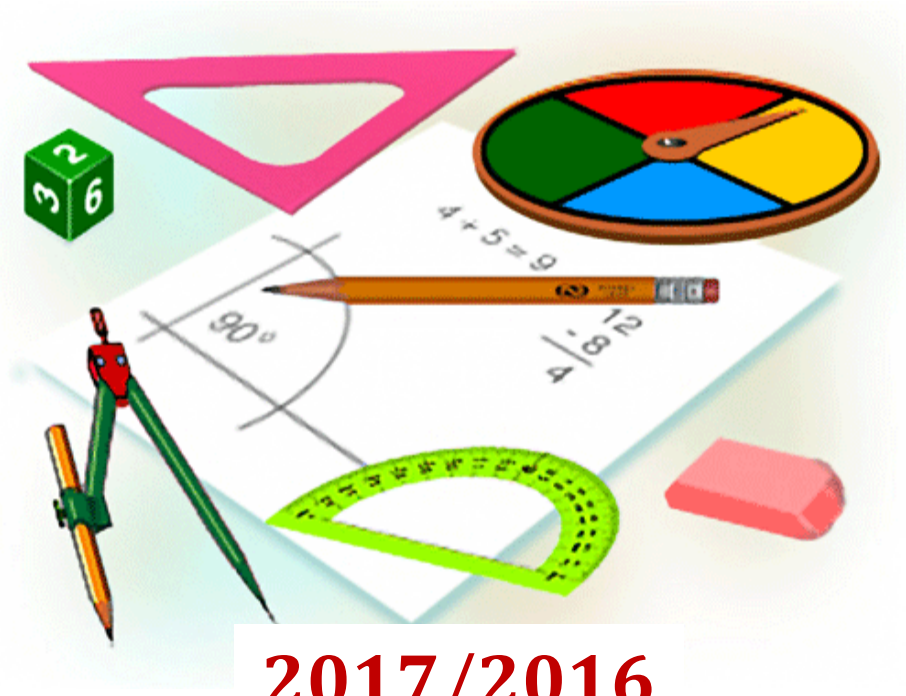
مدرسة توام النموذجية الخاصة بالعين

الرياضيـــــــــات

أ. هلال حسين

Mr. Hilal Hussein



2017/2016

التـــكامـــل

الفصل الدراسي الثالث

الصف الثاني عشر متقدم

اعداد أ.هلال حسين أحمد

مراجعة قواعد الاشتقاق

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

1) $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$

2) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

3) $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(u\,v) = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

7) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

8) $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f`(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

9) $y = \frac{a}{f(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dy} = \frac{-a\,f`(x)}{(f(x))^2}$

الدالة الأصلية

تذكر:-

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدود
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \ , n\neq -1$	$1)\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ , n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=\sin kx$	$2)\int \sin kx\ dx=-\frac{\cos kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\cos kx$	$3)\int cos\ kx\ dx=\frac{sin\ kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}tan\ x=sec^2x$	$4)\int sec^2x\ dx=tan\ x+C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=csc^2x$	$5)\int csc^2x\ dx=-\cot x+C$
$\frac{d}{dx}sec\ x=sec\ x\ tan\ x$	$6)\int sec\ x\ tan\ x\ dx=sec\ x+C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\ \cot x$	$7)\int \csc x\ \cot x\ dx=-\csc x+C$

Mr. Hilal Hussein

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

بعض قواعد حساب المثلثات الشهيرة

1) $sin^2x + cos^2x = 1$, $sin^2x = 1 - cos^2$, $cos^2x = 1 - sin^2x$

2) $tan^2x + 1 = sec^2x \Rightarrow tan^2x = sec^2x - 1$

3) $cot^2x + 1 = csc^2x \Rightarrow cot^2x = csc^2x - 1$

4) $cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

5) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

6) $\cos 2x = cos^2x - sin^2x$

$\cos 2x = 2cos^2x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2sin^2x$

7) $sec\, x = \frac{1}{\cos x}$, $csc\, x = \frac{1}{\sin x}$, $cot\, x = \frac{1}{\tan x}$

8) $tan\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $cot\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

خواص التكاملات غير المحدودة

1) $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2) $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$

3) $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

الدالة الأصلية

إذا كانت $F(x) = \frac{x^2}{x^2+9}$ دالة أصلية للدالة $f(x)$, وكذالك $G(x) = \frac{-9}{x^2+9}$ دالة أصلية أخرى للدالة $f(x)$

أوجد قيمة الثابت C التي تختلف به $\boldsymbol{F(x)}$ عن $\boldsymbol{G(x)}$

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

لتكن الدالتان : $\boldsymbol{F(x) = x^2(x^2+4)}$, $\boldsymbol{G(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2}$

أثبت أن $\boldsymbol{G(x)}$, $\boldsymbol{F(x)}$ دالتان كل منهما المشتقة العكسية للدالة $\boldsymbol{f(x)}$

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

لتكن الدالتان $\boldsymbol{G(x) = -\frac{1}{2}cos^2 x}$, $\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x}$

أثبت أن الدالتان $\boldsymbol{F(x), G(x)}$ هما المشتقة العكسية للدالة $\boldsymbol{f(x)}$

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

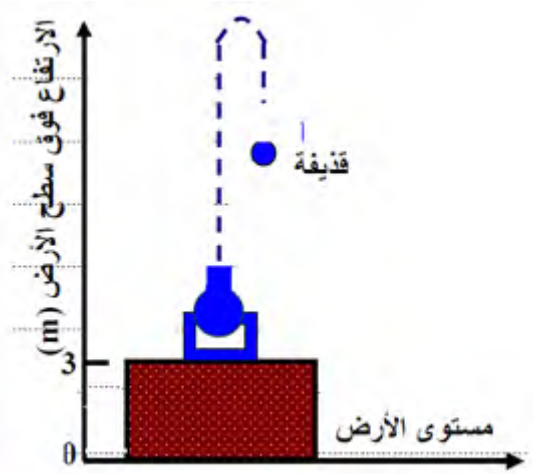
اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

مثال محلول:-

أطلقت قذيفة ثقيلة رأسيا إلى أعلى من منصة 3m فوق سطح الأرض ، بسرعة ابتدائية 160m/s ،بفرض أن القوة الوحيدة المؤثرة على القذيفة أثناء حركتها هي قوة الجاذبية الأرضية، التي تؤثر عموديا إلى أسفل

ومقدارها $9.8\,m/s^2$ ، إذا علم أنه عند إطلاق القذيفة كان $t=0$ ، أوجد قاعدة تغير عن :



أ) سرعة القذيفة كدالة في الزمن t .

ب) ارتفاع القذيفة فوق سطح الأرض كدالة في الزمن t .

الحل

ليكن s ارتفاع القذيفة فوق سطح الأرض عند الزمن t

$\Rightarrow \frac{ds}{dt}=\int(-9.8)dt \quad \Rightarrow \frac{ds}{dt}=-9.8t+C_1 \Rightarrow\therefore \frac{ds}{dt}=160\,,t=0$ لايجاد C_1

$\Rightarrow\therefore 160=-9.8(0)+C_1 \Rightarrow C_1=160 \Rightarrow$ السرعة $\therefore v=\frac{ds}{dt}=-9.8t+160$

$\therefore S=\int v\ dt=-4.9t^{22}+160t+C_1$

$\Rightarrow s=3 \quad ,t=0 \quad ,C_2$ لايجاد $\Rightarrow C_2=3$

$\Rightarrow S=-4.9t^2+160t+3$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
هلال حسين

مثال محلول:-

لنفرض أنك كنت تقود سيارة على طريق رئيسي بسرعة ثابتة $60\,mi/h$ $(88\ ft/sec)$ عندما رأيت حاد أمامك وضغطت بشدة على الفرامل ، ما العجلة التقصيرية الثابتة اللازمة لإيقاف السيارة بعد $242ft$ ؟

لإيجاد ذالك اتبع ما يلي:

(أ) حل المعادلة التفاضلية:

المعادلة التفاضلية : $\frac{d^2s}{dt^2} = -k$ (ثابت k)

الشروط الابتدائية : $\frac{ds}{dt} = 88$, $s = 0$ عندما $t = 0$

يقاس الزمن والمسافة بدءا من الضغط على الفرامل.

