)$
$15x^2 + 60x + 40$

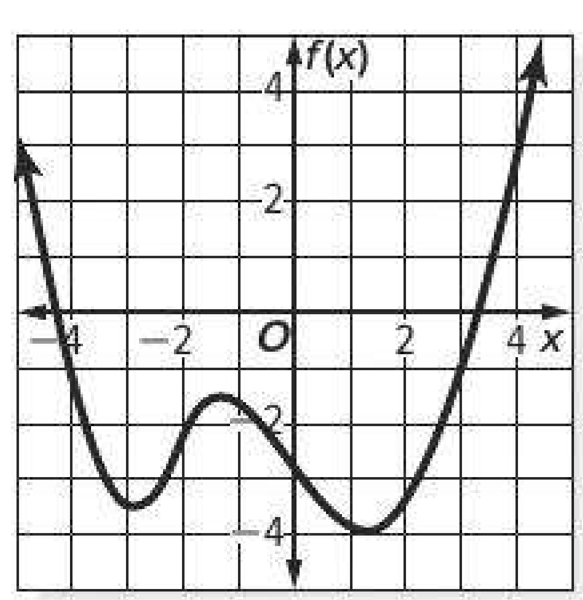
لكل تمثيل بياني،

a. صِف السلوك الطرفي،

b. حدّد إذا ما كان التمثيل البياني يمثل دالة فردية أو زوجية الدرجة،

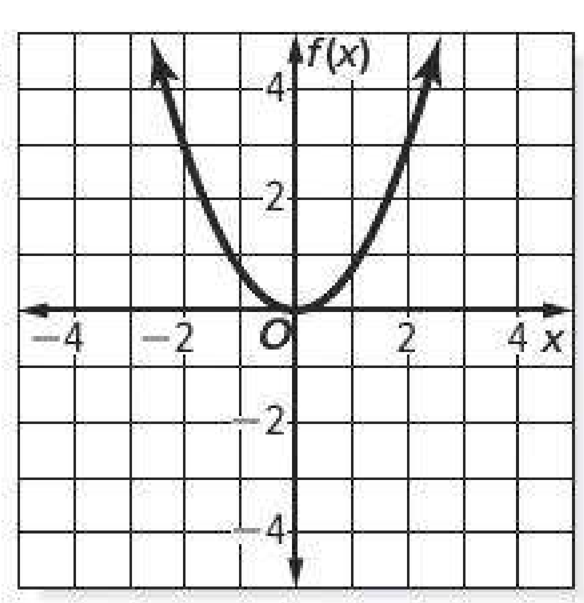
c. اذكر عدد الأصفار الحقيقية.

17.



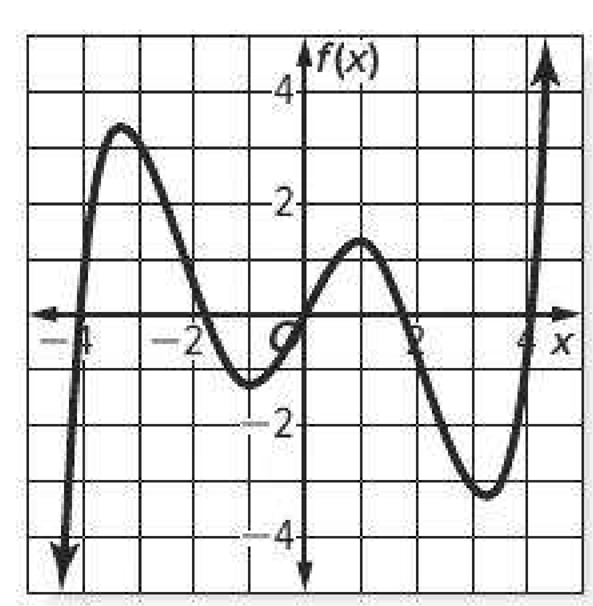
بينما $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty, f(x) \to -\infty$
بينما $x \to -\infty$؛ فردي؛ 5

18.



بينما $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$
بينما $x \to -\infty$؛ زوجي؛ 1

19.



بينما $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$
بينما $x \to -\infty$؛ زوجي؛ 2

20. **الرياح الجليدية** تُقدر الدالة $C(w) = 0.013w^2 - w - 7$ درجة حرارة الرياح الجليدية $C(w)$ عند 0°F لسرعات رياح تتراوح من 5 w إلى 30 ميلًا في الساعة. قدر درجة حرارة الرياح الجليدية عند °F إذا كانت سرعة الرياح تبلغ 20 ميلًا في الساعة. **حوالي −22°F**

3-4 تمارين المهارات

تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

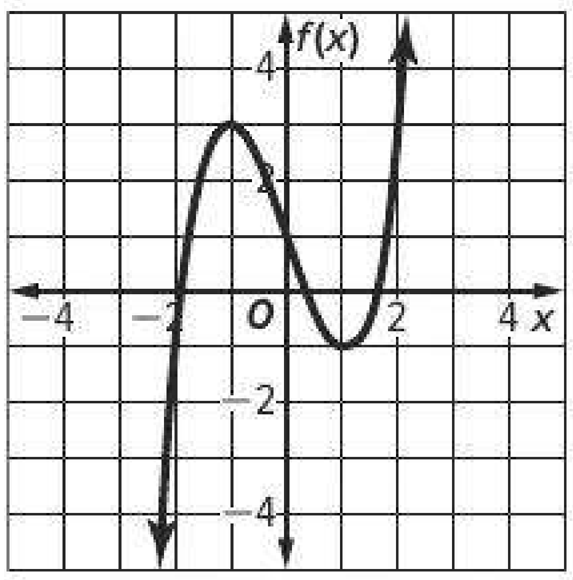
أكمل كلاً مما يلي.

a. مثِّل كل دالة بيانيًا عن طريق تكوين جدول للقيم.

b. حدد القيم المتعاقبة لـ x التي يقع بينها كل صفر حقيقي.

c. قدّر إحداثيات المحور الأفقي x التي تتشكل عندها القيمتان النسبيتان القصوى والدنيا.

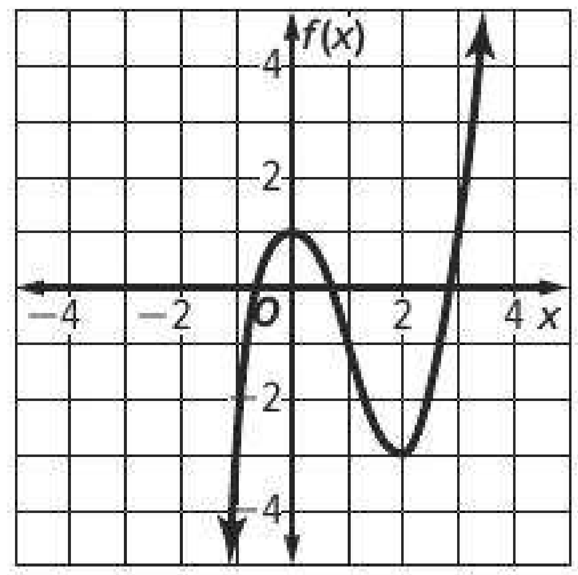
1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$



$f(x)$	x
−17	−3
1	−2
3	−1
1	0
−1	1
3	2
19	3

الأصفار بين 2– و 1–، 0 و 1، و 1 و 2؛ القيمة العظمى النسبية عند $x = -1$، والقيمة الصغرى النسبية عند $x = 1$

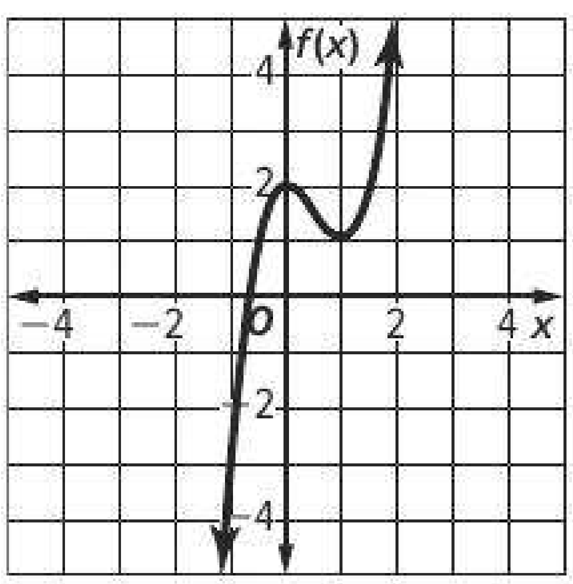
2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$



$f(x)$	x
−19	−2
−3	−1
1	0
−1	1
−3	2
1	3
17	4

الأصفار بين 1– و 0، و 2 و 3؛ القيمة العظمى النسبية عند $x = 0$، القيمة الصغرى النسبية عند $x = 2$

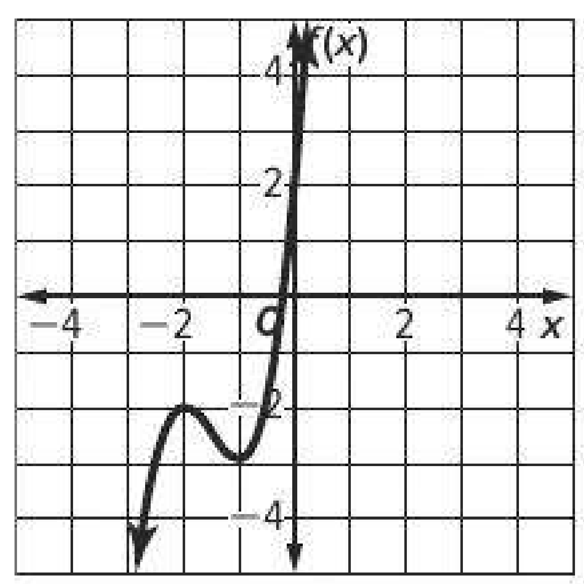
3. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 2$



$f(x)$	x
−3	−1
2	0
1	1
6	2
29	3

الأصفار بين 1– و 0؛ القيمة العظمى النسبية عند $x = 0$، والقيمة الصغرى النسبية عند $x = 1$

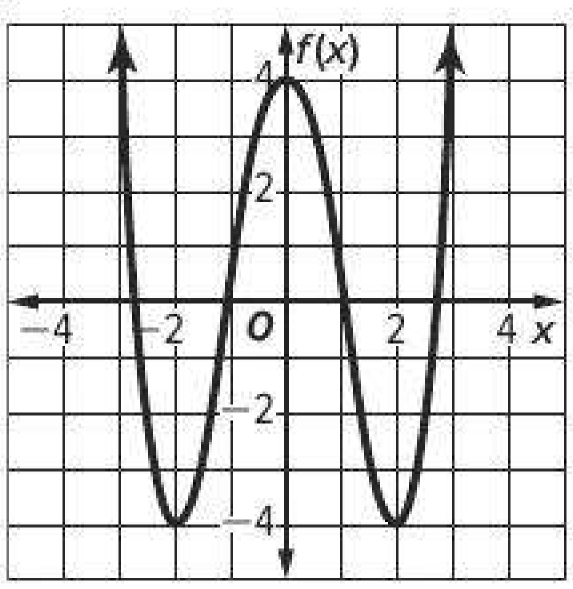
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$



$f(x)$	x
−7	−3
−2	−2
−3	−1
2	0
25	1

الأصفار بين 1– و 0؛ القيمة العظمى النسبية عند $x = -2$، والقيمة الصغرى النسبية عند $x = -1$

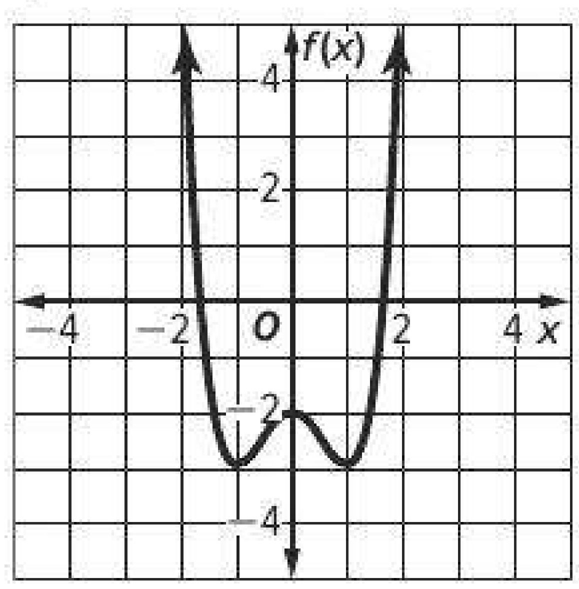
5. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$



$f(x)$	x
8.5	−3
−4	−2
0.5	−1
4	0
0.5	1
−4	2
8.5	3

الأصفار بين 1- و 2– و 2– و 1 ,3– و 2 و 2 و 3؛ القيمة العظمى النسبية عند $x = 0$، والقيمة الصغرى النسبية عند $x = -2$ و $x = 2$

6. $f(x) = 0.5x^4 - 4x^2 + 4$



$f(x)$	x
61	−3
6	−2
−3	−1
−2	0
−3	1
6	2
61	3

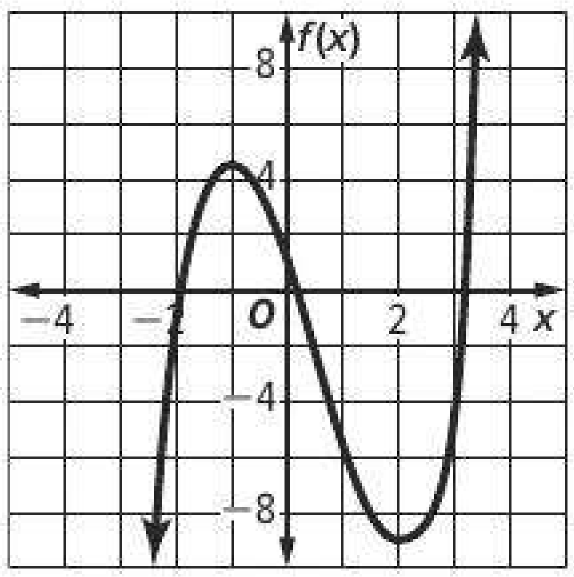
الأصفار بين 2– و 1–، و 1 و 2؛ القيمة العظمى النسبية عند $x = 0$، والقيمة الصغرى النسبية عند $x = -1$ و $x = 1$

3-4 تمرين

تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

أكمل كل مما يلي.
a. مثّل كل دالة بيانيًا عن طريق تكوين جدول للقيم.
b. حدد القيم المتعاقبة لـ x التي يقع بينها كل صفر حقيقي.
c. قدّر إحداثيات المحور الأفقي x التي تتشكل عندها القيمتان النسبيتان القصوى والدنيا.