(ب) أوجد قيمة t التي تجعل $ds/dt = 0$ (ستتضمن الإجابة k)

(ج) أوجد قيمة k التي تجعل $s = 242$ من أجل قيمة t التي أوجدتها في(ب)

الحل

1) $\frac{ds}{dt} = \int -k\,dt \quad \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -kt + C_1$

$\frac{ds}{dt} = 88 \quad , t = 0 \quad$ لإيجاد $C_1 \quad \Rightarrow C_1 = 88 \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = -kt + 88$

2) $\frac{ds}{dt} = 0 \quad \Rightarrow kt = 88 \quad \Rightarrow t = \frac{88}{k} \; : k \neq 0$

3) $S = \int (-kt + 88)dt = -\frac{1}{2}kt^2 + 88t + C_2$

$S = 0 \quad , t = 0 \quad$ لإيجاد $C_2 \quad \Rightarrow C_2 = 0$

$S = -\frac{1}{2}kt^2 + 88t$

$242 = -\frac{1}{2}k \times \frac{88 \times 88}{k^2} + 88 \times \frac{88}{k}$

$242 = \frac{1}{k}(-44 \times 88 + 88 \times 88) = \frac{3832}{k} \qquad \Rightarrow \therefore k = 16$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
هلال حسين

مثال محلول:-

مثال: تعطي السرعة $v = dv/dt$ أو العجلة $a = dv/dt$ لجسم يتحرك على خط إحداثي.
أوجد موضع الجسم s عند اللحظة t

الحل

$$a = 32 \quad , s(0) = 0 \quad , v(0) = 20$$

$$v = \int 32\, dt = 32t + C$$

$$20 = 0 + C \qquad \Rightarrow C = 20$$

$$S = \int (32t + 20)t$$

$$S = 16t^2 + 20t + C$$

$$0 = 0 + 0 + C \qquad \Rightarrow C = 0$$

$$S = 16t^2 + 20t$$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

مثال محلول:-

إذا كان معدل تغير سرعة الصوت في الهواء بالنسبة لدرجة الحرارة T يعطي بالعلاقة :

$\frac{dV}{dT} = \frac{1087}{2\sqrt{273}} T^{-\frac{1}{2}}$ حيث T تقدر بالكلفن تقدر

أوجد السرعة V بدلالة درجة الحرارة T علما بأن سرعة الصوت في الهواء 1087 قدم/ثانية عند درجة حرارة 273 كلفن

الحل

$$V = \frac{1087}{2\sqrt{273}} \times 2T^{\frac{1}{2}} + C$$

$$1087 = \frac{1087}{\sqrt{273}} \times \sqrt{273} + C \qquad \Rightarrow C = 0$$

$$V = \frac{1087}{\sqrt{273}} \sqrt{T}$$

عند تطبيق نظام غذائي معين على فئران التجارب وجد أن معدل زيادة الوزن(G بالجرام) بالنسبة للزمن (t بالأسبوع) يعطي بالعلاقة :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{-t}{50} + 10 \qquad , 0 \le t \le 100$$

حل المعادلة التفاضلية لإيجاد دالة الوزن $G(t)$ إذا علمت أن $G(10) = 200$

الحل

$$G(t) = \frac{-1}{50} \times \frac{t^2}{2} + 10t + c$$

$$= \frac{-1}{100} \times t^2 + 10t + c$$

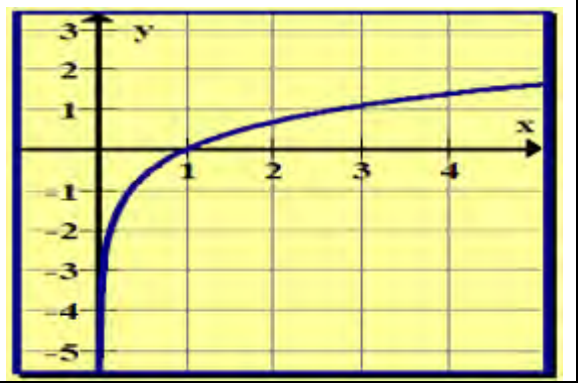
$$\Rightarrow 200 = \frac{-1}{100} \times 100 + 10 + c$$

$$\Rightarrow c = 101$$

$$\Rightarrow G(t) = \frac{-1}{100} \times t^2 + 10t + 101$$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

قواعد اللوغاريتمات و الدالة الأسية :-

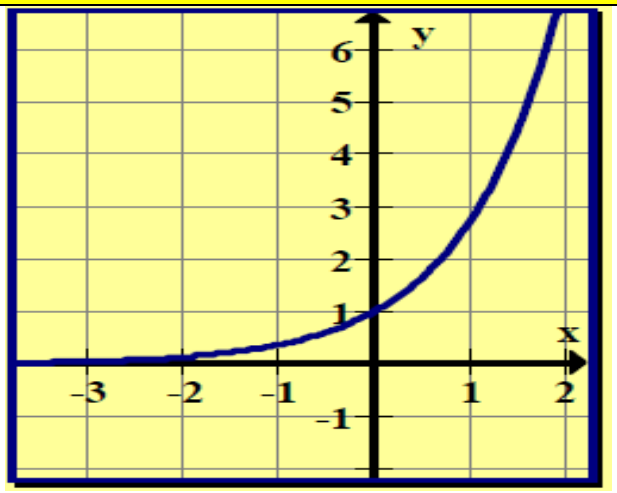
قواعد اللوغاريتمات	الرسم البياني للدالة $y = ln(x)$
1. $ln\,xy = ln\,x + ln\,y$	
2. $ln\frac{x}{y} = ln\,x - ln\,y$	
3. $ln(1) = 0 \quad , ln\,e = 1$	
4. $ln\,x^r = r\,ln\,x$	

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدود
$\frac{d}{dx} ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = ln\|x\| + C$
$\frac{d}{dx} ln\|f(x)\| = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = ln\|f(x)\| + C$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x + c$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = g'(x)e^{g(x)} + c$	$\int f`(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein

أ. هلال حسين

الرسم البياني للدالة $y = e^x$	خواص الدالة الأسية
	1. $e^x \times e^y = e^{x+y}$ 2. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ 3. $e^0 = 1$ 4. $a^x = e^{x \ln x}$

أوجد مشتقة الدال الموجودة فى الجدول

$y = ln(x+2)$	$y = ln(x^2)$ .....
$y = ln(ln\, x)$	$y = ln\left(\frac{1}{x}\right)$ .....
$y = (ln\, x)^2$	$y = ln(2 - cos\, x)$ .....
$y = ln\left(\frac{10}{x}\right)$	$y = ln(2x+2)$ .....
$y = ln(x^2+1)$	$y = x\, ln\, x - x$ .....
$y = ln\sqrt{x}$	$y = ln(sin\, x)$ .....
$y = x^{ln\, e^2}$	$y = (ln\, x)^4$ .....
$y = e^{tan\, x}\, ln\, x$	$(80)\ y = log_e(x)$ .....

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$y = 2e^{x}$	$y = e^{-x}$ .....
$y = 2e^{\frac{2x}{3}}$	$y = xe^{2} - e^{x}$ .....
$y = e^{\sqrt{x}}$	$y = x^{\pi}$ .....
$y = x^{-\sqrt{2}}$	$y = e^{2x}$ .....
$y = e^{-\frac{x}{4}}$	$y = e^{-5x}$ .....
$y = e^{(x^2)}$	$y = x^{2}e^{x} - xe^{x}$ .....
$y = x^{1+\sqrt{2}}$	$y = x^{1-e}$ .....

التكاملات المحدودة. خواص وقوانين

$$\sum_{r=1}^{n} k = nk$$

$$\sum_{r=1}^{n} (x_r + y_r) = \sum_{r=1}^{n} x_r + \sum_{r=1}^{n} y_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} kx_r = k\sum_{r=1}^{n} x_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

خواص التكاملات المحدودة

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(1) ترتيب التكامل : $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

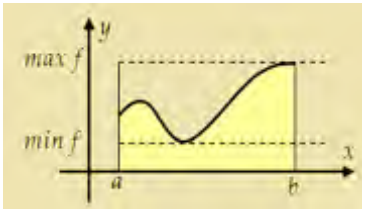
(2) الصفر : $\int_b^a f(x)\,dx = 0$

(3) الثابت المضروب : $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(4) المجموع أو الفرق : $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(5) الإضافة : $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

(6) إذا كانت أكبر قيمة ل f وأصغر قيمة ل f هما القيمتان العظيمتان ($\max f$) و الصغرى ($\min f$) للدالة f في الفترة $[a,b]$ فإن :



$$\min f\,.(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f\,.(b-a)$$

(7) السيادة : $f(x) \ge g(x)$ على الفترة $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

$f(x) \ge 0$ على الفترة $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

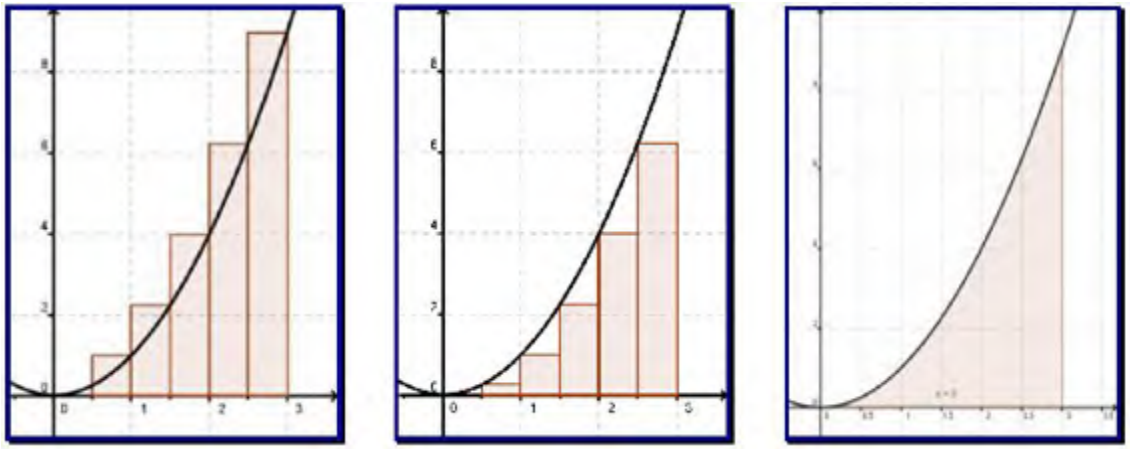
مثال محلول:- طريقة التقريب بالمستطيلات.

لتكن الدالة : $f(x)=x^2$ ومنحناها(c) على الفترة $[0,3]$ استخدام طريقة :

1) التقريب اليساري$(LRAM)$ ، 2) التقريب المنتصفي$(MRAM)$ ، 3) التقريب اليميني $(RRAM)$

بالمستطيلات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى (c) و المحور السيني

و المستقيمين $x=0$ و $x=3$ بتقسيم الفترة $[0,3]$ إلى 6 فترات جزئية متساوية .



(1) التقريب اليساري $LRAM$:

$$\Delta x=\frac{3-0}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{التجزئ}=\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{4},2,\frac{5}{2},3\right\}$$

الفترات	C_K	$f(x)$	Δx	المساحة
$\left[0,\frac{1}{2}\right]$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
$\left[1,\frac{3}{2}\right]$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\left[\frac{3}{2},2\right]$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$
$\left[2,\frac{5}{2}\right]$	2	4	$\frac{1}{2}$	2
$\left[\frac{5}{2},3\right]$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{8}$
$\therefore S_n=\frac{55}{8}$				$\frac{55}{8}$

أتبع نفس الخطوات فى إيجاد:

MRAM

RRAM

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

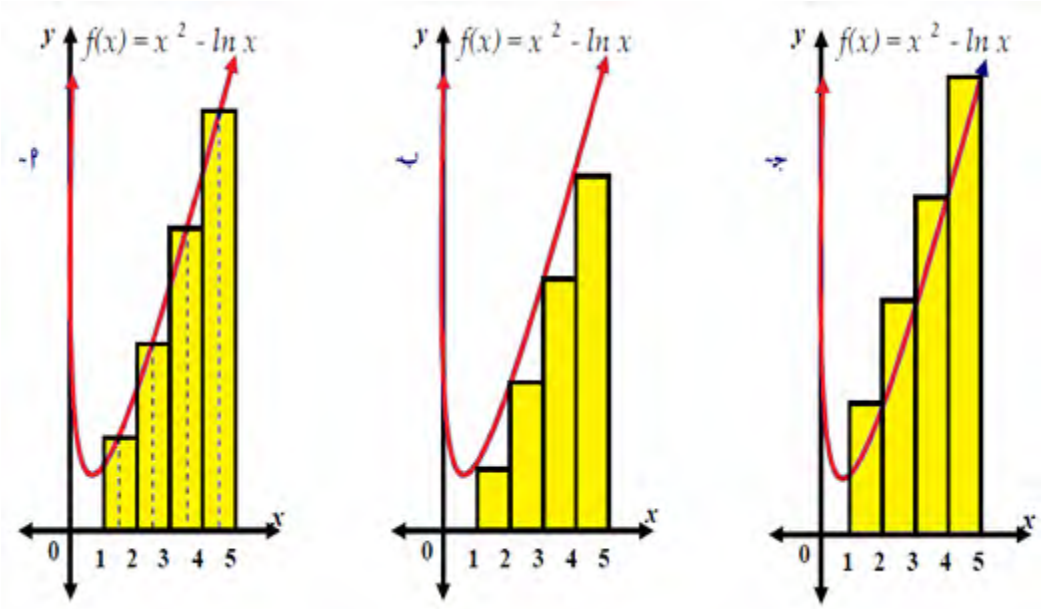
تدريب

اعتبر المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - \ln x$ ومحور السينات على الفترة $1 \leq x \leq 5$

أ- **أوجد التقريب المستطيلي الوسطى الناتجة بإستخدام 4 مستطيلات منشأة على نقاط المنتصف.**

ب- **أوجد التقريب المستطيلي اليساري الناتجة بإستخدام 4 مستطيلات.**

ت- **أوجد التقريب المستطيلي اليميني الناتجة بإستخدام 4 مستطيلات .**



التقريب المنتصفي $MRAM$:

$\Delta x =$ $\Longrightarrow P = \{$ $\}$

أتبع نفس الخطوات لإيجاد

LRAM

RRAM

الفترات	C_K	$f(x)$	Δx	المساحة
	$\therefore S_n =$			المجموع

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

التعبير عن النهاية بصورة تكامل.

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود. **مثال محلول**

(1) حيث P أي تجزئ الفترة $[0,2]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\Delta x == \int_0^2 x^2\ dx$$

(2) حيث P أي تجزئ للفترة $[2,3]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-c_i}\ \Delta x == \int_2^3 \frac{1}{1-x}\ dx$$

(3) حيث تجزئ للفترة $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{4-C_i}\ \Delta x = = \int_0^1 \sqrt{4-x}\ dx$$

(4) حيث تجزئ للفترة $[-7,5]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (C_i^2-3C_i)\Delta x = = \int_{-7}^5 (x^2-3x)dx$$

(5) حيث تجزئ للفترة $[-\pi,\pi]$

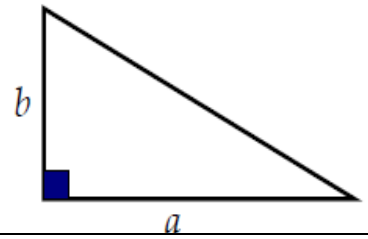
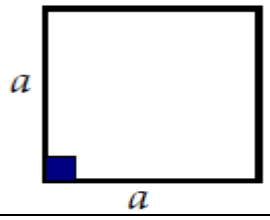
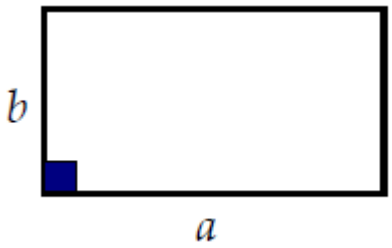
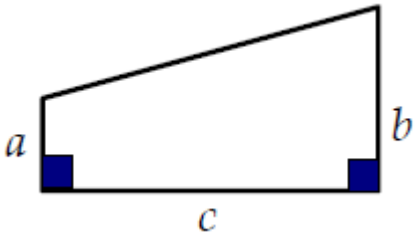
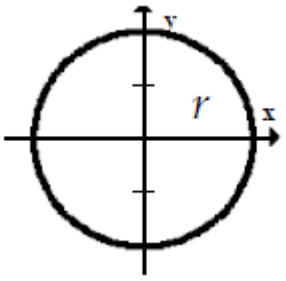
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (sin^3 C_i)\ \Delta x_i = = \int_{-\pi}^{\pi} sin^3 x\ dx$$