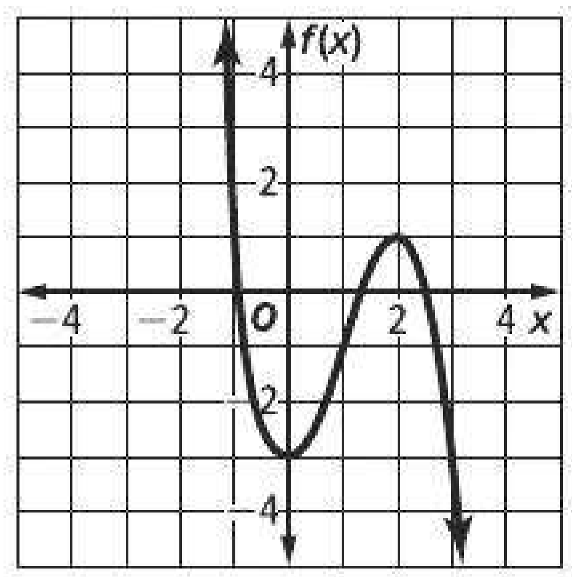
1. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$



f(x)	x
−1	−2
4.5	−1
1	0
−5.5	1
−9	2
−3.5	3
−17	4

الأصفار بين 2− و 0 ,1− و 1، و 3 و 4؛
القيمة العظمى النسبية عند 1− = x،
والقيمة الصغرى النسبية عند 2 = x

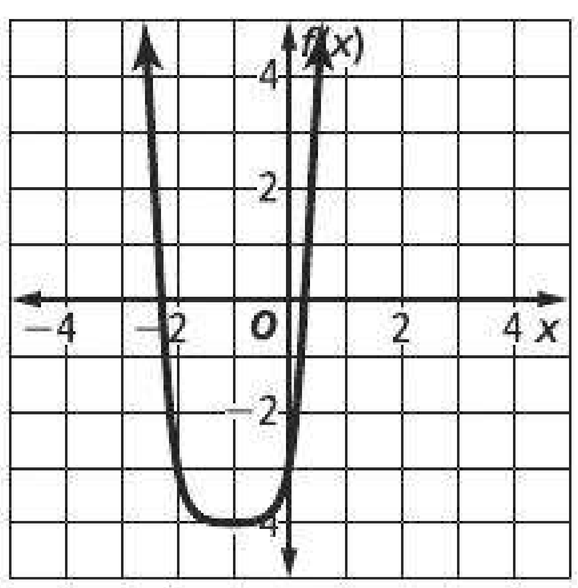
2. $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 1$



f(x)	x
−17	−2
1	−1
−3	0
−1	1
1	2
−3	3
−19	4

الأصفار بين 1− و 0، و 1 و 2، و 2 و 3؛
القيمة العظمى النسبية عند 2 = x، والقيمة
الصغرى النسبية عند 0 = x

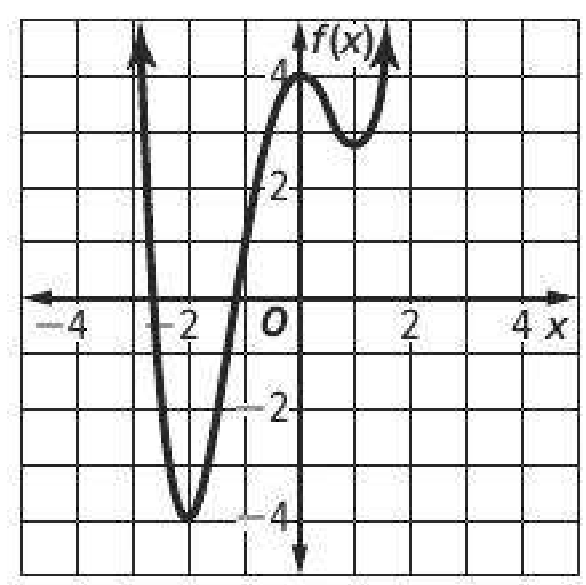
3. $f(x) = 0.75\, x^4 + x^3 - 3x^2 + 4$



f(x)	x
12	−3
−3	−2
−4	−1
−3	0
12	1
77	2

الأصفار بين 3− و 2−، و 0 و 1؛
القيمة الصغرى النسبية عند 1− = x

4. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 3$

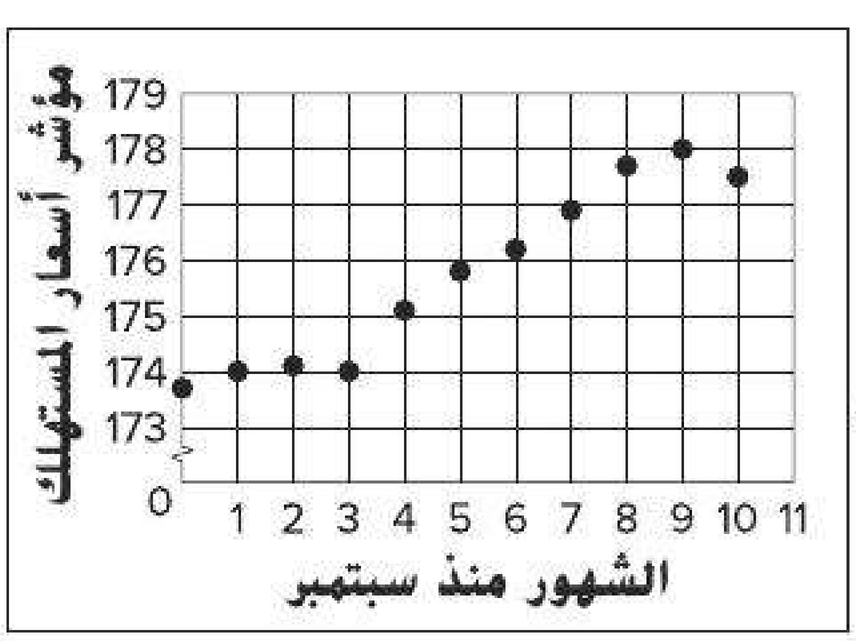


f(x)	x
10.75	−3
−4	−2
0.75	−1
4	0
2.75	1
12	2

الأصفار بين 3− و 2−، و 2− و 1−؛ القيمة
العظمى النسبية عند 0 = x، والقيمة
الصغرى النسبية عند 2− = x و 1= x

5. **الأسعار** يعطي مؤشر أسعار المستهلك (CPI) السعر النسبي لمجموعة محددة من السلع والخدمات. مؤشر أسعار المستهلك من سبتمبر 2000 وحتى يوليو 2001 موضح في التمثيل البياني.

المصدر: مكتب إحصاءات العمل الأمريكي



a. صِف نقاط انعطاف الرسم البياني.
القيمة العظمى النسبية في نوفمبر ويونيو؛ القيمة الصغرى النسبية في ديسمبر.

b. إذا تم تمثيل الرسم البياني عن طريق معادلة كثيرة حدود. فما هي أصغر درجة يمكن أن توجد في المعادلة؟ 4

6. **العمل** يمكن تمثيل معدل البطالة بإحدى المدن بالمعادلة ,(1, 3.3), (2, 4.9), (3, 5.3), (4, 6.4), (5, 4.5) (6, 5.6), (7, 2.5), (8, 2.7). كم عدد نقاط التحول بالرسم البياني للدالة كثيرة الحدود عبر هذه النقاط؟ صِفها.
4:2 القيمة العظمى النسبية و 2 القيمة الصغرى النسبية.

3-5 تمارين المهارات

حل معادلات كثيرة الحدود

حلّل الدوال التالية إلى العوامل تحليلًا كاملًا. وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

1. $7x^2 - 14x$
   $\mathbf{7x(x - 2)}$

2. $19x^3 - 38x^2$
   $\mathbf{19x^2(x - 2)}$

3. $21x^3 - 18x^2y + 24xy^2$
   $\mathbf{3x(7x^2 - 6xy + 8y^2)}$

4. $8j^3k - 4jk^3 - 7$
   أولية

5. $a^2 + 7a - 18$
   $\mathbf{(a + 9)(a - 2)}$

6. $2ak - 6a + k - 3$
   $\mathbf{(2a + 1)(k - 3)}$

7. $b^2 + 8b + 7$
   $\mathbf{(b + 7)(b + 1)}$

8. $z^2 - 8z - 10$
   أولية

9. $4f^2 - 64$
   $\mathbf{4(f + 4)(f - 4)}$

10. $d^2 - 12d + 36$
    $\mathbf{(d - 6)^2}$

11. $9x^2 + 25$
    أولية

12. $y^2 + 18y + 81$
    $\mathbf{(y + 9)^2}$

13. $n^3 - 125$
    $\mathbf{(n - 5)(n^2 + 5n + 25)}$

14. $m^4 - 1$
    $\mathbf{(m^2 + 1)(m - 1)(m + 1)}$

اكتب كل تعبيرٍ مما يلي بالصيغة التربيعية إذا كان ذلك ممكنًا.

15. $5x^4 + 2x^2 - 8$ $\mathbf{5(x^2)^2 + 2(x^2) - 8}$

16. $3y^8 - 4y^2 + 3$ **لا يمكن**

17 $100a^6 + a^3$ $\mathbf{100(a^3)^2 +}$

18. $x^8 + 4x^4 + 9$ $\mathbf{(x^4)^2 + 4(x^4) + 9}$

19. $12x^4 - 7x^2$ $\mathbf{12(x^2)^2 - 7(x^2)}$

20. $6b^5 + 3b^3 - 1$ **لا يمكن**

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

21. $a^3 - 9a^2 + 14a = 0$ **0, 7, 2**

22. $x^3 = 3x^2$ **0, 3**

23. $t^4 - 3t^3 - 40t^2 = 0$ **0, −5, 8**

24. $b^3 - 8b^2 + 16b = 0$ **0, 4**

3-5 تمرين

حل معادلات كثيرة الحدود

حلل إلى العوامل بالكامل. وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

1. $15a^2b - 10ab^2$ **$5ab(3a - 2b)$**
2. $3st^2 - 9s^3t + 6s^2t^2$ **$3st(t - 3s^2 + 2st)$**
3. $3x^3y^2 - 2x^2y + 5xy$ **$xy(3x^2y - 2x + 5)$**
4. $2x^3y - x^2y + 5xy^2 + xy^3$ **$xy(2x^2 - x + 5y + y^2)$**
5. $21 - 7t + 3r - rt$ **$(7 + r)(3 - t)$**
6. $x^2 - xy + 2x - 2y$ **$(x + 2)(x - y)$**
7. $y^2 + 20y + 96$ **$(y + 8)(y + 12)$**
8. $4ab + 2a + 6b + 3$ **$(2a + 3)(2b + 1)$**
9. $6n^2 - 11n - 2$ **$(6n + 1)(n - 2)$**
10. $6x^2 + 7x - 3$ **$(3x - 1)(2x + 3)$**
11. $x^2 - 8x - 8$ **أولية**
12. $6p^2 - 17p - 45$ **$(2p - 9)(3p + 5)$**

اكتب كل تعبيرٍ مما يلي بالصيغة التربيعية إذا كان ذلك ممكنًا.