Mr. Hilal Hussein

أ. هلال حسين

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

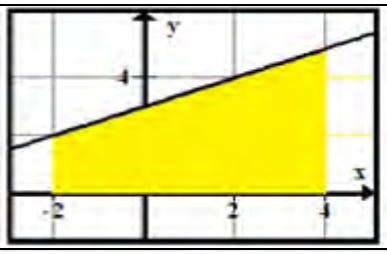
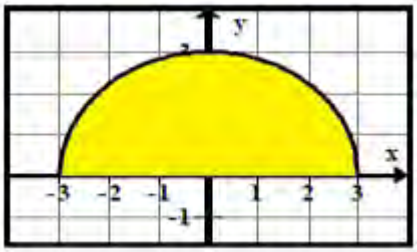
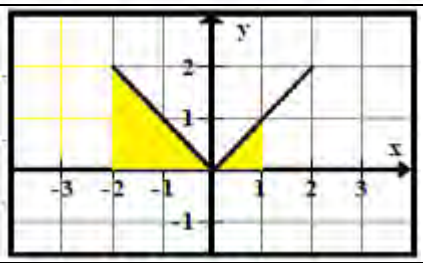
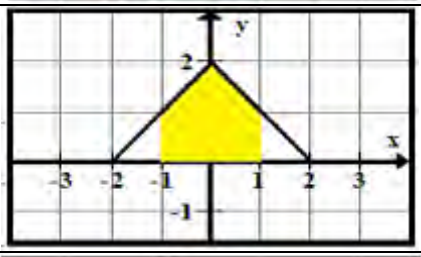
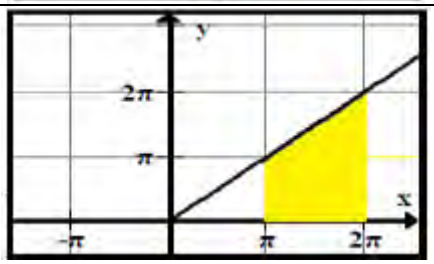
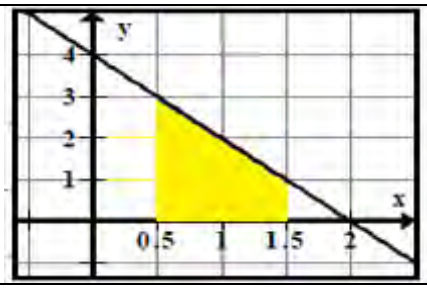
المساحة المحصورة.

الرسم	الشكل الهندسي
	مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2}$ حاصل الضرب طولا ضلعي القائمة $\Leftarrow$ $A = \frac{1}{2}a \times b$
	مساحة المربع = مربع طول ضلعه $A = a^2$
	مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = a \times b$
	مساحة شبه المنحرف = حاصل جمع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع $\frac{1}{2}$ $A = \frac{1}{2}(a+b) \times c$
	مساحة نصف الدائرة : $A = \frac{1}{2}\pi r^2$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

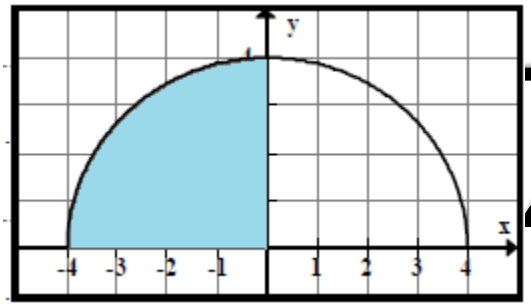
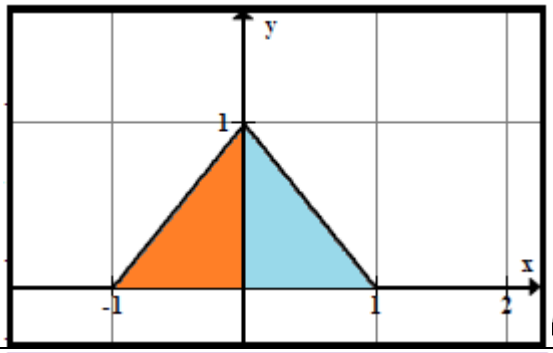
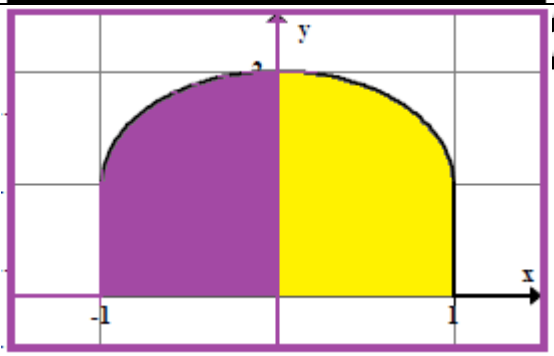
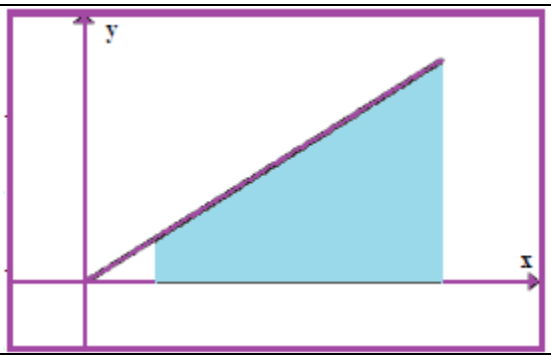
ارسم الدالة في الفترة المعطاه (بين حدي التكامل) واستخدام المساحات في إيجاد قيمة التكامل.(مثال محلول)

$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx =$ $= \frac{1}{2}\ (6)(2+5) = 21$	
$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ $= \frac{1}{2}\,\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{2}$	
$\int_{-2}^{1}\lvert x\rvert\,dx = A_1 + A_2$ $= \frac{1}{2}\times 1\times 1 + \frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2.5$	
$\int_{-1}^{1}(2-\lvert x\rvert)\,dx = A_1 + A_2$ $= \frac{1}{2}\times 2\times 1 + 2\times 1 = 3$	
$\int_{\pi}^{2\pi}\theta\,d\theta$ $= \frac{1}{2}(\pi+2\pi)(\pi) = \frac{3}{2}\pi^2$ $= 14.8044$	
$\int_{1/2}^{3/2}(-2x+4)dx$ $= \frac{1}{2}(1+3)\cdot(1) = 2$	

Mr. Hilal Hussein

أ. هلال حسين

(مثال محلول): ارسم الدالة في الفترة المعطاة(بين حدي التكامل) واستخدام المساحات في إيجاد قيمة التكامل.

$\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\ dx \qquad \therefore r=4$ $=\frac{1}{4}\pi(4)^2=4\pi$	
$\int_{-1}^{1}(1-\lvert x\rvert)dx$ $=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$	
$\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt{1-x^2}\ \right)dx\ =A_1+A_2$ $=\frac{1}{2}\pi\ (1)^2+2\times 1=\frac{\pi}{2}+2=3.57$	
$\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\ dx$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+5\sqrt{2}\ )\cdot 4\sqrt{2}$ $=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\ \times 4\sqrt{2}=24$	