13. $10b^4 + 3b^2 - 11$ **$10(b^2)^2 + 3(b^2) - 11$**
14. $-5x^8 + x^2 + 6$ **لا يمكن**
15. $28d^6 + 25d^3$ **$28(d^3)^2 + 25(d^3)$**
16. $4c^8 + 4c^4 + 7$ **$4(c^4)^2 + 4(c^4) + 7$**
17. $500x^4 - x^2$ **$500(x^2)^2 - x^2$**
18. $8b^5 - 8b^3 - 1$ **لا يمكن**

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

19. $y^4 - 7y^3 - 18y^2 = 0$ **$-2, 0, 9$**
20. $k^5 + 4k^4 - 32k^3 = 0$ **$-8, 0, 4$**
21. $m^4 - 625 = 0$ **$-5, 5, -5i, 5i$**
22. $n^4 - 49n^2 = 0$ **$0, -7, 7$**
23. $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ **$-1, 1, -7, 7$**
24. $t^4 - 21t^2 + 80 = 0$ **$-4, 4, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$**

25. **الفيزياء** بروتون في مجال مغناطيسي يتبع مسارًا على شبكة إحداثيات تمثله الدالة $f(x) = x^4 - 2x^2 - 15$. ما هي إحداثيات x للنقاط الموجودة على الشبكة حيث يقطع البروتون المحور x؟ **$\sqrt{5}, -\sqrt{5}$**

26. **المسح** خصصت مقاطعة فيستا قطعة كبيرة من الأرض للحفاظ عليها كمساحة مفتوحة. وقد استأجرت مقاطعة شركة مسح ميغان لمسح القطعة، وهي على شكل مثلث قائم الزاوية. يبلغ الساق الأطول من المثلث 5 أميال أقل من مربع الساق أقصر. ويبلغ وتر المثلث 13 ميلًا أقل من مرتين مربع الساق الأقصر. طول كل حد يكون عدد كلي. أوجد طول كل حد. **3 mi, 4 mi, 5 mi**

3-6 تمارين المهارات

نظريتا الباقي والعامل

استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(2)$ و $f(-1)$ لكل دالة.

1. $f(x) = x^2 + 6x + 5$ **21, 0**

2. $f(x) = x^2 - x + 1$ **3, 3**

3. $f(x) = x^2 - 2x - 2$ **−2, 1**

4. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ **21, 6**

5. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ **3, 3**

6. $f(x) = x^3 + 6x^2 + x - 4$ **30, 0**

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$ **−4, −7**

8. $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 6$ **−8, 1**

9. $f(x) = x^4 + 2x^2 - 9$ **15, −6**

10. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 6$ **2, 14**

11. $f(x) = x^5 - 7x^3 - 4x + 10$ **−22, 20**

12. $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^3 - 9x^2 - 20$ **−32, −26**

باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد باقي العوامل.

13. $x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 1$ **$x - 1, x + 2$**

14. $x^3 + x^2 - 5x + 3; x - 1$ **$x - 1, x + 3$**

15. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12; x + 3$ **$x - 2, x + 2$**

16. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 3$ **$x - 1, x - 2$**

17. $x^3 + 2x^2 - 33x - 90; x + 5$ **$x + 3, x - 6$**

18. $x^3 - 6x^2 + 32; x - 4$ **$x - 4, x + 2$**

19. $x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$ **$x + 1, x - 4$**

20. $x^3 - 19x + 30; x - 2$ **$x + 5, x - 3$**

21. $2x^3 + x^2 - 2x - 1; x + 1$ **$2x + 1, x - 1$**

22. $2x^3 + x^2 - 5x + 2; x + 2$ **$x - 1, 2x - 1$**

23. $3x^3 + 4x^2 - 5x - 2; 3x + 1$ **$x - 1, x + 2$**

24. $3x^3 + x^2 + x - 2; 3x - 2$ **$x^2 + x + 1$**

3-6 تمرين

نظريتا الباقي والعامل

استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-3)$ و $f(4)$ لكلّ دالة.

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3$

2. $f(x) = x^2 - 5x + 10$

3. $f(x) = x^2 - 5x - 4$

4. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$

5. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$

6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$

7. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 8$

8. $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

9. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 50$

10. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 12$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 - x + 7$

12. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$

13. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 26$

14. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 3$

15. $f(x) = x^5 + 7x^3 - 4x - 10$

16. $f(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 9x^2 + 20$

باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد باقي العوامل.

17. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8;\ x - 2$

18. $x^3 + 7x^2 + 7x - 15;\ x - 1$

19. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27;\ x - 3$

20. $x^3 - x^2 - 8x + 12;\ x + 3$

21. $x^3 + 5x^2 - 2x - 24;\ x - 2$

22. $x^3 - x^2 - 14x + 24;\ x + 4$

23. $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6;\ x + 2$

24. $4x^3 - 12x^2 - x + 3;\ x - 3$

25. $18x^3 + 9x^2 - 2x - 1;\ 2x + 1$

26. $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2;\ 3x - 2$

27. $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4;\ x + 1$

28. $x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5x + 10;\ x - 2$

29. تعداد السكان يمكن تقدير عدد السكان المتوقع محسوبًا بالألف نسمة لإحدى المدن على مدار السنوات القليلة القادمة بالدالة $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 520$، حيث x هي عدد السنوات منذ 2005. استخدم التعويض التركيبي لتقدير عدد السكان لعام 2015. **1,640,000**

30. الحجم يمكن تمثيل حجم الماء في حوض سباحة مستطيل الشكل بكثيرة الحدود $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$. إذا كان عمق حوض السباحة معطى بكثيرة الحدود $2x + 1$. فما هي كثيرات الحدود التي تعبر عن طول وعرض حوض السباحة؟ **$x - 3$ و $x - 2$**

3-7 تمارين المهارات

الجذور والأصفار

أوجد حل كل معادلة. اذكر عدد الجذور ونوعها.

1. $5x + 12 = 0$

$-\frac{12}{5}$؛ 1 حقيقي

2. $x^2 - 4x + 40 = 0$

$2 \pm 6i$؛ 2 تخيلي

3. $x^5 + 4x^3 = 0$

$0, 0, 0, 2i, -2i$؛ 3 حقيقي، 2 تخيلي

4. $x^4 - 625 = 0$

$5, 5i, -5i, -5$؛ 2 حقيقي، 2 تخيلي

5. $4x^2 - 4x - 1 = 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$؛ 2 حقيقي

6. $x^5 - 81x = 0$

$0, -3, 3, -3i, 3i$؛ 3 حقيقي، 2 تخيلي

اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لكل دالّة.

7. $g(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$

2 أو 0؛ 1؛ 0 أو 2

8. $h(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$

2 أو 0؛ 1؛ 0 أو 2

9. $f(x) = x^3 - 8x^2 + 2x - 4$

3 أو 1؛ 0؛ 0 أو 2

10. $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 6$

3 أو 1؛ 0؛ 0 أو 2

11. $q(x) = x^4 + 7x^2 + 3x - 9$

1; 1; 2

12. $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 6x + 1$

2 أو 0؛ 2 أو 0؛ 4 أو 2 أو 0

أوجد جميع أصفار كل دالة.

13. $h(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

$3, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

14. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$

$2, 2 + i, 2 - i$

15. $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$1, -2, -3$

16. $q(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

$2, -1, -4$

17. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$

$-1, -1, 1, 4$

18. $f(x) = x^4 - 21x^2 + 80$

$-4, 4, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

اكتب دالةً كثيرة الحدود ذات معاملاتٍ تكاملية وبأصغر درجة ممكنة، بحيث تكون لها الأصفار المعطاة.

19. $-3, -5, 1$

$f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

20. $3i$

$f(x) = x^2 + 9$

21. $-5 + i$

$f(x) = x^2 + 10x + 26$

22. $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

23. $i, 5i$

$f(x) = x^4 + 26x^2 + 25$

24. $-1, 1, i\sqrt{6}$

$f(x) = x^4 + 5x^2 - 6$

3-7 تمرين

الجذور والأصفار

أوجد حل كل معادلة. اذكر عدد الجذور ونوعها.

1. $-9x - 15 = 0$

$-\frac{5}{3}$؛ 1 حقيقي

2. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$-1, 1, -2, 2$؛ 4 حقيقي

3. $x^5 - 81x = 0$

$0, -3, 3, -3i, 3i$؛ 3 حقيقي، 2 تخيلي

4. $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

$-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$؛ 3 حقيقي

5. $x^3 + 6x + 20 = 0$

$-2, 1 \pm 3i$؛ 1 حقيقي، 2 تخيلي

6. $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

$2, -1, -i, i$؛ 2 حقيقي، 2 تخيلي

اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لكل معادلة.

7. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 3$

0 أو 1؛ 0؛ 2 أو 2

8. $p(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 1$

1 أو 1؛ 0؛ 3 أو 2

9. $q(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x + 5$

2 أو 0؛ 2 أو 0؛ 4 أو 2 أو 0

10. $h(x) = 7x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1$

2 أو 0؛ 2 أو 0؛ 4 أو 2 أو 0

أوجد جميع أصفار كل دالة.

11. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 65x + 84$

$-7, \frac{3}{2}, 4$

12. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 7$

$1, 1 + i\sqrt{6}, 1 - i\sqrt{6}$

13. $h(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - +5$

$3, 2 + i, 2 - i$

14. $q(x) = x^4 + 50x^2 + 49$

$-i, i, -7i, 7i$

15. $g(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 8$

$-1, -1, 2, -4$

16. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 24x - 40$

$-2, 2, 3 - i, 3 + i$

اكتب دالةً كثيرة الحدود ذات معاملاتٍ تكامليةٍ وبأصغر درجة ممكنة، بحيث تكون لها الأصفار المعطاة.

17. $-5, 3i$

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 45$

18. $-2, 3 + i$

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$

19. $-1, 4, 3i$

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$

20. $2, 5, 1 + i$

$f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 34x + 20$

21. **الصناعات اليدوية** لدى عمر مجموعة من المخططات لبناء صندوق خشبي. وهو يريد تقليل حجم الصندوق إلى 150 بوصة مكعبة. وسيقوم بتقليل طول كل بعد في المخطط بنفس القدر. وتحدد المخططات بعاد الصندوق لتكون 10 بوصات في 8 بوصات في 6 بوصات. اكتب وحل معادلة كثيرة الحدود لإيجاد مقدار ما ينبغي على عمر اقتطاعه من كل بعد.

$(10 - x)(8 - x)(6 - x) = 105$; 3 in.

4-1 تمارين المهارات

العمليات الحسابية على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$، و $(f-g)(x)$، $(f\cdot g)(x)$، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل $f(x)$ و $g(x)$.

1. $f(x) = x + 5$, $g(x) = x - 4$ **$2x + 1$; 9; $x^2 + x - 20$; $\frac{x+5}{x-4}, x \neq 4$**

2. $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ **$5x - 2$; $x + 4$; $6x^2 - 7x - 3$; $\frac{3x+1}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$**

3. $f(x) = x^2$, $g(x) = 4 - x$ **$x^2 - x + 4$; $x^2 + x - 4$; $4x^2 - x^3$; $\frac{x^2}{4-x}, x \neq 4$**

4. $f(x) = 3x^2$, $g(x) = \frac{5}{x}$ **$\frac{3x^3+5}{x}, x \neq 0$; $\frac{3x^3-5}{x}, x \neq 0$; $15x, x \neq 0$; $\frac{3x^3}{5}, x \neq 0$**

لكل زوج من الدوال، أوجد قيمة $f \circ g$ و $g \circ f$، إن وجد.

5. $f = \{(0, 0), (4, -2)\}$
   $g = \{(0, 4), (-2, 0), (5, 0)\}$
   $\{(0, -2), (-2, 0), (5, 0)\}$;
   $\{(0, 4), (4, 0)\}$

6. $f = \{(0, -3), (1, 2), (2, 2)\}$
   $g = \{(-3, 1), (2, 0)\}$
   $\{(-3, 2), (2, -3)\}$;
   $\{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$

7. $f = \{(-4, 3), (-1, 1), (2, 2)\}$
   $g = \{(1, -4), (2, -1), (3, -1)\}$
   $\{(1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$;
   $\{(-4, -1), (-1, -4), (2, -1)\}$

8. $f = \{(6, 6), (-3, -3), (1, 3)\}$
   $g = \{(-3, 6), (3, 6), (6, -3)\}$
   $\{(-3, 6), (3, 6), (6, -3)\}$;
   $\{(6, -3), (-3, 6), (1, 6)\}$

أوجد $[g \circ h](x)$ و $[h \circ g](x)$ إن وجد.

9. $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$ **$2x + 4$; $2x + 2$**

10. $g(x) = -3x$, $h(x) = 4x - 1$ **$-12x + 3$; $-12x - 1$**

11. $g(x) = x - 6$, $h(x) = x + 6$ **x; x**

12. $g(x) = x - 3$, $h(x) = x^2$ **$x^2 - 3$; $x^2 - 6x + 9$**

13. $g(x) = 5x$, $h(x) = x^2 + x - 1$ **$5x^2 + 5x - 5$; $25x^2 + 5x - 1$**

14. $g(x) = x + 2$, $h(x) = 2x^2 - 3$ **$2x^2 - 1$; $2x^2 + 8x + 5$**

إذا كانت $f(x) = 3x$، و $g(x) = x + 4$، و $h(x) = x^2 - 1$، فأوجد كل قيمة.

15. $f[g(1)]$ **15**

16. $g[h(0)]$ **3**

17. $g[f(-1)]$ **1**

18. $h[f(5)]$ **224**

19. $g[h(-3)]$ **12**

20. $h[f(10)]$ **899**

21. $f[h(8)]$ **189**

22. $[f \circ (h \circ g)](1)$ **72**

23. $[f \circ (g \circ h)](-2)$ **21**

4-1 تمرين

العمليات الحسابية على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$، و $(f-g)(x)$، و $(f \cdot g)(x)$، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل $f(x)$ و $g(x)$.

1. $f(x) = 2x + 1$
   $g(x) = x - 3$
   $3x - 2;\ x + 4;$
   $2x^2 - 5x - 3;$
   $\frac{2x+1}{x-3},\ x \neq 3$

2. $f(x) = 8x^2$
   $g(x) = \frac{1}{x^2}$
   $\frac{8x^4+1}{x^2},\ x \neq 0;$
   $\frac{8x^4-1}{x^2},\ x \neq 0;$
   $8,\ x \neq 0;\ 8x^4,\ x \neq 0$

3. $f(x) = x^2 + 7x + 12$
   $g(x) = x^2 - 9$
   $2x^2 + 7x + 3;\ 7x + 21;$
   $x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 63x - 108;$
   $\frac{x+4}{x-3},\ x \neq \pm 3$

لكل زوج من الدوال، أوجد قيمة $f \circ g$ و $g \circ f$، إن وجد.

4. $f = \{(-9, -1), (-1, 0), (3, 4)\}$
   $g = \{(0, -9), (-1, 3), (4, -1)\}$
   $\{(0, -1), (-1, 4), (4, 0)\};$
   $\{(-9, 3), (-1, -9), (3, -1)\}$

5. $f = \{(-4, 3), (0, -2), (1, -2)\}$
   $g = \{(-2, 0), (3, 1)\}$
   $\{(-2, -2), (3, -2)\};$
   $\{(-4, 1), (0, 0), (1, 0)\}$

6. $f = \{(-4, -5), (0, 3), (1, 6)\}$
   $g = \{(6, 1), (-5, 0), (3, -4)\}$
   $\{(6, 6), (-5, 3), (3, -5)\};$
   $\{(-4, 0), (0, -4), (1, 1)\}$

7. $f = \{(0, -3), (1, -3), (6, 8)\}$
   $g = \{(8, 2), (-3, 0), (-3, 1)\}$
   does not exist;
   $\{(0, 0), (1, 0), (6, 2)\}$

أوجد قيمة $[g \circ h](x)$ و $[h \circ g](x)$، إن وجدت.

8. $g(x) = 3x$
   $h(x) = x - 4$
   $3x - 12;\ 3x - 4$

9. $g(x) = -8x$
   $h(x) = 2x + 3$
   $-16x - 24;\ -16x + 3$

10. $g(x) = x + 6$
    $h(x) = 3x^2$
    $3x^2 + 6;\ 3x^2 + 36x + 108$

11. $g(x) = x + 3$
    $h(x) = 2x^2$
    $2x^2 + 3;$
    $2x^2 + 12x + 18$

12. $g(x) = -2x$
    $h(x) = x^2 + 3x + 2$
    $-2x^2 - 6x - 4;$
    $4x^2 - 6x + 2$

13. $g(x) = x - 2$
    $h(x) = 3x^2 + 1$
    $3x^2 - 1;$
    $3x^2 - 12x + 13$

إذا كانت $f(x) = x^2,\ g(x) = 5x$، و $h(x) = x + 4$، فأوجد كل قيمة.

14. $f[g(1)]$ 25
15. $g[h(-2)]$ 10
16. $h[f(4)]$ 20
17. $f[h(-9)]$ 25
18. $h[g(-3)]$ -11
19. $g[f(8)]$ 320

20. **الأعمال التجارية** تمثل الدالة $f(x) = 1000 - 0.01x^2$ تكلفة التصنيع لكل منتج عندما يتم إنتاج x من المنتجات، و $g(x) = 150 - 0.001x^2$ تمثل تكلفة الخدمة لكل منتج. اكتب دالة $C(x)$ لإجمالي تكلفة التصنيع والخدمات لكل منتج. $C(x) = 1150 - 0.011x^2$

21. **القياس** الصيغة $f = \frac{n}{12}$ تحول البوصات n إلى قدم f، و $m = \frac{f}{5280}$ تحول الأقدام إلى أميال m. اكتب تركيب دوال لتحويل البوصات إلى أميال. $[m \circ f](n) = \frac{n}{63{,}360}$

الاسم ______________ التاريخ ______________ المدّة ______________

4-2 تمارين المهارات

الدوال والعلاقات العكسية

أوجد معكوس كل علاقة مما يلي.

1. $\{(3, 1), (4, -3), (8, -3)\}$
$\{(1, 3), (-3, 4), (-3, 8)\}$

2. $\{(-7, 1), (0, 5), (5, -1)\}$
$\{(1, -7), (5, 0), (-1, 5)\}$

3. $\{(-10, -2), (-7, 6), (-4, -2), (-4, 0)\}$
$\{(-2, -10), (6, -7), (-2, -4), (0, -4)\}$

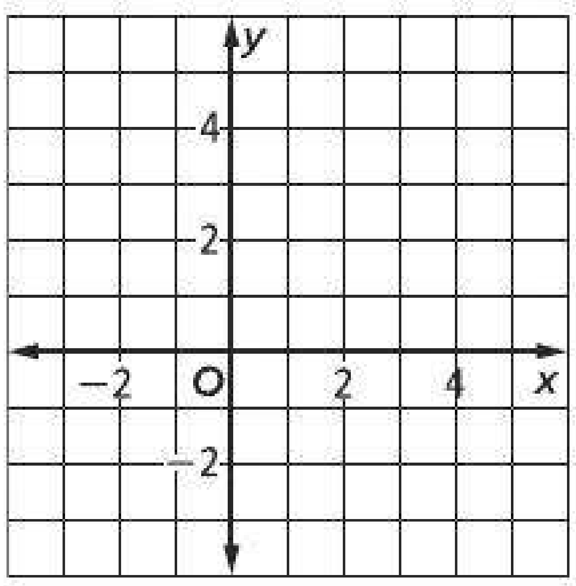
4. $\{(0, -9), (5, -3), (6, 6), (8, -3)\}$
$\{(-9, 0), (-3, 5), (6, 6), (-3, 8)\}$

5. $\{(-4, 12), (0, 7), (9, -1), (10, -5)\}$
$\{(12, -4), (7, 0), (-1, 9), (-5, 10)\}$

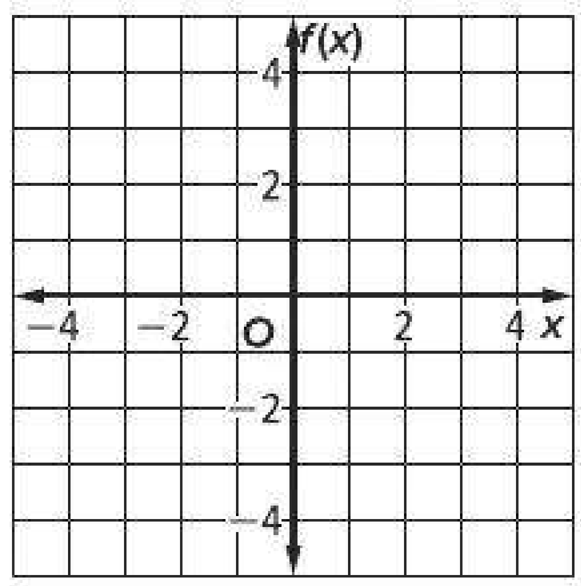
6. $\{(-4, 1), (-4, 3), (0, -8), (8, -9)\}$
$\{(1, -4), (3, -4), (-8, 0), (-9, 8)\}$

أوجد معكوس كلّ من الدّوال التالية. ثمّ مثل الدّالة ومعكوسها بيانيًا.

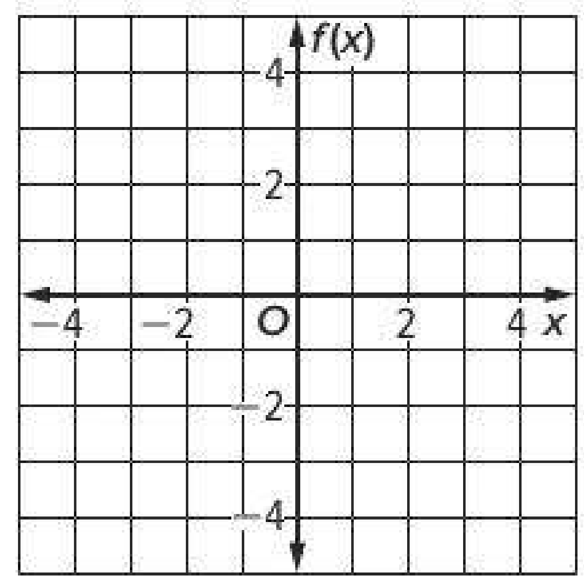
7. $y = 4$
$x = 4$



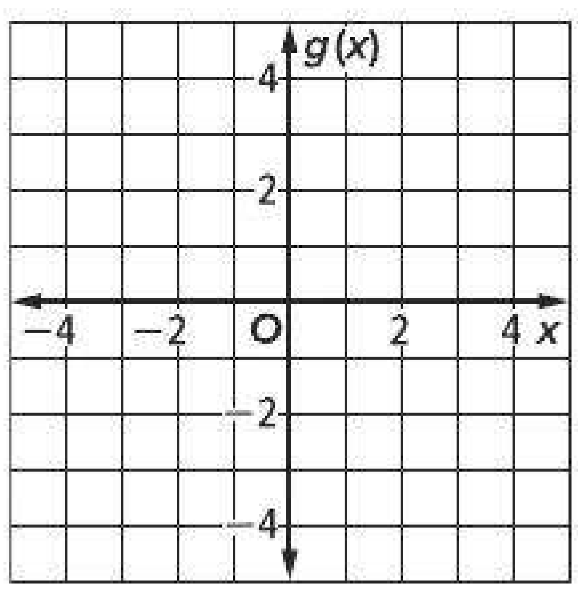
8. $f(x) = 3x$
$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$



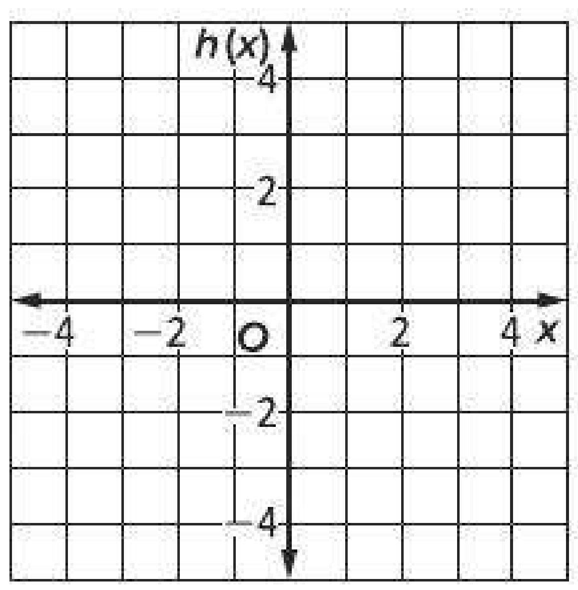
9. $f(x) = x + 2$
$f^{-1}(x) = x - 2$



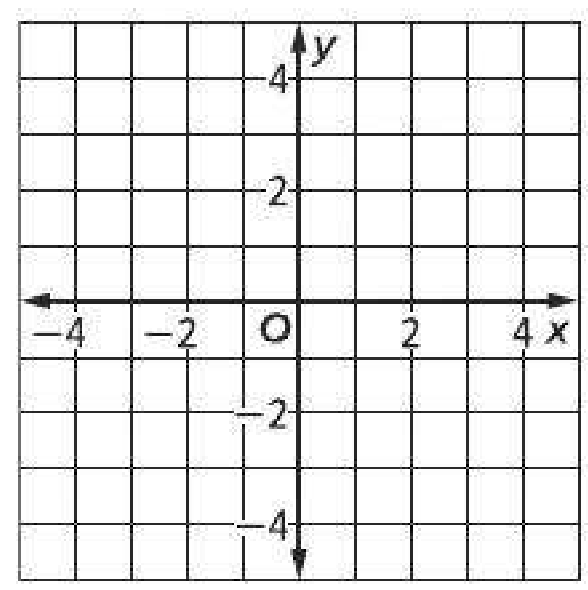
10. $g(x) = 2x - 1$
$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$



11. $h(x) = \frac{1}{4}x$
$h^{-1}(x) = 4x$



12. $y = \frac{2}{3}x + 2$
$y = \frac{3}{2}x - 3$



حدّد ما إن كان كل زوجٍ من الدوال التالية دالتين متعاكستين. اكتب نعم أو لا.