Mr. Hilal Hussein

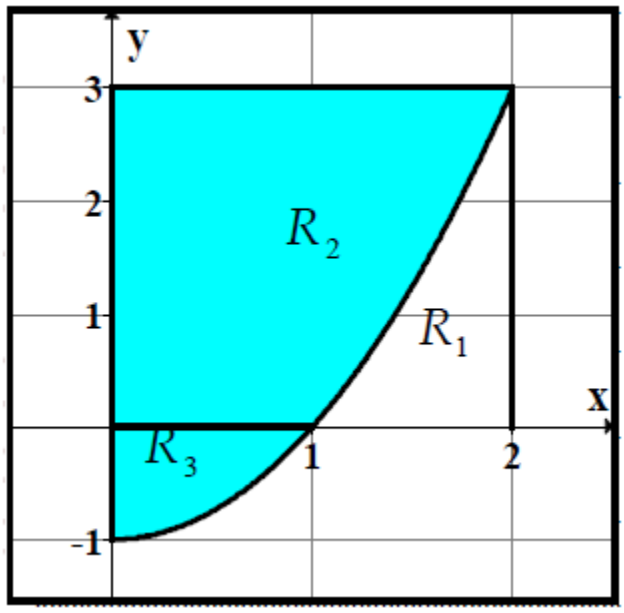
أ. هلال حسين

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

مثال محلول

Mr. Hilal Hussein

أ- أوجد المساحة المظللة:-



$$R_2 = 2 \times 3 - R_1$$

$$R_2 = 6 - \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx$$

$$R_2 = 6 - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{14}{3}$$

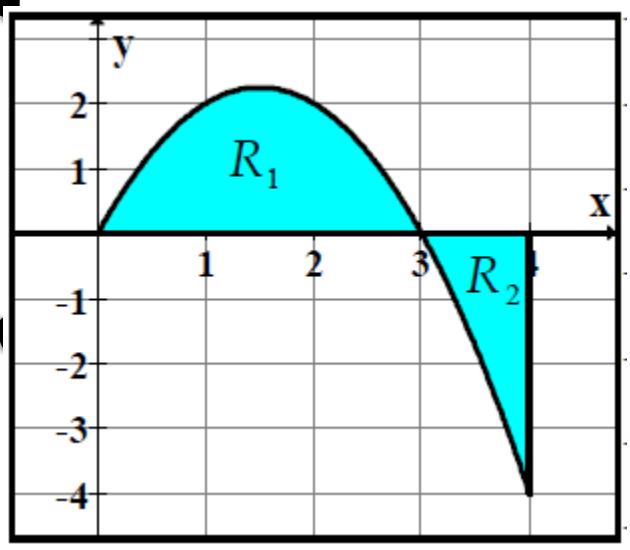
$$R_3 = -\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx = \frac{2}{3} \Longrightarrow$$

(المساحة الكلية) $A = R_2 + R_3$

$$= \frac{14}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{16}{3}$$ وحدة مربعة

ب- أوجد المساحة المظللة:-



$$R_1 = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$

$$R_1 = \frac{3}{2} \times 9 - 9 - 0 = \frac{9}{2}$$

$$R_2 = -\int_3^4 (3x - x^2)\,dx = -\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3\right]_3^4$$

$$= \frac{11}{6}$$

(المساحة الكلية) $A = R_1 + R_2 = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}$ وحدة مربعة

مثال محلول

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

ب/ (i) استخدم المتباينة $\sin x \le x$ والتي تتحقق لـ $x \ge 0$

لإيجاد الحد الأعلي لقيمة $\int_0^1 \sin x\,dx$ $\Leftarrow \int_0^1 \sin x\,dx \le \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

(ii) أثبت ان قيمة $\int_0^1 \sqrt{x+8}$ تقع بين $2\sqrt{2} \approx 2.8$, 3

بأخذ الجذر $0 \le x \le 1 \quad (+8) \Rightarrow 8 \le x+8 \le 9$

$$2\sqrt{2} \le \sqrt{x+8} \le 3 \Rightarrow \int_0^1 2\sqrt{2}dx \le \int_0^1 \sqrt{x+8}\,dx \le \int_0^1 3\,dx$$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{x+8}\,dx \text{ تقع بين } 2\sqrt{2},3 \Rightarrow 2\sqrt{2} \le \int_0^1 \sqrt{x+8}\,dx \le 3$$

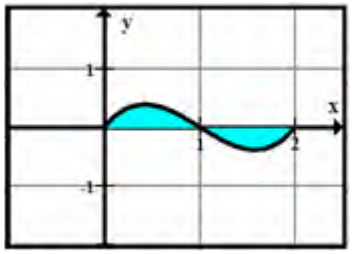
(iii) المتباينة : $\frac{1}{\cos x} \ge 1 + \frac{x^2}{2}$ تتحقق على الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

استخدمها لإيجاد الحد الأدني للقيمة : $\int_0^1 \frac{1}{\cos x}dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{\cos x}dx \ge \int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\cos x}dx \ge \frac{7}{6} \quad \left(\text{الحد الأدني هو } \frac{7}{6}\right)$$

مثال محلول : أوجد المساحة الكلية للمنطقة المحصورة بين المنحني ومحور السينات

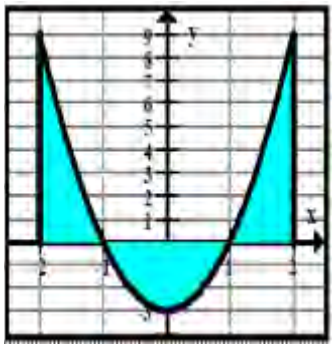
$(i)\ y = x^3 - 3x^2 + 2x\ , 0 \le x \le 2$



$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2 \dots\dots\dots = \frac{1}{2}$$

$(ii)\ y = 3x^2 - 3\ , -2 \le x \le 2$



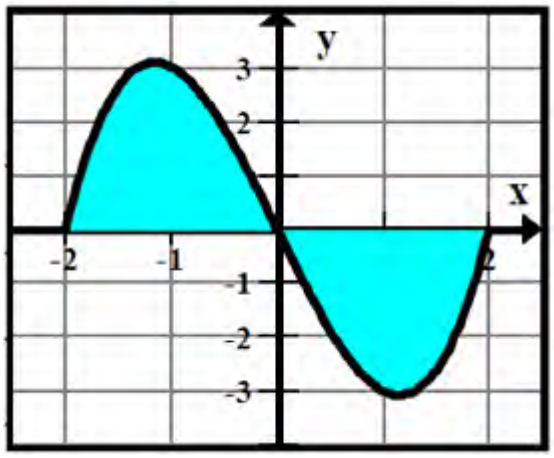
$$A = \int_{-2}^{-1} (3x^2 - 3)\,dx - \int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)\,dx + \int_1^2 (3x^2 - 3)\,dx$$

$= [x^3 - 3x]_{-2}^{-1} - [x^3 - 3x]_{-1}^{1} + [x^3 - 3x]_1^2 = 12$ وحدة مربعة

حل آخر

$$A = 2\left(-\int_0^1 (3x^2 - 3)\,dx + \int_1^2 (3x^2 - 3)\,dx\right) \dots\dots\dots 12$$ وحدة مربعة

$(iii)\ y = x^3 - 4x\ , -2 \le x \le 2$



$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx - \int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx$$

$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = 8$ وحدة مربعة

مثال محلول

(i) أوجد قيمة : $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} sect\ tant\ dt$

$$= secx^2\ tan\,x^2 \times 2x - sec\sqrt{x}\cdot tan\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2xsecx^2\ \ tan\,x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} sec\sqrt{x}\,tan\sqrt{x}$$

(ii) أوجد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي : $y = \int_{3x}^{lnx} sint\ dt \ \ , \ \ x > 0$

$$\frac{dy}{dx} = sin\,lnx \times \frac{1}{x} - 3sin3x = \frac{1}{x} sinlnx - 3sin3x$$

(iv) اكتب معادلة المماس للدالة $f(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{3+t}\,dt$ عند $x = 1$

$$f`(x) = \sqrt{3+x^2}\cdot 2x \ \Rightarrow \ f`(1) = \sqrt{4} \times 2 = 4 \text{ (الميل)}$$

$$x = 1 \ \Rightarrow \ f(1) = \int_1^1 \sqrt{3+t}\,dt = 0 \ \Rightarrow \ \therefore (1\,,0)$$

$$y - 0 = 4(x-1) \ \Rightarrow \ y = 4x - 4$$

Mr. Hilal Hussein

حسين هلال

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

مثال محلول استخدم التعويض لحساب التكامل..

Mr. Hilal Hussein
إعداد هلال حسين

$$(i)\ \int \sec 2x \tan 2x\, dx \quad , \quad u = 2x$$

$$\int \sec u \tan u \cdot \frac{1}{2} du$$

$$\frac{1}{2}\int \sec u \tan u\, du = \frac{1}{2}\sec u + C$$

$$= \frac{1}{2}\sec 2x + C$$

$$u = 2x$$

$$du = 2dx$$

$$dx = \frac{1}{2}du$$

$$(ii)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} \quad , \quad u = 2x + 3$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$2 \times \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C$$

$$= \sqrt{2x+3} + C$$

$$u = 2x + 3$$

$$du = 2dx$$

$$dx = \frac{1}{2}du$$

$$(iii)\ \int 8(y^4 + 4y^2 + 1)^2 (y^3 + 2y) dy \ , \ u = y^4 + 4y^2 + 1$$

$$\int 8u^2 \cdot (y^2 + 2y) \times \frac{1}{4(y^3 + 2y)} du$$

$$= \frac{2}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}(y^4 + 4y^2 + 1)^3 + C$$

$$u = y^4 + 4y^2 + 1$$

$$du = (4y^3 + 8y)\, dy$$

$$dy = \frac{du}{4y^3 - 8y}$$

$$(iv)\int\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)^3\times\sin\frac{t}{2}dt\ ,\ u=1-\cos\frac{t}{2}$$