13. $f(x) = x - 1$ **لا**
$g(x) = 1 - x$

14. $f(x) = 2x + 3$ **نعم**
$g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$

15. $f(x) = 5x - 5$ **نعم**
$g(x) = \frac{1}{5}x + 1$

16. $f(x) = 2x$ **نعم**
$g(x) = \frac{1}{2}x$

17. $h(x) = 6x - 2$ **لا**
$g(x) = \frac{1}{6}x + 3$

18. $f(x) = 8x - 10$ **نعم**
$g(x) = \frac{1}{8}x + \frac{5}{4}$

4-2 تمرين

الدوال والعلاقات العكسية

أوجد معكوس كل علاقة مما يلي.

1. $\{(0, 3), (4, 2), (5, -6)\}$
$\{(3, 0), (2, 4), (-6, 5)\}$

2. $\{(-5, 1), (-5, -1), (-5, 8)\}$
$\{(1, -5), (-1, -5), (8, -5)\}$

3. $\{(-3, -7), (0, -1), (5, 9), (7, 13)\}$
$\{(-7, -3), (-1, 0), (9, 5), (13, 7)\}$

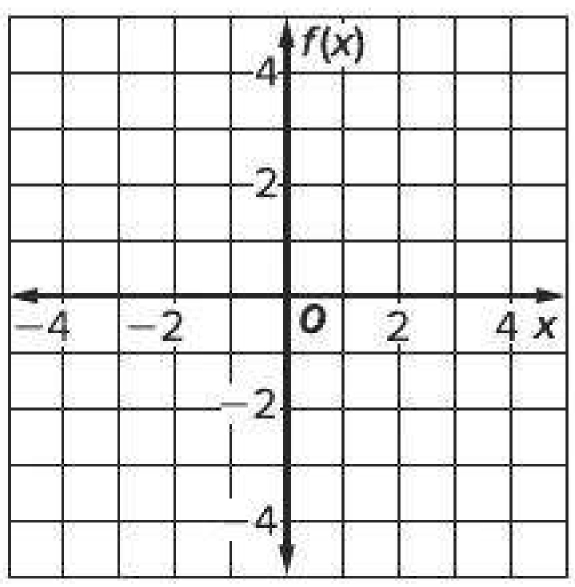
4. $\{(8, -2), (10, 5), (12, 6), (14, 7)\}$
$\{(-2, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14)\}$

5. $\{(-5, -4), (1, 2), (3, 4), (7, 8)\}$
$\{(-4, -5), (2, 1), (4, 3), (8, 7)\}$

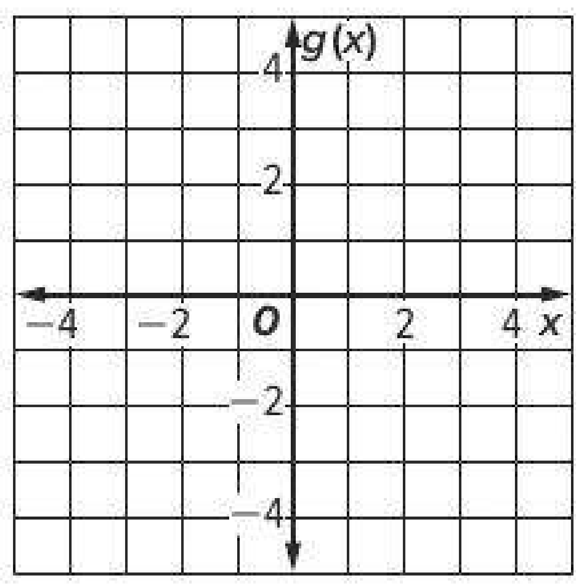
6. $\{(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (1, 1)\}$
$\{(9, -3), (4, -2), (0, 0), (1, 1)\}$

أوجد معكوس كلّ من الدّوال التالية. ثمّ مثل الدّالة ومعكوسها بيانيًا.

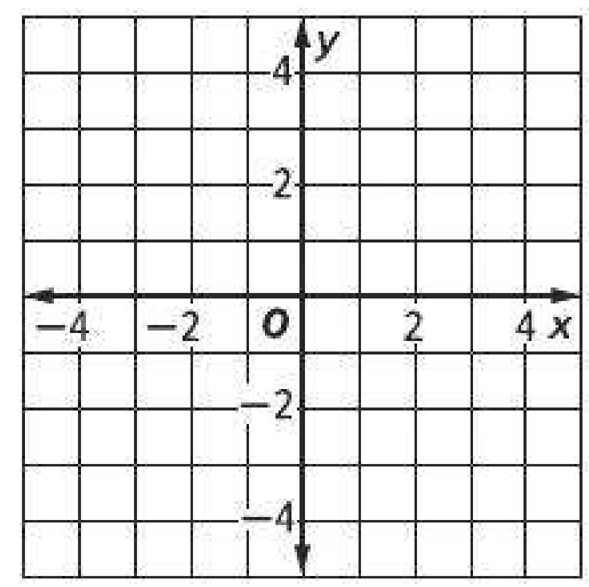
7. $f(x) = \frac{3}{4}x$
$f^{-1}(x) = \frac{4}{3}x$



8. $g(x) = 3 + x$
$g^{-1}(x) = x - 3$



9. $y = 3x - 2$
$y = \frac{x + 2}{3}$



حدّد ما إن كان كل زوجٍ من الدوال التالية دالتين متعاكستين. اكتب نعم أو لا.

10. $f(x) = x + 6$ **نعم**
$g(x) = x - 6$

11. $f(x) = -4x + 1$ **نعم**
$g(x) = \frac{1}{4}(1 - x)$

12. $g(x) = 13x - 13$ **لا**
$h(x) = \frac{1}{13}x - 1$

13. $f(x) = 2x$ **لا**
$g(x) = -2x$

14. $f(x) = \frac{6}{7}x$ **نعم**
$g(x) = \frac{7}{6}x$

15. $g(x) = 2x - 8$ **نعم**
$h(x) = \frac{1}{2}x + 4$

16. **القياس** تُعطي النقاط (63, 121), (71, 180), (67, 140), (65, 108), (72, 165) الوزن بالأرطال بدلالة الطول بالبوصات لـ 5 من الطلاب في الفصل. اعط النقاط التي تمثل الطول بدلالة الوزن لهؤلاء الطلاب.
(121, 63), (180, 71), (140, 67), (108, 65), (165, 72)

17. **إعادة التنظيم** تقوم عائلة محمود بتغيير أرضية مطبخهم الذي تبلغ مساحته 15 قدمًا في 18 قدمًا. تتكلف الأرضية الجديدة AED 17.99 لكل ياردة مربعة. تحول الصيغة $f(x) = 9x$ الياردة المربعة إلى قدم مربع.

a. أوجد معكوس الدالة $f^{-1}(x)$. ما أهمية $f^{-1}(x)$ بالنسبة لعائلة محمود؟

$f^{-1}(x) = \frac{x}{9}$؛ ستسمح لهم بتحويل الأقدام المربعة لأرضية مطبخهم إلى ياردات مربعة، حتى يمكنهم حساب تكلفة الأرضيات الجديدة.

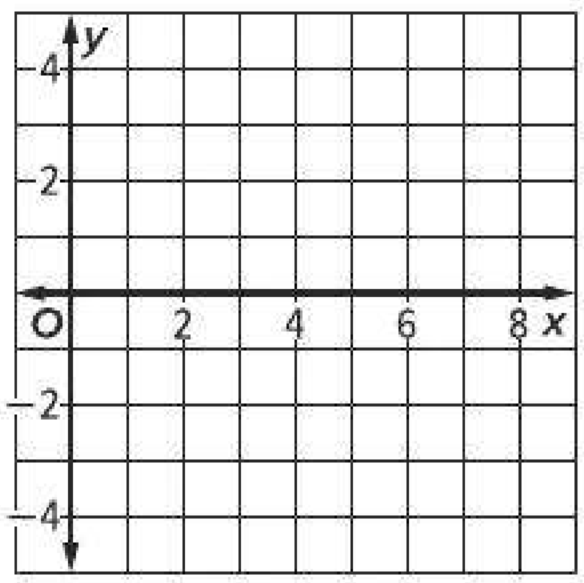
b. كم ستكلف الأرضيات الجديدة عائلة محمود؟ **AED 539.70**

4-3 تمارين المهارات

دوال الجذر التربيعي ومتبايناته

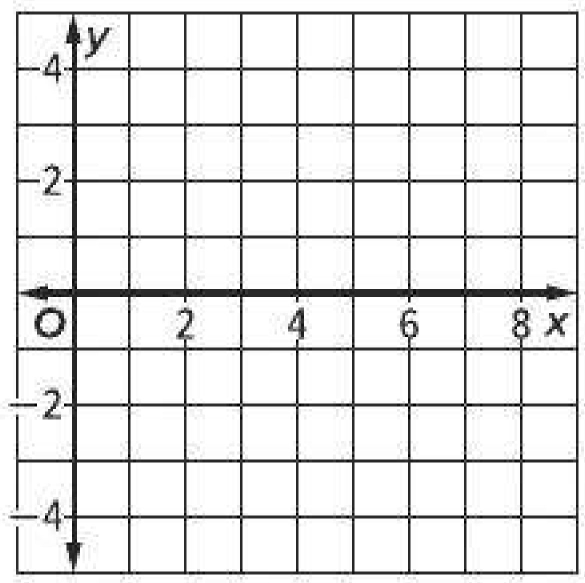
مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى لكل دالة.

1. $y = \sqrt{2x}$



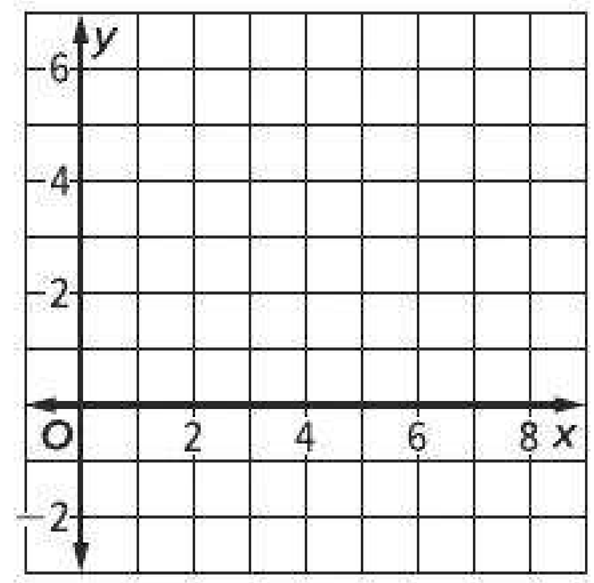
D = {x | x ≥ 0};
R = {y | y ≥ 0}

2. $y = -\sqrt{3x}$



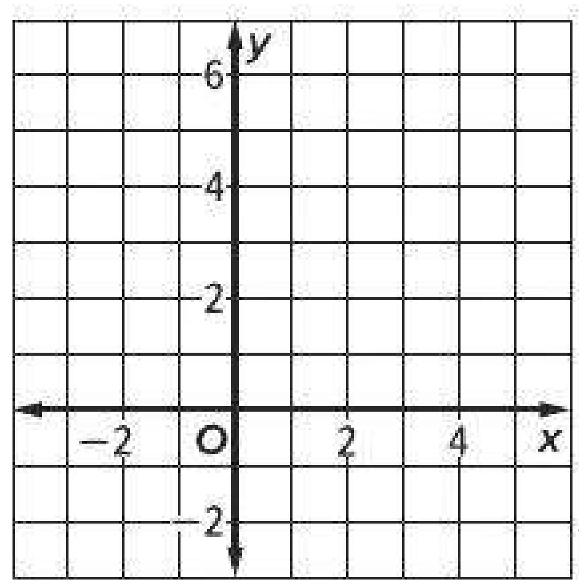
D = {x | x ≥ 0};
R = {y | y ≤ 0}

3. $y = 2\sqrt{x}$



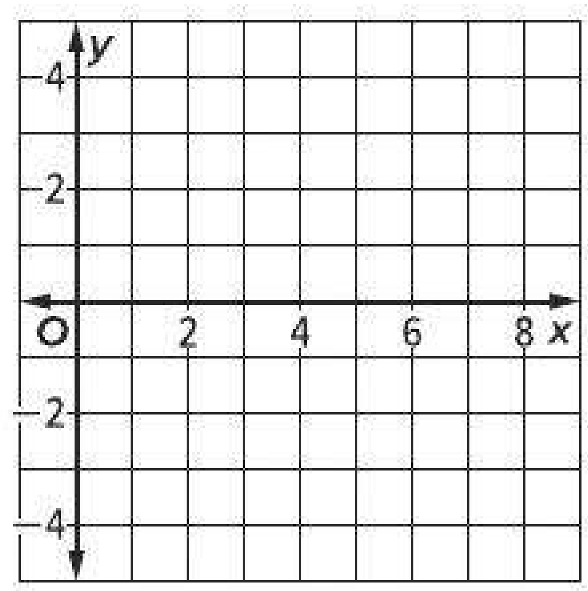
D = {x | x ≥ 0};
R = {y | y ≥ 0}

4. $y = \sqrt{x + 3}$



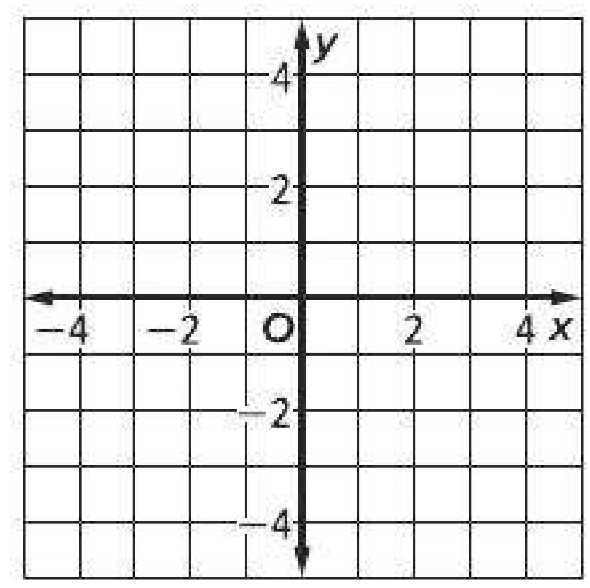
D = {x | x ≥ −3};
R = {y | y ≥ 0}

5. $y = -\sqrt{2x - 5}$



D = {x | x ≥ 2.5};
R = {y | y ≤ 0}

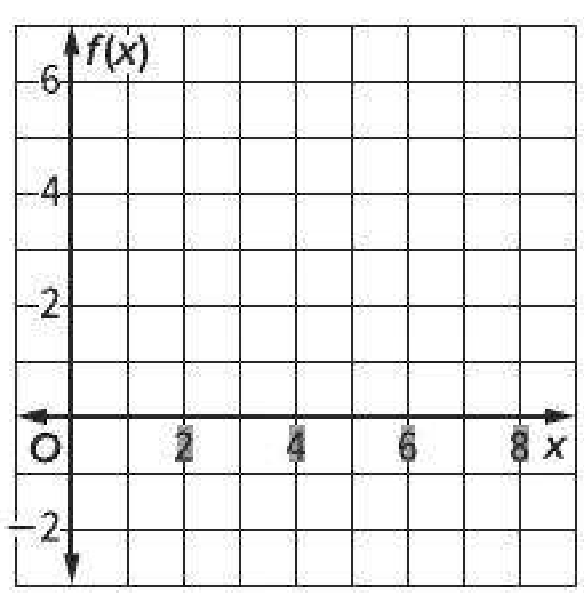
6. $y = \sqrt{x + 4} - 2$



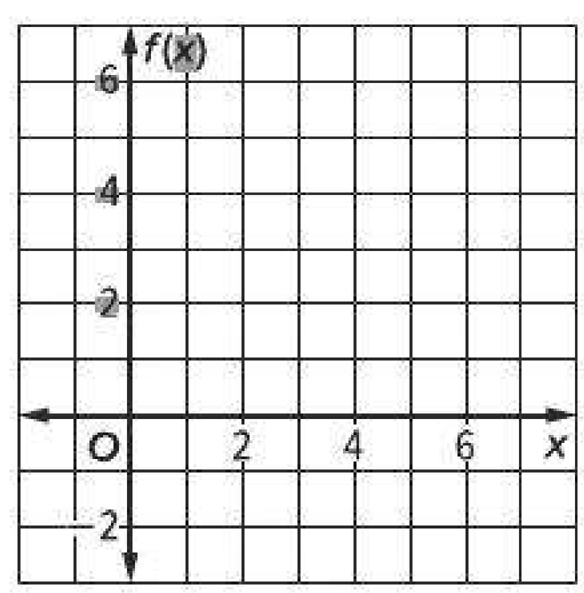
D = {x | x ≥ −4};
R = {y | y ≥ −2}

مثّل كل متباينة بيانيًا.

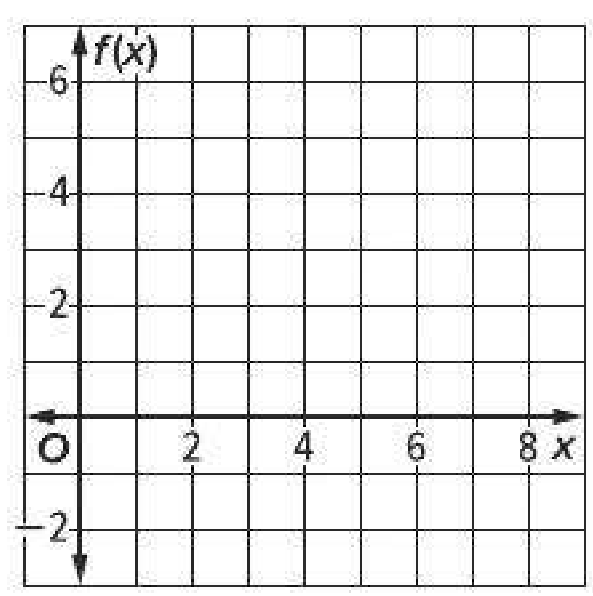
7. $f(x) < \sqrt{4x}$



8. $f(x) \geq \sqrt{x + 1}$



9. $f(x) \leq \sqrt{4x - 3}$

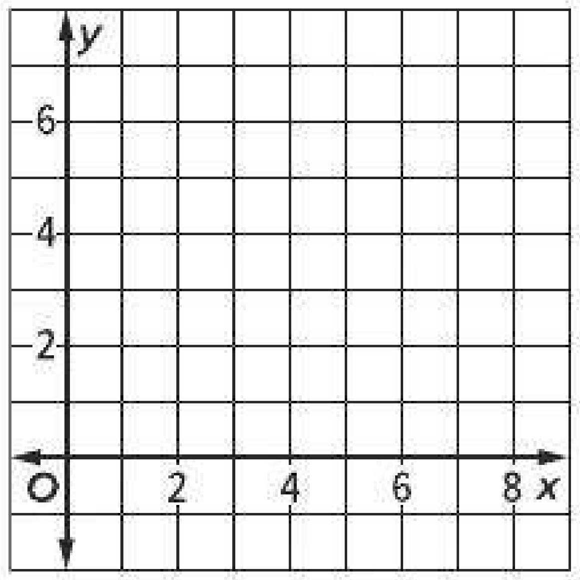


4-3 تمرين

دوال الجذر التربيعي ومتبايناته

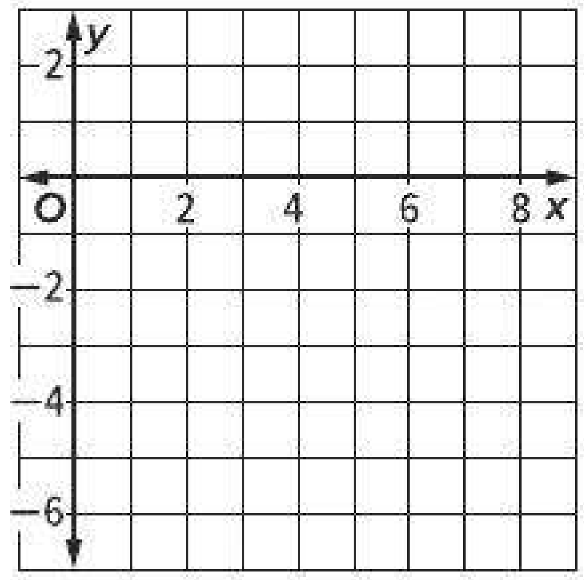
مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

1. $y = \sqrt{5x}$



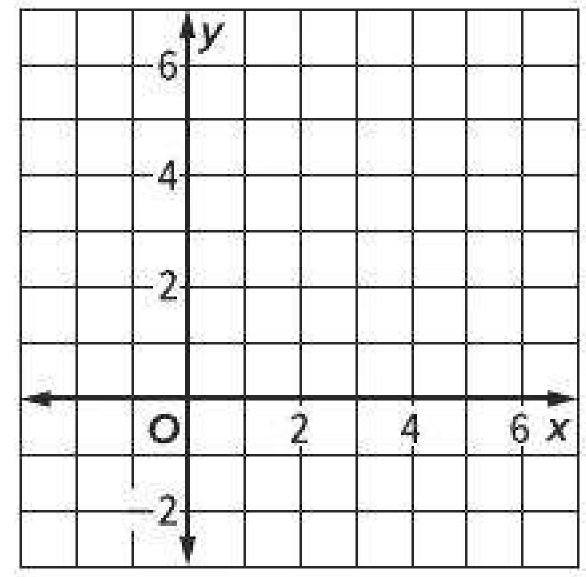
D: $x \geq 0$, R: $y \geq 0$

2. $y = -\sqrt{x - 1}$



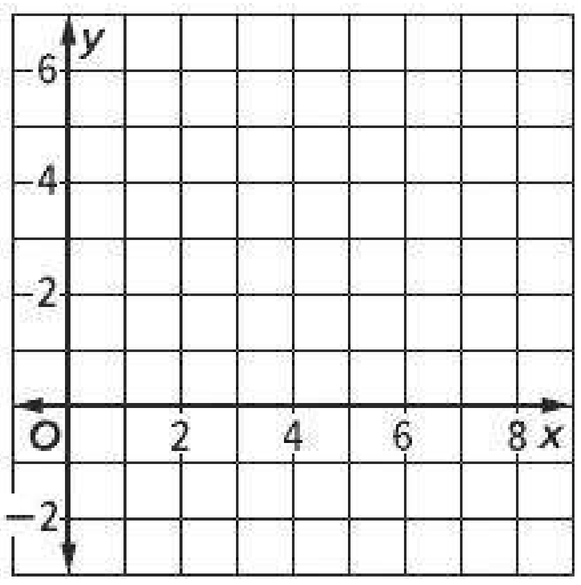
D: $x \geq 1$, R: $y \leq 0$

3. $y = 2\sqrt{x + 2}$



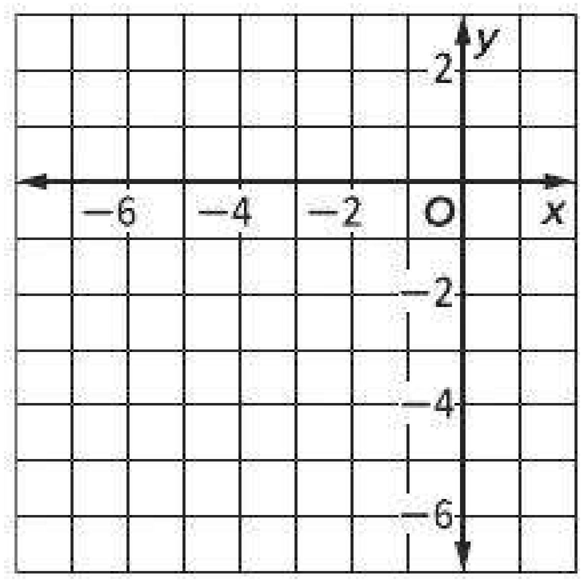
D: $x \geq -2$, R: $y \geq 0$

4. $y = \sqrt{3x - 4}$



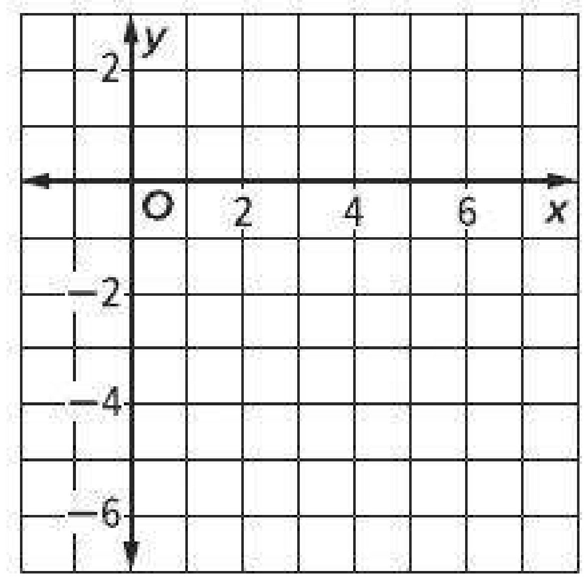
D: $x \geq \frac{4}{3}$, R: $y \geq 0$

5. $y = \sqrt{x + 7} - 4$



D: $x \geq -7$, R: $y \geq -4$

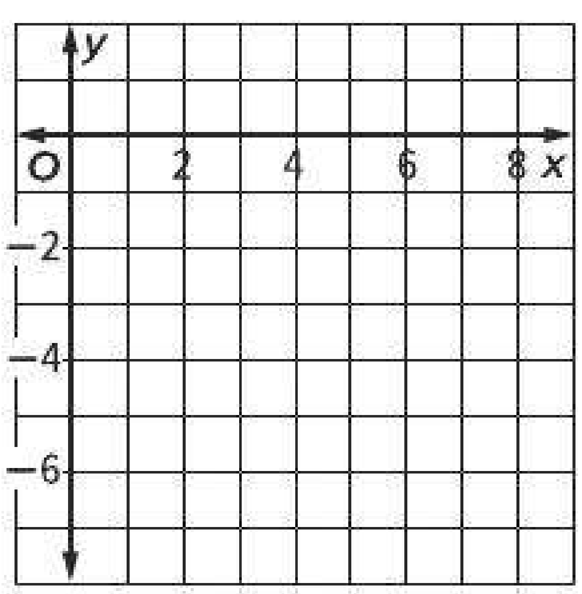
6. $y = 1 - \sqrt{2x + 3}$



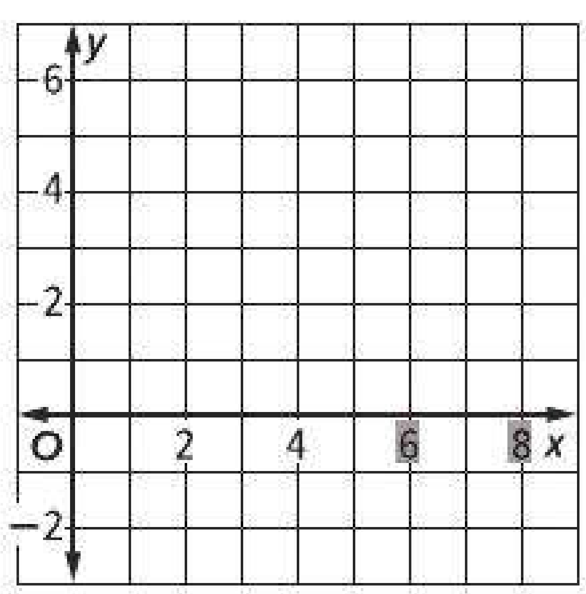
D: $x \geq -\frac{3}{2}$, R: $y \leq 1$

مثّل كل متباينة بيانيًا.