$$\int u^2\cdot\sin\frac{t}{2}\times\frac{2du}{\sin\frac{t}{2}}=\frac{2u^3}{3}+c$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)^3+c$$

$$u=1-\cos\frac{t}{2}$$

$$du=\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$$

$$dt=\frac{2du}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$(v)\int_e^6\frac{dx}{xln\,x}$$

$$\int_1^{ln6}\frac{xdu}{x\,.\,u}=\left[ln|u|\right]_1^{ln6}$$

$$=ln|ln6|-0=0.58$$

$$u=lnx\ \Rightarrow\ du=\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow\ dx=xdu$$

$$x=e\ \Rightarrow\ u=lne=1$$

$$x=6\ \Rightarrow\ u=ln6$$

Mr. Hilal Hussein

أ. هلال حسين

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

أسئلة على التكامل

Mr. Hilal Hussein
هلال حسين

إختر الإجابة الصحيحة:-

(1) $\int x\,dx =$

$(a) -\frac{x^2}{2} + c$ $(b)\ -x^{-1} + c$

$(c) \frac{2}{x-2} + c$ $(d)\ \frac{x^2}{2} + c$

(2) $\int x^2\,dx =$

$(a) \frac{1}{3x^3} + c$ $(b)\ \frac{1}{3}x^3 + c$

$(c) \frac{1}{3}x^3$ (d) غير ذلك

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(3)\ \int \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$(a)\ \frac{-1}{x} + c$ $(b)\ \frac{1}{x} + c$

$(c)\ \frac{2}{x^3} + c$ $(d)\ x^{-1} + c$

$$(4)\ \int \frac{dx}{2x} =$$

$(a)\ \frac{1}{x^2} + c$ $(b)\ ln|2x| + c$

$(c)\ \frac{ln|2x|}{2} + c$ $(d)\ \frac{ln|x|}{2} + c$

$$(5)\ \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$

$(a)\ ln|\sin x|$ $(b)\ -ln\,csc x + c$

$(c)\ ln|2\sin x| + c$ $(d)\ ln|\sin x|^{-1} + c$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$(6)\ \int e^{5x}\,dx =$

$(a) 5e^{5x} + c$

$(b)\ \frac{e^{x}}{5} + c$

$(c)\ \frac{e^{5x}}{5} + c$

$(d)\ \frac{e^{5x}}{5}$

$(7)\ \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx =$

$(a)\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + c$

$(b)\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{e^{x}} + c$

$(c)\ 2\sqrt{e^{x}} + c$

$(d)\ 4e^{\frac{1}{2}x} + c$

$(8)\ \int \sqrt{x}\,dx =$

$(a)\ \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + c$

$(b)\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} x^{\frac{3}{2}} + c$

$(c)\ \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$

(d) غير ذلك

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(9)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$(a)\ sec^2 x - 1 + c$ $(b)\ tan x + c$

$(c)\ -tan x + c$ $(d)\ cot x + c$

$$(10)\ \int 3\ sin\ x =$$

$(a) 3\cos x + c$ $(b) -3\sin x + c$

$(c)\ \frac{-1}{3}\cos x + c$ $(d) -3\cos x + c$

$$(11)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$(a) -cot\ x + c$ $(b)\ cot\ x + c$

$(c)\ tan\ x + c$ $(d) cos^2 x + c$

$$(12)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$(a)\ \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}} + c$ $(b)\ 3x^{\frac{1}{3}} + c$

$(c)\ 3x^{\frac{-2}{3}} + c$ $(d)\ \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + c$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(13) $\int \left(x^4 - 3x^2 + x - 5\right) dx$

$(a) 4x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 5x + c$

$(b)\ 4x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + c$

$(c)\ \frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - 5x + c$

$(d)\ \frac{1}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + c$

(14) $\int (x^3 - \cos 2x + 3\sin 5x) dx$

$(a) \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}sin\,2x - \frac{3}{5}cos\,5x + c$

$(b)\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}sin\,2x - \frac{3}{5}cos\,5x + c$

$(c) \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}sin\,2x - \frac{3}{5}cos\,5x + c$

$(d)\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos 5x$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(15)\ \int \frac{2dx}{\sqrt{x}} =$$

$(a) 5\sqrt{x} + c$ $(b)\ 4\sqrt{x} + c$

$(c)\ 2\sqrt{x} + c$ $(d)\ 16\sqrt{x} + c$

$$(16)\ \int \frac{x^3 + 3}{x^3} dx =$$

$(a) -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + c$ $(b) \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + c$

$(c)\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{x} + c$ $(d)\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x^2} + c$

$$(17)\ \int \sqrt[3]{x}(x-4)dx =$$

$(a) \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$ $(b) \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$

$(c) \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$ $(d)\ \frac{3}{7}x^{\frac{6}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(18)\ \int (tan^2x + 2)\,dx =$$

$(a)(tanx + 2x) + c$ $(b)sec^2x + x + c$

$(c)(tanx + x) + c$ $(d)\ (tanx - 3x) + c$

$$(19)\ \frac{2 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx =$$

$(a)\ \cos^{-1}(x) - x + c$ $(b) - 2\sin^{-1}x - x + c$

$(c)2\ sin^{-1}x - x + c$ $(d)\ -2\sin^{-1}x + x + c$

$$(20)\ \frac{1}{x\ ln\ x}\,dx =$$

$(a)\ ln\ x + c$ $(b)\ xln\ x + c$

$(c)3\ ln\ x^x + c$ $(d)\ ln|ln\ x| + c$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(21)\ \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx =$$

$(a) 2\ ln|e^{2x}+1| + c$ $(b) \tan^{-1} e^x + c$

$(c) 2\ tan^{-1} e^x + c$ $(d)\ \cos^{-1} e^x + c$

$$(22)\ \int \frac{\sin 2x}{1-sin^2 x}dx =$$

$(a) - ln|sin^2 x| + c$ $(b)\ ln|sec^2 x| + c$

$(c) - ln|sec^2 x| + c$ $(d)\ ln|2sec^2 x| + c$

$$(23)\ \int \frac{1}{1+e^x}dx =$$

$(a)\ ln|1+e^x| + c$ $(b) - ln|1+e^{-x}| + c$

$(c)\ ln|1+e^{-x}| + c$ $(d)\ ln|e^{x+1}| + c$

$$(24)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx =$$

$(a) 2\sqrt{1-e^{2x}} + c$ $(b) \frac{1}{2}\sqrt{1-e^{2x}} + c$

$(c) sin^{-1} e^x + c$ $(d)\ cos^{-1} e^{2x} + c$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(25)\ \int \frac{x}{1+x^4}\,dx =$$

$(a)\ \frac{1}{2}tan^{-1}(x^2)+c$ $(b)\ 2cot^{-1}(4x^3)+c$

$(c)\ 2cot^{-1}(2x)+c$ $(d)\ 2tan^{-1}x^2+c$

$$(26)\ \int \frac{sin\,4x}{4+cos^4(2x)}\,dx =$$

$(a)\ \frac{1}{16}cot^{-1}\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\,2x\right)+c$

$(b)\ -\frac{1}{16}tan^{-1}(2cos^2\,2x)+c$

$(c)\ -\frac{1}{16}tan^{-1}\left(\frac{1}{2}cos^2\,2x\right)+c$

$(d)\ 16\ tan^{-1}\left(\frac{1}{2}cos^2\,2x\right)+c$

$(27)\ \frac{dy}{dx}=2x-1\ ,\ y(2)=0$ حل المعادلة التفاضلية :

$(a)\ y=2x^2-x-2$ $(b)\ y=x^2+x-2$

$(c)\ y=x^2-x+2$ $(d)\ y=x^2-x-2$

بفرض أن هامش الربح : $(28)\ \frac{dr}{dx} = 3x^2 - 6x + 12$

الدخل $r(x)$ هو ..... حيث $r(0) = 0$

$(a) r = x^3 + 3x^2 + 12x$

$(b) r = x^3 - 3x^2 + 12x + 5$

$(c) r = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 12x$

$(d)\ r = x^3 - 3x^2 + 12x$

حل المعادلة التفاضلية : $(29)\ \frac{dy}{dx} = \cos x + \sin x\ ,\ y(\pi) = 1$

هي =

$(a) y = \sin x - \cos x$ $(b) y = y = \cos x - \sin x$

$(c) y = \sin x + \cos x$ $(d)\ y = \sin 2x - \cos x$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(30) $a = \cos t$ بفرض ان عجلة جسيم يتحرك على خط احداثي