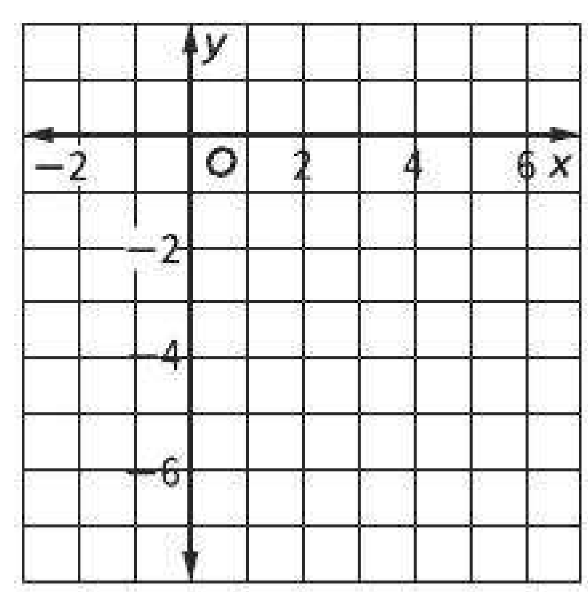
7. $y \geq -\sqrt{6x}$



8. $y \leq \sqrt{x - 5} + 3$



9. $y > -2\sqrt{3x + 2}$



10. **قطار الملاهي** تكون سرعة قطار الملاهي وهو يتجه إلى أسفل التل $v = \sqrt{v_0^2 + 64h}$. حيث تمثل v_0 السرعة الأولية، وتمثل h الهبوط العمودي مقدرًا بالقدم. إذا كانت $v = 70$ قدمًا في الثانية $v_0 = 8$ أقدام في الثانية، فأوجد h. **حوالي 75.6 ft**

11. **الوزن** استخدم الصيغة $d = \sqrt{\frac{3960^2 W_E}{W_s}} - 3960$، التي تربط المسافة من الأرض d بالأميال بالوزن. إذا كان وزن رائد فضاء على الأرض W_E يبلغ 148 رطلًا وفي الفضاء W_s يبلغ 115 رطلًا، كم يبعد رائد الفضاء عن الأرض؟ **حوالي 532 mi**

4-4 تمارين المهارات

الجذور النونية

استخدم حاسبة لتقريب كل قيمة لثلاث منازل عشرية.

1. $\sqrt{230}$ **15.166**

2. $\sqrt{38}$ **6.164**

3. $-\sqrt{152}$ **−12.329**

4. $\sqrt{5.6}$ **2.366**

5. $\sqrt[3]{88}$ **4.448**

6. $\sqrt[3]{-222}$ **−6.055**

7. $-\sqrt[4]{0.34}$ **−0.764**

8. $\sqrt[5]{500}$ **3.466**

بسّط ما يلي.

9. $\pm\sqrt{81}$ **±9**

10. $\sqrt{144}$ **12**

11. $\sqrt{(-5)^2}$ **5**

12. $\sqrt{-5^2}$ **ليس عددًا حقيقيًا**

13. $\sqrt{0.36}$ **0.6**

14. $-\sqrt{\frac{4}{9}}$ $-\frac{2}{3}$

15. $\sqrt[3]{-8}$ **−2**

16. $-\sqrt[3]{27}$ **−3**

17. $\sqrt[3]{0.064}$ **0.4**

18. $\sqrt[5]{32}$ **2**

19. $\sqrt[4]{81}$ **3**

20. $\sqrt{y^2}$ $|y|$

21. $\sqrt[3]{125c^3}$ $5c$

22. $\sqrt{64x^6}$ $8|x^3|$

23. $\sqrt[3]{-27a^6}$ $-3a^2$

24. $\sqrt{m^8p^4}$ m^4p^2

25. $-\sqrt{100p^4t^2}$ $-10p^2|t|$

26. $\sqrt[4]{16w^4v^8}$ $2|w|v^2$

27. $\sqrt{(-3c)^4}$ $9c^2$

28. $\sqrt{(a+b)^2}$ $|a+b|$

4-4 تمرين

الجذور النونية

بسّط ما يلي.

1. $\sqrt{0.81}$ **0.9**
2. $-\sqrt{324}$ **−18**
3. $-\sqrt[4]{256}$ **−4**
4. $\sqrt[6]{64}$ **2**
5. $\sqrt[4]{-64}$ **−4**
6. $\sqrt[3]{0.512}$ **0.8**
7. $\sqrt[5]{-243}$ **−3**
8. $-\sqrt[4]{1296}$ **−6**
9. $\sqrt[5]{\dfrac{-1024}{243}}$ $\mathbf{-\dfrac{4}{3}}$
10. $\sqrt[5]{243x^{10}}$ $\mathbf{3x^2}$
11. $\sqrt{14a^2}$ $\mathbf{14|a|}$
12. $\sqrt{-(14a)^2}$ **ليس عددًا حقيقيًا**
13. $\sqrt{49m^2t^8}$ $\mathbf{7|m|t^4}$
14. $\sqrt{\dfrac{16m^2}{25}}$ $\mathbf{\dfrac{4|m|}{5}}$
15. $\sqrt[3]{-64r^2w^{15}}$ $\mathbf{-4w^5\sqrt[3]{r^2}}$
16. $\sqrt{(2x)^8}$ $\mathbf{16x^4}$
17. $-\sqrt[4]{625s^8}$ $\mathbf{-5s^2}$
18. $\sqrt[3]{216p^3q^9}$ $\mathbf{6pq^3}$
19. $\sqrt{676x^4y^6}$ $\mathbf{26x^2|y^3|}$
20. $\sqrt[3]{-27x^9y^{12}}$ $\mathbf{-3x^3y^4}$
21. $-\sqrt{144m^8n^6}$ $\mathbf{-12m^4|n^3|}$
22. $\sqrt[5]{-32x^5y^{10}}$ $\mathbf{-2xy^2}$
23. $\sqrt[6]{(m+4)^6}$ $\mathbf{|m+4|}$
24. $\sqrt[3]{(2x+1)^3}$ $\mathbf{2x+1}$
25. $-\sqrt{49a^{10}b^{16}}$ $\mathbf{-7|a^5|b^8}$
26. $\sqrt[4]{(x-5)^8}$ $\mathbf{(x-5)^2}$
27. $\sqrt[3]{343d^6}$ $\mathbf{7d^2}$
28. $\sqrt{x^2+10x+25}$ $\mathbf{|x+5|}$

استخدم حاسبة لتقريب كل قيمة لثلاث منازل عشرية.

29. $\sqrt{7.8}$ **2.793**
30. $-\sqrt{89}$ **−9.434**
31. $\sqrt[3]{25}$ **2.924**
32. $\sqrt[3]{-4}$ **−1.587**
33. $\sqrt[4]{1.1}$ **1.024**
34. $\sqrt[5]{-0.1}$ **−0.631**
35. $\sqrt[6]{5555}$ **4.208**
36. $\sqrt[4]{(0.94)^2}$ **0.970**

37. **الحرارة المشعة** تقيس أجهزة الاستشعار الحرارية درجة الحرارة *المشعة* من جسم ما. وهي كمية الطاقة التي يشعها الجسم. ويطلق على درجة الحرارة الداخلية لأي جسم درجة حرارته الحركية. الصيغة $T_r = T_k\sqrt[4]{e}$ تربط درجة الحرارة المشعة من جسم ما T_r بدرجة حرارته الحركية T_k. والمتغير e في الصيغة هو قياس لمدى إشعاع الجسم للطاقة. إذا كانت درجة الحرارة الحركية لجسم ما تبلغ 30°C و $e = 0.94$. فما هي درجة الحرارة المشعة من الجسم لأقرب جزء من عشرة من الدرجة؟ **29.5°C**

38. **صيغة هيرون** سيشتري خالد أسمدة لحديقته المثلثة. وهو يعرف أطوال الأضلاع الثلاثة. لذا فهو يستخدم صيغة هيرون لإيجاد المساحة. وتنص صيغة هيرون بأن مساحة المثلث تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. حيث a و b و c هي أطوال أضلاع المثلث و s هي نصف محيط المثلث. إذا كانت أطوال أضلاع حديقة خالد هي 15 قدمًا و 17 قدمًا و 20 قدمًا. فما هي مساحة الحديقة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح. $\mathbf{124\ ft^2}$

4-5 تمارين المهارات

العمليات على التعابير الجذرية

بسّط ما يلي.

1. $\sqrt{24}$ $\mathbf{2\sqrt{6}}$

2. $\sqrt{75}$ $\mathbf{5\sqrt{3}}$

3. $\sqrt[3]{16}$ $\mathbf{2\sqrt[3]{2}}$

4. $-\sqrt[4]{48}$ $\mathbf{-2\sqrt[4]{3}}$

5. $4\sqrt{50x^5}$ $\mathbf{20x^2\sqrt{2x}}$

6. $\sqrt[4]{64a^4b^4}$ $\mathbf{2|ab|\sqrt{4}}$

7. $\sqrt[3]{-8d^2f^5}$ $\mathbf{-\frac{1}{2}f\sqrt[3]{d^2f^2}}$

8. $\sqrt{\frac{25}{36}r^2t}$ $\mathbf{\frac{5}{6}|r|\sqrt{t}}$

9. $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\mathbf{\frac{\sqrt{21}}{7}}$

10. $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ $\mathbf{\frac{\sqrt[3]{6}}{3}}$

11. $\sqrt{\frac{2g^3}{5z}}$ $\mathbf{\frac{g\sqrt{10gz}}{5z}}$

12. $(3\sqrt{3})(5\sqrt{3})$ $\mathbf{45}$

13. $(4\sqrt{12})(3\sqrt{20})$ $\mathbf{48\sqrt{15}}$

14. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$ $\mathbf{8\sqrt{2}}$

15. $\sqrt{12} - 2\sqrt{3} + \sqrt{108}$ $\mathbf{6\sqrt{3}}$

16. $8\sqrt{5} - \sqrt{45} - \sqrt{80}$ $\mathbf{\sqrt{5}}$

17. $2\sqrt{48} - \sqrt{75} - \sqrt{12}$ $\mathbf{\sqrt{3}}$

18. $(2 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{2})$ $\mathbf{12 - 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - \sqrt{6}}$

19. $(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$ $\mathbf{-4}$

20. $(3 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{2})$ $\mathbf{15 + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{7} - \sqrt{14}}$

21. $(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$ $\mathbf{8 - 4\sqrt{3}}$

22. $\frac{3}{7 - \sqrt{2}}$ $\mathbf{\frac{21 + 3\sqrt{2}}{47}}$

23. $\frac{4}{3 + \sqrt{2}}$ $\mathbf{\frac{12 - 4\sqrt{2}}{7}}$

24. $\frac{5}{8 - \sqrt{6}}$ $\mathbf{\frac{40 + 5\sqrt{6}}{58}}$

4-5 تمرين

العمليات على التعابير الجذرية

بسّط ما يلي.