فان موضع الجسيم $s(t)$ اذا كان $s(0) = 1\ , v(0) = -1$

هي =

$(a)\ \cos t - t$ $(b)\ -\cos t + t$

$(c)\ -\cos t - t$ $(d)\ -\cos t - t + 1$

(31) $y'' = 3x^2 + 6x$ حل المعادلة التفاضلية :

حيث $y(0) = 3\ , y'(0) = 1$

هي =

$(a) y = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x + 3$ $(b) y = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x + 3$

$(c) y = 2x^4 + 5x^3 + 2x + 7$ $(d) y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x + 3$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(32)\ \int \frac{3}{3x-5}dx =$$

$(a)\ 3\,ln|3x-5|+c$ $(b)\ ln|3x+5|+c$

$(c)\ ln|3x-5|+c$ $(d)\ 5\,ln|3x+5|+c$

$$(33)\ \int \frac{x}{x^2+1}dx =$$

$(a)\ 2\,ln|x^2+1|+c$ $(b)\ \frac{1}{2}ln|x^2-1|+c$

$(c)\ 2\,ln|x^3+1|+c$ $(d)\ \frac{1}{2}ln|x^2+1|+c$

$$(34)\ \int e^{x^2+ln(2x)}dx =$$

$(a)\ e^{2x}+c$ $(b)\ e^{x^2}+c$

$(c)\ \frac{1}{2}e^{2x}+c$ $(d)\ e^{2x^2}+c$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(35)\ \int \frac{e^{\cos x}}{\csc x}\,dx =$$

$(a)\ e^{cos^2 x} + c$ $(b) e^{\sin x} + c$

$(c)\ e^{\cos x} + c$ $(d) \frac{-1}{2}\ e^{\cos x} + c$

$$(36)\ \int \frac{e^{tan\, x}}{cos^2 x}\,dx =$$

$(a)\ e^{tan\, x} + c$ $(b)\ -e^{tan\, x} + c$

$(c)\ e^{cot\, x} + c$ $(d)\ e^{\sec x} + c$

$(37)\ y = e^x$ معادلة المماس على المنحني

والذي يمر بالنقطة $(0, 0) =$

$(a)\ y = 2ex$ $(b)\ y = e^x + 5$

$(c)\ y = ex^2 + c$ $(d)\ y = ex$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$(38)\ \int \frac{-1}{1+x^2}\,dx =$$

$(a)\ \csc^{-1} x + c$ $(b)\ -\tan^{-1} x + c$

$(c)\ -\cot^{-1} x + c$ (d) غير ذلك

(39) إذا علمت أن : $\int_{5a}^{3+2a} x^3 dx = 0$ ، فإن :

$= a$

1) 2 2) 5

3) 1 4) -1

(40) إذا علمت أن: $\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx = -10$ ، فإن:

$\int_2^1 2f(x)dx =$

1) -10 2) 5

3) 20 4) 40

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(41)إذا علمت أن:

$\int_7^5 f(x)dx = -3$ ، $2\int_3^5 f(x)dx = 14$ ،

فإن $\int_3^7 f(x)dx =$

1) 10
2) 7
3) 11
4) -7

(42) الحد الأدنى للمقدار $\int_0^1 \sqrt{x+8}dx$ يساوي:

1) 3
2) $-2\sqrt{2}$
3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
4) $2\sqrt{2}$

(43) القيمة المتوسطة للدالة : $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$

$x \in [-1,1]$ هي:

1) 0.125
2) 0.215
3) 0.512
4) 251

(44) المساحة المحصورة بين المنحنى $y = x^2 - 4x$ و

محور السينات حيث: $x \in [0,5]$

1) $\frac{3}{39}$
2) $\frac{39}{13}$
3) $\frac{39}{3}$
4) $\frac{13}{6}$

(45) قيمة $\int_0^3 \frac{3dx}{x+1}$ هي:

1) 5.1589 2) $3ln4-1$

3) $3ln4-3$ 4) $3(ln4-ln1)$

(46) بفرض أن h دالة متصلة ذات $\int_{-1}^{1} h(x)dx =$

$\int_{-1}^{3} h(x)dx = 6$ ، 4 ، فإن: $\int_{3}^{1} h(x)dx =$

1) -2 2) 2

3) $\frac{6}{4}$ 4) غير ذلك

(47) بفرض أن: $\int_{-3}^{0} g(t)dt = \sqrt{2}$ ، فإن:

$\int_{-3}^{0} \frac{g(t)}{\sqrt{2}} dt =$

1) $\sqrt{2}$ 2) 1

3) -1 4) -3

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(48) بفرض أن f , H دالتان متصلتان حيث:

$\int_7^0 f(x)dx =$ ب ، $\int_1^9 f(x)dx = -1$

$\int_7^0 h(x)dx = 4$ ، 5 ، فإن:

$I. \int_1^7 f(x)dx =$

1) -5 2) 5

3) -6 4) 9

$II. \int_9^7 \big(h(x) - f(x)\big)dx =$

1) 9 2) -9

3) 1 4) -1

(49) قيمة $\int_{-2}^{3} \frac{x}{|x|}dx =$

1) 5 2) 3

3) 1 4) 6

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

(50) قيمة التكامل $3 + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} tanx\, dx =$

1) 4.386 2) 14.386 3) 3.386

4) غير ذلك

(51) المساحة المحصورة بين محور السينات و المنحنى $y =$ e^{-x} من $x = -1$ إلى $x = 2$ هي :

1) 3.35 2) 12.35 3) 2.35

4) 2.53

(52) قيمة التكامل: $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx =$

1) $\frac{a^2}{2}\pi$ 2) $\frac{a}{4}\pi$

3) $\frac{2}{4a}\pi$ 4) $2a\pi$

(53) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \cdots$

1) $\frac{3}{2}$ 2) 3

3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

Mr. Hilal Hussein
هلال حسين

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \cdots \qquad (54)$$

1) 3 2) 2
3) 13 4) 12

(55) التعبير عن النهاية التالية بصورة تكامل محدد :
$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(C_i^2 - 3C_i)\,\Delta x$ ، حيث المنحنى على الفترة $[-7,5]$ هي :

1) $\int_{5}^{-7}(x^2 - 3x)dx$ 2) $\int_{-7}^{5}(x^2 + 3x)dx$
3) $\int_{-7}^{5}(x^2 - 3x)dx$ 4) غير ذلك

$$\sum_{i=3}^{n} i^2 = \qquad (56)$$

1) $\sum_{i=1}^{n}(i^2 + 3i)$ 2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{3} i^2$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{3} i^2$ 4) ليس أياً مما سبق

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(57) القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على $[1,4]$ هي

1) $\frac{14}{9}$
2) $\frac{14}{3}$
3) $\frac{14}{5}$
4) $\left(\frac{14}{9}\right)^2$

(58) قيمة $\int 3\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}$ هي :

- $\frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3+c$
- $\int(\tan^{-1}x)^3+c$
- $\frac{(1+x^2)^3}{3}+c$
- غير ذلك

(59) قيمة $\int(3-5x)^{10}\ dx$ هي :

- $-\frac{1}{30}(3-5x)^{11}+c$
- $\frac{3}{55}(3-5x)^{11}+c$
- $-\frac{3}{55}(3-5x)^{11}+c$
- $\frac{1}{55}(3-5x)^{11}+c$

(60) قيمة $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\ dx$ هي

- $2\sqrt{g(x)} + c$
- $-2\sqrt{g(x)} + c$
- $\frac{2}{\sqrt{g(x)}} + c$
- $\frac{1}{2}\sqrt{g(x)} + c$

(61) لأي دالة متصلة f تكون :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx =$$

- $\ln|f'(x)| + c$
- $-\ln|f(x)| + c$
- $\ln|f'(x)| + c$
- $\ln|f'(x)|^2 + c$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(62) قيمة $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx =$

- $1\cos x\sqrt{x}+c$
- $\cos\sqrt{x}+c$
- $\frac{1}{2}\cos\sqrt{x}+c$
- $-2\cos\sqrt{x}+c$

(63) قيمة $\int \frac{x^2}{x^3+5}\ dx$

- $3\ln|x^2+5|+c$
- $\frac{1}{3}\ln|x^3+5|+c$
- $-\frac{1}{3}\ln|x^3+5|+c$
- $\frac{1}{3}\ln|x^3-5|+c$

(64) قيمة $\int xcosx^2\ dx$

- $\frac{1}{2}sinx^2+c$
- $-\frac{1}{2}sinx^2+c$
- $2sinx^2+c$
- $\frac{1}{2}sin^2x+c$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(65) نقطة التماس للداله:

$$f(x) = \int_4^{x^2} ln(t^3 + 4)\ dt$$

عند $x = 2$ هي

- $(2, 4)$
- $(0, 2)$
- $(2, 0)$
- $(-2, 0)$

(66) قيمة التكامل: $\int e^{-2x}\ dx$ هي:

- $-\frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- $-\frac{1}{2}e^{2x} + c$
- $\frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- $-2e^{-2x} + c$

(67) الحد الاعلى للمقدار $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\ dx$ هي:

- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{2} + 1$
- $\sqrt{2} + 2$
- $\sqrt{2}$

- اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

(68) القيمة المتوسطة للداله $f(x) = \sin x$ على $[0, \pi]$ هي:

- ≈ 0.6366198
- ≈ 0.6566198
- ≈ 0.6766198
- ≈ 0.6866198

(69) التعبير: $\int_0^2 f(x)\ dx - \int_3^2 f(x)\ dx =$

- $\int_3^0 f(x)\ dx$
- $-\int_0^3 f(x)\ dx$
- $\int_0^3 f(x)\ dx$
- $-\int_2^3 f(x)\ dx$

(70) المساحة بين $y = \sin x$ و المحور x حيث $0 \leq x \leq \pi$

- 3
- 2
- $\frac{4}{5}$
- $|\pi|$

- اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(71) المساحة بين $y = \sin x$ و المحور x حيث $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

- 2.29293
- 1.59293
- 1.79293
- 1.29289

(72) قيمة $\sum_{i=1}^{20}(\frac{i}{20})^2$ هي:

- 8.175
- 7.175
- 7.571
- 7.157

(72) قيمة $\sum_{i=1}^{800}(2i+1)$ هي:

- 741600
- 541600
- 714600
- 641600

- اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(73) الداله $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاه $f'(x) = 3e^x + x \, , f(0) = 4$

- $f(x) = 3e^x + \frac{1}{2}x^2 + 2$
- $f(x) = 3e^x - \frac{1}{2}x^2 + 1$
- $f(x) = 3e^x + \frac{1}{2}x^2 + 1$
- $f(x) = 3e^x + x^2 + 1$

(74) قيمة $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{2} \frac{x^2+1}{x^2+7}$ تساوي:

- 0
- $\frac{x^2+1}{x^2+7}$
- $\frac{x^2+1}{x^2+7} + c$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2+7}\right)$

(75) قيمة $\frac{d}{dx}\int tan^5 x \; dx$ تساوي

- $tan^5 x + c$
- $sec^5 x$
- $tan^5 x$
- غير ذلك

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(76) قيمة $\int \left(\frac{d}{dx}\ f(x)\right) dx$

- $f'(x) + c$
- $f(x) + c$
- $f(x)$
- $f''(x) + c$

(77) قيمة $\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} (3t^2 + 5t)\, dt$ هي

- $\frac{dy}{dx} = 3(x^2)^2 + 5(x^2) = 3x^4 + 5x^2$
- $\frac{dy}{dx} = (3x^4 - 5x^2) \times 2x$
- $8x^5 + 10x^3$
- $8x^5 - 10x^3$

(78) $\int e^{5x}\ dx$

- $e^{5x} + c$
- $\frac{e^{5x}}{4} + c$
- $\frac{e^{5x}}{6} + c$
- $\frac{e^{5x}}{5} + c$

أوجد التكاملات التالية:-

(1) $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) dx$

(2) $\int \left(\frac{x + 4}{\sqrt{x}}\right) dx$

(3) $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

(4) $\int \frac{1}{1 + \cos 2x}\, dx$

(5) $\int \frac{1 - \cos x}{sin^2 x}\, dx$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(6) $\int e^{x^2+\ln x}\ dx$

(7) $\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x}\right) dx$

(8) $\int \left(\frac{e^{x^{-2}}}{x^3}\right) dx$

(9) $3 + 2\int_0^{\pi/3} \tan x\ dx$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(10) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ بالتعويض

(11) $\int sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$ بالتعويض

(12) $\int \frac{\sqrt{ln\,x}}{x}\,dx$ بالتعويض

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

(13) $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$ بالتعويض

(14) $\int \frac{10}{(x^2+1)\tan^{-1}(x)}\,dx$ بالتعويض

(15) $\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$ بالتعويض

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

(16) $\int \sin x\,(\cos x + 3)^{\frac{3}{4}}\,dx$ بالتعويض

(17) أستخدم قاعدة نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سيمبسون فى إيجاد $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$ ثم أذكر أيهما يعطي قيمة ادق للتكامل حيث $n = 4$

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

Mr. Hilal Hussein

التمرين 8:

لتكن $y = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$

أثبت أن الدالة y دالة ثابتة.

.....

.....

.....

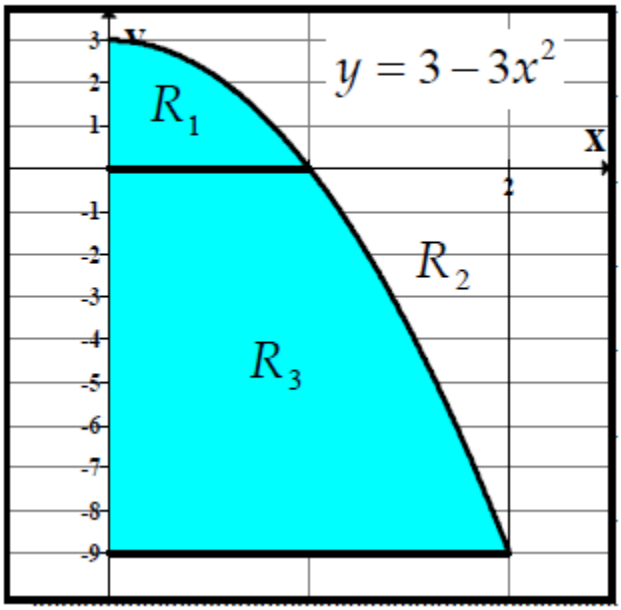
.....

.....

.....

.....

أوجد المساحة المظللة



R_1 .....

R_1 .....

R_3 .....

$A =$ مجموع المساحات

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين

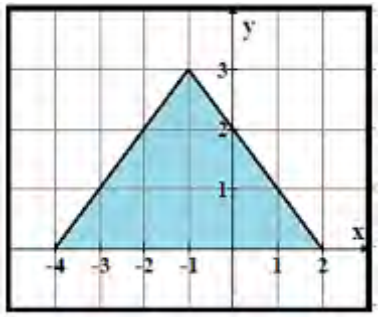
لتكن $\int_{-10}^{-7} f(x)dx$

أوجد $\int_{0}^{1} (x+1)\, f\left(x^2+2x-10\right)dx$

أوجد الحد الأدني والحد الأعلي للمقدار $\int_{-3}^{3}(1+x^2)\ dx$

أوجد القيمة المتوسطة للدالة فى الفترة المعطاه من دون إجراء عملية التكامل باللجوء لهندسة المنطقة بين المنحني ومحور السينات

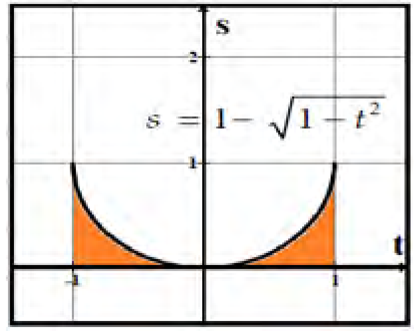
$$f(x)=\begin{cases} x+4 & ,-4\le x\le -1 \\ -x+4 & ,-1<x\le 2 \end{cases} \qquad [-4,2]$$



$$f(t)=\sin t \quad ,[0,2\pi]$$

اللهم لك الحمد كلة وإليك يرجع الأمر كلة , فاغفرلنا ذنبنا كلة وأصلح لنا شأننا كلة.

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين



$$f(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2} \;, [-1, 1]$$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

أ.هلال حسين أحمد

مدرسة توام النموذجية الخاصة

مع الإعتذار الشديد للسهو

Mr. Hilal Hussein
أ. هلال حسين