1. $\sqrt{540}$ $6\sqrt{15}$
2. $\sqrt[3]{-432}$ $-6\sqrt[3]{2}$
3. $\sqrt[3]{128}$ $4\sqrt[3]{2}$
4. $-\sqrt[4]{405}$ $-3\sqrt[4]{5}$
5. $\sqrt[3]{-5000}$ $-10\sqrt[3]{5}$
6. $\sqrt[5]{-1215}$ $-3\sqrt[5]{5}$
7. $\sqrt[3]{125t^6w^2}$ $5t^2\sqrt[3]{w^2}$
8. $\sqrt[4]{48v^8z^{13}}$ $2v^2z^3\sqrt[4]{3z}$
9. $\sqrt[3]{8g^3k^8}$ $2gk^2\sqrt[3]{k^2}$
10. $\sqrt{45x^3y^8}$ $3xy^4\sqrt{5x}$
11. $\sqrt{\frac{11}{9}}$ $\frac{\sqrt{11}}{3}$
12. $\sqrt[3]{\frac{216}{24}}$ $\sqrt[3]{9}$
13. $\sqrt{\frac{1}{128}c^4d^7}$ $\frac{1}{16}c^2d^3\sqrt{2d}$
14. $\sqrt{\frac{9a^5}{64b^4}}$ $\frac{3a^2\sqrt{a}}{8b^2}$
15. $\sqrt[4]{\frac{8}{9a^3}}$ $\frac{\sqrt[4]{72a}}{3a}$
16. $(3\sqrt{15})(-4\sqrt{45})$ $-180\sqrt{3}$
17. $(2\sqrt{24})(7\sqrt{18})$ $168\sqrt{3}$
18. $\sqrt{810} + \sqrt{240} - \sqrt{250}$ $4\sqrt{10} + 4\sqrt{10}$
19. $6\sqrt{20} + 8\sqrt{5} - 5\sqrt{45}$ $5\sqrt{5}$
20. $8\sqrt{48} - 6\sqrt{75} + 7\sqrt{80}$ $2\sqrt{3} + 28\sqrt{5}$
21. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$ $30 + 12\sqrt{6}$
22. $(3 - \sqrt{7})^2$ $16 - 6\sqrt{7}$
23. $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ $5 + \sqrt{10} - \sqrt{30} - 2\sqrt{3}$
24. $(\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{10})$ -8
25. $(1 + \sqrt{6})(5 - \sqrt{7})$ $5 - \sqrt{7} + 5\sqrt{6} - \sqrt{42}$
26. $(\sqrt{3} + 4\sqrt{7})^2$ $115 + 8\sqrt{21}$
27. $(\sqrt{108} - 6\sqrt{3})^2$ 0
28. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 2}$ $\sqrt{15} + 2\sqrt{3}$
29. $\frac{6}{\sqrt{2} - 1}$ $6\sqrt{2} + 6$
30. $\frac{5 + \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ $\frac{17 - \sqrt{3}}{13}$
31. $\frac{3 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$ $\frac{8 + 5\sqrt{2}}{2}$
32. $\frac{3 + \sqrt{6}}{5 - \sqrt{24}}$ $27 + 11\sqrt{6}$
33. $\frac{3 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$ $\frac{6 + 5\sqrt{x} + x}{4 - x}$

34. **الكبح** الصيغة $s = 2\sqrt{5\ell}$ تقدر السرعة s بالأميال في الساعة لسيارة عندما تترك علامات انزلاق بطول ℓ قدم. استخدم الصيغة لكتابة تعبير مبسط لـ s إذا كانت $\ell = 85$. ثم أوجد قيمة s لأقرب ميل في الساعة. **$10\sqrt{17}$; 41 mi/h**

35. **نظرية فيثاغورس** يمكن تمثيل قياسات أضلاع مثلث قائم الزاوية بالتعبير $6x^2y$ و $9x^2y$. استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد تعبير مبسط لقياس الوتر. **$3x^2|y|\sqrt{13}$**

4-7 تمارين المهارات

حل المعادلات الجذرية والمتباينات

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

1. $\sqrt{x} = 5$ **25**

2. $\sqrt{x} + 3 = 7$ **16**

3. $5\sqrt{j} = 1$ $\mathbf{\frac{1}{25}}$

4. $v^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$ **لا يوجد حل**

5. $18 - 3y^{\frac{1}{2}} = 25$ **لا يوجد حل**

6. $\sqrt[3]{2w} = 4$ **32**

7. $\sqrt{b - 5} = 4$ **21**

8. $\sqrt{3n + 1} = 5$ **8**

9. $\sqrt[3]{3r - 6} = 3$ **11**

10. $2 + \sqrt{3p + 7} = 6$ **3**

11. $\sqrt{k - 4} - 1 = 5$ **40**

12. $(2d + 3)^{\frac{1}{3}} = 2$ $\mathbf{\frac{5}{2}}$

13. $(t - 3)^{\frac{1}{3}} = 2$ **11**

14. $4 - (1 - 7u)^{\frac{1}{3}} = 0$ **−9**

15. $\sqrt{3z - 2} = \sqrt{z - 4}$ **لا يوجد حل**

16. $\sqrt{g + 1} = \sqrt{2g - 7}$ **8**

أوجد حل كل متباينة مما يلي.

17. $4\sqrt{x + 1} \geq 12$ $\mathbf{x \geq 8}$

18. $5 + \sqrt{c - 3} \leq 6$ $\mathbf{3 \leq c \leq 4}$

19. $-2 + \sqrt{3x + 3} < 7$ $\mathbf{-1 \leq x < 26}$

20. $-\sqrt{2a + 4} \geq -6$ $\mathbf{-2 \leq a \leq 16}$

21. $2\sqrt{4r - 3} > 10$ $\mathbf{r > 7}$

22. $4 - \sqrt{3x + 1} > 3$ $\mathbf{-\frac{1}{3} \leq x < 0}$

23. $\sqrt{y + 4} - 3 \geq 3$ $\mathbf{y \geq 32}$

24. $-3\sqrt{11r + 3} \geq -15$ $\mathbf{-\frac{3}{11} \leq r \leq 2}$

4-7 تمرين

حل المعادلات الجذرية والمتباينات

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

1. $\sqrt{x} = 8$ **64**

2. $4 - \sqrt{x} = 3$ **1**

3. $\sqrt{2p} + 3 = 10$ $\mathbf{\frac{49}{2}}$

4. $4\sqrt{3h} - 2 = 0$ $\mathbf{\frac{1}{12}}$

5. $c^{\frac{1}{2}} + 6 = 9$ **9**

6. $18 + 7h^{\frac{1}{2}} = 12$ **لا يوجد حل**

7. $\sqrt[3]{d + 2} = 7$ **341**

8. $\sqrt[5]{w - 7} = 1$ **8**

9. $6 + \sqrt[3]{q - 4} = 9$ **31**

10. $\sqrt[4]{y - 9} + 4 = 0$ **لا يوجد حل**

11. $\sqrt{2m - 6} - 16 = 0$ **131**

12. $\sqrt[3]{4m + 1} - 2 = 2$ $\mathbf{\frac{63}{4}}$

13. $\sqrt{8n - 5} - 1 = 2$ $\mathbf{\frac{7}{4}}$

14. $\sqrt{1 - 4t} - 8 = -6$ $\mathbf{-\frac{3}{4}}$

15. $\sqrt{2t - 5} - 3 = 3$ $\mathbf{\frac{41}{2}}$

16. $(7v - 2)^{\frac{1}{4}} + 12 = 7$ **لا يوجد حل**

17. $(3g + 1)^{\frac{1}{2}} - 6 = 4$ **33**

18. $(6u - 5)^{\frac{1}{3}} + 2 = -3$ **−20**

19. $\sqrt{2d - 5} = \sqrt{d - 1}$ **4**

20. $\sqrt{4r - 6} = \sqrt{r}$ **2**

21. $\sqrt{6x - 4} = \sqrt{2x + 10}$ $\mathbf{\frac{7}{2}}$

22. $\sqrt{2x + 5} = \sqrt{2x + 1}$ **لا يوجد حل**

أوجد حل كل متباينة مما يلي.

23. $3\sqrt{a} \geq 12$ $\mathbf{a \geq 16}$

24. $\sqrt{z + 5} + 4 \leq 13$ $\mathbf{-5 \leq z \leq 76}$

25. $8 + \sqrt{2q} \leq 5$ **لا يوجد حل**

26. $\sqrt{2a - 3} < 5$ $\mathbf{\frac{3}{2} \leq a < 14}$

27. $9 - \sqrt{c + 4} \leq 6$ $\mathbf{c \geq 5}$

28. $\sqrt{x - 1} < 2$ $\mathbf{1 \leq x < 5}$

29. **الإحصاء** تستخدم الإحصاء الصيغة $\sigma = \sqrt{v}$ لحساب الانحراف المعياري σ، حيث v هي تباين مجموعة بيانات. أوجد التباين عندما يكون الانحراف المعياري 15. **225**

30. **الجاذبية الأرضية** أسقطت جميلة كرة من ارتفاع 25 قدمًا أعلى بحيرة. الصيغة $t = \frac{1}{4}\sqrt{25 - h}$ تصف الزمن t بالثواني الذي تكون فيه الكرة عند h قدم فوق الماء.
ما هو ارتفاع الكرة فوق الماء بالقدم ثانية واحدة؟ **9 ft**

التعليم الهجين في المدرسة الإماراتية

في إطار البعد الإستراتيجي لخطط التطوير في وزارة التربية والتعليم، وسعيها لتنويع قنوات التعليم وتجاوز كل التحديات التي قد تحول دونه، وضمان استمراره في جميع الظروف، فقد طبقت الوزارة خطة التعليم الهجين للطلبة جميعهم في المراحل الدراسيّة كافة.

الخطة الدراسية		ماقبل الروضة/ رياض الأطفال	الحلقة الأولى	الحلقة الثانية	الحلقة الثالثة
التعلم المدرسي		✓	✓	✓	✓
التعلم الإلكتروني	المباشر	-	-	✓	✓
	الذاتي	✓	✓	✓	✓

قنوات الحصول على الكتاب المدرسي:

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الوحدات الإلكترونيّة

24 — التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 10

درجة الدكتوراه
(3-5 سنوات)

22 — التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 9

درجة الماجستير
(2 سنتان)

شهادة مشتركة البكالوريوس والماجستير
(4 - 5 سنوات)

درجة الماجستير
(2 سنتان)

18 — التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 5-6

دبلوم الدراسات العليا
(سنة واحدة)

دبلوم الدراسات العليا
(1 - 2 سنتين)

درجة البكالوريوس
(3 - 4 سنوات)

درجة البكالوريوس
(3 - 4 سنوات)

18 — التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 5-6

تقوم الوزارة بالتنسيق مع مؤسسات التعليم العالي الوطنية في قبول الطلبة في التخصصات المختلفة بما يتسق مع احتياجات سوق العمل وخطط التنمية البشرية المستقبلية. كما تحدد مؤسسات التعليم العالي أعداد الطلبة الذين يمكن قبولهم طبقًا لإمكانياتها ورسالتها وأهدافها. كما تضع مؤسسات التعليم العالي شروط قبول الطلبة في البرامج المختلفة بحسب المسار الذي تخرجوا منه ومستويات أدائهم في المرحلة الثانوية ونتائجهم في اختبار الإمارات القياسي.

يتيح التكامل والتنسيق بين منظومتي التعليم العام والعالي اعتماد واحتساب مساقات دراسية مدرسية ضمن الدراسة الجامعية بحسب المسار المدرسي والتخصص الجامعي مما يتيح تقليص مدة الدراسة الجامعية.

12 — التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 1-4

الحلقة الثالثة المرحلة الثانوية

المسارات الأكاديمية
- مسار النخبة
- المسار المتقدم
- المسار العام

أعلى 10 في المئة من الطلبة في نتائج الاختبارات الوطنية

المسارات التقنية والمهنية
- المسار التقني المتقدم
- المسار التقني العام
- الأكاديميات المتخصصة
- المسار التطبيقي

برامج ثانويات التكنولوجيا التطبيقي

(الصفوف 9-12) الأعمار من 14 إلى 18 عامًا (4 سنوات)

التعليم الأساسي

12 — التصنيف الدولي

الحلقة الثانية

برنامج النخبة (الصفوف 5-8)
أعلى 10 في المئة من الطلبة في نتائج الاختبارات الوطنية
الأعمار 10-13 (4سنوات)

الصفوف 5-8
الأعمار 10-13 (4 سنوات)

6 — التصنيف الدولي

الحلقة الأولى

الصفوف 1-4
الأعمار 6-9 (4 سنوات)

3 — التصنيف الدولي
سن البداية النظري

الطفولة المبكرة

رياض الأطفال | الأعمار من 4-6 سنوات (غير إلزامي)
حضانة/ رعاية | الأعمار 0-4 (غير إلزامي)

منظومة التعليم في دولة الإمارات العربيــة المتحــدة

درجة الدكتوراه / العلوم التطبيقية
(3-5 سنوات)

درجة الماجستير / العلوم التطبيقية
(2 سنتان)

دبلوم الدراسات العليا/ العلوم التطبيقية
(1 - 2 سنتين)

درجة البكالوريوس / العلوم التطبيقية
(3 - 4 سنوات)

دبلوم / دبلوم عالي
(2 - 3 سنوات)

برنامج تجسيري

الالتحاق بالعمل

المؤهلات المهنية
مركز التعليم والتطوير المِهْني

التعليــم المستــمر
- محو الأمية
- المسار التطبيقي
- المسار العام الأكاديمي
- التعليم المنزلي

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم

اقتراح - استفسار - شكوى

80051115

04-2176855

www.moe.gov.ae

ccc.moe@moe.gov.ae